13e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la première épreuve

Le Rallye mathématique transalpin entre dans sa treizième année, toujours plus apprécié puisque de nouvelles régions s'y lancent : en Belgique à large échelle, en Franche-Comté voisine, aux Etats-Unis et en Turquie de manière expérimentale. Ses animateurs se sentent un peu à l'étroit dans l'épithète « transalpin », ils considèrent désormais ce terme au sens large.

Une grande partie des problèmes de cette première épreuve ont été proposés par la section de Suisse romande, ils ont ensuite été relus et décortiqués au cours des travaux de groupe de la huitième rencontre internationale du RMT qui s'est tenue en octobre dernier à Bourg-en-Bresse. Recomposés, ils ont enfin fait l'objet d'une nouvelle consultation de toutes les sections pour aboutir à la forme sous laquelle ils sont présentés dans les pages suivantes. Mais leur vie ne s'arrêtera pas à l'épreuve, passée en janvier et février dans près de 2500 classes, dans 8 pays et dans six langues : français, italien, allemand, hébreu, anglais, turc. Ils donneront lieu à de nombreuses analyses sur la manière dont les élèves les ont résolus, à des publications, à des développements pour les maîtres qui souhaitent les exploiter en classe et à d'éventuelles versions nouvelles pour de futures épreuves. Comme d'habitude, Math-Ecole publiera des résultats et commentaires sur ces problèmes dans ce numéro et les prochains.

On trouvera d'autres informations sur le site de la section suisse romande, RMT-SR : http://www.rmt-sr.ch

1. AUTOCOLLANTS (Cat. 3)

Les autocollants que Julie et Oscar collectionnent se vendent dans des enveloppes.

Dans chaque enveloppe, il y a dix feuilles d'autocollants. Sur chaque feuille, il y a dix autocollants.

Aujourd'hui, Julie et Oscar comptent leurs autocollants. Julie a 4 enveloppes complètes, 24 feuilles complètes hors des enveloppes et 12 autocollants séparés.

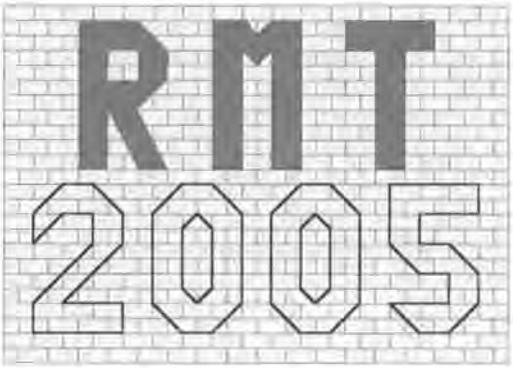
Oscar a 6 enveloppes complètes, 3 feuilles complètes hors des enveloppes et 31 autocollants séparés.

Qui a le plus d'autocollants ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2. RMT 2005 (Cat. 3, 4)

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.

Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».



Qui utilisera le plus de peinture ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

3. LIVREZ LES COMMANDES (Cat. 3, 4)

Une fleuriste a préparé cinq bouquets de fleurs pour cinq de ses clientes:

- un bouquet d'œillets rouges;
- un bouquet d'œillets jaunes;
- un bouquet de tulipes rouges;
- un bouquet de tulipes jaunes;
- un bouquet de marguerites blanches.

On sait que:

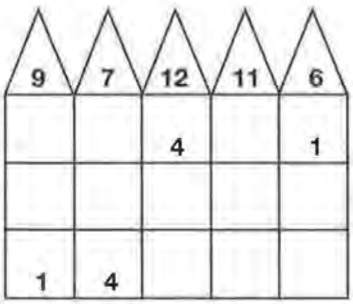
- Mme Andrey achète uniquement des fleurs rouges;
- Mme Basset habite à Lussy;
- Mme Carillo et Mme Dardel veulent des fleurs jaunes;
- Mme Lamartine et Mme Carillo veulent seulement des œillets !

À quelle cliente chacun de ces bouquets est-il destiné? Notez vos explications.

4. LES BELLES COLONNES (Cat. 3, 4, 5)

Écrivez un nombre dans chaque case en respectant les consignes suivantes:

- Vous utilisez seulement les nombres 1, 2, 3, 4, 5 mais autant de fois que vous le voulez.
- Dans chaque ligne, tous les nombres sont différents.
- Dans chaque colonne, tous les nombres sont différents.
- Pour chaque colonne, le nombre écrit dans le triangle est la somme des trois autres nombres.

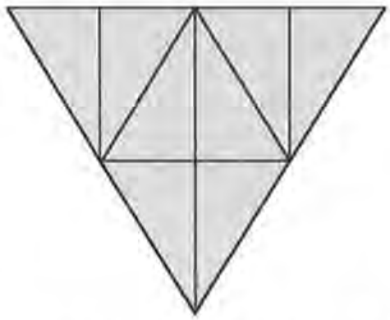


Complétez les colonnes et expliquez votre raisonnement.

