

DU SUDOKU À LA BRIQUE DE PYTHAGORE

par Jean Bauer et Jean-Philippe Lebet

I. INTRODUCTION

Nous abordons ici un problème de mathématique resté encore sans réponse : celui de la « brique de Pythagore » (appelée aussi « Brique parfaite d'Euler »).

De nombreux mathématiciens, amateurs et professionnels s'y sont intéressés, sans avoir pu trouver de solution, ni pu prouver l'impossibilité d'une solution. De quoi s'agit-il ?

Soit un parallélépipède dont les mesures des trois arêtes sont a , b et c , celles des trois diagonales des faces latérales d , e et f et celle de la grande diagonale g .

Dans ces conditions, a , b , c , d , e , f et g peuvent-ils être des nombres entiers, tous les sept à la fois ?

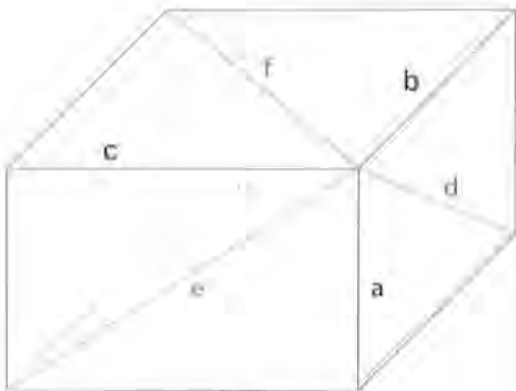


figure 1

L'énoncé de ce problème est simple. Il fait référence à des connaissances élémentaires, parallélépipède rectangle et relation de Pythagore, acquises dès l'école secondaire. Les raisonnements mis en œuvre pour rechercher d'éventuelles solutions sont accessibles à

tous et ressemblent beaucoup au genre d'opérations logiques qu'on mobilise pour la résolution d'un « Sudoku » : prise en compte de critères, contrôles, éliminations successives par exclusion etc.

Dans notre problème, les relations de Pythagore, entre les mesures des arêtes et des diagonales vont servir de critère pour accepter ou refuser certaines valeurs de la même manière que, dans le « Sudoku », on n'accepte les chiffres de 1 à 9 qu'une seule fois par ligne, colonne ou carré de 3×3 .

Triplets de Pythagore :

On appelle triplet de Pythagore un ensemble de 3 nombres entiers naturels (A ; B ; C) liés par la relation $A^2 + B^2 = C^2$. On dit que le triplet est primitif s'il n'existe pas de diviseur commun à A , B et C , autre que 1. On reconnaît évidemment dans ce triplet primitif, comme son nom l'indique, le théorème de Pythagore où A et B sont les mesures de l'angle droit d'un triangle rectangle et C celle de l'hypoténuse, pour les cas où ces nombres sont entiers et premiers entre eux (deux à deux). Dans la figure de la brique ci-dessus il y a six relations de triplets à respecter : (voir figure 1)

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$a^2 + c^2 = e^2$$

$$b^2 + c^2 = f^2$$

$$a^2 + f^2 = g^2$$

$$b^2 + e^2 = g^2$$

$$c^2 + d^2 = g^2$$

1 Remarque

Nous nous sommes laissé guider par des critères simples de logique mathématique que chacun peut comprendre pour aborder un problème sur lequel bien des mathématiciens autrement plus compétents que nous se sont cassés les dents. La démarche en elle-même nous a paru féconde et les résultats déjà dignes d'être communiqués. Cette démarche reste celle de deux amateurs et nous ne prétendons pas que tout est original et nouveau dans nos démonstrations, mais nous n'avons ni le temps, ni le goût de chercher des antécédents dans une documentation qui doit être énorme. Nous serons toutefois attentifs aux observations des lecteurs à ce sujet.

Chacun connaît le triplet primitif (3 ; 4 ; 5) qui vérifie $3^2 + 4^2 = 5^2$. On pourrait alors avoir $a = 3$, $b = 4$ et $d = 5$ et si l'on se souvient de (5 ; 12 ; 13), on pourrait alors imaginer que $c = 12$ et que $g = 13$. On aurait ainsi cinq de nos sept paramètres entiers. Mais on se rend vite compte que les deux derniers e et f ne sont pas entiers. Alors, pour progresser, nous allons chercher à organiser la liste de tous les triplets de Pythagore, en nous limitant aux triplets primitifs, c'est-à-dire que nous ne considérons pas par exemple $(3n ; 4n ; 5n)$ avec n entier quelconque.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRIPLETS PRIMITIFS:

($A ; B ; C$), premiers entre eux et tels que:
 $A^2 + B^2 = C^2$

1. Nombres pairs et impairs

Une première constatation est que, parmi les trois termes d'un triplet primitif, il y a un nombre pair et un seul.

