ÉDITORIAL

UNE ŒUVRE HUMAINE

Michel Brêchet

Les mathématiques sont une des plus belles créations de l'esprit humain. Pourquoi ne pas le souligner à maintes reprises lors de notre enseignement, afin d'éviter que les élèves pensent qu'elles constituent une collection de formules et de règles préexistantes à l'apparition de l'homme ? La référence aux mathématiciens qui ont conçu ce que les livres exposent et ce que les enseignants ou les parents transmettent donne une coloration culturelle et historique aux leçons, dont les contenus paraissent parfois intemporels et coupés de leurs racines. Déambulant ici dans une forêt inextricable de signes ou de figures, soumis à une syntaxe stricte, confrontés constamment à un monument de rigueur, certains élèves ont tôt fait de considérer les mathématiques comme froides, austères, venues de nulle part et à jamais figées. De l'exposé de la vie des inventeurs, des cheminements qu'ils ont suivis et des obstacles qu'ils ont dû surmonter se dégage souvent un peu de chaleur humaine, somme toute bienvenue. Intégrer à petites doses des éléments d'histoire des sciences durant les cours contribue en outre à valoriser l'importance du développement de la démarche critique (par la mobilisation de méthodes et de connaissances adéquates ou la vérification d'hypothèses), de la communication (par la pratique du débat scientifique, la formulation de questions, le travail de groupe), des types de raisonnement (inductif, heuristique, déductif, analogique...), de la pensée créatrice (en imaginant des explications et des expérimentations), de la modélisation enfin (en reformulant des questions dans un environnement épuré et mathématisé). Le passé des sciences recèle en effet de multiples exemples montrant l'importance de ces compétences pour progresser dans les apprentissages.

Tous les thèmes d'étude abordés durant la formation se prêtent bien à la mise en exergue de la lente édification des mathématiques. En voici quelques-uns – en lien avec le programme des dernières années de la scolarité obligatoire –, accompagnés de deux ou trois moments clés de leur évolution.

L'algèbre tout d'abord. Les expressions algébriques telles que nous les écrivons aujourd'hui sont l'aboutissement d'un très long processus d'abstraction, qui trouve ses origines en Mésopotamie et en Egypte. Elles constituent une brillante manifestation de la pensée rationnelle. Pour énoncer et résoudre des problèmes du premier et du deuxième degré à une ou deux inconnues, les Babyloniens (dès 1800 avant J.-C.) s'appuyaient sur un langage géométrique, exempt de symboles mathématiques : l'inconnue était appelée *le côté* et sa puissance deux était *le carré*. Ainsi l'équation $x^2 + x = 3/4$ se traduisaient à cette époque par *La surface du carré ajoutée au côté égale 45'* (en base soixante, 45' = 45/60 = 3/4). Environ trois millénaires plus tard, le mathématicien arabe Mohammed Al-Khwarizmi (788-850) énonce les règles d'équivalence conduisant à la solution des équations. Dans un livre consacré à des problèmes pratiques, il décrit, toujours avec des mots, les deux opérations fondamentales *al-jabr*, qui consiste à éliminer le(s) terme(s) à soustraire dans un membre par addition de termes égaux dans chaque membre, et *al-mukabala*, qui revient à regrouper les termes semblables dans les deux membres. Quant à l'utilisation des lettres et des signes opératoires, elle est relativement récente. Diophante (III^e siècle après J.-C.) fit les premiers pas avec l'arithme. Ils furent suivis par de nombreux autres pour aboutir à la notation actuelle, mise en place par Descartes au XVII^e siècle. La Coss des écoles allemandes et italiennes et les notations comme *4A cubus in 6A quadratus*

($4x^3 \cdot 6x^2$) de François Viète (1540-1603) en sont les témoins. Voilà de beaux exemples pour montrer les détours sinueux et tortueux suivis par la pensée pour arriver au formalisme que l'on connaît et aux méthodes que l'on utilise, comme si elles avaient toujours existé. Brièvement développés et enrichis, ils illustreront aussi l'efficacité du langage algébrique – en comparaison aux anciens procédés rhétoriques – pour traduire et résoudre des problèmes, de par la liberté de manœuvre mentale qu'il offre.

Autre sujet de prédilection pour réaffirmer que les mathématiques sont une construction de l'esprit humain : la perspective. Son élaboration est due notamment aux artistes du début du XVe siècle (Brunelleschi, Alberti). Il s'agit d'une des étapes importantes de l'histoire de la pensée scientifique. L'enjeu de la perspective est de construire sur une surface plane l'image d'un objet tridimensionnel. Nous sommes capables d'apprécier le relief, mais comment s'y prendre pour projeter sur un tableau l'image perçue, pour donner l'illusion de la profondeur ? Avant que n'apparaisse cette géométrisation, les dessinateurs et les artistes ne tenaient pas compte des relations spatiales. Les peintures reflétaient davantage la hiérarchie que les proportions et valorisaient fréquemment le sujet principal, quitte à déformer les autres éléments représentés. De la perspective centrale, qui trouve sa source dans l'expérience visuelle, sont issues les perspectives cavalière et isométrique, enseignées à l'école, qui reposent sur des conventions. De nombreux tableaux illustrent les progrès réalisés dans ce domaine.
Les analyser avec les élèves, c'est mettre en exergue le cheminement de leurs auteurs, les impasses qu'ils ont rencontrées, les techniques qu'ils ont développées pour mettre au point un système de représentation spatiale fiable, un outil au service de l'humanité.
C'est aussi relever la complémentarité des travaux accomplis par les artistes et les géomètres, et donc faire un pas dans la direction de l'interdisciplinarité.

