QUALIFICATIONS RÉGIONALES VALAISANNES : COMMENTAIRES ET DÉVELOPPEMENTS DE QUELQUES PROBLÈMES

Augustin Genoud et François Jaquet

Les problèmes des qualifications régionales valaisannes pour le 19e Championnat des jeux mathématiques et logiques ont été présentés dans un numéro précédent de *Math-Ecole* (213, pp. 50 à 52).
Nous avons eu la curiosité d'aller voir, au-delà des classements obtenus sur la base des réponses justes, ce que pouvait apporter une analyse un peu plus fouillée des résultats, pour les enseignants de mathématiques. L'entreprise s'est révélée passionnante et susceptible d'intéresser les lecteurs de *Math-Ecole*.
Nous présentons ici, en partie A, les analyses des sept premiers problèmes de la catégorie CM (4e et 5e primaire) dont certains ont aussi été résolus par des élèves plus âgés. Pour les autres problèmes, partie B, nous nous contentons de donner la réponse et quelques indications sur les taux de réussite, Nous terminerons par la proposition d'une suite d'activités sur le thème du dernier problème, « Les Euros », partie C.

1 Michel habite à l'extrémité d'une longue avenue. À l'autre bout se trouve l'école, et à mi-chemin, la poste. S'il quitte l'école à midi, il se trouve chez lui à 12 h 30. À 15 h 00, il part de sa maison et va à la poste. A quelle heure arrivera-t-il a la poste ?

2 Dans la famille Dupuis, il y a quatre enfants. Il y a une différence de deux ans entre chaque enfant et l'aîné est trois fois plus âgé que le plus jeune. Quel est l'âge de l'aîné ?

A. Analyse et commentaires des premiers problèmes

Les analyses des résultats sont effectuées à partir de bulletins-réponses rendus par les participants aux qualifications régionales des centres de Sion, Savièse et Martigny, au total :
- 164 de catégorie CM (degrés 4 et 5, dont 50 de 4P, 77 de 5P ont pu être identifiées avec certitude)
- 141 de catégorie C1 (degrés 6 et 7, dont 75 de 6P et 37 de 1CO ont pu être identifiés)
- 74 de catégorie C2 (degrés 8 et 9)
- 47 de catégorie Ly (degrés 10 à 12)

(Pour les énoncés, voir *Math-Ecole* 213, pages 50 et 519 ou les notes de bas de page.)

1. La poste [1]

De 50 % (en 4P) à 70 % (en 5P) des élèves de catégorie CM ont trouvé la bonne réponse : 15h15.
L'erreur la plus fréquente, 15h30, recueille 20 % des suffrages. Elle correspond à 30 minutes après le départ, au lieu de 15 minutes. Les autres se répartissent assez régulièrement de 15h à 17h30. On ne sait pas à quoi les attribuer, mais si on analyse la tâche, on constate qu'il y a plusieurs occasions de se tromper : dans le premier calcul de la durée de l'école à la maison (de 12h à 12h30 : 30 minutes), dans l'estimation de la moitié de cette durée pour la moitié du parcours : 15 minutes, puis dans la dernière opération consistant à ajouter 15 minutes à 15h00.

2. Les Dupuis [2]

La réponse, 9 ans, a été trouvée par 26 % des élèves de 4P, 42 % de 5P, 79 % de 6P et 62 % au niveau 7, en première année du cycle d'orientation. Il y a là une progression notable avec l'âge et une régression au passage de l'école primaire au cycle d'orientation, très souvent constatée, pour certains types de problèmes, dans les concours de mathématiques.

Pour quelqu'un qui a des connaissances algébriques mobilisables, le problème se résout presque mécaniquement en posant par exemple x, $x - 2$, $x - 4$ et $x - 6$ pour les âges des quatre enfants et l'équation $x = 3(x - 6)$, qui se réduit à $x = 9$.

Mais les élèves des degrés 4 à 7 n'ont évidemment pas cette technique à disposition et ce type de situation ne figure pas non plus dans leur répertoire scolaire de problèmes. On peut donc dire qu'ils se trouvent ici devant un « vrai problème », nouveau, pour lequel ils doivent imaginer une stratégie.

