EXPLORATION DE FONCTIONS, LINÉARITÉ LOCALE ET CALCULATRICES GRAPHIQUES

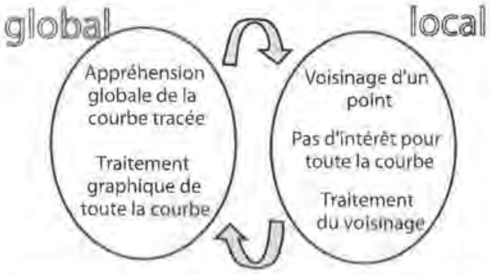
Michela Maschietto[1]

INTRODUCTION

Les recherches en didactique des mathématiques ont mis en évidence les difficultés des élèves (mais aussi des étudiants) dans l'apprentissage des concepts de l'Analyse. Elles ont identifié trois catégories principales de difficultés : celles liées à la complexité des objets de base de l'Analyse (les nombres réels et les fonctions) et au fait que ces objets sont en construction lorsque débute l'enseignement de ce champ, celles liées à la conceptualisation de la notion de limite et à sa formalisation, enfin celles liées aux ruptures nécessaires par rapport aux modes de pensée et de travail familier aux élèves dans le domaine algébrique et aux spécificités du champ de l'Analyse. De nombreuses recherches (par exemple, Tall, 1989 ; Artigue et al., 1998 ; Trouche, 1996) se sont intéressées à la façon dont les nouvelles technologies peuvent soutenir l'enseignement de l'Analyse, notamment dans le secondaire.
La recherche (Maschietto, 2002) à laquelle cet article se réfère s'intéresse à l'étude des changements que l'entrée dans l'Analyse demande et aux reconstructions qu'ils impliquent. La prise en compte des recherches concernant l'introduction à l'Analyse a amené à en considérer une dimension particulière : l'articulation entre point de vue global et point de vue local sur les objets fonctionnels (ce que nous avons appelé « jeu global/local »).
Cet article présente des éléments de l'ingénierie didactique à visée diagnostique conçue pour faire vivre le jeu global/local dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles.

L'objet d'étude de la recherche : le jeu global / local

Avant le début de l'Analyse, les élèves rencontrent les fonctions sous deux points de vue : ponctuel et global. Les tableaux de valeurs mettent en jeu le caractère ponctuel ; le repérage de formes, tant dans le registre algébrique que graphique, le repérage de fonctions prototypes, de familles, le passage des fonctions prototypes à des fonctions quelconques de la même famille, mettent en jeu le caractère global. Cependant, l'entrée dans le champ de l'Analyse requiert un enrichissement de ces deux points de vue par une localisation du regard. On localise le regard au voisinage d'un point, à distance finie ou infinie : de nouvelles propriétés apparaissent puis deviennent centrales. On prend ensuite conscience du fait que ce regard local sur l'objet peut à son tour donner accès à des propriétés globales de l'objet.



L'évolution du rapport à la linéarité illustre bien ce jeu. Pour l'élève débutant en Analyse, la linéarité est un phénomène familier et global, attaché à la proportionnalité. En Analyse, elle devient un phénomène local qui fonde la notion de dérivabilité. Dans le cadre géométrique, par exemple, le jeu global/local concerne une reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe : elle est un objet global (représenté à l'aide du paradigme de la tangente au cercle) qui doit devenir un objet local intégrant l'idée d'approximation (Castela, 1995).

