

EVALUATION : PAVAGES

Michel Brêchet

Peintres, géomètres, architectes... explorent de longue date les pavages du plan, sujet d'étude fascinant, à la frontière des mathématiques et de l'art. La recherche de figures inédites permettant de recouvrir une feuille de papier sans trou ni chevauchement fait émerger de nombreuses notions mathématiques : isométries et leurs invariants, polygones et leurs propriétés, lieux géométriques, distances, angles... Au cours d'une telle activité, globale et cumulative, les interactions entre les différents thèmes de la géométrie sont omniprésentes¹, contribuant de ce fait à la construction des savoirs de l'élève. La création de motifs périodiques originaux reçoit généralement un écho positif de la part des enseignants, d'autant plus qu'elle interpelle voire qu'elle passionne plus d'un élève.

Si les ressources permettant d'élaborer et de conduire des séquences d'apprentissage ne manquent pas (moyens d'enseignement, livres et revues, sites Internet...), les suggestions d'évaluation sont plutôt rares dans ce domaine. D'où l'épineuse question : comment évaluer le travail accompli par les élèves ? Dans cet article, nous présentons quelques pratiques envisageables :

- le premier problème, *Avec un seul type de pavé*, est accompagné de quelques remarques en vue de l'évaluation du travail des élèves, puis des solutions ;
- le deuxième, *Avec des polygones réguliers*, est plus ambitieux ; il est suivi de quelques commentaires et des solutions ;
- *Compléter un motif* est suivi d'une liste des objectifs qu'il permet d'évaluer ;

1 Voir la rubrique « Le coin des pavages », du même auteur, dans les numéros 207, 208, 209 et 210 de *Math-Ecole*.

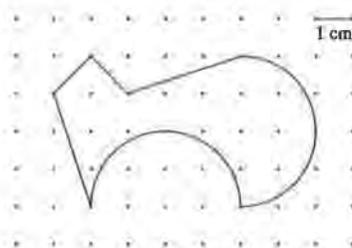
- *Identifier et décrire des mouvements* est une activité plus courte que les précédentes mais modulable, avec les objectifs correspondants ;
- *Trouver les pièces manquantes*, la dernière activité, est largement développée par une analyse des procédures de résolution, illustrées par des travaux d'élèves.

Il faut souligner ici, en introduction, que ces activités d'évaluation doivent être précédées d'une période de découverte, de recherche et d'appropriation, au cours de laquelle l'élève construit les savoirs « de base » sur les pavages. Ceux-ci doivent être en principe disponibles et la terminologie qui s'y rapporte déjà connue. Par exemple, lorsqu'on demande à l'élève qui vient de réaliser un pavage avec un certain type de pavé de trouver un nouveau motif avec le même pavé, il faut savoir qu'il y a toute une pratique qui permet de reconnaître les différents motifs et de les analyser. Il en va de même avec des expressions comme « configuration autour d'un sommet » et « paver le plan », qui s'appuient toutes sur des expériences antérieures de l'élève.

Avec un seul type de pavé

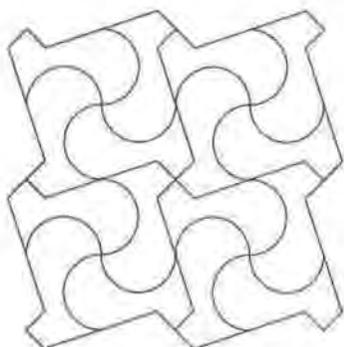
Reproduire 20 fois cette figure en vraie grandeur sur une feuille pointillée ou quadrillée, de manière à recouvrir avec régularité une partie de la feuille, sans trou ni chevauchement.

Même tâche, mais selon un autre motif répétitif.

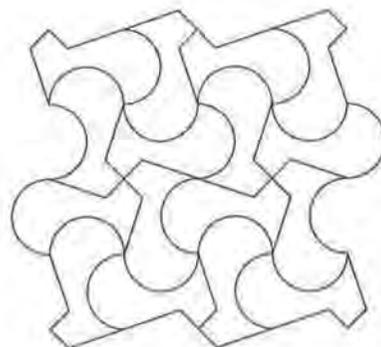


La rotation d'un quart de tour et la symétrie axiale interviennent ici dans la conception, la construction et l'analyse du pavage. Au besoin, en phase initiale, les élèves utiliseront du papier calque ou découperont la figure pour la déplacer physiquement, puis ils devront percevoir les caractéristiques du motif pour organiser et vérifier leurs constructions. Cette activité convient bien aux degrés 7 et 8. Sa première partie est habituellement bien réussie en peu de temps. La deuxième tâche

est plus délicate : elle nécessite plusieurs essais (avant de découvrir qu'on peut retourner les pavés) et en conséquence une plus longue durée. Divers critères d'évaluation peuvent être pris en compte : la régularité de chaque recouvrement, la précision des constructions, les tentatives effectuées (qui reflètent la rigueur de la démarche suivie), le respect des consignes... Pour information, voici les deux pavages :