5. LE FOULARD DE GRAND-MERE (Cat. 3, 4, 5)

Voici le dessin du foulard de grand-mère.
Camille, sa petite-fille, le trouve très beau parce qu'il a beaucoup de triangles.
Elle essaie de les compter tous, mais elle a du mal à le faire et n'est jamais sûre de sa réponse.

Selon vous, combien de triangles peut-on voir dans ce dessin?



Désignez-les précisément pour qu'on puisse comprendre facilement comment vous les avez comptés.

6. LES TROIS LAPINS (Cat. 4, 5, 6)

Trois lapins mangent des légumes dans mon potager.
Le lapin blanc mange chaque soir une carotte.
Le lapin brun mange chaque soir un navet ou, s'il n'y en a plus, 3 carottes.
Le lapin noir mange chaque soir un chou ou, s'il n'y en a plus, 3 navets ou, s'il n'y en a plus non plus, 5 carottes.
Ce matin, j'ai récolté une partie des légumes de mon potager.
J'ai laissé pour les lapins 45 carottes, 21 navets, 5 choux.

Pendant combien de jours vont-ils pouvoir se nourrir tous les trois?
Expliquez comment vous avez trouvé.

7. LA PLAQUE DE VOITURE (Cat. 4, 5, 6)

La police recherche la voiture d'un voleur.

- Un premier témoin a constaté que le numéro de la plaque a cinq chiffres, tous différents,
- un deuxième témoin se souvient que le premier chiffre est 9,
- un troisième témoin a noté que le dernier chiffre est 8,
- un quatrième témoin, qui a 22 ans, a remarqué que la somme des cinq chiffres de la plaque est égale à son âge.

Quel peut être le numéro de la plaque de la voiture que la police recherche?
Écrivez toutes les possibilités et expliquez comment vous les avez trouvées.

8. POUR QUI SONNE L'HORLOGE ? (Cat. 5, 6)

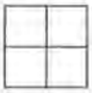
Pierre possède une horloge qui sonne:

- un coup à la demie de chaque heure,
- le nombre de coups indiqués par la petite aiguille à chaque heure pile.

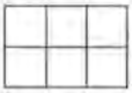
Lorsqu'il est midi ou minuit, elle sonne 12 coups.
Lorsqu'il est midi et demi, elle sonne 1 coup.
Lorsqu'il est 13h, elle sonne 1 coup parce qu'il est une heure de l'après-midi.
Pierre remonte le mécanisme de l'horloge tous les jours entre midi et midi et demi.

Combien de coups l'horloge sonne-t-elle entre deux interventions de Pierre ?
Montrez clairement comment vous avez trouvé.

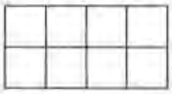
9. GRILLES D'ALLUMETTES (Cat. 5, 6, 7)



Pour construire cette figure, il a fallu 12 allumettes.



Pour cette deuxième figure, il a fallu quelques allumettes de plus !

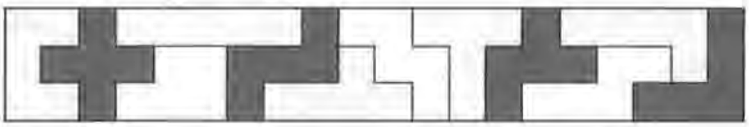


Et pour cette troisième figure, encore davantage d'allumettes !

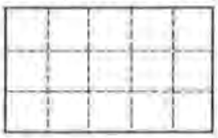
En continuant à construire des figures de la même façon, combien d'allumettes seront nécessaires à la construction de la 100e ? Justifiez votre réponse.

10. AVEC DES PENTAMINOS (Cat. 5, 6, 7)

Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. Il y a 12 pentaminos différents avec lesquels on peut former un rectangle de « 3 x 20 » :



Éric joue avec ses 12 pentaminos et cherche à faire un rectangle de « 3 x 5 ». Il prend une des 12 pièces, et s'aperçoit qu'il n'arrivera pas à finir son rectangle.



Quelles pièces Éric n'arrivera jamais à utiliser pour son rectangle ?
Expliquez pourquoi.

11. LES CHAMPIGNONS (Cat. 6, 7, 8, 9)

Mon oncle et ses quatre enfants, Anna, Bruno, Céline et Daniel, sont allés aux champignons.

- Ils ont cueilli 30 champignons en tout.
- Chacun a récolté au moins deux champignons.
- Anna et Céline ont, ensemble, moins de 8 champignons.
- Ce n'est pas Anna qui a récolté le moins de champignons.
- Le nombre de champignons de Céline est le tiers du nombre de ceux de Bruno.
- Daniel, à lui seul, a récolté autant de champignons que mon oncle et Anna.

Combien chacun a-t-il pu récolter de champignons? Justifiez vos réponses.

12. LES BISCUITS D'EMILIE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Émilie a confectionné des petits biscuits, entre 300 et 500.

