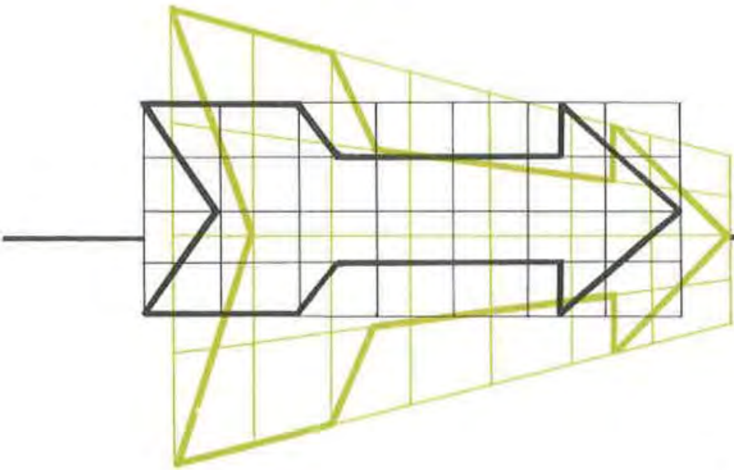
80



MATH ECOLE

Novembre 1977
16e ANNEE

MATH ECOLE 80

16e ANNEE Paraît cinq fois par ans NOVEMBRE 1977

Editorial

«La conquête du superflu donne une excitation spirituelle plus grande que la conquête du nécessaire.»
(Gaston Bachelard,
La psychanalyse du feu)

Les petits de 3 ou 4 ans et leur conditionnel !
«Tu f'rais l'éléphant pi j'te promèn'rais.» «Tu mettrais le foulard sur ta tête, tu t'cach'rais pi tu nous f'rais peur quand (sans liaison s'il vous plaît) on pass'rait.»
Quel enthousiasme, quel dynamisme — tout juste contenu encore et que libèrera votre accord d'entrer dans le jeu —, quelle intensité de désir se lisent, en cet instant, dans les yeux du bambin qui décide de son jeu !
L'enseignant qui, en un de ces moments privilégiés, rencontre ce regard d'enfant, s'il imagine ce même enfant plus tard dans sa classe, est en mesure de saisir combien il lui sera difficile, certaines fois, de renverser la situation et de lui proposer à son tour, avec autant de persuasion, d'entrer dans le jeu, dans le jeu NU-x ou OP-y de sa «méthodologie de math» par exemple.
L'entrée en matière, lorsqu'on aborde en classe un sujet nouveau, reste avant tout, même si la méthodologie quelquefois donne une indication, un problème que chaque maître s'applique à résoudre à sa façon. Or, il faut bien l'admettre, rares sont, en ce domaine, les trouvailles qui donnent pleine satisfaction. La plupart du temps, elles ne constituent pas réellement une motivation et le dynamisme en puissance qu'on voudrait susciter à cette occasion n'apparaît pas ou, s'il apparaît, ne «sous-tend» pas longtemps l'activité de la classe. Notons, au passage, que certains jeux de notre méthodologie, véritablement pensés comme tels, se passent fort bien de toute motivation. Pour les autres, j'imagine quant à moi, qu'en ces moments où le maître s'essaie à motiver l'activité, les élèves doivent ressentir, face à lui, le même malaise que celui que ressent le spectateur face à l'acteur ou au danseur adulte, débutant qui, par timidité, ne parvient jamais au terme des gestes qu'il amorce.
Pour le sujet qui nous occupe, notre timidité ne naîtrait-elle pas de ce souci quasi permanent que nous avons de référence à la réalité de tous les jours ? Qu'on y aboutisse, cela est certes nécessaire. Mais si l'on veut une entrée en matière réellement stimulante (et certains grands chapitres de notre enseignement de la mathématique à l'école primaire le méritent à mon avis), ne faudrait-il pas s'autoriser plus souvent l'accès au domaine du fantastique, du merveilleux, du rêve ? Dans «L'eau et les rêves», le philosophe Gaston Bachelard écrit: «On veut toujours que l'homme préhistorique ait résolu intelligemment le problème de sa subsistance... L'utilité de naviguer n'est pas suffisamment claire pour déterminer l'homme préhistorique à creuser un canot. Aucune utilité ne peut légitimer le risque immense de partir sur les flots. Pour affronter la navigation, il faut des intérêts puissants. Or les véritables intérêts puissants sont les intérêts chimériques. Ce sont les intérêts qu'on rêve, ce ne sont pas les intérêts qu'on calcule. Ce sont les intérêts fabuleux.»
Chez nos enfants, ces intérêts puissants, ces intérêts fabuleux existent. C'est à nous de les découvrir, à nous de les réveiller. Les techniques actuelles de l'audio-visuel par exemple peuvent efficacement nous y aider pour autant qu'elles soient mises davantage au service du créateur que du *reporter*.

Frédéric Oberson

Pour les petits...
par Marie-Claire Andrès

Le jeu proposé ci-dessous introduit de manière active l'idée de compensation qui sera utilisée lors de l'acquisition du nombre. L'essentiel est de laisser les enfants expérimenter. Puis à partir de leurs observations on parviendra à cette idée de compensation.

Matériel: 7 bouteilles identiques (d'environ 1 dl)
7 verres ou gobelets identiques (d'environ 1 dl)

La maîtresse présente 6 bouteilles pleines et demande aux enfants de prendre autant de verres.
Puis elle propose à un enfant de verser un peu de liquide d'une bouteille dans un verre.
Pour les bouteilles et les verres suivants, les enfants versent de manière qu'il y ait des niveaux différents dans chaque verre.

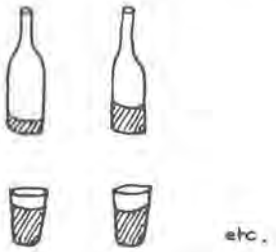
Ils constatent:
— il y a plus ou moins de liquide d'un verre à l'autre;
— il y a plus ou moins de liquide d'une bouteille à l'autre.

Les enfants peuvent ensuite sérier les verres puis les bouteilles (certains d'entre eux sont parfois gênés par l'irrégularité de la sériation. Il faut laisser les enfants expliquer pour quelle raison une sériation irrégulière est correcte).

La maîtresse demande:
— Peut-on retrouver le verre correspondant à chaque bouteille ?

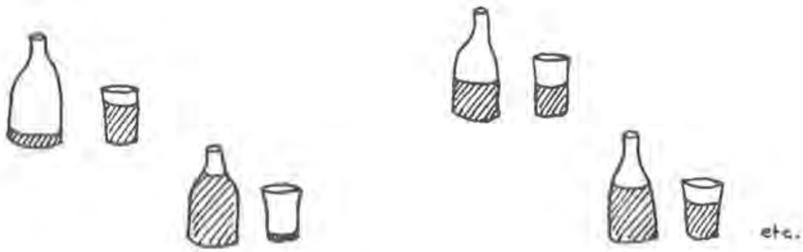
Les enfants trouvent facilement la bouteille correspondant au verre vide et celle correspondant au verre plein.
Pour les éléments intermédiaires, ils comparent chaque verre aux autres de la série puis chaque bouteille aux autres de la série.

Ils constatent alors qu'il obtiennent deux escaliers «contraires» puisque plus le verre est plein, plus la bouteille correspondante est vide.



Variante:

Après avoir rempli tous les verres à des niveaux différents, les enfants font correspondre chaque bouteille à son verre.
Pour cela, ils prennent le verre le moins plein avec la bouteille la plus pleine, puis parmi les verres qui restent, le verre le moins plein, etc.



Dans un deuxième temps, ils sérient les bouteilles et les verres.
La maîtresse prend un septième verre et une septième bouteille. Elle verse un peu de liquide dans le verre et demande aux enfants de trouver la place du verre et de la bouteille dans la sériation précédente.
Ils constatent que cette place est entre les éléments qui ont plus de liquide et ceux qui ont moins de liquide.

Le problème des quatre couleurs

par André Calame

Un problème plus que centenaire

Vendredi 13 août 1976, R. Carreras annonçait à la Radio romande que le problème des quatre couleurs était résolu. Plus d'un an après, cette nouvelle sensationnelle ne semble pas avoir dépassé le cercle de quelques initiés et bien des maîtres de mathématiques continuent certainement à citer le problème des quatre couleurs comme un exemple typique de problème non résolu.
L'énoncé de ce problème vieux de plus de cent ans est particulièrement simple; sa compréhension est à la portée d'élèves de l'école primaire: *Peut-on colorier n'importe quelle carte de géographie avec 4 couleurs seulement, de manière que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes ?*
Les élèves de quatrième primaire abordent ce genre de questions dans l'activité 1 de la *découverte de l'espace:* «Coloriez votre carte en employant le moins de couleurs possible et en mettant des couleurs différentes dans deux domaines qui ont une partie de frontière commune... Dessinez des cartes qui nécessitent au moins 3 couleurs... et des cartes nécessitant au moins quatre couleurs.» [12, pp.195-196].
Le but de cet article est de préciser la nature du problème des quatre couleurs en restant à un niveau élémentaire et sans exiger du lecteur un effort démesuré d'abstraction. C'est dire que nous ne pourrons pas situer les difficultés techniques des démonstrations, mais que nous esquisserons le cadre dans lequel les recherches ont été menées.
Le problème des 4 couleurs semble avoir été posé pour la première fois par un étudiant en mathématiques d'Edimbourg, Francis Guthrie. Son frère en parla en 1852 au mathématicien et logicien Auguste de Morgan. En 1878, le mathématicien anglais Cayley reconnut s'être intéressé à ce problème sans avoir pu le résoudre. Dès lors, de nombreuses démonstrations furent proposées qui toutes se révélèrent incorrectes. Citons, en particulier, une solution de Kemke (1880) qui ne fut pas contestée pendant dix ans, jusqu'à ce que Heawood y découvre une faute [2; 3; 9]. Il fallut attendre 1976 pour obtenir la réponse exacte.