- Si C est pair et si A et B sont pairs, le triplet n'est pas primitif
- Si C est pair et si A et B sont impairs, ils ne peuvent pas former un triplet de Pythagore car A^2 et B^2 sont des « multiples de 4 augmentés de 1 » et leur somme ne peut pas être un carré (C^2) qui serait forcément un multiple de 4 si C était pair.
- Si C est impair alors A et B doivent forcément être de parités différentes. Par convention nous choisirons A pour le terme impair et B pour le terme pair.

2. Multiples de 3

- Si C est multiple de 3, et si A et B sont aussi multiples de 3, le triplet n'est pas primitif. Supposons C multiple de 3, on l'écrira : $C = 3r$
- Si C est multiple de 3 et si ni A , ni B ne le sont, on aboutit à une impossibilité car : $C = 3r$ et $C^2 = 9r^2$ est également un multiple de 3 tandis que A et B n'étant pas multiples de 3 sont de la forme :

$$A = 3s \pm 1$$

$$B = 3t \pm 1$$

Ce qui impliquerait que

$$(3s \pm 1)^2 + (3t \pm 1)^2 = 9r^2.$$

Or, $9s^2 \pm 6s + 1 + 9t^2 \pm 6t + 1 = 3(3s^2 \pm 2s + 3t^2 \pm 2t) + 2$ est un « multiple de 3 augmenté de 2 » et donc il ne peut pas être égal à $9r^2$

- Si C n'est pas multiple de 3, et si A et B sont multiples de 3, l'impossibilité de former un triplet de Pythagore est évidente.
- Si C n'est pas multiple de 3, et si un seul des termes A ou B est multiple de 3, on arrive à former des triplets de Pythagore.

Donc dans un triplet primitif, il y a toujours un multiple de 3 et un seul, A ou B , avec C de la forme $C = 3r \pm 1$.

Remarque

Il est possible de générer une liste exhaustive de triplets primitifs en faisant varier les 3 paramètres r , s et t , en retenant les valeurs entières compatibles. Toutefois la méthode classique de Diophante, que nous verrons ci-dessous n'utilise, elle, que 2 paramètres.

3. Multiples de 5

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que dans un triplet primitif, il y a un multiple de 5 et un seul, qui peut être A ou B ou C .

Il suffit de poser :

$$C = 5r \pm (0 ; 1 ; 2)$$

$$A = 5s \pm (0 ; 1 ; 2)$$

$$B = 5t \pm (0 ; 1 ; 2)$$

et de recenser tous les cas possibles

4. Méthode de Diophante

La méthode classique pour générer les triplets primitifs est celle du mathématicien grec Diophante (env. 325 – 409).

Elle consiste à poser :

$$A = q^2 - p^2$$

où p et q sont entiers, de parité différente

$$B = 2pq$$

p et q sont premiers entre eux

$$C = q^2 + p^2$$

$$q > p$$

On trouve dans la littérature (<http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/rtritab.txt>) par exemple un tableau donnant les triplets primitifs par C croissants jusqu'à $C = 10.000$. Il y en a 1593. Nous en reproduisons ici les 40 premiers :

n	A	B	C	p	q	n	A	B	C	p	q
1	3	4	5	1	2	21	105	88	137	4	11
2	5	12	13	2	3	22	143	24	145	1	12
3	15	8	17	1	4	23	17	144	145	8	9
4	7	24	25	3	4	24	51	140	149	7	10
5	21	20	29	2	5	25	85	132	157	6	11
6	35	12	37	1	6	26	119	120	169	5	12
7	9	40	41	4	5	27	165	52	173	2	13
8	45	28	53	2	7	28	19	180	181	9	10
9	11	60	61	5	6	29	153	104	185	4	13
10	63	16	65	1	8	30	57	176	185	8	11
11	33	56	65	4	7	31	95	168	193	7	12
12	55	48	73	3	8	32	195	28	197	1	14
13	77	36	85	2	9	33	187	84	205	3	14
14	13	84	85	6	7	34	133	156	205	6	13
15	39	80	89	5	8	35	171	140	221	5	14
16	65	72	97	4	9	36	21	220	221	10	11
17	99	20	101	1	10	37	221	60	229	2	15
18	91	60	109	3	10	38	105	208	233	8	13
19	15	112	113	7	8	39	209	120	241	4	15
20	117	44	125	2	11	40	255	32	257	1	16

En observant ce tableau, on peut vérifier les propriétés relevées précédemment à propos de la présence de nombres pairs, de multiples de 3 et de 5 figurant dans les triplets primitifs. On y voit encore que tous les nombres pairs (B) sont aussi multiples de 4, que tous les troisièmes termes (C) sont de la forme $4m + 1$. On pourrait le démontrer à partir de la définition des triplets primitifs, qui implique elle-même des relations non explicites mais bien effectives, en particulier une des « identités remarquables » qui occupe une place importante dans les fondements du calcul littéral (et des programmes scolaires) : $A^2 = C^2 - B^2 = (C - B)(C + B)$.