1 maschietto.michela@unimore.it Dipartimento di Matematica - Università di Modena e Reggio Emilia (Italia)

Les hypothèses de la recherche

À partir des éléments recueillis, nous avons fait l'hypothèse que le jeu global/local peut avoir un rôle essentiel dans l'entrée dans la pensée en Analyse et qu'un premier niveau de conceptualisation devrait pouvoir se développer dès son début dans l'enseignement secondaire. Notre recherche se propose donc d'étudier la possibilité de faire vivre ce jeu à partir de classe de niveau Première S[2], où l'enseignement de l'Analyse débute institutionnellement, en s'appuyant sur le changement du rapport à la linéarité impliqué par la notion de dérivée, qui est centrale à ce niveau d'enseignement. Pour cela, nous avons choisi une entrée graphique et un travail sur des fonctions dérivables ou non aux points choisis.
Pour la construction des séances à expérimenter, une des nos hypothèses était que les calculatrices graphiques et formelles, peuvent soutenir la localisation nécessaire du regard par les commandes d'agrandissement/réduction (commandes de zoom : ZoomIn, ZoomOut et ZoomBox) qu'elles fournissent. En outre, le recours aux calculatrices peut aider à mettre en relation les caractéristiques de cette localisation perceptives et dynamiques d'une part, mathématiques d'autre part.

L'ingénierie didactique

Nous avons construit une ingénierie didactique (Brousseau, 1998) à caractère diagnostique pour mettre en place le jeu global/local et l'observer en classe. Trois expérimentations ont été effectuées dans des classes italiennes (correspondant au niveau de la Première S). Chaque séance proposée (nous en avons analysé trois dans Maschietto, 2002) était constituée de deux phases : une phase de travail en groupe (deux/trois élèves par groupe) sur une fiche et une phase de travail collectif de mise en commun gérée par l'enseignant. Nous avons effectué pour chaque séance une analyse *a priori* qui a servi de base au travail de mise au point et de négociation de l'ingénierie avec les enseignants impliqués dans l'expérimentation. Les expérimentations ont fait l'objet d'une évaluation finale au moyen d'un devoir surveillé et d'un questionnaire donné à remplir à la maison. Pour chaque séance, nous avons filmé un groupe d'élèves pendant leur travail et ensuite la phase collective. D'autres groupes d'élèves ont été observés, le nombre d'observateur variant selon la classe.
Les calculatrices (TI-89, TI-92) nécessaires aux activités ont été fournies aux élèves de deux classes, tandis qu'une classe travaillait avec des calculatrices depuis 2 ans (elle participait à un projet national sur l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques). Puisqu'elles jouaient un rôle fondamental dans notre recherche, dans la conception de l'ingénierie nous avons tenu compte du niveau d'instrumentation des élèves. Nous avions alors prévu une séance pour la prise en main de la calculatrice, avec des activités centrées sur les commandes nécessaires ou particulièrement utiles au travail proposé. Cette phase initiale a été préparée sur la base de l'analyse *a priori* de l'ingénierie et prévoyait aussi la distribution de polycopiés résumant les commandes de la calculatrice. Les élèves (sauf une classe) disposaient de la calculatrice à la maison pour toute la durée de l'expérimentation.
Dans ce qui suit, nous allons enter dans le détail de la première séance de l'ingénierie pour montrer le type de travail proposé aux élèves, la gestion de l'enseignant et comment la propriété de linéarité locale commence à se manifester.

La première séance

Le travail sur la première fiche sert à mettre en évidence deux éléments : la linéarité obtenue par agrandissements et le fait que celle-ci est une propriété locale. Afin de prendre en compte ces deux éléments, nous avons défini une activité d'exploration de représentations graphiques de fonctions autour de points différents. Nous avons choisi des fonctions partout dérivables dans le domaine de définition,

2 avant-dernière année du Lycée scientifique, (degré 11, 16-17 ans)

des fonctions non dérivable en un point, des fonctions affines. Toutes les fonctions prennent la même valeur 4 au point choisi. Ceci est fait pour pouvoir exploiter la droite représentant la fonction constante comme droite de référence afin de repérer les points autour desquels effectuer l'exploration dans les fenêtres agrandies par zooms, les droites horizontales étant invariantes par zooms successifs (ce qui n'est pas le cas pour les autres droites à cause de la structure de la fenêtre graphique et de l'adéquation à l'écran de la calculatrice). Les élèves doivent dessiner les écrans de la calculatrice à des moments différents établis par la fiche, sur des feuilles, pour garder trace des explorations effectuées pour la comparaison des résultats obtenus. Le choix des fonctions et des points a changé d'une expérimentation à l'autre pour prendre en compte les analyses déjà menées. En particulier, la réduction du nombre de fonctions (six pour la première expérimentation) et l'exploration d'une même fonction autour de deux points (au début seulement un point par fonction) voulaient pousser encore plus les élèves à faire une première comparaison parmi les comportements des fonctions déjà dans le travail en groupe.

