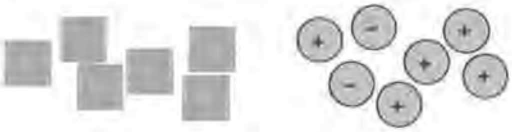
« COIN MATHS »

AVEC SIX CHIFFRES ET DES SIGNES D'OPÉRATION

En utilisant à chaque fois les six jetons avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et un ou plusieurs signes d'addition ou de soustraction, tu peux représenter beaucoup de nombres.



A. Dans ce premier exemple, avec deux nombres de trois chiffres et une opération, on obtient 858. Mais on aurait pu obtenir un nombre encore plus grand, ou un nombre plus petit, ...

Toujours avec deux nombres de trois chiffres et une opération, essaye d'obtenir...

1. **... le plus grand nombre possible;**
2. **... le plus petit nombre naturel possible;**
3. **... un nombre de trois mêmes chiffres, comme 111, 222, 333, 444, ...;**
4. **... 100 ou le nombre le plus proche possible de 100.**

B. Dans ce deuxième exemple, avec trois nombres de deux chiffres et deux opérations, on obtient 96. Mais on aurait pu obtenir un nombre encore plus grand, ou encore un nombre plus proche de 100...

Toujours avec trois nombres de deux chiffres et deux opérations, essaye d'obtenir ...

5. **... le plus grand nombre possible;**
6. **... le plus petit nombre naturel possible;**
7. **... un nombre de trois mêmes chiffres comme 111, 222, 333, 444, ...**
8. **... le nombre le plus proche possible de 100.**

C. Dans ce troisième exemple, on a encore une autre manière de placer les chiffres. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand.

Toujours avec les six chiffres, placés comme tu le veux, et au moins un signe d'addition ou de soustraction, essaie d'obtenir ....

9. **... le plus grand nombre possible;**
10. **... le plus petit nombre naturel possible;**
11. **... un nombre de quatre chiffres impairs qui se suivent comme 1357 ou 3579;**
12. **... le nombre le plus proche possible de 100 .**

L'origine du problème

Un problème du 10e Rallye mathématique transalpin, destiné aux classes de 4e et 5e primaire, nous avait laissé un sentiment d'insatisfaction en raison de ses difficultés sous-estimées[1].. Il nous a fourni cependant l'idée des activités précédentes, à proposer en « coin mathématique », avec du matériel facile à préparer. Voici son énoncé et l'analyse a priori qui l'accompagnait:

1 Voir *Math-Ecole* 206, mars 2002, p. 20

Le plus grand produit

Claire a six petits cartons : Elle forme deux nombres avec les cartons qui ont des chiffres. Entre ces deux nombres, elle place le carton avec le signe de multiplication.

Comment Claire doit-elle disposer ses cartons pour obtenir le produit le plus grand possible ?

Écrivez tous vos calculs.

« - Remarquer qu'on obtient les produits les plus grands si l'un des facteurs commence par le chiffre 5 et l'autre par le chiffre 4.
- *Réaliser que deux types de produits sont possibles :*
  Les produits où l'un des facteurs est un nombre de trois chiffres et l'autre un nombre de deux chiffres, puis les produits où l'un des facteurs est un nombre de quatre chiffres et l'autre un nombre d'un seul chiffre.
- *Calculer les produits susceptibles de fournir la solution, notamment :*
  532 x 41 ; 531 x 42 ; 521 x 43 ;
  432 x 51 ; 431 x 52 ; 421 x 53
  puis 5 x 4321, 4 x 5321 et en déduire que 431 x 52 = 22412 est la solution demandée. »

Si les élèves ont bien trouvé plusieurs produits supérieurs à 20000 (à la calculatrice), plus de la moitié ne sont pas arrivés au plus grand. Plusieurs groupes ont même fait de nombreuses tentatives avec des facteurs dont les premiers chiffres étaient différents de 4 ou de 5. Il n'est en effet pas si évident d'anticiper les résultats des multiplications de nombres de plusieurs chiffres et, lorsqu'on en est capable, il est encore plus délicat d'imaginer la décomposition des produits selon la valeur positionnelle des chiffres de chaque facteur. Par exemple, pour comparer mentalement 421 x 53 et 431 x 52, il faut savoir que, après avoir éliminé 400 x 50, 20 x 3 (ou 2 x 30) et 50 x 1 qui figurent dans l'un comme dans l'autre des produits, il faut examiner les valeurs respectives de 400 x 3 et 400 x 2, 20 x 50 et 30 x 50, 1 x 3 et 1 x 2 pour estimer que le premier vaut environ 100 de moins que le second.