Ce sont aussi d'autres « identités remarquables » qui permettent de comprendre les liens entre les trois termes d'un triplet de Pythagore et leur expression à l'aide de deux paramètres seulement par les formules de Diophante. On constate en effet, à l'aide de ces identités fondamentales,

que $C - B = q^2 - 2pq + p^2 = (q - p)^2$ et que $C + B = q^2 + 2pq + p^2 = (q + p)^2$ sont des carrés. On voit aussi que les paramètres p et q dérivent directement de $B^2 = C^2 - A^2 = (C - A)(C + A)$, avec $p^2 = (C - A)/2$ et $q^2 = (C + A)/2$, conduisant à l'expression de B , puis de A et C dans les formules de Diophante.

5 : Triplets différents, mais avec un même troisième terme (C)

Comme le tableau précédent est organisé selon les valeurs croissantes de C , on y repère facilement les triplets primitifs ayant un même troisième terme. Vu l'intérêt de ces triplets pour notre problème de la brique de Pythagore, il vaut la peine de s'y arrêter quelques instants. On constate que ces termes communs sont des produits de facteurs figurant dans des lignes précédentes de la colonne C .

Par exemple le premier terme C commun à deux triplets, 65, est le produit de deux termes déjà apparus précédemment: 5 et 13. Le terme suivant commun à plusieurs triplets, 85 est le produit de 5 et 17, etc.

L'étude des rapports entre les p et q des deux triplets dont on va calculer le produit des troisièmes termes permet de déterminer le(s) triplet(s) correspondant(s) à ce produit.

Si on désigne les termes C et les coefficients correspondants d'une ligne j par C_j , p_j et q_j on peut vérifier que les identités suivantes sont valables pour chaque troisième terme C_k et C_l , multiple de deux termes précédents C_i et C_k :

Pour la première valeur:

$$p_k = |p_i q_k - p_k q_i|$$

$$q_k = p_i p_k + q_i q_k$$

Pour la seconde valeur:

$$p_k = q_i q_k - p_i p_k$$

$$q_k = p_i q_k + p_k q_i$$

Exemple:

Calcul des p_3 , p_4 et q_3 , q_4 pour la première valeur commune de C , 65 : $C = C_1 \times C_2$

$$p_3 = |p_1 q_2 - p_2 q_1| = 1$$

$$q_3 = p_1 p_2 + q_1 q_2 = 8$$

$$p_4 = -p_1 p_2 + q_1 q_2 = 4$$

$$q_4 = p_1 q_2 + p_2 q_1 = 7$$

j	A_j	B_j	C_j	p_j	q_j
1	3	4	5	1	2
2	5	12	13	2	3
3	63	16	65	1	8
4	33	56	65	4	7

En résumé, le produit de deux troisièmes termes de triplets primitifs est lui-même un troisième terme, de deux triplets, si les deux termes initiaux sont premiers entre eux. (Lorsque les deux termes initiaux ont un diviseur commun autre que 1, leur produit est le troisième terme d'un seul triplet primitif, l'autre étant non primitif ou contenant un terme 0)

On peut le vérifier pour $C = 25 = 5 \times 5$; $169 = 13 \times 13$, $125 = 5 \times 5 \times 5$, etc.

6: Forme « $4m + 1$ » des troisièmes termes de triplets primitifs

Nous avons vu précédemment que les troisièmes termes de triplets primitifs sont des nombres impairs, non multiples de 3. Ils ne sont pas non plus multiples de 7, 11, 15 ... ni, plus généralement, de la forme « $4n - 1$ ». On le montre simplement en se référant à l'expression de $C = q^2 + p^2$ selon l'écriture de Diophante et à un résultat sur la somme de deux carrés: « les nombres entiers naturels

qui sont des multiples de 4 augmentés de 3 ne sont jamais la somme de deux carrés »². Comme C n'est jamais de la forme « $4n - 1$ », ni ne peut se décomposer en facteurs de cette forme, il sera par conséquent toujours un produit de facteurs de type $(4m + 1)$.

7: Factorisation du troisième terme d'un triplet : conséquence pour la brique

Revenons à la brique et à la mesure g de sa grande diagonale. Dans les six relations entre les mesures des arêtes et des diagonales, g apparaît trois fois, et toujours comme troisième terme d'un triplet : $a^2 + f^2 = g^2$
 $b^2 + e^2 = g^2$ $c^2 + d^2 = g^2$.

2 Voir A. Calame, 1986. *Les sommes de deux carrés*. In *Math-Ecole* 123 (pp. 18-22). Dans cet article, l'auteur présente encore deux autres résultats en lien étroit avec notre recherche sur les triplets primitifs : « Tout nombre premier $p = 4n + 1$ est décomposable en somme de deux carrés » et « Si deux nombres sont décomposables en somme de deux carrés, il en est de même de leur produit. »

La recherche de ce paramètre g devra donc se faire parmi les nombres C de notre étude, qui sont le troisième terme de trois triplets différents au moins. Ceci nous conduit à nous intéresser à la factorisation de ce terme.

