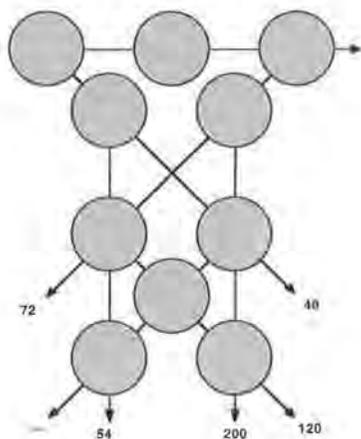


« COIN MATHS »

F. Jaquet

PRODUITS EN LIGNE



Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?

Ce problème est tiré de la finale du 10^e RMT. Il était destiné aux classes des degrés 5 à 8 et a été choisi avec une vingtaine d'autres, pour constituer les « ateliers de résolution de problèmes » que l'Association du rallye mathématique transalpin (ARMT) développe actuellement, après les avoir largement expérimentés lors d'expositions et manifestation de promotion des mathématiques.

Ces « ateliers » sont ainsi nommés parce que la manipulation de matériel y joue un rôle important. Les problèmes proposés peuvent en effet se résoudre sans papier ni crayon, dans un premier temps, avant d'être exploités en classe dans le cadre de progressions didactiques vers des concepts mathématiques à construire.

Les énoncés sont présentés de manière traditionnelle, sur des fiches, mais ils sont accompagnés du matériel de manipulation nécessaire à leur résolution, pour ceux qui rechignent à passer à l'écrit.

Une brochure d'accompagnement est à l'impression¹. Dans son introduction, elle présente plusieurs manières d'exploiter les activités en classe, de la modalité minimale ne demandant qu'une trace écrite à une modalité d'insertion dans le parcours didactique de la classe, en passant par des modalités intermédiaires comme des mises en commun, des exploitations dirigées, etc.

Pour chaque atelier, la brochure présente les huit rubriques suivantes :

- une liste du **matériel**
- la ou les **solutions** du problème, toujours utiles pour la vérification et l'exhaustivité
- les **degrés** pour lesquels l'activité est la plus adéquate
- les **contenus mathématiques** dont on doit s'assurer qu'ils sont bien réels et intéressants pour la progression des élèves,
- la **tâche de l'élève**, partie essentielle de l'analyse a priori,
- des **développements mathématiques**, qui peuvent être utiles pour mieux comprendre les enjeux de l'activité dans la construction des savoirs, au-delà des programmes scolaires des degrés concernés,
- des **indications didactiques** : différents modes de gestion des ateliers en vue de leur exploitation pour la classe, suggestions de prolongements ou de développements, dans une optique de différenciation, d'évaluation... ou en vue de l'insertion de l'atelier dans un parcours didactique.

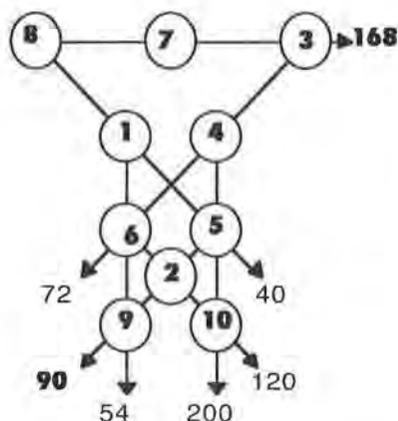
Voici ces différentes rubriques de la brochure, pour l'atelier « Produits en ligne » :

1. On la trouvera en consultant le nouveau site de l'ARMT : <http://www.math-armt.org>

Matériel

10 jetons en bois, numérotés de 1 à 10

Solution



Cette solution est unique

Degrés : dès les degrés 5 à 6, jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire, voire au-delà.

Contenus mathématiques

- Multiplication : décomposition d'un nombre en facteurs premiers
- Logique et raisonnement : conjonction et négation de critères.

Tâche de l'élève

- Lecture de l'énoncé : compréhension de « produit » et prise en considération des contraintes pour chaque alignement.
- Travailler par essais pour s'approprier les règles et constater qu'il faut organiser les recherches en tenant compte des différentes contraintes qui s'exercent sur chaque emplacement des nombres.
- Pour chacun des nombres, dresser l'inventaire des emplacements possibles et constater que les choix sont limités pour certains nombres comme le 9, le 5, le 10, le 7 en particulier.
- Placer l'un de ces nombres sur un emplacement possible (par exemple le 9 sur un

des alignements « 54 » ou « 72 ») et, par essais successifs, chercher à placer les autres nombres. Puis lorsqu'une disposition est trouvée, se demander s'il y en a d'autres et entreprendre d'autres essais.