Vers un énoncé plus précis

L'énoncé du problème des 4 couleurs que nous avons donné appelle quelques précisions. Par *pays*, on entend des domaines d'un seul tenant, d'un seul morceau; on n'envisage pas le cas de pays dont une partie du territoire serait situé en enclave dans un pays différent. On ne réserve pas une couleur fixée d'avance à certaines régions particulières; par exemple, on ne réserve pas le

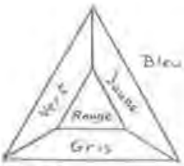


Fig. 1

bleu pour toutes les mers. En effet, si tel était le cas, il faudrait nécessairement 5 couleurs pour colorier l'île de la figure 1, divisée en 4 pays et en réservant le bleu à la mer qui l'entoure. Dans ces conditions, on peut préciser le problème pour une surface quelconque: plan, sphère, ruban de Möbius, tore, etc.

On appelle nombre chromatique (noté ici c) d'une surface le nombre de couleurs suffisant pour colorier toutes les cartes dessinées sur cette surface, alors qu'il existe au moins une carte qui ne peut pas être coloriée avec c-1 couleurs.

Pour le plan et la spère, on sait qu'il existe des cartes qui nécessitent 4 couleurs, par exemple la carte de la figure 1 où le bleu est remplacé par le rouge. Donc pour la sphère et le plan, on a $c \leq 5$. Jusqu'à l'an dernier, le problème se posait dans les termes suivants:

— soit démontrer que 4 couleurs suffisent pour toutes les cartes et alors $c = 4$;
— soit construire explicitement une carte nécessitant 5 couleurs et alors $c = 5$.

Une des difficultés du problème provient du fait qu'il faut parfois modifier un coloriage pour ramener de 5 à 4 le nombre des couleurs. Dans la figure 2, il semble qu'une cinquième couleur est nécessaire, alors que la figure 3 montre comment une modification permet de s'en tenir à 4 couleurs.

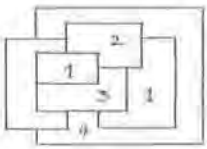


Fig. 2

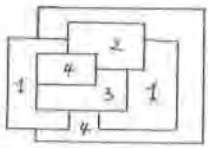


Fig 3

Nature topologique du problème

Le problème de la coloration des cartes sur une surface fait partie de la topologie. La topologie, qu'on appelle parfois plus intuitivement la géométrie du caoutchouc, étudie les propriétés des figures qui restent invariantes lorsqu'on leur fait subir des déformations continues, sans déchirures, ni collages. Dans le problème qui nous occupe, imaginons une carte dessinée sur une pellicule de caoutchouc. En modifiant la forme de la pellicule sans la déchirer, la forme des pays change, les frontières sont modifiées dans leur contour, mais

ces déformations n'ont pas d'influence sur le coloriage. La solution du problème du coloriage ne dépend pas de la forme plus ou moins découpée des frontières, mais seulement de la relation de contiguïté entre domaines.
Dans le cas de la sphère et du plan, une relation topologique importante joue un rôle fondamental, la relation d'Euler. Si l'on désigne par f le nombre de domaines (faces), par s le nombre de nœuds (sommets) et par a le nombre de branches (arcs ou arêtes), on a:

$$f + s - a = 2$$

On pourra à nouveau se reporter à la méthodologie de quatrième année, dont nous avons repris la terminologie, pour une approche de cette relation [12, pp. 193-195]. C'est sur cette relation que repose le fait que 5 couleurs suffisent pour colorier toute carte du plan ou de la sphère. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Il n'existe aucune carte sur le plan ou sur la sphère avec cinq domaines tous voisins deux à deux.

Pour démontrer cette propriété, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe cinq domaines voisins deux à deux. Evaluons de deux manières le nombre des frontières ou arêtes. D'une part, chacun des cinq pays ($f = 5$) a au moins quatre frontières différentes, puisqu'il touche les quatre autres pays. On a donc au moins $5 \cdot 4 = 20$ frontières, chacune commune à deux pays, d'où: (1) $a \geq 10$.

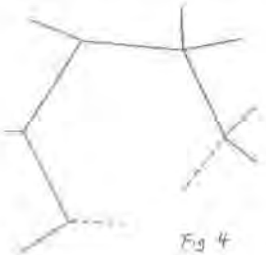


Fig 4

D'autre part, la relation d'Euler donne:

$$f + s - a = 2$$
$$s = a - f + 2 \quad \text{avec } f = 5$$
$$\text{d'où } s = a - 3 \qquad (2)$$

En chaque sommet de la carte, il y a au moins trois arêtes incidentes. S'il y avait exactement trois arêtes en chaque sommet, on aurait $3s = 2a$. Comme le nombre d'arêtes incidentes en l'un ou l'autre sommet pourrait être supérieur à 3, on a:

$$(3) \qquad 3s \leq 2a$$

En combinant (2) et (3), on obtient:

$$(4) \qquad 3s = 3a - 9 \leq 2a$$
$$a \leq 9$$

Cette dernière égalité est en contradiction avec (1).

Certains résultats fort peu intuitifs de la topologie soulignent la difficulté du problème des 4 couleurs. Parmi ces résultats qui peuvent passer pour paradoxaux, citons [2; 5] l'exemple suivant dû à Krekjarto: on peut subdiviser un domaine donné, disons un carré, en trois régions de manière que ces trois régions aient une même frontière commune.

Recours aux graphes

Les difficultés signalées ci-dessus ont amené les mathématiciens à se tourner vers la théorie des graphes [1]. Examinons sur un exemple particulier comment on passe d'une carte à son graphe associé. Nous envisageons une partie de la carte de l'Europe comprenant la France, les trois pays du Benelux, l'Allemagne de l'ouest, l'Autriche, la Suisse et l'Italie. On choisit un point intérieur à chaque pays; ce point pourrait représenter la capitale, mais ceci n'est pas essentiel, vu la nature topologique du problème. Ces huit points seront les sommets du graphe. On relie deux de ces sommets par une arête si et seulement si les pays qu'ils représentent ont une frontière commune. On obtient ainsi le graphe planaire associé à la carte. Dans notre exemple, le graphe comporte 8 sommets et 15 arêtes (fig. 5).

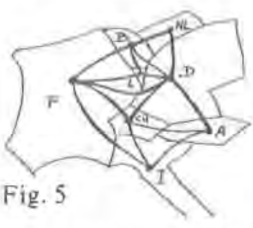


Fig. 5

Le problème du coloriage de la carte est remplacé par le suivant: *Colorier les sommets du graphe de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes* [4; 10].

Dans cette nouvelle perspective, reprenons la démonstration donnée dans le paragraphe précédent. L'impossibilité d'avoir une carte avec cinq pays voisins deux à deux se traduit par la propriété suivante en théorie des graphes: on ne peut pas dessiner un graphe planaire avec cinq sommets tous reliés deux à deux par une arête. En d'autres termes, *le graphe complet à 5 sommets n'est pas planaire.*

Le graphe complet à 5 sommets comprend 10 arêtes (fig. 6). La relation d'Euler donne:

$$\begin{aligned} f + s - a &= 2 \\ f + 5 - 10 &= 2 \\ f &= 7 \end{aligned}$$


Fig. 6

Or, dans un graphe complet, toutes les faces sont triangulaires. Le graphe devrait comprendre 7 triangles, soit 21 arêtes réparties chacune entre deux faces, d'où a = 10,5. Il y a contradiction puisque a est entier et égal à 10.

Déja sur cet exemple très simple, on peut se rendre compte des avantages de la théorie des graphes.

Le nombre chromatique pour d'autres surfaces

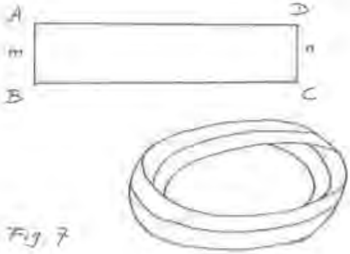


Fig. 7

Alors qu'on était encore loin de savoir si le nombre chromatique de la sphère et du plan était 4 ou 5, on a pu calculer ce nombre chromatique pour d'autres surfaces nettement plus compliquées. Nous en donnerons seulement deux exemples: le ruban de Möbius et le tore.
On peut construire un ruban de Möbius à partir d'une bande de papier en collant les extrémités après avoir tordu la bande d'un demi-tour (fig. 7).