En revanche, si l'on passe du champ de la multiplication à celui de l'addition, l'anticipation devient possible sans tomber dans l'évidence et dans la banalité, et des élèves plus jeunes, de 3e, voire de 2e si on réduit la grandeur des nombres, peuvent développer des raisonnements intéressants.

Les questions proposées dans l'activité précédente : Avec six chiffres et des signes d'opération mettent en jeu les propriétés de l'addition et de la soustraction comme la commutativité et l'associativité, mais elles vont surtout développer la perception de la valeur positionnelle des chiffres d'un nombre : un « 5 » vaut 1 de plus qu'un « 4 » dans les unités, mais 10 de plus dans les dizaines et 100 de plus dans le centaines ...

Le matériel doit faciliter la formation des nombres en évitant de les écrire et de les effacer continuellement, lorsqu'ils ne servent encore que de support visuel. La calculatrice interviendra pour les vérifications successives, mais l'essentiel de la réflexion se concentrera sur la répartition des chiffres au sein des termes, pour les sommes comme pour les différences.

Les élèves pourront conduire leurs essais de manière autonome, individuellement ou par groupes de deux ou trois, afin de susciter la confrontation et l'intérêt pour les améliorations successives des résultats obtenus. Il est évidemment indispensable de faire noter toutes les tentatives fructueuses, afin de pouvoir constater et mesurer la progression pour chaque question.

Commentaires généraux

a) Les dispositions prévues des nombres sont « en ligne » et non « en colonne » afin de ne pas inciter l'élève à entrer dans les algorithmes de calcul sans avoir réfléchi à la position des chiffres dans les nombres. Il est aussi important de faire comprendre qu'une écriture additive ne représente pas seulement un « calcul à effectuer » mais aussi le nombre qui sera le résultat de l'opération, sous une forme reflétant sa décomposition en plusieurs termes.

b) Pour éviter un emploi du « 6 » en « 9 » on peut souligner le chiffre « 6 ». Mais on peut aussi profiter de ce degré supplémentaire de liberté pour composer d'autres nombres. (Les développements qui suivent sont rédigés dans une acception restrictive du chiffre « 6 » au « six » de l'écriture littérale.)

c) Le nombre des chiffres à disposition est une variable de cette activité. On peut se contenter des chiffres de 1 à 4 pour des élèves plus jeunes ou en difficultés, et aller au-delà pour des élèves plus grands.

d) D'innombrables variantes sont faciles à créer, par les élèves eux-mêmes également.

Réponses et commentaires particuliers

1) Il y a plusieurs dispositions possibles (ou couples de nombres de trois chiffres) représentant la plus grande somme, il faut que le 5 et le 6 soient placés dans les centaines, le 3 et le 4 dans les dizaines, le 1 et le 2 dans les unités, pour obtenir 1173.

2) Il faut ici penser à la soustraction. Le plus petit nombre, 47, est obtenu par la différence 412 – 365, mais 512 - 463 = 314 – 265 = 49 ne sont pas loin. Avec l'addition, le minimum serait 381.

3) Par une addition, il faut que la somme des centaines, des dizaines et des unités soit la même, inférieure à 10 pour éviter les retenues ; c'est ainsi possible d'obtenir 777, par exemple avec 123 + 654. Par une soustraction, on obtient 111 avec 246 – 135 par exemple, ou encore 333 avec 654 – 321. C'est ici la différence entre les chiffres des centaines, des dizaines et des unités qui doit être constante.

4) Les nombres les plus proches de 100 sont forcément le résultat d'une soustraction. 95 = 526 - 431 et 105 = 531 – 426 sont les meilleures approximations. Il faut ici que les chiffres des centaines soient les plus proches possibles (un de différence) que ceux des dizaines le soient également, et que ceux des unités soient les plus éloignés possibles (5 de différence). Si on ne respecte pas cette dernière condition, on obtient des approximations moins bonnes, par exemple 107 = 361 – 254, 93 = 354 – 261, 91 = 452 – 361.