Pour montrer le type de travail demandé aux élèves, nous proposons la fiche de travail (Fig.2) et une exploration de la fonction y_3 de la fiche donnée autour de deux points.

Fiche de travail 1 (version réduite)

1. Considérons les six fonctions suivantes ; complétez le tableau ci-dessous avec les valeurs des fonctions pour les valeurs choisies pour la variable x.

	x	*x*	*y (x)*
$y_1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	3	
$y_2(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	0	
$y_3(x) = 4$	6	-8	

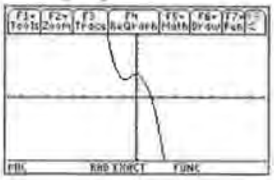
2. Introduisez les fonctions dans la calculatrice, selon l'ordre du tableau ; désélectionnez chaque fonction une fois entrée.
3. Considérez la première fonction $y_1(x)$. Avec la calculatrice, tracez une représentation de cette fonction en choisissant la fenêtre standard (par la commande ZoomStd). Représentez aussi la fonction $y_6(x)$ (celle-ci devra rester toujours sélectionnée). Repérez sur la courbe obtenue le point $(x, y_1(x))$. Reproduisez le graphique affiché à l'écran de la calculatrice sur la feuille 1, dans la case correspondant à la fonction considérée.
4. Avec des zooms successifs, explorez comment changent les graphiques de la fonction étudiée autour du point choisi. Sur la feuille 2, notez la fenêtre de la calculatrice que vous obtenez après deux zooms et tracez le graphique obtenu. Continuez ensuite à effectuer d'autres zooms autour du même point. Comment la courbe évolue-t-elle ? Quand vous avez décidez de vous arrêter, notez la dernière fenêtre et reproduisez l'image qui apparaît à l'écran de votre calculatrice sur la feuille 3. Quelle image avez-vous obtenu ?
5. Avancer de la même façon avec les autres fonctions, désélectionnant la fonction étudiée et sélectionnant la nouvelle à étudier autour du point dont l'abscisse est écrite à côté de la formule de la fonction.

Sur la feuille 3, écrivez vos remarques à propos de ce que vous avez obtenu à la suite des explorations, en justifiant votre choix d'arrêter l'exploration.

Figure 2 : la fiche avec le choix des points pour l'exploration

$$y_3(x) = x^3 - 2|x| + 4$$

Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble $\Re$, sur lequel la fonction est continue. Elle est dérivable en $\Re$ -{0}; la fonction n'est donc pas dérivable en x = 0 et y présente un point anguleux. Nous avons choisi de proposer les explorations autour du point anguleux (0,4) et du point $(-\sqrt{2}, 4)$. Cette fonction représente pour des groupes la première rencontre avec un cas où la propriété de micro-linéarité n'est pas satisfaite.



fenêtre standard avec la droite y_6 tracée →

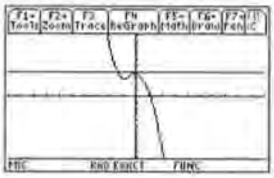


Figure 3

Figure 4

ZoomBox

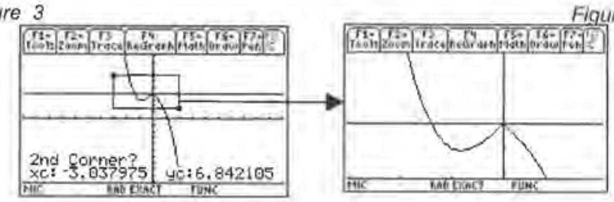


Figure 5

Figure 6

Après deux zooms successifs autour du

point $(-\sqrt{2}, 4)$

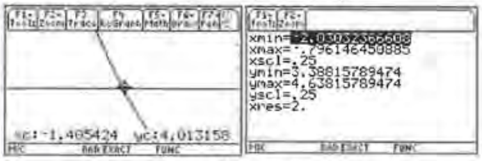


Figure 7

point (0, 4)

