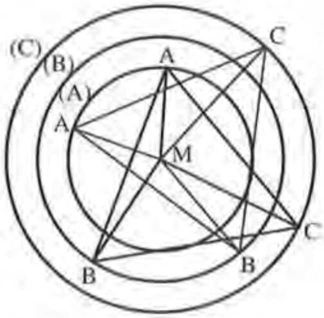
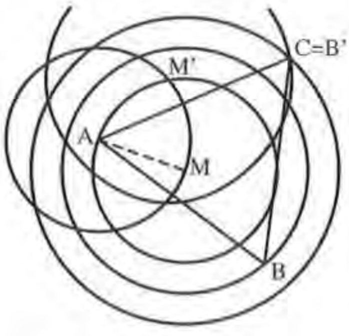
RÉPONSES AU PROBLÈME « LA FORÊT TRIANGULAIRE » (SUITE)[1]

Analyse du problème

1. L'énoncé ne donne aucune indication sur l'orientation de la forêt. On peut donc placer le triangle (ABC) dans le sens que l'on veut. Cela revient à dire que le triangle peut se déplacer autour du point M de telle façon que A décrive un cercle (A), B un cercle (B), C un cercle (C), les trois cercles centrés sur M et de rayons respectifs 6 ; 8 ; 10.

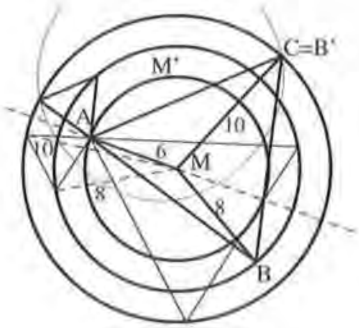


2. Fixons le point A sur le cercle (A). Alors le point C est l'image de B dans une rotation de centre A et d'angle 60°. Il est donc à l'intersection du cercle (C) et du cercle (B′) image du cercle (B) dans cette rotation… Nous avons donc une construction du point C et donc d'un triangle (ABC).



. Conclusion sur les triangles (ABC) possibles.

À une rotation près autour de M, il y a deux paires de triangles (ABC) symétriques par rapport à la droite (AM). Pour chacune des deux paires il y a un triangle avec le point M à l'intérieur et un triangle avec le point M à l'extérieur.

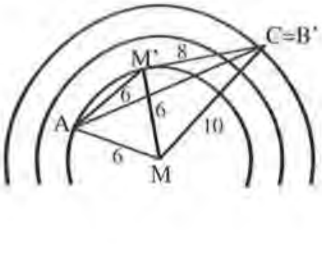


4. Aire du triangle

Reste à déterminer la longueur du côté du triangle et son aire. L'angle MM′C est droit à cause des côtés 6, 8, 10, donc par Al Kashi :

$$AC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(150°)$$

et donc l'aire du triangle ABC est $36 + 25\sqrt{3}$ en km² soit environ 79,30 km².

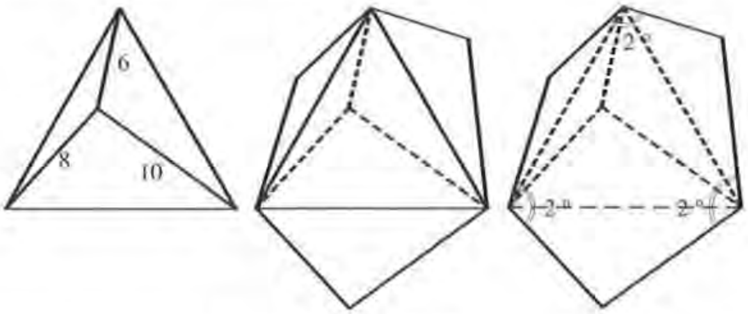


1 Extrait du *Bulletin de l'APMEP* no. 456, janvier-février 2005, pages 27 à 30. Voir notes et énoncé en fin d'article.

Remarque. Cette solution montre l'importance de l'information « **au cœur d'une forêt** ». On pourrait imaginer l'histoire plus réaliste d'un Mathias perdu, dont les seuls repères seraient trois points A, B, C disposés selon un triangle équilatéral. Alors, selon la situation – à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle – la réponse ne serait pas la même (l'aire du triangle dans le cas extérieur est 25 $\sqrt{3}$ – 30 soit environ 7,30).

II.6. Autre solution de Bruno Alaplantive

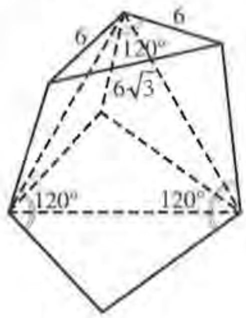
Voilà, dit-il, ce que j'ai trouvé d'autre que les cercles concentriques auxquels j'avais d'abord pensé.
Dans ma démarche, j'ai imaginé voir un tétraèdre non régulier et, en prenant pour base un triangle équilatéral de côté au moins supérieur à 4 et au plus inférieur à 14 et des faces latérales d'arêtes 6 et 8, 6 et 10, 8 et 10, je pensais pouvoir calculer la hauteur du tétraèdre obtenu et faire tendre ensuite cette hauteur vers O...
Trop compliqué pour les circonvolutions de mon petit cerveau !
Mais comme j'ai quand même pris le temps de faire différents patrons sur Cabri (et de les découper pour VOIR) j'ai remarqué le triangle et l'ai reconnu pour être le 3,4, 5 à la taille près et comme en plus les rapports des longueurs obtenues à 6, 8 et 10 donnaient 1.74, 1.73 et 1.73, j'y ai reconnu racine de 3..., etc.
Attaqué comme ceci, c'est très riche !