Par rotations de 90°



Par rotations de 90° et par symétries axiales

Avec des polygones réguliers

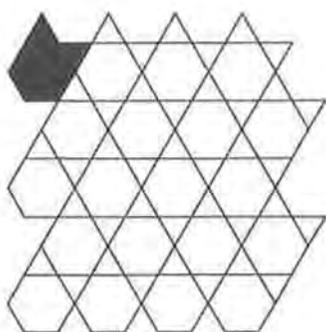
Paver le plan avec des polygones réguliers selon un motif répétitif, de telle sorte que la configuration autour de chaque sommet soit identique et qu'aucun sommet ne se trouve sur le côté d'un polygone².

Dans les conditions susmentionnées, 8 pavages sont réalisables. Ils nécessitent tour à tour :

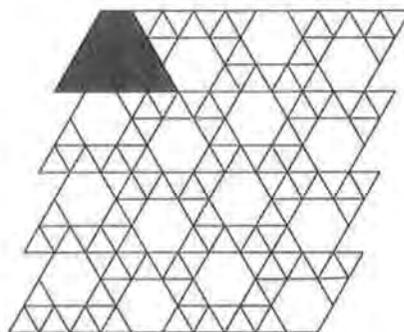
- des triangles et des hexagones (2 pavages possibles) ;
- des triangles et des carrés (2 pavages également) ;
- des triangles, des carrés et des hexagones ;
- des triangles et des dodécagones ;
- des carrés, des hexagones et des dodécagones ;
- des carrés et des octogones.

2 Pour plus d'informations sur ce sujet, voir l'article « Art islamique et mathématiques », de Floriane Pochon et de Luc-Olivier Pochon, dans le numéro 206 de *Math-Ecole*.

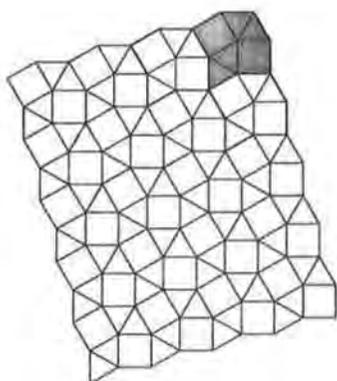
La construction des polygones utilisés – de 1,5 à 2 cm de côté pour pouvoir en représenter suffisamment – sera dévolue à l'élève ou se fera sur les instructions de l'enseignant, tout comme la recherche d'un duo ou d'un trio de polygones qui convient (le matériel Polydron est à ce stade d'un bon secours). L'activité est de longue haleine. Deux périodes ne sont généralement pas de trop pour la construction de 40 à 60 figures, selon le pavage choisi. Le recouvrement effectué, il est intéressant de se pencher sur le(s) rapport(s) des nombres de polygones de chaque type. Pour le(s) déterminer, il faut repérer une figure formée de la réunion de plusieurs polygones qui permet de paver le plan par une isométrie :