D'après ce qui précède, on peut écrire C en produit de facteurs qui sont tous des multiples de 4 augmentés de 1 :

$$C = (4m_1 + 1)^{n_1} (4m_2 + 1)^{n_2} \dots (4m_k + 1)^{n_k}$$

On trouvera quatre exemples de ces factorisations et les formules permettant de calculer le nombre des triplets correspondants, primitifs et non primitifs, sur le site de *Math-Ecole* :

www.math-ecole.ch

Exemple 1.

$$C = 65 = 5 \times 13 \text{ (ou encore : } [4 + 1][3 \times 4 + 1])$$

et ses 4 triplets, dont les 2 primitifs,

$$(63 ; 16 ; 65) \text{ et } (33 ; 56 ; 65)$$

déjà entrevus précédemment

Exemple 2.

$$C = 1105 = 5 \times 13 \times 17,$$

ses 13 triplets, dont 4 triplets primitifs

Exemple 3.

$$C = 47125 = 5^3 \times 13 \times 29,$$

ses 31 triplets, dont 4 primitifs

Exemple 4.

$$C = 32045 = 5 \times 13 \times 17 \times 29,$$

ses 40 triplets dont 8 primitifs

8. Répartition des multiples de 3 dans les triplets primitifs de même C

Pour un C donné qui admet $1; 2; 4; 8; \dots 2^{k-1}$ triplets primitifs, tous les A ou tous les B sont des multiples de 3. Dans le cas où C est du type $5 + 12n$, ce sont les A qui sont multiples de 3 et lorsque C est du type $1 + 12n$ alors ce sont les B qui sont multiples de 3.

9. Cas où C est un nombre premier ou une puissance entière d'un nombre premier

Quand $4m + 1$ est un nombre premier, il n'y a qu'un seul triplet primitif admettant $C = 4m + 1$. De même quand $C = (4m + 1)^n$, par exemple: $25; 125; 169; \dots$, il n'y a qu'un seul triplet primitif admettant $C = (4m + 1)^n$.

10. Théorème de Bachet

Un théorème de Bachet dit que si A , B et C sont des entiers, qui obéissent à la relation $A^2 + B^2 = C^2$, les nombre AB ou $2AB$ ou $\sqrt{AB}$ ne sont jamais des carrés de nombres entiers.

11. Identité entre triplets primitifs de Pythagore

Pour deux triplets primitifs de Pythagore

$(A_1; B_1; C_1)$ et $(A_2; B_2; C_2)$ l'expression

$A_1 B_2 + A_2 B_1 + C_1 C_2$ est toujours un carré de nombre entier, car, en fait :

$$A_1 B_2 + A_2 B_1 + C_1 C_2 =$$

$(p_1 q_1 + p_2 q_2 + q_1 q_2 - p_1 p_2)^2$ où les p_i, q_i sont les paramètres p et q de Diophante.

De même :

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)^2$$

12. A, nombre premier

Si A est premier, cela veut dire qu'il n'intervient que dans un seul triplet primitif :

$A = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$ donc $(q - p) = 1$ et $(q + p)$ est premier.

13. B, puissance de 2

On démontre que pour $B = 2^n$, il n'y a qu'un seul triplet primitif possible. En fait il suffit de considérer $B = 2pq = 2^n$ donc $pq = 2^{n-1}$ et cela n'est possible que si $p = 1$ et $q = 2^{n-1}$ sinon p et q auraient un facteur commun.

14. Rapport p/q

Si on calcule les rapports p/q et qu'on réarrange la liste par p/q croissants on obtient bien entendu des valeurs qui sont toutes différentes puisque p et q sont premiers entre eux, ce qui revient à dire que deux triplets primitifs quelconques ont toujours des rapports B/A différents.

15. C, carré d'un nombre entier

Si le troisième terme C d'un triplet est un carré, A ou B est un multiple de 7. La

démonstration pourra être vue sur le site www.math-ecole.ch. Elle se fait en répertoriant tous les cas possibles pour A et B et en remarquant qu'obligatoirement dans la forme $A = 7r \pm (0; 1; 2; 3)$ et $B = 7s \pm (0; 1; 2; 3)$, le 0 intervient pour A ou B.

16. Surprise ou « découverte en passant » !

Il arrive parfois que, au cours de nos investigations, on observe des phénomènes qui ne sont pas l'objet initial de nos recherches et qui nous surprennent car ils nous paraissent inattendus.

Ainsi, notre problème de la brique de Pythagore nous a conduit à chercher les propriétés des triplets primitifs et à nous intéresser à la décomposition de leurs termes en facteurs premiers. Nous avons trouvé très intéressant d'observer la fréquence d'apparition de ces facteurs dans le premier terme A.