Elle réfléchit à la façon dont elle pourrait les emballer dans plusieurs sachets contenant le même nombre de biscuits:

- si elle met 9 biscuits par sachet, il lui en restera 5,
- si elle met 8 biscuits par sachet, il lui en restera 7,
- si elle met 12 biscuits par sachet, il lui en restera 11,
- si elle met 16 biscuits par sachet, il lui en restera 15.

Combien de biscuits Émilie a-t-elle faits ? Expliquez comment vous avez trouvé.

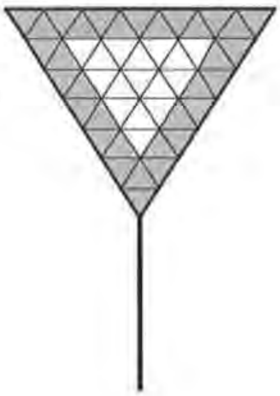
13. LES « BIPALINDROMES » (Cat. 7, 8, 9)

Au pays des Bipalindromes, toutes les plaques de voitures portent un nombre de six chiffres différents de 0 et chaque nombre est formé de deux palindromes de trois chiffres.
Un palindrome est un nombre ou un mot qui se lit de la même manière de droite à gauche et de gauche à droite comme par exemple 121.
Voici des plaques de voitures du pays des Bipalindromes 121 787 ou 444 242 ou 676 141 ou 111 111

Par contre, 131 456 ne convient pas car le deuxième groupe de trois chiffres n'est pas un palindrome.
De même, 303 565 ne convient pas car le premier palindrome contient un 0 qui n'est pas autorisé au pays des Bipalindromes.

Combien de numéros de plaques de voitures différents peut-il y avoir au maximum dans ce pays ? Expliquez votre démarche.

14. DROLE DE PANNEAU ! (Cat. 7, 8, 9)



Ce panneau triangulaire est formé de petits triangles équilatéraux, tous isométriques. 16 d'entre eux forment un triangle intérieur et les 33 autres constituent la bordure extérieure à ce triangle.

Est-il possible de fabriquer un autre panneau triangulaire, de taille différente mais, pour lequel la bordure extérieure, toujours de même largeur, aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieure?

Expliquez votre démarche et justifiez votre réponse.

15. LA SOURIS (Cat. 7, 8, 9)

Un petit blagueur a secrètement mis une souris dans la veste de l'institutrice.

On découvre assez vite que le coupable qui a joué le mauvais tour est un des trois élèves suivants:
Claude, Marco ou Pedro.
Claude dit: «Ce n'était pas moi.»
Marco prétend: «C'était Pedro.»
Pedro proteste: «C'était Claude.»

Sachant qu'un seul des élèves dit la vérité et que deux d'entre eux sont des menteurs, aidez le détective à mener l'enquête pour savoir qui ment et qui pourrait être le coupable.

Expliquez votre raisonnement.

16. EXCURSION A LA MER (Cat. 8, 9)

Pour effectuer le trajet entre Dublin et Kinsale, une petite ville de plaisance au bord de la mer, les autobus mettent une heure exactement. À chaque heure pile, il en part, simultanément, un de Dublin vers Kinsale et un autre, de Kinsale vers Dublin.

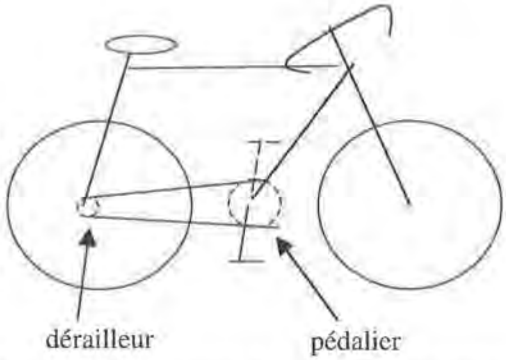
Aldo, est à la station de Dublin. Comme l'autobus est plein, il part à pied, en même temps que le bus, en direction de Kinsale. Après avoir marché 50 minutes, il croise l'autobus qui vient de Kinsale.

Combien de temps Aldo devra-t-il encore marcher avant que le prochain autobus venant de Dublin ne le rattrape, et qu'il puisse éventuellement y monter.

Trouvez la solution et expliquez votre raisonnement.

17. LE VELO DE COURSE (Cat. 8, 9)

Quand il ne pleut pas, Louis se rend à l'école avec son vélo de course



(Le rapport entre le nombre de dents du pédalier et celui du dérailleur donne le nombre de tours que la roue effectue à chaque tour du pédalier.)

À l'aller, pour gagner du temps, il utilise un grand rapport: 55 dents au pédalier et 11 dents au dérailleur. Au retour, plus fatigué, il utilise un rapport plus faible: 42 dents au pédalier et 14 dents au dérailleur.

À l'aller, il lui faut 100 tours de pédales pour arriver à l'école alors qu'au retour, après 100 tours, il lui manque encore 400 mètres pour arriver à la maison.

À quelle distance de l'école se trouve la maison de Louis ?

Expliquez votre raisonnement.