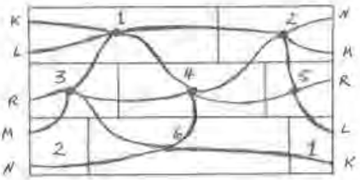


Fig. 8

On colle m sur n de manière que C soit sur A et D sur B. Le ruban de Möbius est une surface à un seul côté et son nombre chromatique est égal à 6 [2]. La figure 8 montre une carte du ruban de Möbius qui nécessite 6 couleurs et le graphe associé. Les arêtes qui sont sectionnées pour les besoins du dessin en plan sont désignées par la même lettre au point de rupture.

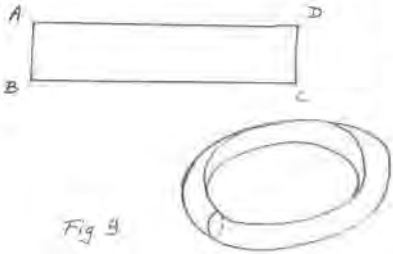


Fig 9

Pour construire un tore, c'est-à-dire un anneau ou un cerceau, on peut imaginer un rectangle ABCD qu'on roule d'abord de manière à former un tuyau en collant le bord AD sur le bord BC. On déforme ensuite ce tuyau de façon continue de manière à coller les deux extrémité du tuyau (fig. 9).

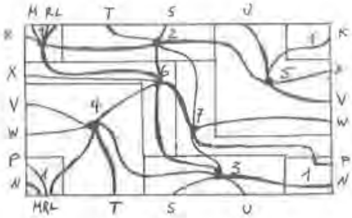


Fig. 10

Le nombre chromatique du tore est 7. La figure 10 donne une carte du tore qui exige 7 couleurs et dont le graphe associé est le graphe complet à 7 sommets.

Les surfaces orientables de genre k

Pour la suite de cet exposé, nous nous limiterons aux surfaces que l'on peut obtenir en perçant un ou plusieurs trous dans une sphère. Le genre de la surface est donné par le nombre k des trous. Ainsi, la sphère est de genre 0, le tore de genre 1. Pour obtenir une surface de genre $k = 2$, on peut percer deux trous dans une sphère ou, ce qui revient au même du point de vue topologique, ajouter deux anses à une sphère (fig. 11).

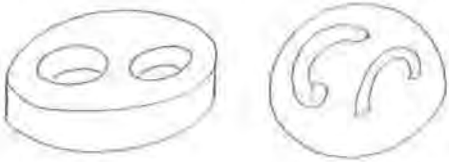


Fig. 11

La formule d'Euler se généralise aux surfaces orientables de genre k sous la forme suivante:

$$f + s - a = 2 - 2k$$

Pour la sphère ($k = 0$), on retrouve la formule donnée précédemment. Pour le tore ($k = 1$) la formule d'Euleur devient:

$$f + s - a = 0$$

On peut la vérifier pour le graphe complet à 7 sommets de la figure 10 où $f = 14$, $s = 7$ et $a = 21$.
Pour une surface de genre $k = 2$, on a: $f + s - a = 2$.

Formule de Heawood

Heawood a démontré en 1890 une formule pour le nombre chromatique c d'une surface orientable de genre k, pour k *supérieur* à 0.

$$c \geq \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48k}}{2}\right]$$

où les crochets [ ] signifient «partie entière de». D'après cette formule, le nombre chromatique du tore ($k = 1$) est inférieur ou égal à 7:

$$c \leq \left[\frac{7 + \sqrt{49}}{2}\right] = \left[\frac{7 + 7}{2}\right] = [7] = 7$$

Comme il existe au moins une carte avec c = 7 (fig. 10), il en résulte que le nombre chromatique du tore est exactement 7.

Pour une surface de genre k = 2, on a:

$$c \leq \left[\frac{7 + \sqrt{97}}{2}\right] = \left[\frac{7 + 9,\ldots}{2}\right] = [8,\ldots] = 8$$

Pour démontrer la formule de Heawood, il nous faut encore introduire deux notions, celle de *graphe critique* [8] et celle de *triangulation*.

Graphe critique

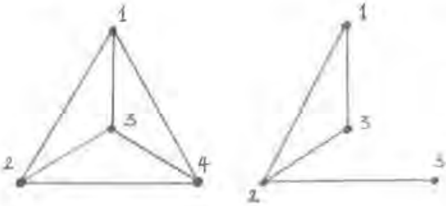


Fig. 12

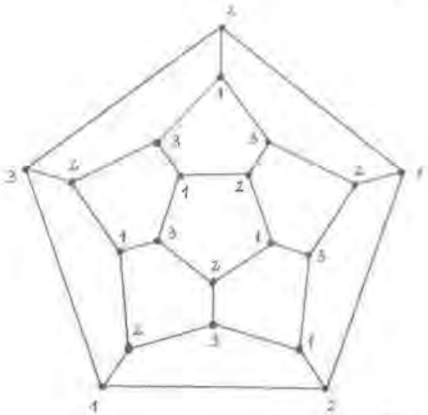


Fig 13

On dit qu'un graphe est critique si la suppression d'une arête quelconque permet de diminuer le nombre chromatique.

Le graphe complet à 4 sommets est critique, puisque la suppression d'une seule arête permet de ramener de 4 à 3 le nombre chromatique.

En revanche, le graphe de la figure 13 n'est pas critique. La suppression d'une arête quelconque ne modifie pas le nombre chromatique qui reste égal à 3.

Si un graphe n'est pas critique, on peut supprimer des arêtes une à une jusqu'à ce que l'on obtienne un graphe critique. Dans un graphe critique, on a l'inégalité suivante:

(5) $(c - 1)s \leq 2a$

et *chaque sommet est de degré supérieur ou égal à c — 1.* (On entend par degré d'un sommet le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Dans la méthodologie romande, on parle à ce propos de l'ordre d'un nœud, plutôt que du degré d'un sommet [12, p. 186].)

Démontrons cette inégalité par l'absurde. Dans un graphe G, soit A un sommet de degré inférieur à c — 1. Supprimons le sommet A et toutes les arêtes incidentes à A. Le nouveau graphe G' a un nombre chromatique inférieur à c

puisque G est supposé critique. On colorie les sommets de G' avec c-1 couleurs. Sur les g sommets voisins de A, on utilise au plus $g = c - 2$ couleurs. Des $c - 1$ couleurs, il en reste au moins une pour A et G serait coloriable avec $c - 1$ couleurs, contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que le degré g de chaque sommet est tel que $g \geq c - 1$.
Additionnons les degrés de tous les sommets. Comme il y a s sommets, on a pour la somme D des degrés:

$$D \geq s(c - 1)$$

Mais la somme D correspond à 2a, puisque chaque arête compte pour deux degrés, un à chacune de ses extrémités:

$$D = 2a \geq s(c - 1)$$
$$\text{ou } (c - 1)s \leq 2a$$

Triangulation

Etant donné un graphe G, on peut ajouter des arêtes en nombre minimum de manière que chaque face devienne triangulaire. Dans ce processus, à chaque étape, on ajoute une arête et on crée une face supplémentaire. Le nombre $f + s - a$ n'est donc pas modifié.
Sur la figure 13, on arrive à une triangulation en ajoutant deux arêtes dans chaque face pentagonale, y compris la face extérieure. Si le graphe initial G est caractérisé par les nombres f, s, a et le graphe triangulé G' par les nombres f', s' et a', on a:

$$s' = s \qquad f' \geq f \qquad a' \geq a$$
$$f' + s' - a' = f + s - a = 2 - 2k \qquad \text{(Euler)}$$

De plus, dans le graphe triangulé G', il y a f' faces triangulaires, ce qui fait 3f' arêtes, chacune commune à deux faces, d'où:

$$3f' = 2a'$$

Introduisons cette valeur de 3f' dans la relation d'Euler:

$$\begin{aligned} f' + s' - a' &= 2 - 2k \\ 3f' + 3s' - 3a' &= 6 - 6k \\ 2a' + 3s' - 3a' &= 6 - 6k \\ a' &= 3s' - 6 + 6k \end{aligned}$$

Revenons au graphe initial G:

$$a \leq a' = 3s' - 6 + 6k = 3s - 6 + 6k$$

$$(6) \quad a \leq 3s - 6 + 6k$$

Les relations (5) et (6) permettent d'établir la formule de Heawood. D'après (5):

$$(c - 1)s \leq 2a$$

$$c - 1 \leq \frac{2a}{s}$$

Or, d'après (6): $\quad 2a \leq 6s - 12 + 12k$

$$(7) \qquad \frac{2a}{s} \leq 6 + \frac{12\ (k-1)}{s}$$

Or, le nombre chromatique c ne peut pas être supérieur au nombre total s des sommets; donc $c \leq s$, d'où:

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{c}$$

En remplaçant dans (7) $\frac{12\ (k-1)}{s}$ par $\frac{12\ (k-1)}{s}$, on ne fait que renforcer l'inégalité *à condition que le numérateur soit positif* (éventuellement nul).

$$c - 1 \leq 6 + \frac{12\ (k-1)}{c}$$

$$c^2 - c \leq 6c + 12\ (k - 1)$$

$$c^2 - 7c - 12\ (k - 1) \leq 0$$

Le membre de gauche est un polynôme du 2e degré en c. Il est négatif pour les valeurs de c comprises entre les deux solutions de l'équation:

$$c^2 - 7c - 12\ (k - 1) = 0$$

qui sont:

$$c' = \frac{7 - \sqrt{49 + 48\ (k-1)}}{2} = \frac{7 - \sqrt{1 + 48k}}{2} \leq 0$$

$$c'' = \frac{7 + \sqrt{49 + 48\ (k-1)}}{2} = \frac{7 + \sqrt{1 + 48k}}{2} > 0$$

Le nombre chromatique c est un *nombre naturel* qui est donc inférieur à la solution positive c'' de l'équation. On a ainsi démontré la formule de Heawood :

$$c \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48k}}{2}$$

On remarquera dans la démonstration le rôle essentiel de l'hypothèse $k \geq 1$. Rien ne permet d'affirmer que la formule de Heawood est vraie pour $k = 0$, cas de la sphère et du plan. Si la formule de Heawood était aussi vraie pour $k = 0$, on aurait pour la sphère et le plan $c \leq 4$ et le problème des quatre couleurs serait démontré. De 1890 à 1976, il a donc fallu attendre 86 ans pour combler cette lacune.

La solution du problème des 4 couleurs

Selon la revue *Time* du 20 septembre 1976, la solution du problème des 4 couleurs a été obtenue par deux mathématiciens de l'Université d'Illinois: Kenneth Appel et Wolfgang Haken. Ils ont ramené le problème à l'étude de 1936 graphes de base. Si chacun de ces graphes de base est coloriable avec 4 couleurs, alors tous les autres graphes sont aussi coloriables avec 4 couleurs. Le test de ces 1936 graphes a été effectué sur ordinateur et a exigé 1200 heures.
En conclusion, nous laissons le soin au lecteur de méditer sur cette extraordinaire collaboration de l'esprit humain et de la machine électronique.

Références bibliographiques

[1] Berge - Théorie des graphes et ses applications - Dunod 1958.
[2] Delachet - La géométrie contemporaine - PUF, Que sais-je ? 1950.
[3] Gardner - Nouveaux divertissements mathématiques - Dunod 1970.
[4] Harary - Graph Theory - Addison Wesley 1972.
[5] Northrop - Fantaisies et paradoxes mathématiques - Dunod 1954.
[6] Ore - The Four Color Problem - Academic Press 1968.
[7] Rademacher, Toeplitz - Von Zahlen und Figuren.
[8] Ringel - Färbungsproblem auf Flächen und Graphe - Deutscher Verlag der Wissenschaft 1959.
[9] Ringel, Youngs - Solution of the Heawood Map-Coloring Problem - Proc. Nat. Acad. USA 1968.
[10] Roy - Algèbre moderne et théorie des graphes - Dunod 1969.
[11] White - Graphs, Groups and Surfaces - North Holland Publishing 1973.
[12] ☆☆☆ Mathématique 4e - Méthodologie.

CHAPITRE NR: Nombres Réels

Introduction des codes à virgule

par Ch. Burdet, président du comité de rédaction

Une manière courante d'écrire les **nombres décimaux,** les **nombres rationnels** et les **nombres réels** est d'utiliser les **codes à virgule.**
Il est peut-être utile de préciser les définitions simples que l'on peut donner pour ces ensembles de nombres:

$\mathbb{R}$, l'ensemble des **nombres réels,** comprend tous les nombres qui peuvent s'écrire à l'aide d'une virgule, la partie décimale pouvant être *illimitée non périodique, illimitée périodique, finie* ou formée uniquement de *zéros.*

On peut donc noter:

32,04004000400004... $\in \mathbb{R}$	3,14159265... $\in \mathbb{R}$
4,72727272727272... $\in \mathbb{R}$	128,666666666... $\in \mathbb{R}$
45,23645 $\in \mathbb{R}$	1,894657 $\in \mathbb{R}$
143,00000000... $\in \mathbb{R}$	28 $\in \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$, l'ensemble des **nombres rationnels** comprend tous les nombres qui peuvent s'écrire à l'aide d'une virgule et dont la partie décimale est *illimitée périodique, finie* ou formée uniquement de *zéros.*

On peut donc noter:

26,245454545454545... $\in \mathbb{Q}$	71,777777777777... $\in \mathbb{Q}$
3,8756 $\in \mathbb{Q}$	122,987755 $\in \mathbb{Q}$
33,0000000... $\in \mathbb{Q}$	6 $\in \mathbb{Q}$

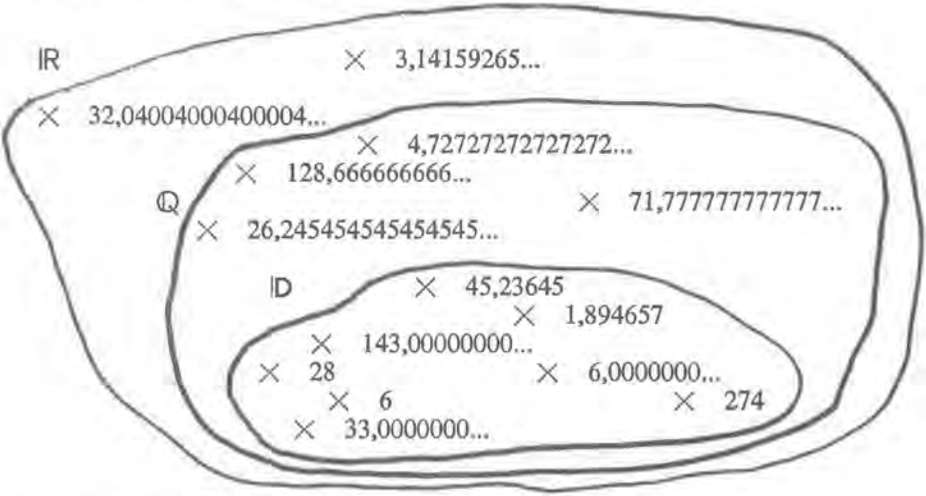
$\mathbb{D}$, l'ensemble des **nombres décimaux** comprend tous les nombres qui peuvent s'écrire à l'aide d'une virgule et dont la partie décimale est *finie* ou formée uniquement de *zéros.*

On peut donc noter:

28,9764355 $\in \mathbb{D}$	1456,45 $\in \mathbb{D}$
6,0000000... $\in \mathbb{D}$	274 $\in \mathbb{D}$

De ces définitions il ressort que l'ensemble des **nombres décimaux** est inclus dans l'ensemble des **nombres rationnels** et que l'ensemble des **nombres rationnels** est inclus dans l'ensemble des **nombres réels.**

Un diagramme de Venn permet d'illustrer ces inclusions:



D'une façon différente, on peut dire:

— tout **nombre décimal** est un **nombre rationnel** et aussi un **nombre réel;**
— tout **nombre rationnel** est un **nombre réel;**
— certains **nombres réels** ne sont pas des **nombres rationnels;**
— certains **nombres rationnels** ne sont pas des **nombres décimaux.**

Pour les **nombres rationnels,** une autre manière courante de les écrire est d'employer les **codes fractionnaires.** Cette écriture est d'ailleurs fréquemment utilisée pour définir cet ensemble.

En effet, on précise:

l'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction ordinaire dont le numérateur est un entier et le dénominateur est un entier différent de zéro.
On constate que la définition des ensembles de nombres est faite ici à partir du code, c'est-à-dire de l'écriture de ces nombres.
D'autres définitions des ensembles de nombres, de caractère plus abstrait, peuvent aussi être faites. Pour les nombres réels, par exemple, on part de l'idée de suites et d'intervalles.
Notons encore que les nombres dont il a été question peuvent aussi bien être négatifs que positifs.