Pour cela, nous avons testé l'échantillon des 16299 premiers triplets primitifs (par C croissants). Notre liste correspond à 100 % à la liste « SOMOS » (voir § 4 précédent) pour les 1593 premiers triplets primitifs et nous avons de bonnes raisons de croire à sa validité jusqu'à $C = 102401$. Nous avons en effet fait varier p et q jusqu'à 320 en éliminant tous les p et q ayant un diviseur commun. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

p : facteur premier examiné

N : nombre de termes A contenant le facteur premier p dans l'échantillon des 16299 premiers triplets

f : fréquence d'apparition $N/16299$
(calculée au millième près)

(Voir tableau ci-contre)

Visiblement pour les nombres premiers p , on observe une fréquence correspondant à $2/(p+1)$, avec une précision supérieure à 99,92 %. Cette formule est assez étonnante !

Ce tableau montre que, pour les produits de deux nombres premiers différents, la fréquence est le produit des fréquences des deux facteurs (précision supérieure à 99,91 %)

p	N	f
3	8147	1/2
5	5437	1/3
7	4080	1/4
11	2714	1/6
13	2327	1/7
17	1813	1/9
19	1640	1/10
23	1371	1/12
29	1096	1/15
37	864	1/19
15	2725	$1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
21	2045	$1/2 \cdot 1/4 = 1/8$
33	1368	$1/2 \cdot 1/6 = 1/12$
35	1359	$1/3 \cdot 1/4 = 1/12$
55	920	$1/3 \cdot 1/6 = 1/18$
9	2722	1/6
25	1095	1/15
27	905	1/18
49	601	1/28
63	686	1/24
81	330	1/54
125	242	1/75
147	300	1/56

Pour les puissances de nombres premiers, p^n , la fréquence est le produit de la fréquence de p par $1/p^{n-1}$.

Par exemple, la fréquence de 9 est le tiers de la fréquence de 3, qui vaut un demi, la fréquence de 125 vaut 1/25 de la fréquence de 5, qui vaut un tiers. (précision supérieure à 99,83 %).

On peut donc prédire assez bien (disons au millième près) le nombre d'apparition d'un diviseur déterminé dans les premiers triplets primitifs (ordonnés selon le troisième terme C croissant). C'est un résultat intéressant. Nous donnons sur le site de *Math-Ecole* le tableau complet des valeurs obtenues. Remarquons aussi que la « densité » des triplets primitifs dans les nombres entiers reste constante et proche de 15,9 %. (16 pour $C < 100$, 158 pour $C < 1000$, 1593 pour $C < 10000$ et 15919 pour $C < 100000$)

III. QUADRUPLETS

Dans la « brique de Pythagore » nous avons six relations entre les mesures des arêtes et diagonales (a, b, c, d, e, f, g) qui sont des triplets de Pythagore, dont trois dans lesquelles la mesure g de la grande diagonale est le troisième terme. Les résultats précédents nous permettent de « débroussailler » le vaste champ de ces triplets.

Pour notre recherche, il ne faut pas oublier que nous avons également deux relations qui concernent quatre des grandeurs précédentes :

- l'une entre les mesures des côtés du parallélépipède a, b, c et celle de la diagonale principale g : $g^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- l'autre entre les mesures des diagonales des faces d, e, f , et celle de la grande diagonale g : $2g^2 = d^2 + e^2 + f^2$

Nous nous limiterons ici à la première de ces relations entre la grande diagonale et les côtés et nous allons, comme précédemment, trier et classer ces ensembles de quatre termes que nous appellerons « quadruplets de Pythagore ».

Définition : on appelle « quadruplet de Pythagore » un ensemble de quatre nombres entiers naturels ($a ; b ; c ; g$) tels que $g^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Le quadruplet est dit primitif lorsqu'il n'y a pas de diviseur commun à plus de deux des quatre termes a, b, c et g .

1 : Parité de g

Si g est pair, g^2 ne peut pas être la somme de 3 carrés dont 2 seraient impairs (considérations analogues à celles se référant à la parité de C pour les triplets). Donc g ne peut être pair sans que les trois autres paramètres a, b et c ne le soient aussi. Donc la définition des quadruplets primitifs impose que g soit impair.

Si g est impair, g^2 ne peut être la somme de 3 carrés impairs (pour des raisons analogues à celles avancées ci-dessus, facilement démontrables).

En conséquence, g ne peut être qu'impair et l'un des 3 termes a, b ou c l'est aussi dans un quadruplet primitif. Par convention on choisit a pour ce nombre impair. Les 2 autres termes b et c étant pairs.