18. A LA RECHERCHE DU RECTANGLE (Cat. 9)

Avec 24 trapèzes rectangles identiques, on recouvre entièrement un rectangle dont un côté mesure 12 cm. Chaque trapèze a 16 cm de périmètre et les mesures de tous ses côtés, en cm, sont des nombres naturels, tous différents.

Combien mesure l'autre côté du rectangle? Dessinez le rectangle avec les trapèzes qui le recouvrent.

Expliquez votre raisonnement.

QUELQUES RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

Problème 2 « RMT 2005 »[1]

Nous sommes ici dans la comparaison des aires, avec une intention évidente de faire apparaître la mesure, à un niveau scolaire où ces notions sont en phase d'approche[2], sans encore aucun formalisme ni règle institutionnalisés.
Les élèves doivent se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver un moyen de les comparer : par recouvrement et découpages, par pavage avec une ou plusieurs formes et, en cas d'adoption d'un pavé unité, par comptage.
Parmi les unités les plus naturelles pour ce contexte, il y a la « brique » (rectangle) et la « demi-brique » (carré), mais, dans un cas comme dans l'autre, il faudra tenir compte des triangles (demi-carré) et des trapèzes (3/4 de brique ou 1 carré et demi) qu'il faudra convertir en briques ou en carrés.
L'unité choisie, les règles d'échanges bien assimilées, il faut encore organiser le comptage de manière rigoureuse car les différentes formes qui apparaissent sont nombreuses et disposées différemment dans le « 2 » et le « 5 » qui restent à peindre.
Au passage, on peut remarquer qu'il n'est pas très utile de calculer l'aire des « 0 », en faisant appel à un principe d'équivalence, encore intuitif. On peut ainsi s'éviter bien des comptages et des sources d'erreur.

1 Enoncé en page 19
2 Selon les moyens d'enseignement de Suisse romande « Mathématiques 3P et 4P », RMT 2005 aurait sa place dans le module 7 « Des problèmes pour mesurer » visant à faire « prendre conscience de la nécessité d'une unité pour mesurer et comparer des grandeurs », aux côtés d'activités comme, en 3e : *Faux jumeaux, Quelle forme, Les six carrés,* en 4e : *Du plus grand au plus petit, Empreintes, Mosaïques.*

Il ne reste plus alors qu'à conclure : expliquer que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en disant par exemple que le « 2 » correspond à 17 briques alors que le « 5 » correspond à 18 briques.

Analyse des résultats

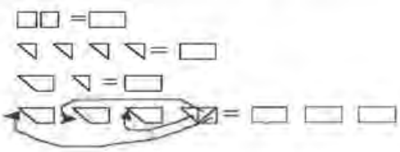
(sur 68 copies de Suisse romande : 25 de catégorie 3 et 43 de catégorie 4)

1 Dénombrement des briques

C'est la procédure « experte » par mesure d'aire, selon une même unité, la « brique » rectangulaire.

31 copies (46 %)

- dont 8 correctes, qui ne prennent en compte que deux briques[3] :
  C'est Marc qui utilisera le plus de peinture. On a compté les briques du cinq et du deux. Il y a 17 briques dans le deux et 18 briques dans le cinq.
  ou les quatre briques :
  C'est Marc qui peindra le plus parce qu'il peindra le zéro qui = 21 briques et le 5 qui a 18 briques. ...Il peindra 39 briques. Sophie peindra que 38 briques. Comment est-ce qu'on a fait. On n'a compté les briques des deux 0 du 5 et du 2.



- dont 8 avec une seule erreur de comptage des briques,
- dont 6 avec deux erreurs de comptage, ou inachevées mais avec une description précise des échanges, par type de pièce, comme :
- dont 9 sans donner le résultat du comptage, du genre :

3 L'orthographe des copies citées a été partiellement corrigée, mais la syntaxe et les expressions ont été maintenues.

C'est Marc qui a peint le plus. On a compté les briques
ou avec des détails du comptage imprécis et des transformations erronées comme:

C'est Sophie qui doit peindre le plus, on a compté les carreaux en calculant, Sophie va en peindre 36 et Marc 32,5.

Sophie *10 + 9 = 19*	*Marc* *10 + 10 = 20*
4 + 10 = 14 : 2 = 7	10 + 6 = 16 : 2 = 8
5 + 9 = 14 et le 3/4 est 6.8	4 + 6 = 10 et le 3/4 est 2.5
9 + 4 = 13 : 3 = 3.20	4 + 2 = 6 : 3 = 2
19 + 7 + 6.8 + 3.2 = 36	20 + 8 + 2.5 + 2 = 32.5

(Les comptages des formes sont exacts, on remarque au passage la division par 3 pour les triangles, une transformation « 3/4 » pour les trapèzes avec, vraisemblablement, l'usage de la calculatrice et l'apparition de nombres décimaux sur son écran, que ces élèves n'ont encore pas étudiés en classe.)