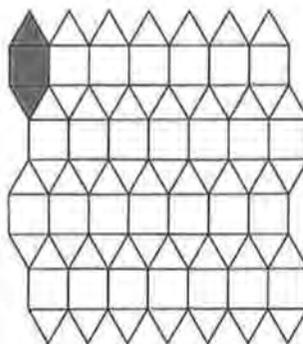
2 triangles – 1 hexagone



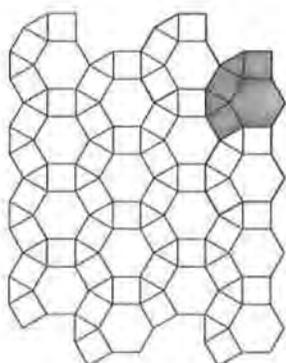
9 triangles – 1 hexagone



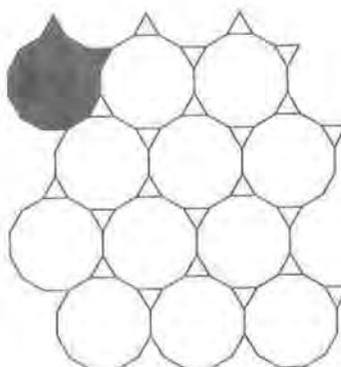
4 triangles – 2 carrés



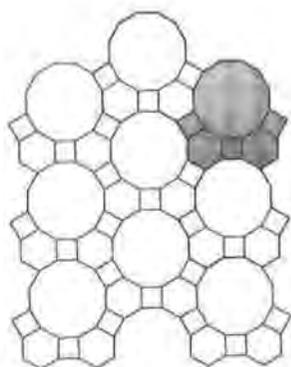
2 triangles – 1 carré



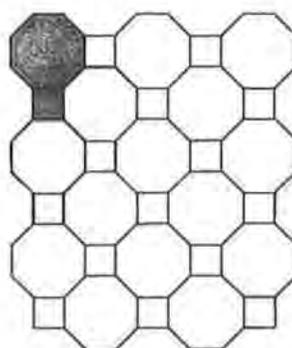
2 triangles – 3 carrés – 1 hexagone



2 triangles – 1 dodécagone



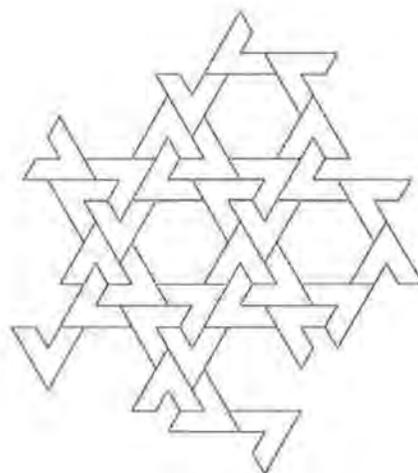
3 carrés – 2 hexagones – 1 dodécagone



1 carré – 1 octogone

Compléter un motif

Poursuivre la construction de ce motif arabe.



Cette activité est à la portée d'élèves de 13-14 ans. Si le long côté d'un élément constitutif en forme de V mesure 2 cm (1 cm sur la figure ci-dessus), il faut compter en général un temps de construction, sur une feuille blanche de format A4, d'une période environ.

La réalisation de chacune des deux activités précédentes (*Avec des polygones réguliers et Compléter un motif*) reflètera des compétences géométriques relevant de :

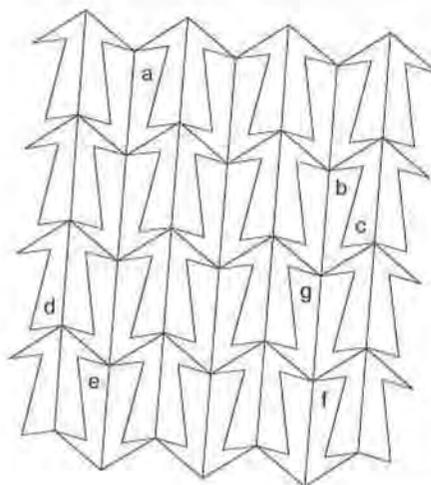
- l'observation : l'identification d'alignements de points ou de segments, de directions de droites supports et d'isométries facilitent grandement les tâches ; des procédures « pas à pas » conduisent, elles, à des figures déformées ;
- la construction : la manipulation adéquate des outils traditionnels de la géométrie (règle, équerre, compas, rapporteur) est une des clés d'un travail efficace.

La rigueur et la concentration devront également être au rendez-vous, tant les sources de distraction et d'égarment (lignes enchevêtrées, motifs semblables...) sont nombreuses.

Identifier et décrire des mouvements

Observer le pavage et décrire le plus précisément possible chacun des mouvements suivants :

- Il amène la figure a sur la figure b
- Il amène la figure b sur la figure c
- Il amène la figure a sur la figure d
- Il amène la figure e sur la figure f
- Il amène la figure f sur la figure g



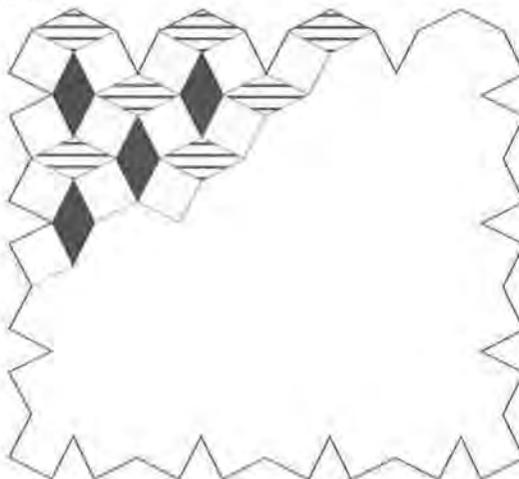
Plus courte et plus classique, cette activité est modulable à souhait. D'autres figures ou d'autres pavages feraient tout aussi bien l'affaire. Plusieurs critères d'évaluation sont susceptibles d'être pris en compte :

- la reconnaissance des isométries (ou composition d'isométries) ;
- la précision du langage utilisé pour les descriptions, qu'il s'agisse de symboles mathématiques ou de mots de la langue française ;
- la position des centres de symétrie (ou de rotation) et des axes de symétrie ;
- la direction, le sens et la longueur des vecteurs de translation.