Ils peuvent y aller par essais successifs : écarter les hypothèses 1, 3, 5, 7 ans et 2, 4, 6 et 8 ans et retenir 3, 5, 7, 9 ans car 9 est le triple de 3. (On notera que la formulation « trois fois plus » de la langue courante constitue un obstacle pour de jeunes élèves, par sa référence à l'addition et à la multiplication simultanément, sans compter son ambiguïté puisque « une fois plus » et « deux fois plus » sont considérées comme équivalentes.)

Une autre méthode, plus générale, est de penser à l'écart de 6 ans entre le plus jeune et l'aîné, qui doit être le double de l'âge de plus jeune pour que l'âge de l'aîné soit le triple. Le risque est de commettre une erreur sur cet écart : 8 ou 4 et d'aboutir aux réponses respectives de 12 ou 6. Ces erreurs ont effectivement été constatées lors de l'analyse des résultats, avec des fréquences de 9 % et 10 % respectivement.

L'erreur la plus fréquente, surtout en 4P et 5P, n'est cependant pas l'une de celles qui sont mentionnées ci-dessus : 12 % de l'ensemble des élèves ont trouvé 8 ans (et ce taux s'élève à 23 % en 4P). Cette réponse correspondrait à la progression 2, 4, 6, 8, prenant en compte l'écart de deux ans entre chaque enfant, sans tenir compte de la condition sur le rapport entre l'âge de l'aîné et celui du cadet.

Mais on est là dans le domaine des hypothèses. Pour en savoir plus, il suffit de proposer le problème à une ou plusieurs classes et de demander aux élèves d'expliquer comment ils ont trouvé la réponse.

Dans l'attente, on peut déjà considérer que ce problème est potentiellement très intéressant du point de vue d'une évaluation formative : il donne des indications très significatives du niveau de développement des élèves et des compétences qu'ils doivent mettre en œuvre pour arriver à la solution. Il est certes possible de la trouver par hasard après un ou deux essais, mais le jeu sur les variables didactiques permet d'éviter ce biais. Par exemple en choisissant un écart régulier de 4 ans, il faudrait au moins organiser les essais pour arriver au but.

3. La prison [3]

Cette prison est bien étrange et le gardien imprudent ou suspect de familiarité avec ses prisonniers. Ce contexte, saugrenu, n'a vraisemblablement pas aidé les élèves, dont la réussite oscille de 32 % à 48 % selon les degrés.

La majorité des élèves n'ont pas pensé à profiter de la possibilité offerte au gardien : « (chez lui il passe autant de fois qu'il le veut) ».

En effet, les solutions (il y en a beaucoup) reposent toutes sur la visite d'une des cellules voisines de celle du gardien et d'un retour au point de départ (A) avant de passer chez les 14 derniers prisonniers.

3 Dans cette prison, le gardien habite en A. Il y a un prisonnier par cellule, donc 15 prisonniers. Le gardien veut rendre visite à chaque prisonnier sans passer deux fois dans la cellule d'un même prisonnier (chez lui, il passe autant de fois qu'il veut) et souhaite terminer sa visite en B. Le gardien ne se déplace qu'horizontalement et verticalement. Dessine un chemin possible. (Les cellules A et B sont respectivement en haut à gauche et en bas é droite d'un quadrillage de 4 x 4 cases.)

4 Thérèse regarde une page de son livre de sciences sur laquelle sont dessinés des têtards et des grenouilles. Tiens, les têtards ont une queue, mais n'ont pas de pattes et les grenouilles (têtards adultes) ont quatre pattes alors que leur queue a disparu. Thérèse compte toutes les pattes et les queues et en dénombre 35. Sachant qu'il y a le même nombre de têtards que de grenouilles, combien y a-t-il de grenouilles dessinées sur la page ?