2 : Génération des g

La méthode consiste à sélectionner les g impairs croissants, puis pour un g déterminé à sélectionner les a impairs croissants inférieurs à g . On effectuera $g^2 - a^2$ puis on regardera les b et c entiers pairs compatibles avec l'égalité :

$g^2 - a^2 = b^2 + c^2$. Le tableau suivant donne le résultat obtenu jusqu'à $g < 50$

(3 ; 1 ; 2 ; 2)	(23 ; 13 ; 18 ; 6)	(33 ; 25 ; 20 ; 8)	(39 ; 19 ; 26 ; 22)	(45 ; 5 ; 44 ; 8)
(7 ; 3 ; 6 ; 2)	(23 ; 3 ; 22 ; 6)	(33 ; 17 ; 20 ; 20)	(39 ; 13 ; 34 ; 14)	(47 ; 43 ; 18 ; 6)
(9 ; 7 ; 4 ; 4)	(23 ; 3 ; 18 ; 14)	(33 ; 17 ; 28 ; 4)	(41 ; 9 ; 32 ; 24)	(47 ; 27 ; 38 ; 6)
(9 ; 1 ; 8 ; 4)	(25 ; 15 ; 16 ; 12)	(33 ; 7 ; 28 ; 16)	(41 ; 23 ; 24 ; 24)	(47 ; 27 ; 34 ; 18)
(11 ; 9 ; 6 ; 2)	(25 ; 9 ; 20 ; 12)	(33 ; 7 ; 32 ; 4)	(41 ; 31 ; 24 ; 12)	(47 ; 21 ; 42 ; 2)
(11 ; 7 ; 6 ; 6)	(27 ; 25 ; 10 ; 2)	(33 ; 1 ; 32 ; 8)	(41 ; 33 ; 24 ; 4)	(47 ; 21 ; 38 ; 18)
(13 ; 3 ; 12 ; 4)	(27 ; 23 ; 10 ; 10)	(35 ; 33 ; 10 ; 6)	(41 ; 39 ; 12 ; 4)	(47 ; 11 ; 42 ; 18)
(15 ; 11 ; 10 ; 2)	(27 ; 23 ; 14 ; 2)	(35 ; 17 ; 30 ; 6)	(43 ; 39 ; 18 ; 2)	(49 ; 41 ; 24 ; 12)
(15 ; 5 ; 14 ; 2)	(27 ; 7 ; 26 ; 2)	(35 ; 15 ; 26 ; 18)	(43 ; 25 ; 30 ; 18)	(49 ; 33 ; 36 ; 4)
(17 ; 9 ; 12 ; 8)	(27 ; 7 ; 22 ; 14)	(35 ; 1 ; 30 ; 18)	(43 ; 9 ; 38 ; 18)	(49 ; 31 ; 36 ; 12)
(17 ; 1 ; 12 ; 12)	(29 ; 21 ; 16 ; 12)	(37 ; 3 ; 36 ; 8)	(43 ; 9 ; 42 ; 2)	(49 ; 23 ; 36 ; 24)
(19 ; 17 ; 6 ; 6)	(29 ; 11 ; 24 ; 12)	(37 ; 3 ; 28 ; 24)	(43 ; 7 ; 42 ; 6)	(49 ; 15 ; 40 ; 24)
(19 ; 15 ; 10 ; 6)	(29 ; 3 ; 24 ; 16)	(37 ; 21 ; 28 ; 12)	(43 ; 7 ; 30 ; 30)	(49 ; 9 ; 48 ; 4)
(19 ; 1 ; 18 ; 6)	(31 ; 27 ; 14 ; 6)	(37 ; 27 ; 24 ; 8)	(45 ; 37 ; 20 ; 16)	(49 ; 9 ; 36 ; 32)
(21 ; 19 ; 8 ; 4)	(31 ; 21 ; 18 ; 14)	(39 ; 35 ; 14 ; 10)	(45 ; 35 ; 28 ; 4)	
(21 ; 13 ; 16 ; 4)	(31 ; 21 ; 22 ; 6)	(39 ; 29 ; 26 ; 2)	(45 ; 29 ; 28 ; 20)	
(21 ; 11 ; 16 ; 8)	(31 ; 5 ; 30 ; 6)	(39 ; 29 ; 22 ; 14)	(45 ; 19 ; 40 ; 8)	
(21 ; 5 ; 20 ; 4)	(33 ; 31 ; 8 ; 8)	(39 ; 19 ; 34 ; 2)	(45 ; 13 ; 40 ; 16)	

Densité des quadruplets:

Nous avons vu ci-dessus que le nombre des triplets primitifs était proportionnel à N . Qu'en est-il du nombre de quadruplets primitifs (QP). Le tableau suivant nous donne déjà un résultat qui nous montre que le nombre de QP varie lui en fonction de N^2 . Il en va d'ailleurs de même si l'on ajoute les quadruplets non primitifs. Par exemple jusqu'à 100, il y a 347 quadruplets primitifs + 224 non primitifs, ce qui nous donne une proportion de 0,0571 pour l'ensemble des quadruplets rapportés à N^2 .

N	Nombre QP	N 2	Nombre QP / N ²
10	4	100	0.04
20	14	400	0.035
30	31	900	0.0344
40	56	1600	0.035
50	86	2500	0.0344

Nous avons contrôlé ces données jusqu'à $N = 400$.