5) La plus grande somme de trois nombres de deux chiffres est 156, avec 6, 5, 4 dans les dizaines et 3, 2, 1 dans les unités, comme 63 + 51 + 42

6) Le plus petit nombre est 1 = 65 – 43 – 21. Il est impossible d'atteindre 0[2]

7) On peut obtenir 111 par une somme comme 65 + 34 + 12 en formant dix dizaines (6 + 3 + 1 ou 5 + 4 + 1 ou 5 + 3 + 2), les chiffres restants constituant 11 unités.

8) On arrive à 102 par des additions, comme 65 + 24 + 23 (9 dizaines et 12 unités), mais avec une soustraction, on peut atteindre 101, comme 63 + 52 – 14.

9) Pour obtenir la plus grande somme, ce n'est pas le nombre de termes qui compte, mais le nombre de chiffres dont peut se composer l'un d'eux. Il faut penser à additionner un nombre de 5

2 Voir note suivante

chiffres et un autre, d'un seul chiffre : 65432 + 1 = 65433

10) Il n'est pas possible d'obtenir 0, malgré la liberté du nombre de chiffres. On se retrouve dans le cas de la question 6, avec un minimum de 1.
11) On arrive à atteindre le premier : 1357 = 1364 – 5 – 2, on ne peut que s'approcher du second à 3 unités près, par exemple 3564 + 12 = 3576.
12) Enfin, on arrive à atteindre 100, à condition d'insérer une soustraction de 1 dans les opérations[3]. Par exemple : 100 = 65 + 34 + 2 – 1.

Conclusion

Les réponses à ces 12 questions ne sont pas évidentes, même pour un adulte. Il faut faire beaucoup d'essais puis les organiser, pour constater que toute l'activité repose sur la valeur positionnelle des chiffres à disposition. Il paraît nécessaire, pour les élèves, de prévoir une gestion stimulante de l'activité, avec affichage progressif des résultats les meilleurs pour chacune des questions sous forme de « journal » de la recherche. Des mises en commun permettront aussi les bilans, les renforcements et les institutionnalisations nécessaires.

3 Dans l'activité *Le pur cent* introduite en Suisse romande par l'ouvrage « Sur les pistes de la mathématique » (SRP 25, 1983 ou SRP 40, 1991) puis reprise dans les moyens d'enseignement romands « Mathématiques 4P », les élèves doivent essayer d'obtenir 100 comme somme de nombres formés des dix chiffres de 0 à 9. Les documents du maître n'indiquent cependant pas que c'est impossible, ni pourquoi. Pour le comprendre, il faut déjà calculer la somme des « chiffres » considérés comme nombres d'un seul chiffre. Dans le cas de notre activité : *Avec des chiffres et des signes d'opération*, cette somme est 21, dans le cas du *Pur cent*, la somme est 45. Lorsqu'on déplace un chiffre, de la position des unités à celle des dizaines, on augmente la somme d'un multiple de 9. (Par exemple si on remplace 7 unités par 7 dizaines, on augmente la somme de 7x10 – 7x1 = 7x(10 – 1) = 7 x 9 = 63) Si un chiffre passe des dizaines aux centaines, l'augmentation est un multiple de 90, s'il passe des unités aux centaines, on augmente d'un multiple de 99, etc. Dans le cas des questions 4, 8, et 12 comme pour *Le pur cent* ci-dessus, les différences entre 100 et 21 ou 100 et 45 ne sont pas des multiples de 9 et il n'est donc pas possible d'atteindre ces nombres par des additions. Lorsqu'on introduit les soustractions, les « chiffres » soustraits sont comptés négativement dans la « somme » initiale, ce qui permet d'arriver au but comme dans la question 12 ci-dessus où il n'y a pas de contrainte sur le nombre de termes et leur grandeur.

Les six carrés, le retour !