2. Dénombrement des formes (ou parties) à l'intérieur des lettres

Dans cette procédure, les nombres de rectangles, de carrés, de triangles et de trapèzes sont additionnés, sans tenir compte de la grandeur de ces figures; c'est-à-dire sans la définition d'une unité commune.

24 copies (35 %)

- dont 10 indiquent 59 pour Sophie et 56 pour Marc, du genre:
  Sophie peindra le plus avec le plus de peinture.
  On a compté les briques du 2, 0 et du 0, 5. Alors le 2, 0 (59) sont les plus grands et le 0, 5 (56) sont les plus petit.
- dont 14 indiquent des résultats de comptages proches de 59 et de 56, dans lesquelles une ou deux formes ont été oubliées ou comptées à double.

3. Comparaison par superposition/décomposition ou par recouvrement pas à pas

Dans cette procédure, on ne s'intéresse pas à l'aspect numérique de la mesure. Il n'y a pas de nombre de parties ou d'unités

7 copies (10 %),

- dont 4 parlent de superposition du « 2 » et du « 5 » du genre:
  Marc peindra plus que Sophie. On l'a retourné et on a vu que le cinq avait plus de briques.
  ou, de manière un peu ambiguë, vu l'erreur:
  Nous avons décalé le deux et nous avons découpé le tour du deux puis on l'a plié sur le cinq et nous avons dû encore les découper et nous avons vu que le deux a besoin de plus de peinture que le cinq. Nous avons vu que les zéros sont

identiques. Ce sera Sophie qui utilisera le plus de peinture.

- dont 3 montrent que les élèves ont marqué ou colorié simultanément le « 2 » et le « 5 » pièce par pièce.
  Par exemple, une copie présente un coloriage avec des couleurs (une dizaine) identiques pour les différentes pièces des deux zéros et une progression du coloriage à partir du haut dans le « 5 » et le « 2 » : les 3 rectangles de la première ligne du « 5 » en vert, orange et jaune, comme ceux des deux premières lignes du « 2 », puis les 2 carrés de la deuxième ligne du cinq en bleu comme les 4 triangles des deux premières lignes du « 2 », puis les deux rectangles de la deuxième ligne du « 5 » en violet et brun comme le rectangle de la troisième ligne du « 2 » et le trapèze et le triangle de l'extrémité supérieure droite du « 2 », etc. À la fin, il reste deux parties triangulaires signalées par « vides » et correspondant à une brique, dans le bas du « 5 » avec l'indication *« si on les colorie on utilisera plus de peinture »* et la conclusion *« Le 05 utilise plus de peinture. »*

4. Prise en compte des périmètres des lettres pour déterminer la quantité de peinture.

6 copies (9 %)

- dont 5 mesurées en cm, qui aboutissent à de longues additions de nombres décimaux et des sommes proches de 17 cm.
- dont 1 compte les segments du périmètre : *On a compté les traits du 5 et du 2 et on a vu que le 5 avait plus de traits. Comme les deux 0 sont les mêmes on ne les a pas comptés et alors le 5 a 15 traits. Et le 2 a 14 traits.*
  C'est Marc qui peint le plus!

Attribution des points

Lors de l'analyse a priori, il avait été prévu d'attribuer les points selon le barème suivant :

4 La réponse juste (Marc) avec l'aire des lettres « 2 » et « 5 » et les explications sur la manière de les obtenir (si les aires des « 0 » sont aussi indiquées, 42 carrés, sans erreur, on les accepte)

3 La réponse juste, avec les aires, mais sans indication sur la manière dont elles ont été obtenues
ou la réponse juste et expliquée, avec une erreur dans le calcul de l'aire de « 0 »

2 Une seule erreur dans le comptage des unités d'aire du « 2 » ou du « 5 », avec explication et réponse cohérente

1 La réponse juste (Marc), sans explications sur la détermination de l'aire (« on a vu que… »)

0 Incompréhension du problème ou prise en compte des périmètres, estimations visuelles

La richesse des procédures découvertes lors de l'analyse des résultats a conduit les évaluateurs à assouplir légèrement ce barème :
3 points ont aussi été accordés aux procédures de dénombrement des briques, avec unité de mesure unique (1) ne présentant qu'une seule erreur de comptage ;
2 points ont été attribués aux réponses justes avec deux erreurs de comptage ;
1 point a été attribué, après négociations difficiles entre évaluateurs, à des procédures de dénombrement par formes (2) sans le respect de l'unicité de l'unité, mais avec un comptage exact. On considère alors que cette insuffisance est pénalisée par un retrait de 3 points mais que le travail de comptage et la cohérence de la conclusion méritent tout de même 1 point.

Certains évaluateurs trouvent parfois que les critères d'attribution des points du RMT sont trop complexes et aspirent à une échelle réductrice du genre : « 4 : tout juste – 3 : juste – 2 : moyen – 1 : faux – 0 : tout faux » évitant les longues énumérations de types de réponses et de types d'erreurs.
Le cas du « RMT 2005 » est certes complexe. L'analyse a priori n'avait pas prévu toutes les procédures, en particulier la « non-constance »

de l'unité. Mais le phénomène se retrouve pour la majorité des problèmes : la complexité est inhérente à la résolution de problème. On ne pourrait l'éviter qu'en se limitant à proposer des tâches algorithmiques, beaucoup plus faciles à noter.