3: Compatibilité Quadruplets – Triplets de Pythagore

Il s'agit maintenant d'élaguer cette liste de quadruplets primitifs en accord avec la recherche de la brique de Pythagore, c'est-à-dire que g doit être un multiple de $4n + 1$ et en aucun cas de $4m - 1$, g n'est donc pas multiple de 3 ; 7 ; 9 ; 11 ; 15 ; 19 ; 21 ; 23 ; etc, car si c'était le cas, alors tous les paramètres seraient multiples de ce même diviseur et l'on pourrait simplifier la brique d'autant. Ceci est connu et a été démontré par André Calame dans *Math-Ecole* en mai 1986.

4:

Les 7 paramètres sont tous différents, sinon on introduirait des facteurs « $\sqrt{2}$ » ou des impossibilités telles que côtés de même longueur que la diagonale dans un même triplet, ce qui reviendrait à aplatir la brique sur un rectangle, et donc à considérer une brique d'épaisseur nulle

5: Concernant la parité (facteur 2)

Si g , qui est la diagonale de 3 triplets impliquant les 6 autres paramètres était pair, tous les 7 paramètres seraient pairs et on pourrait simplifier la brique par un facteur 2. Donc g est impair. De même a , b , c ne peuvent être tous pairs, ce qui entraînerait g pair.

Or nous avons vu que les 2 côtés d'un triplet primitif ne sont jamais impairs tous les deux. Il en va de même pour un triplet non primitif impliquant g , sauf s'il est multiple de 2, ce que nous excluons.

On en déduit que parmi a , b , c un seul paramètre est impair, et nous admettons que c'est a plutôt que b ou c .

Physiquement cela revient à permuter a ; b ; c sans changer les dimensions réelles de la brique, mais simplement à la poser sur une autre face.

Si g et a sont impairs, alors b ; c ; f sont pairs et par conséquent d et e sont impairs.

b ; c ; f est un triplet non primitif multiple d'un facteur 2^n (avec $n \geq 2$) d'un autre triplet primitif ou non primitif mais avec 1 côté et la diagonale impairs, tandis que l'autre côté est divisible par 2^m avec $m \geq 2$. Nous pouvons encore choisir que b et f ont le même degré de parité n et dans ce cas le degré de parité de c devient $n + m$.

6:

g n'est pas un nombre premier car il n'appartiendrait qu'à un **seul** triplet et il en faut au minimum 3.

De même a n'est pas premier car il est donné par $q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$ ce qui implique, s'il était premier, que $q - p = 1$ et que $q + p$ soit premier donc a ne ferait partie que d'un **seul** triplet et il en faut aussi au moins 3 différents.

7:

$g = 3r \pm 1$, puisqu'il n'est pas multiple de 3. On voit vite que deux des trois paramètres a , b et c doivent eux être multiples de 3 et aussi la diagonale faciale comprise entre les deux arêtes multiples de 3.

Ce triplet est un multiple de 3 au moins d'un autre triplet (primitif ou non).

On notera qu'aucune des 2 autres diagonales faciales n'est multiple de 3, sinon tous les 7 paramètres le seraient aussi. Parmi a, b, c , l'un n'est pas multiple de 3, un autre est multiple de 3 au moins et le troisième est multiple de 9 au moins. La diagonale faciale entre les 2 multiples de 3 est également multiple de 3, mais au même degré que le côté qui l'est le moins.

8:

Aucun diviseur ne se trouve dans 4 des 7 paramètres, sinon il apparaîtrait dans tous les 7 paramètres.

9:

Diviseur 5: il apparaît une fois, et une seule fois, dans chaque triplet primitif $A; B; C$.

Il en va de même pour tout triplet non primitif à moins que ce dernier ne soit un multiple de 5 d'un triplet primitif, dans ce dernier cas l'un des termes est multiple de 25.

Cas possibles:

g est multiple de 5, alors l'un des 3 paramètres a, b, c l'est aussi (ou bien alors tous les 3 puis tous les 7 paramètres, donc ce cas n'entre pas en compte).

g n'est pas multiple de 5, alors 2 des 3 paramètres a, b, c le sont et par conséquent aussi la diagonale latérale comprise entre les 2 côtés en question, par exemple a, b, d et l'un de ces 3 derniers paramètres est même multiple de 25 au moins. Il existe aussi une possibilité théorique que g ne soit pas multiple de 5 et que ni a , ni b , ni c ne le soient non plus. Mais ceci impliquerait que d, e, f soient tous les 3 multiples de 5, ce qui donnerait g multiple de 5, puisque $2g^2 = d^2 + e^2 + f^2$ et par cascade a, b, c aussi, donc contradiction. Ce cas n'est pas compatible avec la brique de Pythagore. La conclusion de ce point important est qu'il ne peut y

avoir que 3 des 7 paramètres multiples de 5, et que ces groupes possibles sont: $a; b; d$ ou $a; c; e$ ou $b; c; f$ ou $a; f; g$ ou $e; b; g$ ou encore $d; c; g$. Il est donc exclu d'avoir 2 diagonales latérales multiples de 5. On peut s'en convaincre en se rappelant que le triplet de la face non concernée par les 2 diagonales multiples de 5 comporte au moins 1 paramètre multiple de 5....