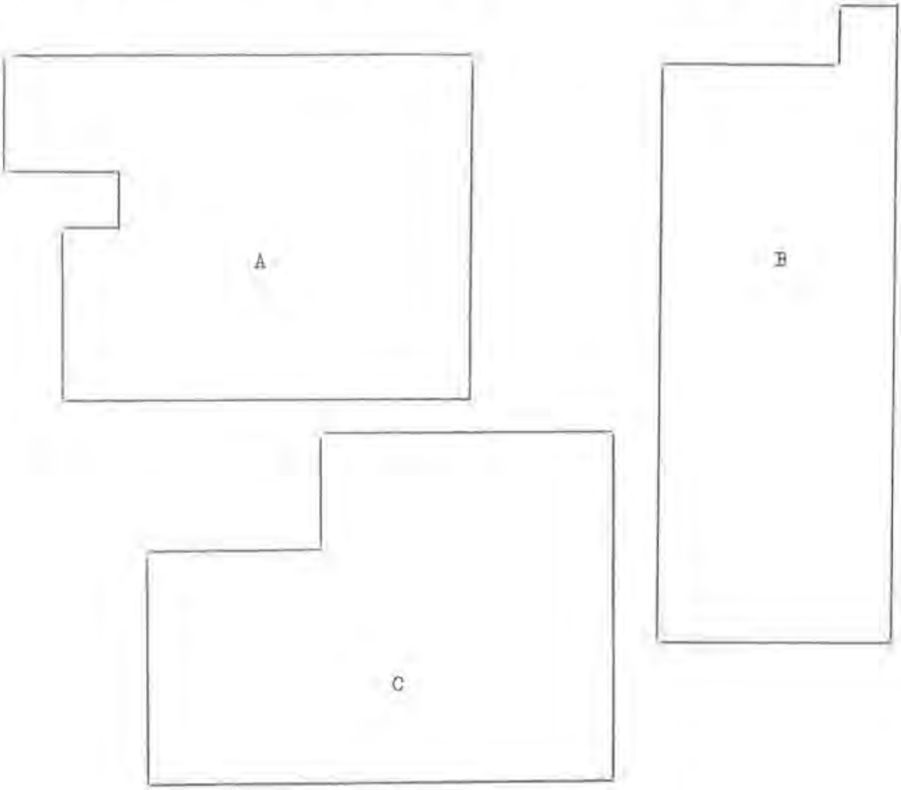
Les écritures 0,5 et $\frac{1}{2}$ désignent le même nombre, ce nombre est décimal; on note d'ailleurs: $0{,}5 = \frac{1}{2}$.
Les écritures 1,363636363636... et $\frac{15}{11}$ désignent le même nombre, ce nombre est rationnel; on note aussi: $1{,}363636363636... = \frac{15}{11}$.

Ces remarques nous conduisent à constater que l'adjectif fractionnaire qualifie la forme d'un nombre et non le nombre lui-même.
Il est donc correct de parler de **nombres décimaux** écrits sous forme fractionnaire ou en **code fractionnaire** et de **nombres décimaux** écrits en **code à virgule.** De même, on parle de **nombres rationnels** écrits en **code fractionnaire** et de **nombres rationnels** écrits en **code à virgule.**
Pour les nombres décimaux deux formes d'écriture sont présentées dans la méthodologie et dans les exercices destinés aux élèves de cinquième année: les **codes à virgule** et les **codes fractionnaires.**
Une activité est consacrée à **l'introduction des codes à virgule;** elle se situe dans le prolongement de recherches poursuivies dans les degrés précédents à propos de la numération, en particulier des échanges, et de la mesure de surfaces et de lignes.
La démarche qui conduit à l'écriture des nombres décimaux en code à virgule n'est pas unique. Quatre approches sont proposées dans la méthodologie:

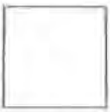
— la mesure de surfaces;
— la graduation d'une droite;
— les échanges de jetons;
— le codage de mots.

Toutes ces approches n'ont pas le même intérêt et la même portée.
La mesure de surfaces et *la graduation d'une droite* sont fondamentales alors que les deux autres recherches permettent principalement de renforcer la compréhension de la notion de **codes à virgule.**
Nous ne présenterons pas ici toutes les démarches qui sont proposées, mais donnerons un aperçu de celle qui prend la mesure de surface pour point de départ.
Pour mesurer une surface S, on choisit une surface-unité. En observant le nombre maximum de surfaces-unités contenues dans la surface S et en cherchant le nombre minimum de surfaces-unités nécessaires pour la recouvrir, on peut donner un bon encadrement de la mesure de S. L'intérêt de l'encadrement dépend de la grandeur de la surface-unité choisie. Plus la surface-unité choisie est petite, plus l'encadrement est précis et plus la mesure est précise. La nécessité de la précision de la mesure prend toute son importance au moment où l'on compare les aires de surfaces données.

On se propose par exemple de classer par odre de grandeur les aires des trois surfaces suivantes:



On choisit une surface unité pour mesurer l'aire de ces surfaces, par exemple

la surface U: 

A cause de la forme des surfaces et de la grandeur de l'unité choisie, on doit procéder à des encadrements. En prenant la base quatre comme base de numération, on note que:

— l'aire de la surface A est comprise entre 22 et 30;
— l'aire de la surface B est comprise entre 22 et 23;
— l'aire de la surface C est comprise entre 22 et 23.

Ces encadrements ne nous permettent pas de déterminer l'aire la plus petite. ni l'aire la plus grande.
Il faut avoir une mesure plus fine. On partage l'unité choisie. Comme c'est la base quatre qui a été choisie pour noter les encadrements, on partage l'unité en quatre parties, ce qui est aisé avec un carré. Chacune des parties est nommée quart de l'unité.
En mesurant à nouveau les surfaces A, B et C à l'aide des surfaces-unités U et des quarts de cette unité, on obtient des mesures qui permettent de comparer les aires:

aire de A = 22 unités et 3 quarts de l'unité
aire de B = 22 unités et 2 quarts de l'unité
aire de C = 22 unités et 1 quart de l'unité

Il s'agit maintenant de trouver une manière simple d'écrire ces mesures. Plusieurs propositions faites par les élèves peuvent être envisagées. On est conduit à faire un choix et à utiliser la manière habituelle, c'est-à-dire la virgule qui sépare l'unité des parties de l'unité.

On écrit finalement:

aire de A = 22,3
aire de B = 22,2
aire de C = 22,1

En conclusion, relevons trois points importants:

— lorsqu'on compare la mesure d'objets de la vie courante, on est inévitablement conduit à partager l'unité choisie;
— la mesure des surfaces est celle qui convient le mieux aux manipulations;
— pour une introduction, le choix de la base quatre est commode.

Propriétés des opérations

par J.-J. Dessoulavy, membre du comité de rédaction

Associativité et commutativité de l'addition...
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition...
Associativité et commutativité de la multiplication...

Telles sont les propriétés essentielles des opérations qu'il est possible de découvrir et d'exploiter au niveau primaire.
La méthodologie romande de mathématique quatrième année, dans l'activité 2 de la partie OP (opérations) présentait déjà une première approche de calculs en utilisant les propriétés des opérations.
La méthodologie de cinquième année reprend cette notion dans l'activité 2 de la partie NN (nombres naturels).
Face à une opération, il n'est souvent pas utile d'exécuter d'emblée et machinalement des calculs, mais il importe d'observer les termes de ladite opération pour examiner si l'on peut les associer d'une manière commode, les commuter, utiliser une forme ou l'autre de compensation, «distribuer» un des facteurs d'une multiplication, de manière à faciliter les calculs et à les rendre plus rapides.
Il est évident que l'on ne peut utiliser les propriétés des opérations avec profit que si l'on domine suffisamment les tables d'additions et de multiplications. Mais il est frappant de constater que l'utilisation des dites propriétés contribue également à une meilleure connaissance des tables.
On peut en tout cas affirmer que les enfants prennent grand plaisir à «jongler» avec toutes ces possibilités de calculer, parce qu'ils y trouvent une grande liberté, parce que par eux-mêmes ils recherchent les procédés qui conviennent le mieux.
L'enseignant doit, en effet, absolument renoncer à faire prévaloir son point de vue. Il ne s'agit nullement d'imposer telle ou telle manière de faire et la méthode qui paraît être la plus commode à l'enseignant n'est pas nécessairement celle qui convient à chaque enfant (ou adulte !) en particulier.
L'enseignant doit susciter chez les enfants l'observation des termes d'une opération, la discussion des procédés utilisés et la comparaison des avantages (ou inconvénients) respectifs de ceux-ci. Chacun s'habitue ainsi à choisir une manière de procéder bien adaptée.

Associativité et commutativité de l'addition

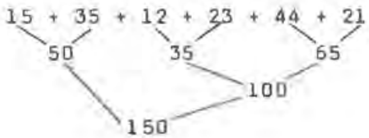
Une addition: $15 + 35 + 12 + 23 + 44 + 21 = ...$

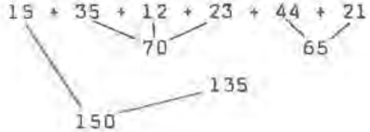
On peut poser cette opération en colonnes puis additionner les unités puis les dizaines en disant (ou pensant): 5 plus 5 ... 10, plus 2 ... 12, plus 3 ... 15, plus 4 ... 19, plus 1 ... 20, etc.
Que l'opération se présente en ligne ou en colonnes, on peut aussi chercher à grouper, associer certains termes. Ici, par exemple, on pourrait dire:

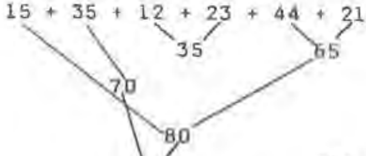
15 plus 35 égale 50;
12 plus 23 égale 35;
50 plus 35 égale 85;
21 plus 44 égale 65;
85 plus 65 égale 150.

