VARIATIONS SUR UN PROBLÈME CONNU[1]

Luc-Olivier Pochon

L'enseignement des mathématiques en Suisse romande s'appuie fortement sur la résolution de problèmes. Cette option pose aux auteurs de moyens d'enseignement, comme aux enseignants, le défi de trouver des familles de situations qui organisent l'apprentissage grâce à des « obstacles » bien choisis[2]. Se situant dans cette optique, cet article part d'un problème et en explore quelques variations afin d'essayer de tisser ce que les didacticiens appellent un « espace de problèmes »[3].

Le point de départ est tiré des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques 7-8-9. Il s'agit de « La girafe »[4] dont l'énoncé est donné ci-dessous:

La girafe

Une girafe est installée dans un pré qui a la forme d'un triangle rectangle.
Les côtés de son angle droit mesurent respectivement 16 m et 12 m.
Grâce à son long cou, la girafe peut brouter l'herbe jusqu'à 2 m à l'extérieur de la clôture.

Quelle est l'aire de la surface d'herbe susceptible d'être broutée par ce charmant ruminant ?

Habillage et variantes

Il est possible d'imaginer de nombreuses variantes de cet énoncé. On peut par exemple remplacer la girafe par le bras d'une grue. Cette modification rend plus perceptible qu'une construction géométrique se cache derrière l'énoncé. On peut aussi, en supprimant l'habillage (en parlant de « lieu de points », par exemple), faciliter l'accès aux notions mathématiques. Mais en même temps, on supprime une partie du processus de modélisation, voire de mathématisation.

Les notions

L'activité mêle un aspect de géométrie synthétique[5] - la recherche d'un « lieu de points » - et des éléments de géométrie métrique (en l'occurrence liés au triangle rectangle) et le calcul d'aires. C'est son intérêt. Cela fournit une étape de planification plus riche et intéressante. De plus, chacun de ces aspects appartenant à un registre particulier, la recherche de la solution demande une certaine décentration pour passer d'un registre à l'autre.

À noter qu'une variante pourrait confiner l'activité dans le registre des mesures de longueurs en se contentant de demander le périmètre de la surface broutée (en prenant au niveau de l'habillage, le prétexte d'ajouter une nouvelle barrière de protection).

L'obstacle noyau

Le premier « obstacle » à surmonter est évidemment la recherche de la frontière de la nouvelle surface, notamment aux alentours des som-

1 L'impulsion à cette analyse a été donnée par le Groupe mathématique Harmos-SR qui a pris cette activité comme référence lors de l'établissement d'une grille d'analyse de tâches. Toutefois, les propos tenus dans cet article n'engagent que leur auteur.

2 Procédé minutieusement décrit par Cardinet, J. (1987). L'adaptation des objectifs à la réalité. In GRAPMATH. *L'ajustement des programmes expérimentaux de mathématique en Suisse romande*. Neuchâtel: IRDP, Ouvertures, 87.401.

3 Fabre, M. (1999). Situations-problèmes et savoir scolaire. Paris: PUF.

4 Brêchet, M. Calame, J.-A. & Chastellain, M. (2003). *Mathématiques 7-8-9, Grandeurs et mesures, Analyse de données*. Lausanne: LEP. Fascicule: Grandeurs et mesures, Analyse de données, activité 84, p. 41.

5 Le nom de géométrie synthétique a été créé au XIX[e] siècle par opposition à la géométrie analytique, ou géométrie des coordonnées. La géométrie analytique peut se développer sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures. La géométrie synthétique s'appuie sur des considérations d'espace, de figures et de postulats liés à notre perception. (voir *l'Encyclopedie des sciences mathématiques*, édition française, Gauthier-Villars, 1915 rééd. Jacques Gabay, Paris, 1991, t. III, vol. 1, p. 185-259.

mets du triangle initial. Cet obstacle principal, ou obstacle noyau, peut être précédé de « jalons » ou être suivi d'activités de consolidation (cela dépend de l'agencement didactique qui est adopté). Par exemple, pour reprendre des suggestions[6] de Michel Brêchet :

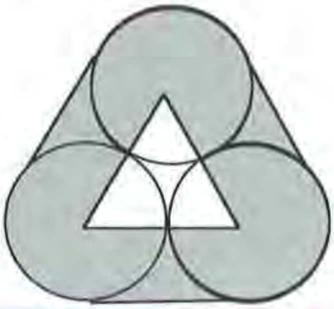
** Représentez tous les points situés à 2 cm d'un rectangle donné.*

Ou encore :

** Coloriez la partie de la feuille qui se trouve à moins de 3 cm d'un point P et à plus de 4 cm d'un autre point R. (les points P et R sont placés judicieusement).*

On peut aussi faciliter le passage de l'obstacle « noyau » en suggérant une construction utile par un problème du genre[7] :

Calculer l'aire de la partie grisée, lorsque les côtés du triangle équilatéral valent 5 cm (puis 12 cm, puis ...).