Trouver les pièces manquantes

Pour terminer ce pavage, combien manque-t-il...

- a) ... de carrés gris ?
- b) ... de carrés blancs ?
- c) ... de losanges noirs ?
- d) ... de losanges hachurés ?



Nous nous attarderons plus longuement sur ce dernier problème et illustrerons plusieurs méthodes de résolution par des extraits de travaux d'élèves de huitième année. Durant 30 minutes, ils ont eu le loisir de compléter partiellement ce pavage (en esquissant quelques polygones ou en les construisant précisément), puis de repérer des régularités. Ce laps de temps a toutefois été trop court – et c'était bien là une des contraintes souhaitées – pour représenter fidèlement toutes les figures manquantes. Quelques élèves ont bien tenté de procéder de la sorte, mais dans la précipitation, les losanges sont devenus des carrés ou des cerfs-volants, les carrés ont été transformés en losanges ou tout simplement en quadrilatères quelconques... et finalement le caractère périodique du pavage a complètement disparu. La réussite de ce problème rapportait 8 points.

Dénombrement selon les lignes «horizontales»

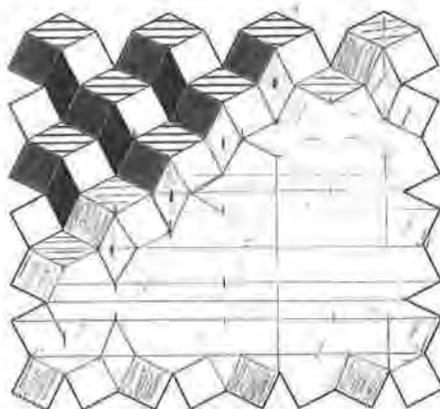
il y a 4 carrés gris à la 1^{ère} ligne et 3 à la 2^e ligne puis de nouveau 4... etc.
 $4+3+4+3+4+3+4 = \underline{25}$

c) Il y a 4 losanges noirs à la 1^{ère} ligne et 3 à la 2^e ligne puis de nouveau 4... etc.
 $4+3+4+3+4+3 = \underline{21}$

L'élève a procédé de la même manière pour compter les carrés blancs et les losanges hachurés. Il a ensuite soustrait le nombre de chaque figure déjà dessinées du nombre total de chacune des figures (28 carrés gris, 28 carrés blancs, 21 losanges noirs et 25 losanges hachurés). Il n'a représenté aucune figure, ce qui témoigne d'une étonnante capacité à prolonger mentalement les motifs existants. En réalité, chaque ligne comporte 4 carrés gris. L'élève a commis une seule petite erreur, lors du premier dénombrement. Il a obtenu 7 points.

Voici un autre travail s'inscrivant dans le même registre :

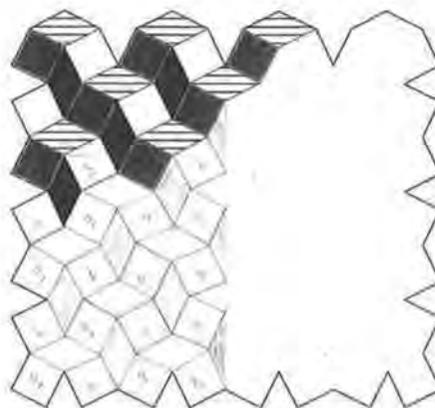
- a) ~~24~~ de carrés gris ? $7 \cdot 4 - 7 = 21$
 b) ~~26~~ de carrés blancs ? $7 \cdot 4 - 6 = 22$
 c) ~~17~~ de losanges noirs ? $3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 4 = 17$
 d) ~~18~~ de losanges hachurés ? $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 7 = 18$



La présence de quelques figures supplémentaires est habituellement rassurante et permet de ne pas s'égarer lors de la recherche du nombre de figures manquantes. A part une belle erreur de calcul ($7 \cdot 4 = 31$), tout est juste. (7 points)