L'activité est essentiellement orale. Elle demande au début un effort de mise en mémoire de résultats partiels, mise en mémoire de courte durée et qui s'acquiert facilement. Elle peut, cependant, être utilement soutenue par l'écriture au moyen de parenthèses ou par des illustrations. On obtient, par exemple, pour cette addition:

$$
\begin{aligned}
15 + 35 + 12 + 23 + 44 + 21 &= (15 + 35) + (12 + 23) + (44 + 21) \\
&= 50 + 35 + 65 \\
&= 50 + (35 + 65) \\
&= 50 + 100 = 150
\end{aligned}
$$







etc.

On constate que souvent les enfants choisissent d'associer des nombres reformant un nombre entier de dizaines. Cela semble, en effet, être ce qui facilite le plus les calculs. On ne saurait cependant en faire une règle. Voici, à titre indicatif et relevées au cours d'une leçon, les différentes manières que quelques enfants nous ont indiquées pour calculer cette addition:

Ernest:	15 plus 35 égale 50; 12 plus 23 égale 35; 44 plus 21 égale 65; 65 plus 35 égale 100 ... plus 50 égale 150.
Andrée:	35 plus 12, plus 23 égale 70; 44 plus 21 égale 65; 70 plus 65 égale 135; 15 plus 135 égale 150.
Jean:	12 plus 23 égale 35; 35 plus 35 égale 70; 44 plus 21 égale 65; 65 plus 15 égale 80; 80 plus 70 égale 150;
Eliane:	23 plus 21 égale 44; 2 fois 44 égale 88; 88 plus 12 égale 100; 35 plus 15 égale 50, plus 100 égale 150.
Maurice:	15 plus 35 égale 50, plus 12 égale 62, plus 23 égale 85, plus 44 égale 129, plus 21 égale 150.

La commutativité n'intervient pas dans ce cas, pas plus qu'il n'y a de mise en mémoire de résultats partiels. Robert, lui aussi, utilise une manière semblable de faire, ne prononçant que les résultats partiels en décomposant chaque terme:

15 ...45 ...50 ...62 ...82 ...85 ...125 ..,129 ,,,130 ,,,150

L'essentiel, dans un tel travail, est que l'enfant calcule avec sûreté et aisance. Progressivement, il devient capable, face à une opération, de décider rapidement s'il est préférable d'utiliser des propriétés ou de recourir à l'algorithme usuel qui, dans certains cas, permet seul de conduire au résultat avec sécurité.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Dans l'activité 5 de OP, dans la méthodologie de quatrième année, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avait déjà été abordée. Elle est naturellement reprise dans la méthodologie de cinquième année, notamment pour justifier la disposition des calculs en colonnes dans l'algorithme habituel de la multiplication.

Exemple: $326 \cdot 37$

	300	20	6	326
30	9000	600	180	9780
7	2100	140	42	2282
37	11100	740	222	12062

	30	7	37
300	9000	2100	11100
20	600	140	740
6	180	42	222
326	9780	2282	12062

$$\begin{array}{r} 326 \\ \cdot \quad 37 \\ \hline 9780 \\ 2282 \\ \hline 12062 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 326 \\ \cdot \quad 37 \\ \hline 2282 \\ 9780 \\ \hline 12062 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ \cdot \quad 326 \\ \hline 11100 \\ 740 \\ 222 \\ \hline 12062 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ \cdot \quad 326 \\ \hline 222 \\ 740 \\ 11100 \\ \hline 12062 \end{array}$$

Comme pour l'addition, l'enseignant suscite de nombreuses manières d'effectuer les calculs oralement ou par écrit.
Les enfants s'habituent toujours à choisir la manière de calculer qui leur convient le mieux, et qui peut naturellement varier d'un élève à l'autre.

Exemple: $5 \cdot 39$

$5 \cdot (30 + 9) =(5 \cdot 30) + (5 \cdot 9) = 150 + 45 = 195$

$5 \cdot (40 - 1) =(5 \cdot 40) - (5 \cdot 1) = 200 - 5 = 195$

$5 \cdot (20 + 10 + 9) = (5 \cdot 20) + (5 \cdot 10) + 5 \cdot 9) = 100 + 50 + 45 = 195$

$(2 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 39 = (2 \cdot 39) + (2 \cdot 39) + 39 = 78 + 78 + 39 = 195$

$(39 \cdot 10) : 2 = 390 : 2 = 195$

etc.

Des exercices écrits sont proposés aux enfants pour les habituer à cette distributivité.

Exemple:

$5 \cdot 18 = (10 \cdot 18) : \ldots = \ldots\ldots\ldots$

$5 \cdot 18 = (18 : 2) \cdot \ldots = \ldots\ldots\ldots$

$5 \cdot 18 = (5 \cdot \ldots) - (5 \cdot \ldots) = \ldots\ldots\ldots$

$5 \cdot 18 = (5 \cdot \ldots) + (5 \cdot \ldots) = \ldots\ldots\ldots$

$5 \cdot 18 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Oralement, l'enfant pourrait dire:

5 fois 10, cinquante; 5 fois 8, quarante; 50 plus 40, nonante. Ou bien: 5 fois 20, cent; moins 5 fois 2,dix, donc nonante.

On constate que rapidement et d'eux-mêmes les enfants suppriment le mot «égale». Et même certains d'entre eux intériorisent les calculs et ne font qu'exprimer les résultats.

Exemple pour $5 \cdot 87$:

quatre cents, trente-cinq, quatre cent-trente cinq.

Associativité et commutativité de la multiplication

Sur des calculs utilisant la distributivité viennent se greffer des cas où l'associativité et la commutativité de la multiplication facilitent les calculs.

Un seul exemple: $35 \cdot 18$

$$35 \cdot 18 = 35 \cdot (9 \cdot 2) = (35 \cdot 2) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630$$
$$35 \cdot 18 = (7 \cdot 5) \cdot 18 = 7 \cdot (5 \cdot 18) = 7 \cdot 90 = 630$$
$$35 \cdot 18 = (7 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 9) = (7 \cdot 9) \cdot (5 \cdot 2) = 63 \cdot 10 = 630$$
$$35 \cdot 18 = (35 \cdot 2) \cdot (18 : 2) = 70 \cdot 9 = 630$$

Dans ce dernier exemple intervient de surcroit l'idée de compensation: on ne change pas le produit si l'un des facteurs est multiplié et l'autre divisé par un même nombre.
Cette idée de compensation peut également intervenir dans le cas de la division: les enfants découvrent que le quotient de deux nombres ne change pas lorsque simultanément on multiplie (divise) les deux nombres par un même facteur.

Exemples:

$$75 \cdot 5 = (75 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 150 : 10 = 15$$
$$135 : 15 = (135 \cdot 2) : (15 \cdot 2) = 270 : 30 = 9$$
$$150 : 6 = (150 : 3) : (6 : 3) = 50 : 2 = 25$$

Des illustrations de ce genre sont possibles également:

Pour conclure, et même au risque de nous répéter, nous aimerions affirmer que de tels exercices, bien conduits ou suggérés par l'enseignant, sont plaisants, attrayants pour les enfants. Ils amènent progressivement les enfants à dominer leurs calculs, à les exécuter correctement et aisément.

Lorsque des relations portent sur des notations...

par Th. Bernet

Voici un type d'exercice qu'on trouve dans plusieurs méthodologies, en Suisse et à l'étranger (fig. 1).

Dessine les flèches ... est égal à ... →

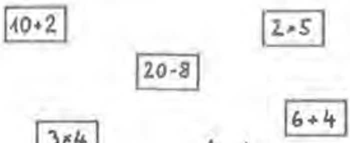


fig. 1.

Le mot «égal» du lien verbal fait-il référence à l'égalité dans $\mathbb{N}$? Il semble bien que oui.
Plaçons-nous dans $\mathbb{N}$. Quels sont les nombres naturels égaux à 12 ? Il n'y en a qu'un: c'est 12 lui-même. Si nous dessinons un diagramme fléché de l'égalité dans $\mathbb{N}$, nous obtenons quelque chose comme ceci (fig. 2):

... est égal à ... →

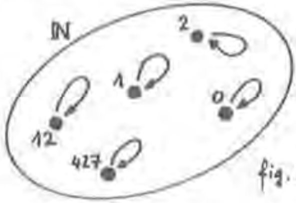


fig. 2.