Figure 8

Après deux autres zooms :

Figure 9

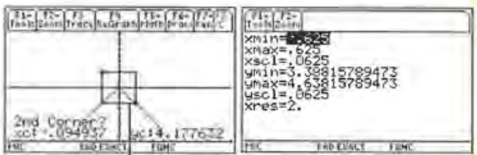


Figure 10

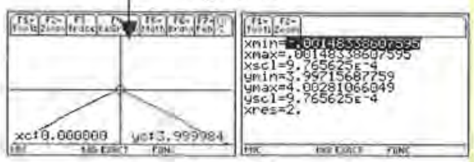


Figure 11

La fiche (Fig.2, donnée avec deux fonctions) structure le travail des élèves pour permettre la comparaison des comportements à deux moments divers de la séance : pendant le travail de groupe et la discussion collective. Dans ces moments, la comparaison des résultats des explorations doit mettre en évidence que les courbes représentatives de fonctions différentes peuvent avoir un comportement analogue autour d'un point, mais aussi qu'il existe des exceptions et que ce comportement peut dépendre du point choisi.

Dans cette séance, l'enseignant peut jouer des rôles divers. Pendant la phase de travail des groupes, il peut intervenir pour :

- aider les élèves ayant des problèmes d'utilisation de la calculatrice, ce qui correspond à la prise en charge par l'enseignant d'un éventuel niveau insuffisant d'instrumentation ;
- répondre aux questions concernant la consigne ;
- faire respecter les temps de l'activité ;
- préciser aux élèves le contrat régissant les représentations graphiques à faire sur les feuilles (dans l'analyse *a priori* nous avons pointé une difficulté possible à ce niveau) ;
- soutenir les élèves s'ils perdent le contrôle sur la séquence de zooms, en leur proposant par exemple de revenir à la fenêtre standard et de reprendre l'exploration.

La gestion du temps est aussi à sa charge. Il est important pour la suite du travail que les élèves puissent effectuer toutes les explorations (la construction de l'invariant linéaire par agrandissement est strictement liée à l'expérience, qui doit être donc faite par tous).

Pendant la phase de travail collectif, le rôle de l'enseignant devient plus important que dans la phase précédente. Il doit gérer la comparaison des résultats des explorations et le partage des expériences, le moment d'institutionnalisation et la mise au point d'un langage de la classe pour indiquer les résultats obtenus.

Les expérimentations et leur analyse

L'analyse des trois expérimentations a été réalisé sur la base des données recueilles et de l'analyse *a priori*. Nous présentons dans la suite un extrait du travail du groupe CA-RM (deuxième expérimentation) sur les fonctions de la fiche de travail 1 (Fig.2).

Pendant le travail, la fonction y_6 est présente dès la première exploration et reste tracée pendant toutes les autres. La représentation de cette fonction semble devenir le nouvel élément de référence prévu dans l'analyse *a priori*, comme le montre l'intervention de CA (#18) « Allons-y où elles [*la courbe représentative de y_1 et la droite*] se coupent » pour indiquer le centre du ZoomIn. Dans la suite, aucune référence à la présence de y_6 n'est faite, ce qui peut signifier que sa présence n'est plus questionnée, la droite étant intégrée à la démarche de localisation des élèves. Les élèves ne discutent d'ailleurs pas sur la recherche du point central pour les agrandissements, ce dernier étant repéré tout de suite à l'écran.