Construction d'une partie du pavage

- 1) J'ai séparé la forme 2 parties égales
- 2) J'ai construit le pavage d'un côté
- 3) et j'ai compté ceux qui manquent



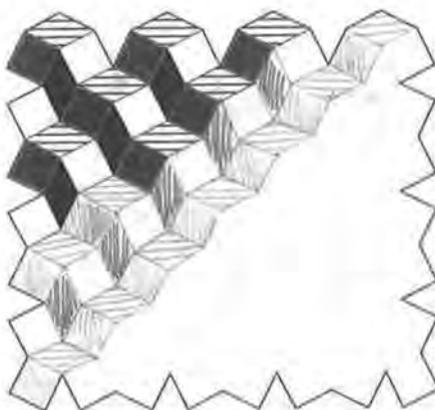
Séparée et complétée de la sorte, la figure facilite le dénombrement et mène sans encombre majeur à la solution du problème. Seule embûche : compter « une seule fois » les six losanges situés sur l'axe de symétrie. (8 points)

L'élève qui a réalisé le travail ci-dessous a pensé que la figure possédait un axe de symétrie oblique, ce qui n'est pas le cas. La réponse est ainsi erronée. 4 points ont été attribués à cette production, notamment pour la clarté de la démarche et pour le dessin partiel du pavage, qui a été réalisé avec succès.

J'ai dessiné la moitié de la figure, donc j'aurais deux fois plus de carré que la moitié dans la figure en entier

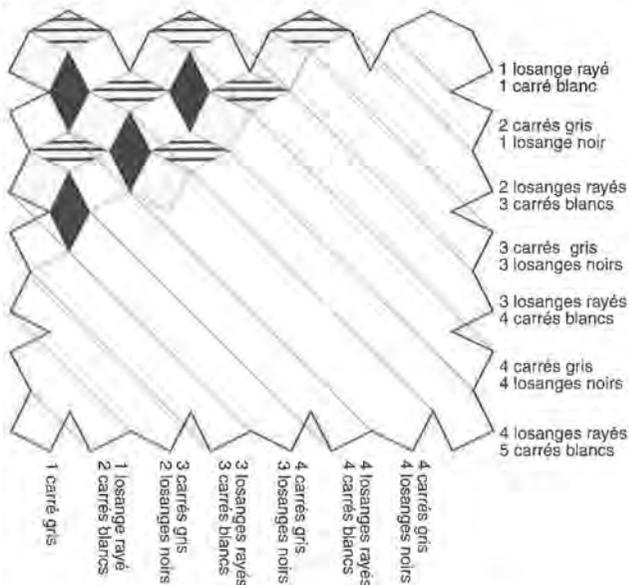
1ère moitié : 16 gris
12 blancs
9 noirs
16 hachurés

en entier : 32 gris
24 blancs
18 noirs
32 hachurés



Dénombrement selon des lignes «obliques»

Une autre méthode consiste à dénombrer les polygones selon des alignements obliques (en fac-similé ci-contre pour des raisons de transparence), sans les dessiner. On constate immédiatement le degré de rigueur nécessaire pour mener à bien une telle tâche. Une concentration sans faille est nécessaire du début à la fin. (8 points)



Ce dernier travail reflète, quant à lui, un examen du problème dans le registre numérique.

a) } Si dans la première ligne il y en a 1 dans la deuxième ligne il y
 c) } aura 3 et ainsi de suite (+2). 7 est la plus grande ligne alors
 d) } on soustrait de 2.

1
3
5
7
2
4
6
8
3
5
7
9

b) même chose que (a;c;d) sauf qu'on commence avec 2 et le plus grand ligne est de 8.

L'élève a tout d'abord postulé que, d'une ligne oblique à l'autre, les nombres de carrés gris (question a), de losanges noirs (c) et de losanges hachurés (d) augmentaient régulièrement (1 ; 3 ; 5 ; 7), puis que cette suite devenait décroissante, toujours selon la raison «2» (5 ; 3 ; 1). Malheureusement pour lui, cette analyse s'applique uniquement aux losanges hachurés. La situation n'est donc pas aussi simple que cela. Les suites correctes sont :

- pour les carrés gris : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 6 ; 4 ; 2
- pour les losanges noirs : 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 4 ; 2

S'agissant du dénombrement des carrés blancs (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 6 ; 4 ; 2 selon l'élève), l'erreur est du même type. En fait, la suite des carrés blancs est identique à celle des carrés gris, mais en ordre inverse (2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 5 ; 3 ; 1). 4 points ont été attribués pour ce traitement de la situation dans le domaine numérique.