Pour attribuer des points aux problèmes du RMT, il faut se mettre dans la tête des élèves qui les ont résolu et tâcher de reconstituer leur cheminement intellectuel à partir des indices qu'ils sont capables de fournir.

Potentialités du problème pour la classe

« RMT 2005 » s'est révélé difficile en catégorie 3 comme en catégorie 4 (avec des moyennes des points attribués respectivement de 1,24 et 1,6).

On pourrait le regretter ou craindre un effet de découragement chez les élèves.

On peut au contraire se réjouir de la « consistance » du problème et, vu qu'aucune copie n'est blanche, des efforts entrepris par les groupes qui se sont engagés dans la résolution.

Dans les manuels scolaires, la tendance actuelle est de simplifier la tâche des élèves, d'écarter les obstacles éventuels, de faciliter les comptages en agrandissant les figures et en diminuant leur nombre. De là à dire qu'on « cherche à ce qu'il n'y ait plus de problème », il n'y a qu'un petit pas.

On est ici dans une problématique de « dévolution ». Quelle partie de la tâche va-t-on laisser au groupe d'élèves, quelle partie va-t-on confier à l'énoncé du problème ?

Dans « RMT 2005 », on laisse beaucoup de tâches aux élèves et aux maîtres qui voudraient exploiter ce problème pour la classe, en lieu et place d'activités bien progressives qui vont guider l'élève vers des automatismes non intégrés. La notion « d'invariance de l'unité » dans la construction d'une procédure de mesure est une découverte essentielle, qui ne deviendra consciente que par la confrontation de cas où elle est prise en compte avec des cas où elle est oubliée.

Au vu des 68 copies analysées, on peut être presque certain que les principales stratégies relevées doivent apparaître au moins une fois dans une classe. Ceux qui n'ont pas encore reconnu l'importance d'une unité constante pourront se confronter avec ceux qui l'utilisent, peut-être inconsciemment, avec ceux qui n'ont pas encore de méthode rigoureuse de comptage, avec ceux pour qui les règles d'échanges entre rectangles, carrés, triangles et trapèzes sont encore vacillantes.

Il y a de la place, dans ce contexte, pour des argumentations, des validations entre élèves, puis des développements et des variantes (il y a d'autres lettres ou d'autres chiffres à peindre sur le mur) pour aller jusqu'aux institutionnalisations de la part du maître.

À condition, bien sûr, qu'on ne fasse pas « RMT 2005 » en plus des autres activités du programme sur les mesures d'aire, mais *à la place*.

Corrections : une équipe d'étudiants de la HEP Bejune, de la classe de A. Gaggero, avec la collaboration de F. Jaquet

Problème 7 « Grilles d'allumettes »[4]

Ce genre de problème est courant dans le RMT. Sans encore avoir de connaissances explicites sur les fonctions, les élèves doivent percevoir qu'il y a deux suites en correspondance très étroite : celle des figures, dans l'espace réel ou dans celui de la feuille, et celle des nombres d'allumettes permettant de les réaliser. Lorsqu'on passe entièrement dans le registre numérique, la suite des figures devient celle de leurs numéros d'ordre : les nombres naturels ordonnés.

L'analyse a priori du problème, fondée sur des années d'expérience et d'analyses, s'est révélée assez précise, en voici une partie :

4 Enoncé en page 21

Analyse de la tâche

- *Continuer éventuellement la suite de figures et compter pour chacune d'elles les allumettes, constituer une liste de nombres associée à celle des figures pour la compléter ensuite,*
- *Constater que dans la suite 12, 17, 22, 27, 32, ... on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.*
- *Ajouter 99 fois 5 à 12 pour obtenir $12 + 99 \times 5 = 507$.*

Ou / et: présenter les résultats sous forme de tableau:

figure no.	1	2	3	4	...	9	10	...	20	...	80	...	100
allumettes	12	17	22	27	...	52	57	...	107	...	407	...	507

et observer les séquences des chiffres 2 et 7 pour les unités, et des chiffres des dizaines pour sauter des étapes en travaillant de 10 en 10, de 20 en 20, etc.

Ou: Trouver la loi de passage qui permet ensuite de déterminer l'image de 100.

Ou: Utiliser la relation «multiplier par 5 et ajouter 7» (l'écriture algébrique $f(x) = 5x+7$ n'est pas attendue en catégorie 5 et 6) pour trouver la réponse attendue (507).

Ou: Sans construire la suite, ni passer par une procédure fonctionnelle, se rendre compte que la 100e figure aura une longueur de 101 et calculer les segments horizontaux: 3×101 et les verticaux 2×102.

Les procédures relevées

1. L'opération $12 + 99 \times 5 = 507$

C'est la procédure la plus efficace dite «experte», qui se passe dans le registre numérique, avec un minimum de références à la «suite des figures».