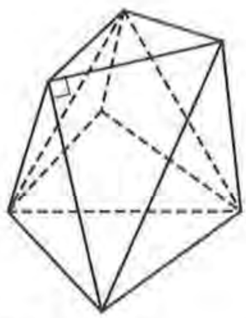


On ouvre « l'enveloppe » par les côtés 6, 8 et 10 et on déplie selon le contour équilatéral.
La demi-base vaut 6 × sin 60°,

soit $6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

et la base vaut bien 6 $\sqrt{3}$.





De même les autres côtés valent-ils 8 $\sqrt{3}$ et 10 $\sqrt{3}$, ce qui assure que le triangle est rectangle : agrandissement du triangle 6, 8, 10 lui-même double du fameux 3, 4, 5.

Remarque : la construction du triangle 6 $\sqrt{3}$, 8 $\sqrt{3}$, 10 $\sqrt{3}$ assure celle du triangle équilatéral.

CALCULS

1. Al Kashi permet d'écrire :

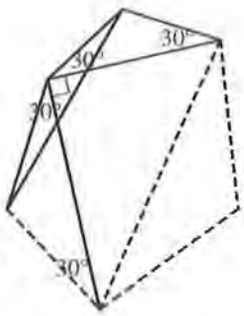
$$c^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 150°,$$

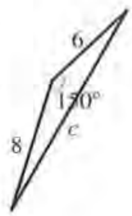
c'est-à-dire

$$c^2 = 100 + 2 \times 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

soit

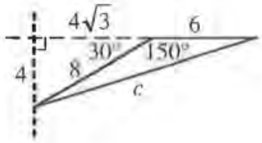
$$c^2 = 100 + 48 \times \sqrt{3}.$$





L'aire d'un triangle équilatéral étant donnée par la formule $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, on obtient finalement ici :

$$\text{Aire} = 36 + 25\sqrt{3} \text{ (en unité d'aire)}$$



2. **Mais pas besoin d'Al Kashi** (on reste au niveau collège) : un peu d'imagination et Pythagore fait le reste … :

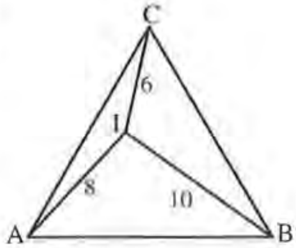
$$\begin{aligned} c^2 &= \left(4\sqrt{3}+6\right)^2 + 4^2 \\ &= 48 + 36 + 48\sqrt{3} + 16 \\ &= 100 + 48\sqrt{3}. \end{aligned}$$

II.7. Solution de Henri Bareil

qui prend le problème autrement et avec une désinvolture finale…

On suppose que, ayant un « matériel sophistiqué », et prêt à de « savants calculs », notre égaré (physiquement seulement) dispose aussi d'une règle graduée, d'un compas, qu'il sait diviser un segment dans un rapport donné, et que, A et B étant donnés, le lieu des points M (d'un plan qui les contient) tels que MA/MB = k ($k \neq 1$ donné) est le cercle de diamètre [UV] (U et V divisant [AB] dans le rapport k). Dès lors :

a) Principe d'une solution :



– *Dessinons un triangle équilatéral* A′B′C′ *de côté arbitraire* (appelons *l* sa longueur). Ce triangle est semblable au triangle-forêt ABC.

– Plaçons-y l'homologue I′ du point I :
I′C′/I′B′ = 6/10 (= 3/5). Donc I′ est sur le cercle Γ_1 …
I′B′/I′A′ = 10/8 (= 5/4). Donc I′ est sur le cercle Γ_2 …
Ces deux cercles ont un point commun, et un seul, à l'intérieur du triangle A′B′C′. Ce point est I′ (et l'on a bien I′C′/I′A′ = 6/8).

– *Il suffit, dès lors, de mesurer, par exemple,* I′B′. Le rapport I′B′/IB est aussi A′B′/AB. D'où le côté du triangle-forêt, etc.

b) Mais comment mesurer I′B′ ?

Méthode 1 – calculatoire – :

Prendre un repère orthonormé. Déterminer les équations de Γ_1 et Γ_2. D'où les coordonnées de I′, etc.

Méthode 2 – « Mesurages » – :

Eh oui ! La précision attendue d'un calcul n'est-elle pas illusoire s'agissant d'une forêt (bords « flous », etc.). Et que penser de la précision de ces 10 km, 8 km, 6 km ?
Alors, si mon dessin est assez grand et « bien fait », je mesure I′B′ à la règle graduée … et le tour est joué !

La morale de l'histoire :

Voilà un joli problème … habillé en forêt. C'est parfois dangereux. Cf. la forêt qui marche sur le château de Macbeth ! Ici, c'est dangereux pour la précision mathématique, récusable ! Pourquoi ne pas en profiter ? … en s'appuyant sur un principe de résolution peu usité, mais efficace…

(ndlr) Le problème de « La forêt triangulaire[2] », présenté dans nos numéros 210 (pages 4 à 8) et 212 (pages 47 à 53) réapparaît dans le bulletin vert de l'APMEP avec quatre de nos solutions et trois nouvelles, d'un genre différent qui en fait tout leur intérêt. Nous remercions nos amis français de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public de nous autoriser à les reproduire ici et, en particulier, Henri Bareil, animateur infatigable de leur revue, qui fait connaître régulièrement *Math-Ecole* auprès de ses collègues et lecteurs.

2 *Mathias est perdu au coeur d'une forêt en forme de triangle équilatéral. Il ne connaît pas les dimensions de cette forêt, mais grâce à un matériel sophistiqué et à de savants calculs, il peut établir qu'il se trouve à 6 km d'un sommet de la forêt, à 8 km d'un autre et à 10 km du troisième.* ***Quelle est l'aire de la forêt?*** (Finale 2003 du championnat de la FFJM)