Dernier thème abordé ici, les nombres, dont le bestiaire s'est enrichi au fil des siècles. Dans la Grèce antique, les seuls nombres identifiés comme tels étaient les entiers positifs. C'est aux Pythagoriciens (Ve siècle avant J.-C.) que l'on doit la découverte des rapports irrationnels. Auparavant, on pensait que, deux segments m et p étant donnés, il en existait toujours un troisième – si petit soit-il – qui aille un certain nombre de fois dans le premier et un certain nombre de fois dans le deuxième, et donc que le rapport m/p était toujours rationnel, c'est-à-dire quotient de deux nombres entiers. Or, surprise, tel n'est pas le cas. Par exemple, le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté (écrit aujourd'hui $\sqrt{2}$) est irrationnel. π, symbole adopté par Euler en 1737 et dont Archimède avait calculé une approximation, était de son côté considéré par les mathématiciens grecs comme le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, et non comme un nombre. Son caractère irrationnel a été démontré en 1767 seulement. Un nombre irrationnel est une espèce bizarre, car la suite de ses décimales est infinie et ne montre aucune répétition. Il n'est pas étonnant qu'il soit difficilement saisissable par la pensée, pour les élèves comme pour les adultes. La porte du royaume des nombres est également restée fermée aux quantités négatives durant très longtemps. Carnot (1753-1823) écrivait : «Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible.» Il a fallu attendre la deuxième moitié du XIXe siècle pour qu'une structure algébrique incluant les négatifs voie le jour, grâce aux philosophes allemands notamment. On entrevoit à la lueur de ces quelques exemples – très brièvement résumés – que ce thème est lui aussi propice à l'exposé de faits historiques, mais également au questionnement quant à la nature des nombres et à leur écriture. L'étude de ce dernier aspect – la construction de signes et l'élaboration de syntaxes – révèle par ailleurs toute l'ingéniosité et l'ardeur des civilisations passées pour désigner des quantités. Les numérations babylonienne, chinoise, maya, romaine... sont autant de tentatives dans la mise au point d'un système efficace, dépourvu de toute ambiguïté.

Relater la mesure de la hauteur de la pyramide de Khéops par Thalès lors de l'étude des figures semblables, citer des savoirs des peuples de l'Antiquité à propos du triangle rectangle, parler de la quadrature du cercle (réaliser entre autres quelques constructions approchées), raconter l'aventure du système métrique ou le passé du théorème de Fermat : les occasions ne manquent pas pour illustrer la marche de la pensée des mathématiciens, les voies sans issue qui les ont attirés, leurs idées géniales et les échanges menés entre eux. A l'écoute de ces faits, peut-être les élèves auraient-ils une meilleure image d'eux-mêmes en mathématiques, et moins de crainte à l'égard de cette discipline.

Dans ce numéro [ndlr]

La rédaction de *Math-Ecole* cherche à maintenir un équilibre entre pratique et théorie ou entre des articles pouvant être exploités pour la classe et des réflexions plus générales.

Les rubriques *Coin Maths* et *Évaluation* ainsi que la présentation régulière des problèmes du RMT sont nettement orientées sur les pratiques. On y présente, pour ce numéro, des activités sur la numération et sur le recouvrement de figures par des carrés au niveau de l'école primaire, sur les pavages en classes du premier degré de l'école secondaire. On y propose encore une vingtaine de problèmes qui peuvent être repris en classe, des degrés 3 à 8, voire au-delà, dont certains sont accompagnés d'analyses a priori, de résultats et commentaires. *Math-Ecole* cherche, dans la mesure du possible, à dépasser le stade de la simple présentation d'activités ou d'expériences en proposant des modalités de gestion ou en précisant les objectifs du point de vue de leurs contenus mathématiques.

La mesure du temps est d'un intérêt plus général et universel, à l'intention de tous les lecteurs qui aimeraient en savoir plus sur le calendrier qu'ils utilisent quotidiennement.

Les réponses à *L'année dernière à Marienbad* et à *La forêt triangulaire* se situent dans l'espace de dialogue que la revue offre à ses lecteurs. Dans cette perspective, les commentaires et les solutions sont toujours les bienvenus, comme contribution à l'ouverture et à l'animation des débats.

Les deux derniers articles de ce numéro sont les textes des deux communications présentées à la « *table ronde* » organisée à Neuchâtel, le 1er décembre 2004, en collaboration entre la HEP Bejune et l'Association *Math-Ecole* (A.M.E.): *Deux enquêtes sous la loupe* et *Confrontations à grande échelle en mathématiques: les apports pour les maîtres.* A leur lecture, on comprendra que les enquêtes régionales, nationales ou internationales sont très différentes les unes des autres dans leurs buts et leurs destinataires. Elles peuvent apporter des renseignements sur l'enseignement des mathématiques, à l'intention des gestionnaires des systèmes scolaires, mais aussi, pour certaines d'entre elles, alimenter la réflexion pédagogique et didactique à l'intention des enseignants.