Le «12» est donné dans l'énoncé.
Le «5» est induit par le «il a fallu quelques allumettes de plus» de l'énoncé
Le «99» vient de la différence entre la première figure et la centième.

L'erreur la plus fréquente liée à cette procédure est 512 (100 en lieu et place de 99).
On la rencontre surtout chez les groupes de catégorie 6 et 7, mais elle n'est pas majoritaire.

2. Le passage par le modèle d'une suite de figures

Cette procédure correspond à l'intention de l'énoncé du problème et est largement développée dans l'analyse de la tâche.
Le modèle géométrique se traduit par la progression arithmétique 12, 17, 22, ... dont il s'agira de calculer le 100e terme.
Les copies font apparaître de nombreux moyens de l'atteindre:

- Le plus «élémentaire» est l'écriture des cent termes de la progression, mais il demande un contrôle précis par correspondance avec la suite des nombres naturels de 1 à 100. Les risques d'oublis sont élevés et, effectivement, les omissions ont été fréquentes dans ce long inventaire.
- Les élèves qui veulent «gagner du temps» par rapport à la longue écriture précédente vont jusqu'à 50 (257) et multiplient par 2 pour atteindre 514, d'autres vont jusqu'à 10 (57) et multiplient par 10 pour atteindre 570, d'autres encore considèrent que, vu qu'il y a 12 allumettes pour 2 rangs, il suffira de multiplier par 50 pour 100 rangs et 600 allumettes. Tous ces cas relèvent d'une «linéarisation» abusive, très courante dans tous les problèmes de ce genre où les élèves appliquent aveuglement des procédures «algorithmiques» consistant à reproduire des opérations d'une suite sur l'autre.
- Les procédures «fonctionnelles» consistant à trouver la loi de passage directe entre la suite des nombres naturels et la suite des nombres d'allumettes sont très rares. Pour les découvrir, il faudrait considérer la figure «zéro» composée de 7 allumettes et passer par la loi

« multiplier par 5 et ajouter 7 », pour la centième figure : 100 x 5 + 7.

3. Le passage par les carrés et leurs côtés
De nombreuses erreurs sont dues à une intuition fautive selon laquelle, comme la première figure est composée de 12 allumettes en 4 carrés, il faudra 3 allumettes par carrés, ce qui entraîne des réponses proches de 600, compte tenu des imprécisions dans le calcul du nombre de carrés de la centième figure.

Attribution des points

C'est ainsi que le barème a été établi, lors de l'analyse a priori du problème :

4 *Réponse correcte (507) avec explication correcte de la démarche (12 + 99 x 5 ou 3 x 101 + 2 x 102, etc.)*

3 *Réponse correcte (507) avec explication peu claire ou incomplète*

2 *Valeur proche de 507, avec explications mais erreur sur le nombre de « pas » (réponse comme 502 ou 512), ou réponse correcte sans explication ou procédure correcte mais avec une (seule) erreur de calcul conduisant à une réponse plus éloignée de 507*

1 *Suite définie jusqu'à 10, puis erreur en « linéarisant » et en multipliant l'image de 10 par 10 pour avoir celle de 100 (réponse 570)*

0 *Incompréhension du problème*

On pourrait détailler la rubrique « 1 point » de ce barème en ajoutant d'autres exemples de « linéarisation », de 50 en 50, voire 2 en 2. Les linéarisations abusives de la catégorie (2) accompagnées de fautes de calcul et le passage par les carrés et leurs côtés (3) constituent l'essentiel des copies qui ont reçu « 0 point ». Il n'y a eu qu'une ou deux feuilles blanches témoignant d'une réelle « incompréhension du problème » ou d'un manque d'organisation de la classe qui aurait oublié le problème.

Selon ce barème, les résultats des classes de Suisse romande sont les suivants :

en nombre de classes et (pourcentages)

	cat. 5		cat. 6		cat. 7		total	
4 pts	7	(15)	23	(33)	22	(47)	52	(32)
3 pts	4	(08)	7	(10)	4	(08)	15	(09)
2 pts	6	(13)	8	(12)	6	(13)	20	(12)
1 pt	8	(17)	13	(19)	4	(08)	25	(16)
0 pt	22	(47)	18	(26)	11	(24)	51	(31)
total	**47**		**69**		**47**		**163**	**(100)**

On relève une nette progression de la catégorie 5 à la catégorie 7.
Les copies de 17 classes de Franche-Comté ont aussi été analysées et ont fait apparaître les mêmes procédures et des tendances comparables dans les résultats. Comme il ne s'agissait que d'une première expérimentation du RMT dans cette région où les programmes et manuels sont très différents de ceux de la Suisse romande, des comparaisons plus poussées n'auraient pas de signification.)