Après un premier moment où les agrandissements sont effectués sans contrôle, les élèves reviennent à la fenêtre standard (ZoomStd) qui est ainsi tracée sur la feuille 1 (Fig.12a). Ils reprennent ensuite à lire la consigne.

31. RM : « Et continuez autour du même point », *il lit la suite du travail sur la fiche*
32. RM : « Et à la fin peut-être on obtient une droite ! »
33. CA : « Le dessin doit être semblable le plus possible à celui de l'écran de la calculatrice ? », *il s'adresse à l'observateur qui répond oui. CA passe ensuite à dessiner sur la feuille 2*
34. CA : « As-tu fait un autre ZoomIn ? »
35. RM : « Un autre ZoomIn », *il effectue le quatrième ZoomIn*
36. RM : « Elle [*la courbe*] est devenue une droite »

Après le quatrième ZoomIn, CA trace la représentation sur la feuille 3 (Fig.10c) avec la règle.

L'extrait et les représentations faites sur les feuilles mettent en évidence que l'élève qui gère la calculatrice (RM) est aussi celui qui, le premier, verbalise le phénomène de linéarité locale (#32, #36), tandis que l'élève (CA) chargé de la représentation en papier / crayon exprime son interprétation directement sur la feuille (Fig.12c). La répartition des tâches et ses effets sur le repérage du phénomène de linéarité locale sont des éléments communs aux analyses des autres expérimentations.

Les élèves commencent à explorer la fonction y_3 autour du point (0,4).

86. RM : « Je t'avais dit que sur la feuille 3 on obtient des droites »

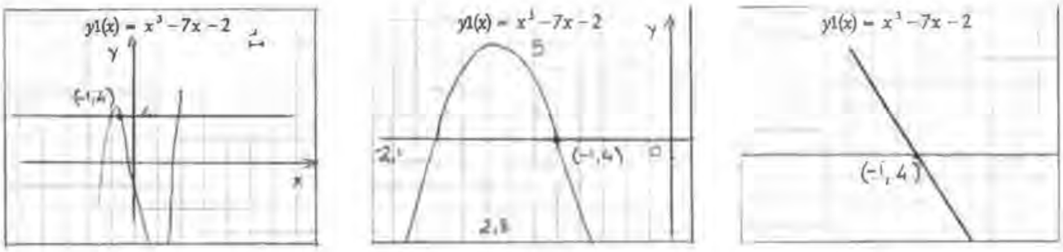
Après le dessin sur la feuille 2, CA demande les dimensions de la fenêtre et RM les lit sur la calculatrice

89. RM : « Nous faisons d'autres zooms et nous obtenons ce <u>truc-ci</u> »

G89. Il suit avec son doigt l'allure du point anguleux qui apparaît à l'écran

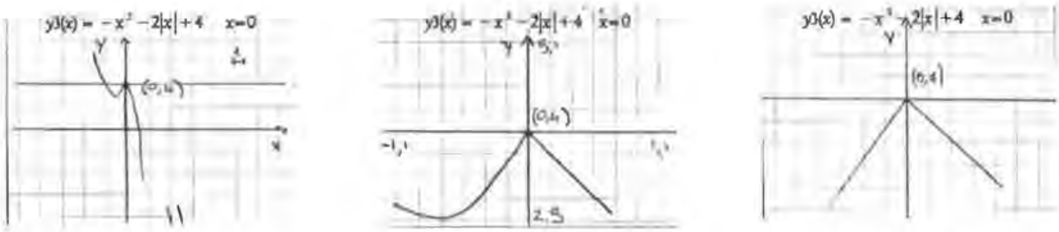
90. RM : « Boh… », *il s'arrête pour dessiner avec la règle sur la feuille 3 (Fig.13c)*

91. CA : « J'en fais encore un »



a: feuille 1 *b: feuille 2* *c: feuille 3*

Figure 12 : dessins de la fonction y_3



a: feuille 1 *b: feuille 2* *c: feuille 3*

Figure 13 : dessins de la fonction y_3

L'intervention de CA (#131) met en évidence l'installation de l'invariant linéaire chez cet élève et justifie l'absence de représentation de y_6 sur la feuille 3.