En fait, l'égalité dans $\mathbb{N}$ est l'identité dans $\mathbb{N}$ (bijection qui associe chaque élément de $\mathbb{N}$ à lui-même).
Qu'est-ce qui fait la différence entre les diagrammes des figures 1 et 2 ?
Dans la figure 1 un même nombre est représenté plusieurs fois. Cela est contraire à l'usage concernant les diagrammes de Venn: dans une «patate», un élément ne doit être représenté qu'une seule fois. Cette règle est la traduction du fait qu'un élément ne peut «appartenir plusieurs fois» à un ensemble; il lui appartient ou ne lui appartient pas (pour un élément a et un ensemble E, on a soit $a \in E$, soit $a \notin E$). La figure 2, elle, est conforme à cette règle.
Lorsqu'on ne se tient pas à cette règle, il peut arriver des choses étranges, comme dans le cas suivant (fig. 3).

Trace les flèches de la relation «... est inférieur ou égal à ...».

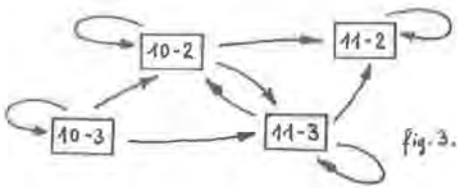


fig. 3.

Voilà une «relation d'ordre dans $\mathbb{N}$» qui n'est pas antisymétrique ! Il y a certainement une erreur quelque part !
Dans les figures 1 et 3, on a représenté un même nombre plusieurs fois: $10 + 2$ est un signe, $20 - 8$ en est un autre; ils représentent tous deux le même nombre. On écrit:

$$10 + 2 = 20 - 8$$

conformément à la règle usuelle: le signe «=» se note entre deux signes (deux notations) représentant le même objet.
Pour éviter un schéma dans lequel un même nombre a l'air d'appartenir plusieurs fois à un même ensemble, on peut se dire que la relation à étudier ne doit pas être considérée dans un ensemble de nombres, mais dans un ensemble de signes. «10 + 2» et «20 — 8» étant des signes différents, on les représente alors chacun pour son compte. Pour insister sur le fait qu'on raisonne sur les signes, on peut prendre pour lien verbal

«... représente le même nombre que...»

Si l'on s'interdit de figurer deux fois le même signe, par exemple «10 + 2» et «10 + 2», chacun dans un rectangle différent, on obtient une situation cohérente.

Une autre manière d'éviter une partie des contradictions signalées est de donner une consigne telle que: «relie les nombres égaux». L'exercice terminé se présente alors à peu près comme ceci (fig. 4).

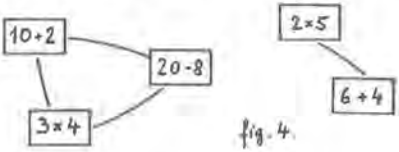


fig. 4.

En dessinant autre chose que des flèches, on veut marquer qu'il ne s'agit pas d'un diagramme de la sorte habituelle, qu'on peut donc déroger aux règles concernant les diagrammes fléchés. Cette subtile distinction peut-elle être comprise des élèves ? Et que répondre s'ils dessinent quand même des flèches et s'ils prennent ensuite argument de ces exemples pour faire des schémas dans lesquelles un même élément apparaît plusieurs fois à l'intérieur d'une même «boucle» ?

Ajoutons une remarque d'ordre général qui explique pourquoi il n'est probablement pas très heureux d'insister sur des relations portant sur les signes représentant des nombres.

Il est impossible d'énoncer des vérités sur des nombres naturels, par exemple, qui sont des objets de pensée, sans recourir à l'usage de désignations. On est bien obligé d'utiliser des signes tels que «douze», ou «12», ou «8 + 4», ... pour représenter ce nombre auquel nous pensons en ce moment, vous et moi, au travers de ces signes !

Pourtant on ne dit pas:

le nombre représenté par «douze» est plus petit que le nombre représenté par «quinze»

on dit: *le nombre douze est plus petit que le nombre quinze*

ou encore: *douze est plus petit que quinze.*

A moins de vouloir faire une étude des désignations, ce qui est déjà une activité subtile, on sous-entend systématiquement l'expression «représenté par». Ainsi, lorsqu'on écrit «douze», on pense au nombre douze (qui, par exemple, est un multiple de 4) et non pas au mot «douze» (qui, par exemple, a 5 lettres). De même on écrit

$$12 = 4 + 8$$

et non pas

le nombre représenté par «12» = le nombre représenté par «4 + 8».

Cela étant, on peut se demander s'il est bon de créer la confusion en s'écartant de cet usage et de faire étudier à de jeunes élèves des relations portant sur des signes, alors qu'en règle générale ces relations portent sur les nombres représentés par ces signes.

Examinons encore deux exemples à la lumière des remarques précédentes. D'abord le cas des fractions ordinaires (fig. 5).

Trace les flèches de la relation «... n'est pas plus grand que...»

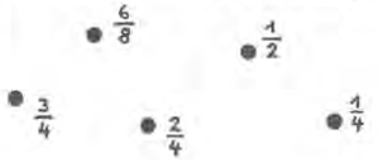


fig. 5.

La relation «... n'est pas plus grand que...» (ou $\leq$) est définie dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, ou dans $\mathbb{Q}_+$. 1/2 et 2/4 sont deux écritures représentant le même nombre. Il n'est pas heureux de les figurer par deux points distincts. Et la remarque reste valable si l'on considère les fractions comme des couples, ou comme des représentants de classes d'équivalence de couples. Ce qui reste, c'est qu'on travaille dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Pour les mêmes raisons il est inutile de recourir à l'usage du signe d'équivalence $\equiv$ pour écrire

$$\frac{3}{4} \equiv \frac{6}{8}$$

sous prétexte que $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{8}$ sont des fractions différentes, qui ne sauraient être égales, et qui ne sont donc qu'équivalentes. Si l'on se place dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, il ne fait pas de doute que ces fractions représentent le même nombre et que, dès lors,

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} .$$

Dans le cas des quantités physiques on trouve une situation analogue.

Considérons par exemple «7,5 m» et «750 cm». Si l'on admet que ces deux écritures représentent la même quantité physique, on écrit

$$7{,}5 \text{ m} = 750 \text{ cm}.$$

Utiliser le signe $\equiv$ voudrait dire qu'on exprime l'équivalence d'autre chose que de quantités physiques... Mais de quoi au juste ? De signes ? Ou d'autre chose ? Car ce n'est pas exclu. La question mériterait une étude plus approfondie. On voit que le souci d'apporter une précision supplémentaire ne fait qu'augmenter la confusion.
L'usage du signe $\equiv$ met le lecteur dans la situation de ne plus savoir de quoi l'on parle, puisqu'on énonce quelque chose qui concerne des quantités physiques et qu'on l'exprime par un signe qui se rapporte à autre chose.
Dans ce cas, comme dans les exemples qui précèdent, il vaudrait mieux éviter de placer les élèves simultanément sur le plan des signes et sur celui des objets qu'ils représentent.

Le boulier chinois (suite)

par François Jaquet

La multiplication

Comme la multiplication par écrit, en colonnes, l'opération effectuée sur le boulier n'échappe pas à l'exigence sévère de certains prérequis: la maîtrise des tables d'addition et de multiplication, la connaissance et la compréhension de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la compréhension de la numération de position et du calcul sur les puissances de la base.
L'utilisateur du boulier peut évidemment avoir retenu des recettes et des «trucs» comme le font certains de nos élèves pour effectuer une multiplication par écrit. Il ne pourra cependant pas se contenter d'une maîtrise relative de ses «tables». Il lui faut une sûreté absolue dans ce domaine, car l'opération terminée, il ne reste que le produit sur le boulier. Les calculs intermédiaires s'effacent au fur et à mesure que le produit final se construit, ce qui exclut toute vérification.
La multiplication de deux nombres se décompose en produits partiels, par distributivité:

Exemple: 47×512

47×512	47×500	$40 \times 500 = 20 \times 10^3$	fig. 15
		$7 \times 500 = 35 \times 10^2$	fig. 16
	47×10	$40 \times 10 = 4 \times 10^2$	fig. 17
		$7 \times 10 = 7 \times 10$	fig. 18
	47×2	$40 \times 2 = 8 \times 10$	fig. 19
		$7 \times 2 = 14$	fig. 20

Sur le boulier, on place les deux facteurs ainsi:

Le premier (47) est utilisé comme référence uniquement. Si la place le permet on le pose sur des tiges libres, à gauche; sinon on le conserve par écrit, dans l'énoncé du problème par exemple. Le second facteur (512) se place sur les tiges suivantes vers la gauche, sur lesquelles viendra se construire le produit final (fig. 14).
Les différents produits partiels vont s'additionner, alors que disparaîtront, un à un, les chiffres du second facteur, dès qu'ils auront été utilisés complètement:

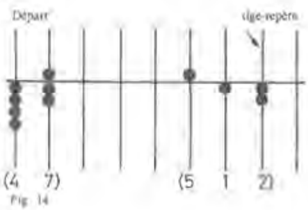


Fig. 14

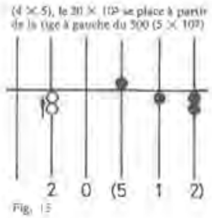


Fig. 15

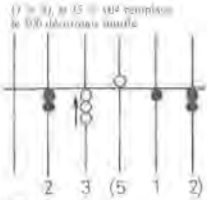


Fig. 16

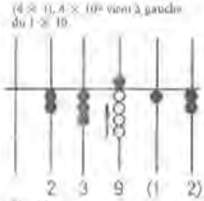


Fig. 17

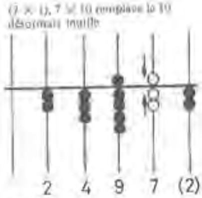


Fig. 18

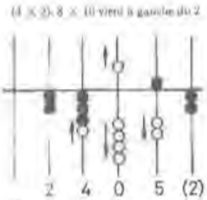


Fig. 19

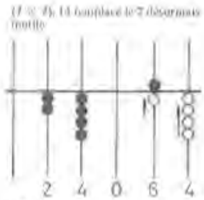


Fig. 20

Cette multiplication s'est effectuée en six étapes, correspondant aux six produits partiels. Le problème des retenues et des additions ne se pose pas, pour autant que la technique additive soit maîtrisée et automatisée au niveau des manipulations.