Réponse à la question de la rubrique précédente (« Coin Maths », Math-Ecole 213, p. 53)

Nous avons reçu de M. Simonet la réponse suivante :

J'ai donné cette fiche à 6 élèves de ma classe d'accueil. Ils ont l'âge d'être en 3e, en 4e et en 5e années, mais ils n'en ont pas toujours le niveau de compétence. N'étant pas francophones, la première difficulté qu'ils ont rencontrée a été de comprendre l'énoncé. Deux élèves ont rapidement trouvé une première solution respectant les contraintes, mais avec un nombre non optimal de carrés. Un des garçons avait rempli la grille, mais il n'avait pas utilisé chaque carré au moins une fois. Une mise en commun après ces 5 premières minutes de travail a alors permis aux 4 autres enfants de s'approprier la tâche. Tous ont cherché de manière assidue pendant 60 minutes. J'ai fait quelques relances en annonçant régulièrement le nombre record de carrés trouvés par l'un ou l'autre des enfants. Quatre des six enfants ont trouvé une solution avec 16 carrés[4].
Nous avons décrété qu'on ne pouvait pas faire mieux et avons arrêté la recherche. Ils

4 Il s'agit en effet de solutions optimales permettant de recouvrir le grand carré de côté 15,
- 2 carrés de 6x6, 2 carrés de 5x5, 3 carrés de 4x4, 5 carrés de 3x3, 2 carrés de 2x2, 2 carrés de 1x1
- 2 carrés de 6x6, 3 carrés de 5x5, 3 carrés de 4x4, 2 carrés de 3x3, 2 carrés de 2x2, 4 carrés de 1x1

n'avaient pas l'air convaincu et certains d'entre eux voulaient encore essayer. Ceux qui ont trouvé une solution utilisant moins de 16 carrés n'avaient pas respecté la contrainte « utiliser chaque carré au moins une fois ».
Je leur ai ensuite demandé ce qu'ils avaient appris en faisant cette activité. Une élève (5e année) m'a répondu : « à compter ». Je lui ai demandé si elle savait mieux compter maintenant qu'avant de faire ce travail. Elle a ri en secouant négativement la tête ! Une autre élève a dit que ça apprenait « à penser ». Les autres étaient incapables de répondre à cette question.
J'avais cherché la solution avant de proposer cette fiche à mes élèves. J'avais aussi trouvé 16 carrés comme réponse optimale. Je suis intimement persuadée qu'il est impossible de faire avec moins, mais je suis incapable de le prouver !!! Comment les élèves le pourraient-ils alors ?
Je me suis également interrogée sur les objectifs. « Le retour des 6 carrés » se trouve dans le module 7B (« Des problèmes pour mesurer : connaître et utiliser des unités conventionnelles) et est le prolongement de l'activité « Les 6 carrés ». Dans le descriptif de cette dernière, sous « tâche », on peut lire : « Comparer les aires de diverses surfaces à l'aide de mesurants carrés donnés ». J'ai observé mes élèves. Ils ont mesuré le(s) côté(s) de chaque carré pour pouvoir le reporter dans la grille (une élève a dessiné des rectangles à plusieurs reprises. Quand je le lui ai fait remarquer, elle a pris conscience qu'elle ne mesurait/vérifiait qu'un côté). Aucun d'eux n'a calculé l'aire de chaque carré et encore moins l'aire totale. Certains ne voyaient même pas qu'ils pouvaient remplacer les 4 carrés de 2x2 qu'ils avaient disposés en carré, par un carré de 4x4...

« Le retour des 6 carrés »
- *une situation-problème ? (visiblement non puisqu'on le propose en prolongement d'une autre activité)*
- *un problème de réinvestissement des connaissances ? (lesquelles ?)*
- *un problème ouvert ?*

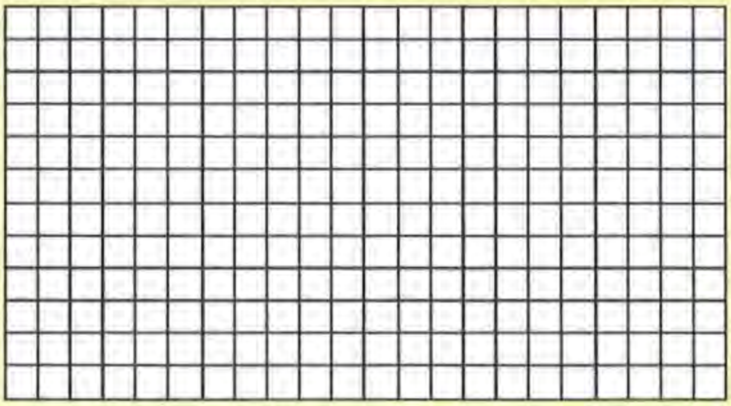
Tous les enseignants ne sont pas des didacticiens (à l'inverse non plus !). Cette activité illustre une nouvelle fois la difficulté, pour les maîtres, de savoir où ils vont et ce qu'ils font avec leurs élèves...