131. CA: « La droite ! Le dernier [y_5] n'est pas à faire, n'est pas ? », il s'adresse à l'observateur, « C'est déjà une droite »

Le commentaire (Fig.14) à la fin des explorations propose l'idée de rapprochement et d'invariance des représentations graphiques par zooms. Seulement une fonction (y_4) soulève cependant encore quelque perplexité chez CA, parce qu'il écrit le commentaire sans citer d'abord cette fonction-là et l'ajoute après une nouvelle exploration (« \4° »). Ce commentaire attribue à chacun des deux cas : y_3 et y_4, leur rôle de contre-exemple par rapport à la conjecture que la linéarité est une propriété de tout point de chaque courbe. Il montre aussi une évolution par rapport à l'intervention (#86) de RM : ce n'est pas vraiment le caractère droit qui discrimine les courbes, mais le fait qu'elles se rapprochent d'une droite ou pas.

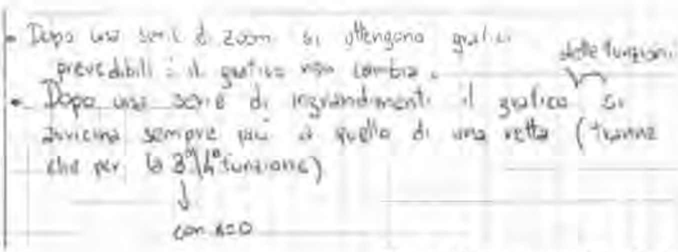


Figure 14': le commentaire final

- Après une suite de zooms on obtient des graphiques prévisibles : le graphique ne change pas.
- Après une série d'agrandissements le graphique des fonctions s'approche de plus en plus de celui d'une droite (sauf pour la 3^e\ 4^e fonction)

avec x=0

L'analyse de la première séance de l'ingénierie dans les trois expérimentations montre que l'entrée dans un point de vue local est accessible aux élèves italiens du niveau de la Première S, dans l'environnement utilisé pour cette entrée. La fiche permet aux élèves un travail autonome, avec une responsabilité réelle de ces derniers dans l'avancée mathématique de la séance. La linéarité locale apparaît de plus comme un phénomène perceptif fort à partir duquel peut s'amorcer le jeu global/local, à travers l'exploration de fonctions via les commandes de zoom de la calculatrice. La reconnaissance du phénomène se manifeste très vite dans le discours des élèves, sous des formes diverses. Dans le processus de localisation du regard et dans l'installation de l'invariant, le point autour duquel les zooms sont effectués nous semble passer parfois au second plan. L'analyse des protocoles montre que ce qui frappe les élèves, c'est souvent le passage du courbe au droit, et le fait qu'il s'agisse d'un phénomène local, se produisant au voisinage d'un point précis reste en retrait, voire tend à être oublié. Plusieurs raisons peuvent être trouvées à ce phénomène. La première est que, malgré l'introduction précoce de quelques contre-exemples, la propriété de linéarité locale apparaît très vite comme quelque chose de normal, que les courbes que les élèves vont usuellement rencontrer à ce niveau vérifieront en tout point (comme dans l'intervention de RM déjà mentionnée). Un glissement peut ainsi se produire. Tout cela souligne d'une autre manière comment le point de vue global tend à être le prédominant sur le point de vue local et comment l'articulation entre les deux nécessite des activités spécifiques pour se construire.

Les reconstructions que le jeu global/local implique sont tout juste amorcées dans la première séance. La deuxième et la troisième séances, qui ne sont pas analysées dans cet article, prennent en charge la mathématisation de la linéarité locale via la problématisation de la droite tangente à la courbe en un point choisi et le développement du calcul attaché à la détermination de l'équation de la tangente à la courbe.