Corrections : une équipe d'étudiants de la HEP Bejune, de la classe de A. Gaggero, avec la collaboration de F. Jaquet et de l'équipe du RMT de Franche-Comté

Problème 11 « Les champignons »[5]

Ce problème se traduit par un système d'équations et inéquations à 5 inconnues, dont la résolution n'est pas évidente vu qu'il y a de nombreuses solutions.
Les élèves dont les connaissances en algèbre ne sont pas encore disponibles, peuvent le résoudre par inventaire des possibilités selon les relations les plus simples, ou par un tableau, puis par éliminations successives.

L'analyse de la tâche

Celle-ci a évolué sensiblement entre le début de l'élaboration du problème et la version définitive. À sa lecture, on perçoit la complexité de la recherche conduisant à toutes les solutions:

- *Chercher les répartitions possibles des champignons dans les paniers d'Anna et de Céline et trouver les 5 possibilités respectant les contraintes de l'énoncé : 5 et 2 ; 4 et 3 ; 4 et 2 ; 3 et 3, 3 et 2, à ce moment de la recherche.*
- *Calculer le nombre correspondant de champignons de Bruno dans les cinq cas puis la différence entre le nombre total de champignons et la somme des champignons récoltés par Anna, Céline et Bruno, c'est-à-dire ceux de mon oncle et Daniel ensemble.*
- *Calculer enfin les deux derniers nombres, à partir de la somme connue: D + O et de la relation donnée par l'énoncé: D = O + A. On peut procéder par essais successifs ou par un raisonnement arithmétique avec substitution, correspondant à une procédure algébrique. (Par exemple, en substituant O+A à D dans l'expression connue D + O, on obtient 2xO + A, puis en enlevant A on arrive à 2xO.*

Les résultats peuvent être organisés en tableau, par exemple :

Anna	*Céline*	*Bruno*	*A+B+C*	*D + O*	*Daniel*	*Oncle*
5	**2**	**6**	13	17	**11**	**6**
4	**3**	**9**	16	14	**9**	**5**
4	**2**	**6**	12	18	**11**	**6**
3	3	9	15	15	9	6
3	**2**	**6**	11	19	**11**	**8**

- *Le contrôle de la condition « Ce n'est pas Anna qui a récolté le moins de champignons » élimine la 4e hypothèse et il ne reste que les solutions, remises dans l'ordre A, B, C, D, O : (5, 6, 2, 11, 6) ; (4, 9, 3, 9, 5) ; (4, 6, 2, 11, 6) ; (3, 6, 2, 11, 8).*

Résultats (Tableau 1)

nb points	*niveau 6*	*niveau 7*	*niveau 8*	***totaux***	***% du total***
non rép.	*1*	*1*	*-*	***2***	***~1***
0	*29*	*8*	*5*	***42***	***28***
1	*39*	*27*	*16*	***82***	***55***
2	*2*	*7*	*6*	***15***	***10***
3	*-*	*1*	*4*	***5***	***~3***
4	*-*	*3*	*1*	***4***	***~3***
totaux	***71***	***47***	***32***	***150***	

5 Enoncé en page 22

Erreurs commises

(Tableau 2) pour les 42 classes ayant obtenu 0 pt

erreur	*nb classes*	*% du total*
la somme Anna + Céline est égale ou supérieure à 8	***12***	*29*
Anna a autant ou moins de champignons que Céline	***10***	*24*
le résultat de Daniel n'est pas égal à O + A	***10***	*24*
le résultat de Bruno n'est pas égal à 3 x C	***5***	*12*
la répartition des champignons n'est pas terminée	***4***	*10*
le total des champignons n'est pas égal à 30	***1***	*2*

Répartition des solutions

(Tableau 3) pour les 82 classes ayant fourni une seule réponse correcte, donc ayant obtenu 1 pt

solution	*niveau 6*	*niveau 7*	*niveau 8*	**totaux**	***en %***
4-9-3-9-5	*27*	*20*	*8*	**55**	***67***
5-6-2-11-6	*5*	*1*	*6*	**12**	***15***
4-6-2-11-7	*3*	*4*	*1*	**8**	***10***
3-6-2-11-8	*4*	*2*	*1*	**7**	***9***

Les résultats sont médiocres, très peu de classes sont arrivées au bout de la démarche, avec à la clé les 4 réponses correctes! (tableau 1) A cet égard, il faut reconnaître que le barème est sévère car il pénalise ceux qui ne sont pas allés au-delà de la première solution.

Trois erreurs sont assez fréquentes et réparties équitablement (tableau 2). Elles correspondent au non-respect de l'une des nombreuses contraintes de l'énoncé.

La répartition des solutions uniques est intéressante avec l'émergence nette de la solution 4-9-3-9-5 (tableau 3).

Les classes les meilleures ont, pour la plupart, argumenté comme l'analyse de la tâche le suggère et quelques classe ont travaillé avec un tableau dans lequel elles ajoutaient des champignons à chacune des personnes en partant de 2.

Deux classes seulement expliquent clairement des procédures systématiques pour les 5 possibilités respectant la contrainte A + C < 8 !

Corrections et commentaires : Didier-Michel Thiebaud et Catherine Meyer, Peseux (NE)