4. Les grenouilles[4]

Il y a 7 grenouilles dessinées (et aussi 7 têtards). La fréquence des bonnes réponses augmente avec les degrés: 34 % en 4P, 46 % en 5P, 76 % en 6P, 83 % au niveau 7, et 95 % aux niveaux 8 et 9, des 2ᵉ et 3ᵉ années du cycle d'orientation,

Il y a donc une progression sensible en fonction des degrés scolaires sur l'ensemble des degrés du primaire et secondaire.

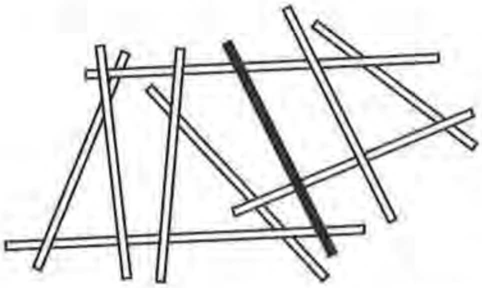
Si on compare ce problème à celui des « Dupuis », on constate qu'ils ont des structures ressemblantes, mais, lorsqu'on examine leur mise en équation, on voit que celle de « Les grenouilles » ($x + 4x = 35$) est plus simple que la précédente et que, d'un point de vue arithmétique, la recherche correspond à la résolution d'une écriture lacunaire 5 x ... = 35, ou à une simple division par 5.

L'analyse des erreurs fait apparaître un très large étalement de 2 à 280. Les fréquences les plus élevées sont de 3 % pour 17 et 70, de 2 % pour 5, 8 et 12. Il n'est donc pas possible d'émettre des hypothèses sur les raisonnements erronés qui y ont conduit.

5. Les pièces de bois[5]

La solution correcte a été trouvée par:

- 50 % des concurrents des degrés 4 et 5
- 48 % des concurrents des degrés 6 et 7
- 60 % des concurrents des degrés 8 et 9



5 Ces dix pièces de bois, posées sur une table, ont toutes la même épaisseur. Colorie la ou les pièces qui s'appuient sur trois autres pièces.

Il y a peu de variation dans les taux de réussite à ce problème qui fait appel à des compétences originales non développées par les programmes scolaires: être capable de déterminer à quel niveau se situent les pièces, en fonction des parties visibles ou cachées d'une vue de dessus: il y en a 3 directement sur la table, 3 autres sur les précédentes et les 4 dernières, entièrement visibles, à un niveau supérieur.

Les erreurs, dans leur grande majorité, concernent ces dernières pièces. Parmi elles, la plus fréquente consiste à marquer les trois pièces supérieures dont le dessin en plan présente trois intersections avec d'autres pièces.

Ce problème nous paraît excellent pour améliorer ses capacités de reconnaître une disposition spatiale dans une représentation plane. On peut facilement en créer des variantes et passer, dans l'autre sens, du modèle en trois dimensions à sa représentation sur une feuille.

6. Les cousins[6]

Fanny et Luc sont les frères et sœurs de Jeanne.

Cette réponse juste est obtenue par 34 % des élèves en 4P, 57 % en 5P, 62 % en catégorie C1, 68 % en catégorie C2. La progression est forte pour les degrés 4 à 6 mais les taux se stabilisent ensuite.

Lorsqu'on analyse l'énoncé du problème, on comprend pourquoi le problème est très difficile pour de jeunes élèves. Il y a sept phrases contenant chacune des informations de nature différentes: la première, indique les noms des huit enfants, dont beaucoup seront inutiles; la deuxième, la troisième et la cinquième permettent de savoir qu'il y a trois familles, respectivement de 3, 1 et

6 Grand-père Louis a huit petits-enfants (Fanny, Émile, René, Paul, Tanguy, Luc, Yann et Jeanne) et ne sait plus lesquels sont frères et sœurs. Peux-tu l'aider sachant que Fanny a un frère et une sœur, que Yann est fils unique, que René n'a pas de sœur, que Paul est le plus jeune de quatre enfants et que Luc a deux sœurs. Qui sont les frères et sœurs de Jeanne ?