Conclusion

Dans cette recherche, nous avons voulu placer l'étude du jeu global/local dans l'environnement des calculatrices graphiques et symboliques. Le choix est lié à l'exploitation des potentialités de visualisation. Ces outils soutiennent la localisation/délocalisation du regard souhaitée sur les objets fonctionnels, dans une sorte de mouvement virtuel associé aux commandes d'agrandissement/réduction dont elles disposent. En outre, dans le processus de mathématisation, les commandes utilisés de la calculatrice ont permis au travail local de s'effectuer non seulement dans le registre graphique, ce que la consigne des fiches induisait implicitement, mais en interaction entre registre graphique et numérique, grâce aux tableaux de valeurs de la fonction fournis par la calculatrice (application Table). En ce qui concerne l'entrée dans le jeu global/local et la reconstruction de rapport à la tangente, l'analyse a montré des éléments de réponse positifs. Les élèves abordent cette ingénierie avec une conception de la tangente globale, fondée sur des propriétés d'intersection (intersection unique) et de position (ne coupe pas la courbe). Les tests passés à la fin des expérimentations montrent qu'à quelques exceptions près, les élèves ont effectivement reconstruit leur rapport à la notion de tangente, en reliant cet objet à la propriété de linéarité locale. L'observation des séances de classe montre cependant que ce résultat est le fruit d'un travail sur l'invariant associé à la linéarité locale et sur sa mathématisation qui sont loin d'aller de soi. En outre, l'analyse met l'accent sur le fait que l'enseignant a un rôle fondamental à jouer pour permettre un travail local.

Références bibliographiques

- Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G. & Lagrange, J-B (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques*, Cahier de DIDIREM, Spécial n°4, IREM Paris 7, Paris.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.
- Castela, C. (1995). 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 7-47.
- Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'Analyse au lycée : les débuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7 e Université de Turin.
- Tall, D. (1989). 'Concept Image, Generic Organizers, Computer & Curriculum Changes', *For the Learning of Mathematics*, 9 (3), 37-42.
- Trouche, L. (1996), *Étude des rapports entre processus de conceptualisation* et processus d'instrumentation, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 1996.

Pratiques et discours

Le nouvel enseignement des mathématique 1P-4P sous la loupe

Chantal Tièche Christinat & Magali Delémont (IRDP éditeur, Neuchâtel 2005 (196 pages, 16 x 24)

Dans une première partie, l'ouvrage rend compte du suivi de l'innovation introduite dès 1997 par l'édition de nouveaux moyens d'enseignement romands. Pendant plus de quatre ans, les auteures ont observé et analysé les pratiques des enseignants et les ont vu se transformer, en fonction du degré d'enseignement et de la familiarisation avec les moyens à leur disposition.

Une seconde partie, fondée sur un questionnaire et des entretiens particuliers avec 26 enseignants fait apparaître également une évolution des gestes professionnels et de la prise en compte des savoirs de référence selon les conceptions des nouveaux moyens.

Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 4e primaire

Résultats de la seconde phase de l'enquête Mathéval

Ouvrage coordonné par Jean-Philippe Antonietti (IRDP éditeur, Neuchâtel 2005 (224 pages, A4)

Math-Ecole avait déjà présenté la première phase de Mathéval dans son numéro 209 (décembre 2003) Le travail s'est poursuivi dans le même esprit: un échantillonnage précis, une bonne cinquantaine de problèmes soumis à près de 300 élèves chacun, des taux de réussite et description des procédures les plus fréquentes, ...

Il y a ensuite, selon la demande institutionnelle de tout organisme qui finance une enquête de cette dimension, une tentative de répondre à quelques questions sur les objectifs et les compétences (sont-ils atteints ?) et sur les explications des différences observées.

L'une comme l'autre de ces deux publication doit intéresser au plus haut point tous les enseignants de l'école primaire. Nous y reviendrons vraisemblablement dans un prochain numéro, pour des commentaires plus détaillés.

Commandes sur le site de l'IRDP: http://www.irdp.ch/