Voici encore un exemple de multiplication qui illustre la décomposition d'un produit par distributivité:

$345 \times 158{,}5 = 54682{,}5$

produits partiels		états successifs du boulier
		(158,5)
345×100	$300 \times 100 = 3 \times 10^4$	3-(158,5)
	$40 \times 100 = 4 \times 10^3$	34(158,5)
	$5 \times 100 = 5 \times 10^2$	345(58,5)
345×50	$300 \times 50 = 15 \times 10^3$	495(58,5)
	$40 \times 50 = 20 \times 10^2$	515(58,5)
	$5 \times 50 = 25 \times 10$	5175(8,5)
345×8	$300 \times 8 = 24 \times 10^2$	5415(8,5)
	$40 \times 8 = 32 \times 10$	5447(8,5)
	$5 \times 8 = 40 \times 1$	54510,(5)
$345 \times 0{,}5$	$300 \times 0{,}5 = 15 \times 10$	54660,(5)
	$40 \times 0{,}5 = 20 \times 1$	54680,(5)
	$5 \times 0{,}5 = 25 \times 10^{-1}$	54682,5

Nous venons de donner ici une technique opératoire de la multiplication sur le boulier. Il en existe beaucoup d'autres ayant toutes ceci de commun: on décompose toujours le produit en ses composantes fondamentales et l'addition des produits partiels n'est qu'une simple «pose» sur le boulier. Ces algorithmes allient rapidité, ingéniosité, sûreté, voire élégance.

La division

Ici encore, les algorithmes sont nombreux. Nous en présenterons un qui se rapproche beaucoup de notre technique de division utilisée en Suisse romande. Nous n'entrerons pas dans les détails et les justifications sur la façon de poser le dividende et le quotient. Nous nous contenterons de donner deux exemples de division.

1. Division par un diviseur d'un chiffre:
   21089 : 9 = 2342 + 2 : 9

Départ: on pose le dividende

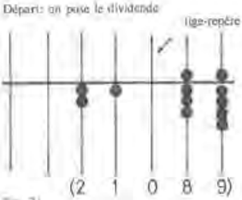


Fig. 21

Dans 21, combien de fois 9 ?
On pose 2 et on soustrait 2 × 9 de 21
Il reste 3089

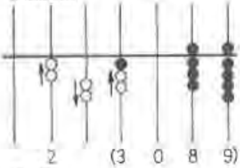


Fig. 22

Dans 30, combien de fois 9 ?
On pose 3 et on soustrait 3 × 9 de 30
Il reste 389

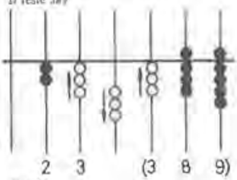


Fig. 23

Dans 38, combien de fois 9 ?
On pose 4 et on soustrait 4 × 9 de 38
Il reste 29

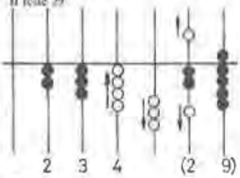


Fig. 24

Dans 29, combien de fois 9 ?
On pose 2 et on soustrait 3 × 9 de 29.
Il reste 2

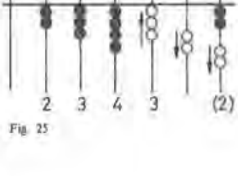


Fig. 25

Quotient entier: 2342

2. Division par un diviseur de plus d'un chiffre:
6165 : 45 = 137

Départ: on pose 6165 (le 45 [illegible] placé sur la gauche, en mémoire)

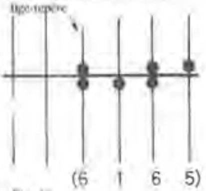


Fig. 26

Dans 61, combien de fois 45 ?
On pose 1 et on soustrait 1 × 45 de 61 (en deux étapes: 1 × 40 et 1 × 5)
Il reste 1665

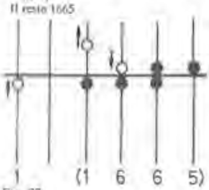


Fig. 27

Dans 166, combien de fois 45 ?
On pose 3 et on soustrait 3 × 45 de 166 (en deux étapes)
Il reste 315

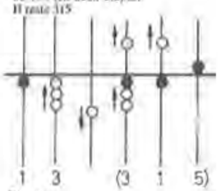


Fig. 28

Dans 315, combien de fois 45 ?
On sous-estime [1], et on pose 6. On soustrait 6 × 45 de 315.
Il reste 45

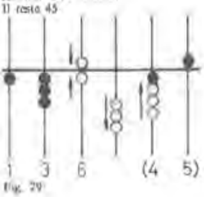


Fig. 29

On reprend en constatant qu'il y a encore une fois 45 dans 45, on ajoute 1 sur la tige des unités.
Le quotient est exact.

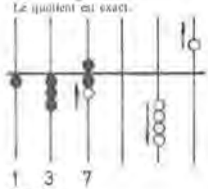


Fig. 30.

En guise de conclusion, ces quelques mots:

Dans les traités sur le maniement du boulier, on insiste beaucoup sur l'entraînement et l'exercice, on donne des «raccourcis», on demande à l'utilisateur de rechercher des procédés plus économiques en mouvements. Le maniement du boulier est élevé au rang d'art.
Le lecteur de Math-Ecole n'atteindra pas cette perfection, demandée à l'écolier chinois. Il aura tout d'abord de la peine à se procurer un boulier — qu'on trouve cependant parfois dans les boutiques de «chinoiseries» de nos pays

---

[1] (fig. 29) Il est évident qu'un utilisateur entraîné ne fera pas cette sous-estimation et qu'il arrivera en une seule étape à la fin de sa division.

occidentaux. Il n'aura ensuite pas le temps de s'entraîner. Même dans l'éventualité où il obtiendrait une sûreté et un rythme «rentable» par rapport au calcul écrit, il sera découragé par les capacités supérieures du concurrent électronique, la calculatrice.
Il reste de bonnes raisons cependant de s'intéresser au boulier et à son maniement: la découverte ou plutôt «redécouverte» de techniques deux à trois fois millénaires; la constatation de l'universalité de certains algorithmes, une meilleure connaissance et une plus grande estime de ce qui n'est pas occidental, la recherche d'un certain art de vivre qui s'exprime jusque dans le calcul. N'est-ce pas suffisant ?

● **«Lu pour vous»**

Jean et Simonne Sauvy viennent de publier (Paris, OCDL, 1977) «L'espace et la ville»: un recueil de 18 fiches de travail pour des activités multiples allant de la géographie à la mathématique en passant par l'histoire, le dessin et les travaux manuels.

Thèmes: Observation d'un quartier, perspectives, changement de points de vue, maquettes, plans à mailles carrées, déplacement des ombres, cadran solaire, construction, mesure de distances horizontales et hauteurs, profils et relevés, etc.

Les travaux, exercices et jeux proposés autorisent aussi bien des activités en classe ou à la maison que sur le terrain.

Les notions mathématiques pré-requises sont réduites à quelques connaissances sur les opérations (addition et multiplication simples) et quelques notions de représentation d'une situation spatiale au moyen de schémas, réseaux, croquis.

Les possibilités de recherche et de découverte sont, en revanche, extrêmement riches et «collent» parfaitement au monde dans lequel vit l'enfant de la fin du XXe siècle.

Un bel exemple d'activités d'éveil en pluridisciplinarité.

F. J.

IRDP, No 9693.

J. A. 1211 GENEVE 6

Mademoiselle
Madeleine [illegible]
Maîtresse d'application
Rue Ls-de-Savoie 27
1110 MORGES

TABLE DES MATIERES

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin, F. Oberson, S. Roller, J.-J. Walder.
Rédacteur-responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 12.—, Etranger F 14.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, CH-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie typo-offset Fiorina & Burgener, 1950 Sion