En réponse aux dernières interrogations, nous dirions que « Le retour des six carrés » est une activité au cours de laquelle les élèves, et les adultes qui l'ont essayée, ont assurément l'occasion de réinvestir des connaissances mathématiques. La description ci-dessus le dit clairement : se rendre compte que quatre carrés de 2x2 sont équivalents à un carré de 4x4, respecter les contraintes du problème, distinction carré/rectangle, ...
Du point de vue des élèves plus âgés, qui n'aiment plus trop dessiner et découper et qui passent systématiquement dans le registre numérique, on trouvera encore le passage par les mesures d'aires : comment obtenir 225 (15 x 15) sous forme de somme avec un minimum de termes 36, 25, 16, 9, 4 et 1.
L'élève (ou l'adulte) qui effectue la somme $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$ pour observer la condition « au moins une pièce de chaque sorte », qui calcule ensuite qu'il faudra encore compléter une aire de $225 - 91 = 134$ avec d'autres pièces, et qui commence par placer le plus de carrés 6x6, puis de 5x5, de 4x4 afin de minimiser le nombre total de carrés, arrive alors à la décomposition de 134 en 5 carrés : $134 = 3x36 + 1x25 + 1x1$. S'il oublie le registre géométrique, il dira alors que la solution optimale s'obtient en 11 carrés (en comptant les 6 premiers carrés dont la somme est 91). S'il pense à vérifier, il constatera que cette solution est irréalisable. Il aura alors appris quelque chose de très important en mathématiques : la distinction entre le « nécessaire » et le « nécessaire et suffisant » qu'il faut absolument prendre en compte lorsqu'on veut résoudre un problème de géométrie dans le registre purement numérique.

Un bel exemple nous a été donné par le problème suivant, tiré de la première épreuve du 8e RMT, destiné aux classes de 3e et de 4e primaire :

TAPIS CARRES

Grand-mère n'aime plus le carrelage de son salon, qui est fait ainsi :



Elle décide de le recouvrir entièrement et exactement par des tapis carrés (sans laisser d'espaces vides et sans que deux parties de tapis soient l'une sur l'autre).

De combien de tapis carrés aura-t-elle besoin si elle veut en utiliser le moins possible? Dessinez les tapis de Grand-mère.

L'analyse de la tâche de ce problème (relue et vérifiée par une bonne dizaine d'adultes) prévoyait une solution en 7 tapis :

Comprendre que les tapis ne seront pas tous de mêmes dimensions, procéder par conséquent du plus grand (12 x 12) au plus petit

- *Disposer un tapis de dimensions 12 x 12*
- *Constater qu'il reste un rectangle de 12 x 10*
- *Disposer un tapis de 10 x 10*
- *Constater qu'il reste un rectangle de 2 x 10 et disposer cinq carrés de 2 x 2*

L'algorithme de résolution proposé est typiquement « adulte » : on commence par les plus grands et on procède systématiquement ainsi, dans le registre numérique. De nombreux élèves ont trouvé cette solution, par des dessins ou des découpages, et, ô surprise, certains ont découvert une solution en 6 tapis. 1 de 12x12 comme précédemment, 2 de 6x6 et 3 de 4x4 !!

En conclusion, nous ne chercherions pas à classer « Le retour des six carrés » dans une catégorie ou une autre d'activités. Nous constatons simplement que c'est un problème, qu'on peut qualifier de « bon » ou de « substantiel » au regard de ses contenus mathématiques. Pour autant que le maître sache exploiter ses potentialités pour ses élèves, par des choix appropriés de gestion de la classe, par des mises en commun, par l'organisation de défis, par des aides intermédiaires qui correspondent à de courtes phases d'institutionnalisation... comme le montre si bien l'expérience vécue par les six élèves de M. Simonet.

Et au niveau mathématique, il faut admettre que certaines « démonstrations » ne se font pas par une succession de déductions logiques, mais par un inventaire patient et exhaustif de toutes les possibilités.