RÉPONSE AU JEU DE MARIENBAD DU NUMÉRO 213

Au jeu de Marienbad[1] le joueur qui commence reçoit une configuration de quatre rangées qui se composent respectivement de 7, 5, 3 et 1 objets. Il la transforme en une nouvelle configuration en retirant un objet au moins d'une seule rangée et la laisse au second joueur. Celui-ci retire à son tour un objet au moins d'une seule rangée pour obtenir une nouvelle configuration que reçoit le premier joueur. Ainsi de suite. Le perdant est celui qui doit prendre le dernier objet.

Une analyse de ce jeu commence par l'inventaire des configurations des quatre rangées qui, à l'origine, se composent respectivement 7, 5, 3 et 1 objets. Un « coup » consiste, pour un joueur, à passer d'une configuration des objets reçue à une nouvelle, qu'il laisse à l'adversaire.

Voici une manière de présenter cet inventaire des 142 configurations, en colonnes, selon le nombre total d'objets présents, qui peut varier de 16 à 1 (« 1357 » à « 1 ») et selon le nombre de rangées, qui varie de 4 à 1 (IV, III, II, I)

	16	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
(IV)	**1357**	1356	1355													
		1347	**1346**	1345	1344											
			1337	1336	1335	1334	1333									
		1257	**1256**	1255												
			1247	1246	1245	1244										
				1237	1236	1235	1234	1233								
					1227	1226	1225	1224	1223	1222						
			1157	1156	**1155**											
				1147	1146	1145	**1144**									
					1137	1136	1135	1134	**1133**							
						1127	1126	1125	1124	1123	**1122**					
							1117	1116	1115	1114	1113	1112	1111			
(III)		357	**356**	355												
			347	346	345	344										
				337	336	335	334	333								
			257	256	255											
				247	**246**	245	244									
					237	236	235	234	233							
						227	226	225	224	223	222					
				157	156	155										
					147	146	**145**	144								
						137	136	135	134	133						
							127	126	125	124	**123**	122				
								117	116	115	114	113	112	**111**		
(II)					57	56	**55**									
						47	46	45	**44**							
							37	36	35	34	**33**					
								27	26	25	24	23	**22**			
									17	16	15	14	13	12	11	
(I)										7	6	5	4	3	2	**1**

1 Le jeu de Marienbad appartient à la catégorie des jeux de Nim : « caractérisé par un ensemble fini (E) de positions en présence desquelles se trouvent placés alternativement deux joueurs, avec une règle unique du jeu définissant pour toute position (x) donnée à l'un des joueurs, celles qu'il peut offrir à son adversaire (G(x)) et déterminant le gain (ou la perte) de la partie pour celui qui ne peut plus jouer (ou qui se trouve dans une position bloquée) ».

Après l'inventaire des configurations, il faut analyser le jeu à partir de la dernière « **1** » qui est gagnante pour celui qui la laisse à son adversaire (notée en caractères gras dans le tableau).
On remarque que « **1** » peut s'atteindre à partir des 6 configurations de (I) où il y a plus d'un objet dans un seul rang (dernière ligne du tableau) ou des 7 configurations de deux rangs d'objets (II) dont l'un n'a qu'un seul objet (avant-dernière ligne du tableau).
Si vous offrez l'une de ces 13 configurations à votre adversaire, c'est lui qui vous battra en jouant l'un des 13 coups: « 2 » -> « **1** », « 3 » -> « **1** », « 4 » -> « **1** », ..., « 16 » -> « **1** », « 17 » -> « **1** », pour autant qu'il joue bien, c'est-à-dire qu'il ne gaspille pas cette chance de gagner en jouant un autre coup.
Au-delà de ces 13 configurations que nous appellerons perdantes, il n'y a plus de possibilité d'obtenir « **1** » en un coup. Les deux configurations qui viennent alors, en remontant dans le nombre d'objets, sont « **22** » et « **111** ». De la première on ne peut atteindre que « 12 » ou « 2 » (« **22** » -> « 12 », « **22** » -> « 122) et de la seconde, seulement « 11 » (« **111** » -> « 11 »), qui sont des configurations perdantes. On peut donc conclure que « **22** » et « **111** » sont des configurations gagnantes, qui vont contraindre l'adversaire à jouer sur une position perdante à partir de laquelle on pourra atteindre le « 1 ».
On poursuit l'analyse à partir de ces deux nouvelles configurations gagnantes pour déterminer leurs antécédents directs. Il y a 12 configurations d'où l'on peut atteindre « **22** » en un seul coup: dans (II), celles qui vont de « 23 » à « 27 », (dans la 3e ligne depuis le bas du tableau), et dans (III), celles qui présentent deux fois 2 objets, « 122 » et de « 222 » à « 227 ». Il y a 13 configurations d'où l'on peut atteindre directement « **111** »: dans (III), celles de « 112 » à « 117 » et, dans (IV), celles qui présentent trois fois une allumette seule sur son rang : de « 1111 » à « 1117 ».
On arrive ainsi à noter 25 nouvelles configurations, perdantes, desquelles un bon joueur peut atteindre « **22** » ou « **111** » en un seul coup et s'assurer ensuite d'atteindre « **1** » à son prochain coup.
Toujours en remontant, avec 6 objets, on tombe sur les trois configurations « **33** », « **123** » et « **1122** » non relevées dans l'inventaire précédent et l'analyse reprend, après avoir vérifié que ces dernières configurations sont gagnantes car elles ne conduisent qu'à l'une des 25 configurations perdantes identifiées lors de l'étape précédente.
Finalement, on trouve 20 configurations gagnantes: « **1** », « **111** », « **22** », « **33** », « **123** », « **1122** », « **44** », « **1133** », « **55** », « **145** », « **1144** », « **246** », « **1155** », « **257** », « **347** », « **356** », « **1247** », « **1256** », « **1346** », « **1357** ».
On peut alors les mémoriser et gagner à coup sûr au jeu de Marienbad, en remarquant que, puisque la position de départ, « **1357** » est gagnante, il faut l'offrir à son adversaire et jouer en second.