10:

Un même diviseur qui se trouve dans 2 diagonales latérales ne peut pas apparaître dans l'un des 5 autres paramètres, sans apparaître dans tous.

11:

La méthode de Diophante donne en fait le théorème:

Quand un nombre est la somme de deux carrés, son carré est aussi la somme de deux carrés.

En effet:

$$C = q^2 + p^2 \text{ et } C^2 = A^2 + B^2 \text{ avec}$$

$$A = q^2 - p^2 \text{ et } B = 2pq$$

$$A^2 + B^2 = (q^2 - p^2)^2 + 4p^2q^2 = (q^2 + p^2)^2$$

en développant

La réciproque semble vraie aussi. Si le carré d'un nombre est la somme de 2 carrés, alors ce nombre peut s'exprimer sous la forme d'une somme de 2 carrés de nombres entiers. Ce qui est en tout cas valable pour A impair, c'est qu'il est la différence de 2 carrés de nombres entiers.

$$\text{On a en effet } 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$$

et nous n'envisageons pas de A pair et forcément il existe

$$\text{un } B = 2pq \text{ tel que } A^2 + B^2 = (q^2 + p^2)^2 = C^2$$

Que trouve-t-on dans la littérature à ce sujet?

Nous donnons ci-dessous des exemples de brique d'EULER avec 6 des 7 paramètres entiers.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
117	44	240	125	267	244	$5\sqrt{29\sqrt{101}}$
275	252	240	373	365	348	$\sqrt{13\sqrt{37\sqrt{409}}}$
693	140	480	707	843	500	$13\sqrt{29\sqrt{149}}$
85	132	720	157	725	732	$\sqrt{13\sqrt{37\sqrt{1129}}}$
231	792	160	825	281	808	$5\sqrt{13\sqrt{41\sqrt{53}}}$
153	104	672	185	$3\sqrt{89\sqrt{593}}$	680	697
$\sqrt{7\sqrt{23\sqrt{31\sqrt{151\sqrt{281}}}}}$	7800	18720	16511	23711	20280	24961

Euler a donné des équations paramétriques pour obtenir *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* entiers à partir d'un triplet de Pythagore primitif quelconque *A*, *B*, *C*:

$$\begin{aligned} a &= A(4B^2 - C^2) & d &= C^3 \\ b &= B(4A^2 - C^2) & e &= A(4B^2 + C^2) \\ c &= 4ABC & f &= B(4A^2 + C^2) \end{aligned}$$

Les 6 paramètres sont bien des nombres entiers. En essayant d'examiner ce qui se passe pour *g*, on peut écrire:

$g^2 = C^2(16A^2B^2 + C^4)$ donc pour que *g* soit un entier il faudrait que :

$\sqrt{16A^2B^2 + C^2}$ soit un entier, impair de surcroît comme nous le verrons plus loin.

En passant par la méthode classique de Dio-
phante:

$$\begin{aligned} A &= q^2 - p^2 \\ B &= 2pq \\ C &= q^2 + p^2 \end{aligned}$$

l'équation ci-dessus devient :

$$\sqrt{16A^2B^2 + C^4} = \sqrt{q^8 + 68q^6p^2 - 122q^4p^4 + 68q^2p^6 + p^8}$$

Il semble qu'il n'y ait pas de solution entière pour *p* et *q* pour cette racine. Nous l'avons vérifié dans EXCEL en faisant varier *p* et *q* entre 1 et 100. Tout au plus cette méthode permet d'obtenir des valeurs approchées.

IV. CONCLUSION (PROVISOIRE):

Notre conviction est qu'il n'existe pas de « brique de Pythagore », c'est-à-dire de parallélépipède rectangle dont toutes les mesures des côtés et diagonales soient des nombres entiers. Nous espérons pouvoir le prouver un jour par des raisonnements de pure logique.

Depuis la rédaction de cet article, nos recherches se sont élargies et nous nous proposons de mettre sur le site de *Math-Ecole* les résultats que nous avons obtenus entre-temps.

Nous remercions *Math-Ecole* de nous donner l'occasion de dialoguer avec les lecteurs intéres-

sés par cette question et nous mettrons à disposition de ces derniers les listings sur lesquels nous avons travaillé. C'est avec plaisir que nous recevrons les suggestions éventuelles des lecteurs.

Les domaines non évoqués dans cet article ont été les suivants:

1:

Recours aux modulus

2:

La relation que nous avons appelée « quadruplets » de diagonales $2g^2 = d^2 + e^2 + f^2$

a également été mise à contribution avec profit

3:

Etablissements de listes mixtes triplets primitifs + triplets non primitifs, servant à générer les *g* potentiels, de même que les diagonales latérales potentielles. Nous mettrons ces listes à disposition des lecteurs.