4 enfants; la troisième et la quatrième indiquent qu'il y a deux familles où il n'y a que des garçons, dont Yann et René, ce qui permet de déduire que ce dernier est dans une famille de 4 garçons; la sixième donne le nom du garçon de la famille où il y a deux filles; la septième (la question), confirme le nom de Jeanne, la deuxième fille de cette famille déjà présentée dans la deuxième phrase. On remarque encore que les pluriels de « les frères et sœurs » de la question n'aident pas les élèves puisque Jeanne n'a qu'un frère et qu'une sœur et qu'il aurait été plus correct d'écrire « les frère et sœur ».

C'est donc un problème de tri de données qui précède plusieurs déductions logiques successives.

7. Le fer à cheval [7]

Ce problème de technologie, plutôt que de mathématiques, nous paraît très intéressant par la variété et l'évolution des réponses en fonction de l'âge des concurrents.
Voici les résultats, en pourcentages, des réponses observées (R.O) les plus fréquentes, selon les catégories

R.O.	4	6	7	8	9	10	12	15	27	autres
CM	16	9	15	2	37	2	2	0	1	16
C1	4	11	26	6	33	1	4	6	5	4
C2	1	1	23	14	16	3	15	11	4	12
Ly	0	0	2	2	2	13	3	57	13	8

La réponse « 4 » correspond aux parties obtenues par 3 coupes, d'une seule partie à la fois, sans superposition. On la rencontre surtout en 4P et 5P et quasi plus dans les degrés suivants.
Pour la réponse « 6 », en l'absence d'explications ou de dessins, on reste dans le domaine des hypothèses. S'agit-il de 3 coupes donnant chacune 2 morceaux, sans rapport avec la réalité?
Près d'un quart des élèves du secondaire I ont trouvé 7 morceaux, ce qui pourrait correspondre à 3 coupes parallèles, perpendiculairement à l'axe de symétrie du fer à cheval, sans superpositions.
La réponse « 8 » laisse imaginer des partages en 2 pièces avec superpositions successives, correspondant à 2^3.

7 Ce fer à cheval a appartenu à un cheval célèbre. Nombreux sont ceux qui souhaitent en obtenir un morceau. Pour le partager, on utilise une scie ne pouvant faire que des coupes en ligne droite. Les pièces peuvent être empilées mais pas pliées ni tordues. Ainsi, en une coupe, on peut faire 3 morceaux. En trois coupes, combien de morceaux peut-on obtenir, au maximum ? (Accompagné du dessin d'un fer à cheval)

Un tiers des élèves, des niveaux 4P, 5P, 6P et 1CO arrivent à 9 morceaux. Il est vraisemblable qu'une lecture à la lettre de l'énoncé y soit pour quelque chose: ... en une coupe, on peut faire 3 morceaux. En trois coupes combien de morceaux peut-on obtenir ...
Cette interprétation est beaucoup moins fréquente chez les élèves plus âgés.
Chez ces derniers, les réponses « 10 ou « 12 » ne sont pas fortuites. Il est assez naturel de placer les deux « extrémités » détachées du fer lors de la première coupe sur les deux parties « rectilignes » qui restent, de ne voir que cinq morceaux à la deuxième coupe, au lieu de sept, puis d'imaginer qu'ils vont doubler si on les partage chacun en deux lors de la troisième coupe. On peut aussi imaginer que les 3 parties obtenues lors de la première coupe ne soient partagées qu'en deux lors des coupes successives, ce qui conduit à $3x2x2 = 12$.
La réponse « 15 » révèle un effet de « contrat » entre le concurrent et l'énoncé du problème à propos des pièces qui peuvent être empilées, effet moins visible que dans les cas précé-