- Pour éviter les tentatives longues et inutiles, analyser de manière plus approfondie la décomposition des nombres en facteurs premiers : $10 = 2 \times 5$; $9 = 3 \times 3$; $8 = 2 \times 2 \times 2$; ... ainsi que celle des produits à obtenir : $200 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$; $120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; $54 = 3 \times 3 \times 3 \times 2$; $40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2$.

On constate alors que le 7 est obligatoirement sur la ligne du haut, au milieu. Il n'y a alors plus que deux emplacements pour le 9 : en bas de la colonne du 54 ou en haut à droite (sur le première ligne). Si le 9 était dans cette dernière position, il faudrait que le 6 et le 3 soient dans la colonne du 54 (pour les deux facteurs « 3 » de ce nombre) mais pas dans l'alignement du 72 (dont les deux facteurs « 3 » seraient déjà pris par le 9), ni dans l'alignement du 40 (qui n'admet pas de facteur « 3 »). Il ne serait donc pas possible de placer le 6 et le 3 dans la colonne du 54 et, par conséquent, l'emplacement du 9 est déterminé de manière unique, en bas de la colonne du 54. Un raisonnement analogue sur les deux facteurs « 5 » qui composent 120 permet de dire que 5 et 10 occupent obligatoirement les deux emplacements inférieurs de la colonne du 200. L'emplacement du 4 est alors déterminé de manière univoque : à l'intersection des alignements du 200 et du 72 (car $5 \times 10 \times 4 = 200$). Le 10 ne peut alors plus se situer sur la ligne du 40 car pour compléter l'égalité $10 \times \dots \times \dots = 40$, le 4 n'est plus disponible et le 2 n'est utilisable qu'une seule fois. Les nombres 7, 9, 4, 5 et 10 étant placés, les choix des emplacements des autres nombres se déterminent aisément, de manière aussi univoque. Il n'y a donc qu'une solution au problème (Voir ci-dessus).

Développements mathématiques

L'activité « Produits en ligne » fait intervenir la décomposition multiplicative des nombres naturels. (On aborde là une des propriétés essentielles de la multiplication, exprimées par les mathématiciens au travers du « théorème fondamental de l'arithmétique », qui dit que tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers.)

Comme le montre l'analyse de la tâche ci-dessus, l'expression des nombres en produit de facteurs premiers (qu'on ne peut plus décomposer) est un instrument efficace, indispensable pour toute l'arithmétique : multiples, diviseurs, communs multiples et diviseurs communs, fractions, ...

Cette décomposition en facteurs permet ici de trouver les emplacements des nombres par déductions logiques plutôt que par essais successifs et éliminations. Elle permet en outre de s'assurer que toutes les solutions ont été trouvées ou de l'unicité de la solution comme dans ce cas.

Indications didactiques

L'activité est « auto-validante » car il suffit de vérifier si les produits des nombres placés correspondent à ceux qui sont indiqués sur le schéma. L'écriture détaillée de tous ces produits constitue ainsi une exploitation minimale de l'activité.

Mais ces vérifications ne font intervenir que la connaissance de la table de multiplication et de produits élémentaires, sans exploiter la richesse de la situation du point de vue

mathématique. Pour sensibiliser les élèves à l'efficacité de la « décomposition en facteurs premiers », il faut envisager une mise en commun et considérer cet atelier *Produits en ligne* comme une étape importante du parcours didactique sur les nombres premiers, dans le chapitre des multiples et diviseurs.

L'enseignant aura ici un rôle essentiel à jouer, après avoir laissé les élèves chercher la solution, au moment d'une validation collective où il faudra répondre à la question « Combien y a-t-il de façons de disposer ces dix nombres ? » de manière claire. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas une connaissance qui se construit spontanément : elle fait intervenir l'associativité et la commutativité de la multiplication dont les élèves sont peu conscients car ils rencontrent habituellement des produits de deux facteurs seulement ; elle demande une certaine familiarité avec les nombres premiers et les critères de divisibilité les plus courants ; elle fait appel à une méthode rigoureuse consistant à « extraire », dans l'ordre, les facteurs premiers du nombre à décomposer. C'est la raison pour laquelle l'enseignant devra être actif en fin de mise en commun, par des rappels, des suggestions et des aides. Il aura aussi la tâche de conduire les phases d'institutionnalisation qui suivront. Il devra encore proposer des activités de consolidation et d'assimilation des connaissances nécessaires à la décomposition en facteurs premiers.

Par exemple, l'activité de l'encadré de la page 57 permet d'utiliser intensément toutes les connaissances sur les nombres premiers et les critères de divisibilité.