Cette analyse permet d'expliquer les commentaires des personnages du roman-photo présenté dans *Math-Ecole* 213. Par exemple, dans la première partie, le personnage de droite, machiavélique, sait qu'il peut gagner puisqu'il a laissé son adversaire commencer. À partir de la configuration « 1356 » que ce dernier lui laisse, il lui est facile d'obtenir une des trois configurations « 356 », « 1256 » ou « 1346 ». Autre exemple. Dans la deuxième partie, le machiavélisme devient de la suffisance : sur « 236 » il aurait fallu répondre « 123 » en prenant 5 allumettes dans le rang de 6, mais notre grand sarcastique sait que son adversaire ne connaît pas la règle et fait le malin. Le même exemple se retrouve dans la troisième partie où notre prétentieux joue les généreux en commençant. Il sait très bien qu'il va pouvoir retomber sur ses pieds face à un adversaire démuni.
Il en va souvent ainsi dans les jeux de Nim. Celui qui sait abuse souvent de sa situation en prenant des grands airs et la plupart des perdants abandonnent rapidement, avec ressentiment. Lorsqu'on pratique ce genre d'acti-

vité en classe, il faut essayer d'éviter ces confrontations déséquilibrées; les élèves ne sont pas dupes longtemps et vite démotivés quand ils sentent que l'autre connaît le « truc ». Et il ne faut pas se faire d'illusion, l'analyse complète du jeu est rarement à la portée de nos élèves et la stratégie gagnante ne peut donc pas dépasser le statut de « truc » appris de quelqu'un d'autre. Il faut se contenter, pour la classe, de jeux plus simples que celui de Marienbad et de stratégies « locales » ou partielles, valables en fin de partie.

Remarque complémentaire sur des critères de reconnaissance des configurations gagnantes

Mémoriser les 20 configurations n'est pas très difficile car beaucoup d'entre elles présentent des répétitions dans les nombres d'objets des différentes rangées.
En revanche, lorsqu'on joue avec plus de 4 rangs et plus de 7 allumettes par rang, il faut un critère infaillible et rapide de reconnaissance des configurations gagnantes. Celui-ci, bien connu des passionnés de jeux de Nim, repose sur des parités entre les nombres d'objets des rangées, exprimés dans un système de numération binaire « base deux ».
Un de nos lecteurs, M. André Montavon, de Moutier, que nous remercions, illustre ce critère par l'exemple suivant, avec 5 tas de 15, 9, 7, 5 et 3 allumettes :

« Voici ces 5 nombres, écrits en base deux et disposés en colonne :

1	1	1	1
1	0	0	1
	1	1	1
	1	0	1
		1	1

Cette configuration est dite « impaire » car, dans l'une au moins de ses colonnes, il y a un nombre impair de chiffres « 1 ». (Dans le cas présent, il y a un nombre impair dans toutes les colonnes sauf dans celle des groupements de 3e ordre (8 ou 2^3).

Il y a deux lois qui régissent le jeu de Nim :

1. Si un joueur laisse à son partenaire une position paire, ce dernier est obligé de rendre une position impaire, puisqu'il modifie un seul tas, donc au moins une colonne.
2. On peut toujours transformer une situation impaire en une paire.

Pour rendre une situation paire, je peux par exemple, enlever trois allumettes dans le quatrième tas : »

1	1	1	1
1	0	0	1
	1	1	1
		1	1
		1	1

Avec les règles particulières du « Jeu de Marienbad », où le joueur qui prend la dernière allumette perd, les configurations paires sont gagnantes sauf dans les cas où il ne reste plus qu'un seul élément dans chaque tas : « 1 ». « 111 » sont impaires et gagnantes, « 11 » et « 1111 » sont paires et perdantes. Pour toutes les autres, le joueur initié rendra toujours à son adversaire une configuration paire pour gagner la partie.
Il sera particulièrement attentif à ne pas appliquer cette stratégie aveuglément en fin de partie lorqu'il y a un ou plusieurs tas d'une seule allumette. Par exemple s'il reçoit « 1113 » (configuration impaire), il ne doit pas rendre « 1111 » (paire), mais « 111 » (bien qu'impaire) à son adversaire.