dents où il n'y avait pas d'optimisation des superpositions ou du découpage d'une partie en 3 morceaux: le candidat imagine des contraintes inexistantes mais vraisemblables par rapport à son expérience scolaire ou pratique. Par exemple: les coupes doivent être perpendiculaires à l'axe de la figure (placé comme d'habitude dans le contexte scolaire parallèlement à un des bords de la feuille), les pièces doivent se superposer exactement (comme toujours, ou pour permettre d'être mieux tenues entre elles lors de la coupe), les morceaux doivent être de taille et de forme pas trop différente, à l'exception de la partie la plus courbée, etc. Avec ces contraintes imaginaires, on place (comme dans le cas « 10 ») les deux « extrémités » détachées du fer lors de la première coupe sur les deux parties « rectilignes » qui restent et l'on obtient sept pièces après la deuxième coupe (6 « segments » et 1 « arc » avec encore deux parties « rectilignes »), puis on recommence pour obtenir 15 morceaux: 14 « segments » (6x2 + 2) et un « arc ».
La réponse « 27 » est celle du concurrent qui envisage des figures géométriques, sans tenir compte de l'épaisseur des coupes, de la matière dont est fait le fer à cheval. C'est aussi celle du mathématicien. En effet, on peut effectuer une première coupe en « oblique » laissant suffisamment de courbure à chacune des trois pièces pour pouvoir les partager ensuite chacune en 3 parties en les plaçant judicieusement dans le plan de la deuxième coupe. C'est plus délicat pour certaines des 9 parties ainsi obtenues, mais théoriquement possible.

Mais, comme il arrive parfois, les auteurs et relecteurs de problèmes tombent aussi dans le piège ou, pressés par le temps, laissent quelques ambiguïtés dans l'énoncé des problèmes. C'est la réponse « 15 » qui a été considérée comme « juste ». Il en va ainsi, souvent, lorsqu'on souhaite trouver un habillage original à une question de mathématique: il est difficile d'atteindre le niveau de rigueur des énoncés classiques. Les concurrents qui se sentiraient lésés n'en mourront pas et, s'ils recourent, les organisateurs les réhabiliteront.

B. Réponses et taux de réussite aux autres problèmes

8. Les treize pièces
Il y a deux solutions: 1251112 ou 1212331 dont une seule suffisait
Taux de réussite: 29 % en C1, 44 % en C2 et 76 % en Ly

9. Le télésiège
Il y a 268 sièges en tout. Taux de réussite: 30 % en C2 et 74 % en Ly

10. L'âge de grand-père
Mon grand-père a 91ans. Taux de réussite: 16 % en C2 et 32 % en Ly

11. Les trous
Le volume du solide est 608 cm^3. Taux de réussite: 4 % en C2 et 28 % en Ly

12. Les poules
Marie et Henri ont 700 poules. Taux de réussite: 30 % en Ly

13. L'héritage
Le fermier peut mettre la borne en tout point du champ. Taux de réussite: 19 % en Ly

14. Les euros
La pièce effectue 5/3 de tours sur elle-même. Taux de réussite: 0 % en Ly

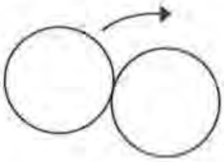
C. Proposition d'activités sur les rotations de disques roulant d'autres objets

L'échec total au dernier problème de l'épreuve nous conduit à proposer une série de questions pour faire émerger une stratégie permettant de résoudre relativement facilement ce type de problème? Les propositions de lecteurs ou les comptes rendus d'expérimentations en classe seront les bienvenues.

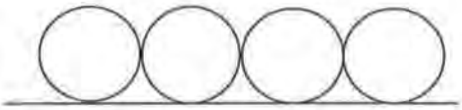
Dans les problèmes qui suivent, la question est toujours la même. Combien de tours sur elle-même fait une pièce circulaire? (Les réponses doivent être données en nombre de tours. Si nécessaire, on prendra 22/7 comme approximation de π.)

1. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule sur une ligne droite selon le schéma suivant. En avançant de 50 cm, combien de tours sur elle-même fait-elle?

2. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 7 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?



3. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 14 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
4. Une pièce circulaire de 14 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 7 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
5. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 12 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
6. Quatre euros identiques sont alignés côte à côte sur un support horizontal. La pièce de gauche va rouler par-dessus les autres pour venir se placer sur le support à droite de la dernière pièce. Combien de tours sur elle-même a-t-elle effectués



7. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'un rectangle dont la largeur vaut 12 cm et la longueur 20 cm. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet du rectangle?
8. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'un triangle équilatéral de 25 cm de côté? Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet du triangle?
9. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule le long de la ligne **ABCD**. Combien de tours sur elle-même fait-elle?