Le deuxième obstacle est lié au précédent. Il s'agit du rassemblement des tranches de disque pour en faire un disque complet (selon le dispositif didactique ce stade ne sera pas forcément atteint du premier coup). (*Voir figure 1*)

figure 1 : recherche de l'aire par découpage et assemblage

Variable didactique

L'analyse précédente suggère que la forme du pré constitue une importante variable didactique de la situation. En poursuivant sur cette voie, on constate tout d'abord qu'utiliser un pré carré, voire rectangulaire, rend les choses plus évidentes tout en dénaturant vraisemblablement l'objectif assigné à cette activité par ses auteurs. Cette variante facilite la perception du découpage-assemblage du disque et supprime le « distracteur » que représente le calcul de la longueur d'un côté.

Mais on peut aussi tenter d'augmenter le nombre de côtés du pré initial et de considérer un polygone (*figure 2*).

figure 2: le problème de la girafe avec un pré pentagonal

L'intérêt est ici de constater que l'on change de registre. L'aspect métrique disparaît (ou devient trop ardu). La situation se centre sur le registre « synthétique ». Privé du distracteur

6 Communiquées au groupe Harmos-SR.
7 Cet énoncé est inspiré du problème « histoire d'aires » de l'ouvrage 7-8-9 repris de : Calame, J.-A. & Jaquet, F. (1989). *Mathématiques, neuvième année*. Neuchâtel : Département de l'instruction publique.

« calcul de grandeur », on perçoit certainement plus facilement la possibilité de procéder à un découpage suivit d'un assemblage. L'intérêt est alors de passer à un degré de mathématisation supplémentaire. En utilisant le calcul littéral, on constate aisément que l'on a les relations :

(1) $P' = P + 2\pi L$
(2) $A' = A + PL + \pi L^2$

Où P et A représentent le périmètre et l'aire du pré initial et P' et A' le périmètre et l'aire de la surface broutée, L étant la longueur du cou de la girafe.

Ces formules permettent d'examiner quelques questions concernant l'accroissement du périmètre ou de la superficie en fonction de L.

La forme polygonale du pré perd donc de son importance. L'activité de résolution s'apparente à une l'activité mentale menée dans la tradition des « théorèmes sans preuve »[8] (l'aire totale est la somme des aires des rectangles et du disque de rayon L).

En passant, notons que le fait que les secteurs de disque se rejoignent pour former un disque complet est bien connu des utilisateurs de LOGO sous l'acronyme TTTT (théorème du tour total de la tortue). Rappelons l'histoire : une tortue parcourant le pourtour du polygone aura fait un tour sur elle-même en arrivant à son point de départ. Ce qui démontre que la juxtaposition des angles β des rotations de la tortue vaut un tour complet. Comme l'angle β vaut l'angle externe[9] α (*figure 3*) cela montre l'équivalence des deux propriétés.

8 Delahaye, J.-P. (2005). Démonstrations et certitude en mathématiques. Dossier *« Pour la Science », Les chemins de la logique*, octobre/décembre 2005, 38-43.

9 Appelé ainsi par Descartes selon Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning. Volume I: Induction and analogy in mathematics.* Princeton: Princeton University Press. 2nd Edition.

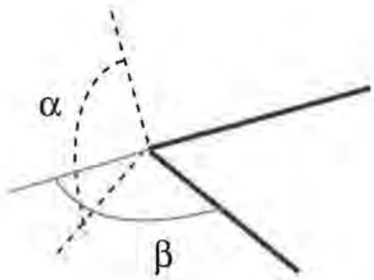


figure 3 : l'angle externe α est identique à β l'angle de rotation de la tortue

Pour aller plus loin

Qu'en est-il pour d'autres formes de prés ? Pour un cercle de rayon r, par exemple, il n'est pas difficile de montrer que les deux formules sont encore valables.

La première : $P' = 2\pi(r + L) = P + 2\pi L$ est d'ailleurs liée au paradoxe de la balle de ping-pong et du globe terrestre[10]. Par contre, il est inhabituel de l'interpréter comme la somme de la longueur des circonférences du cercle initial et du cercle obtenu par rotation du vecteur $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\| = L$) (*figure 4*).

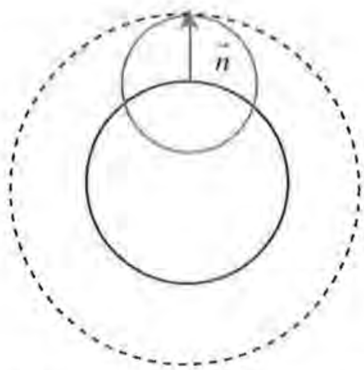


figure 4 : le cas du polygone à une infinité de côtés de longueur nulle

10 Rappel : on suppose qu'une ficelle entoure une balle de ping-pong et une autre la terre. De combien faut-il rallonger chacune des ficelles pour pouvoir les éloigner de 1m de leur support ?

L'autre formule est en général abordée sous la forme de l'aire de la couronne donnée classiquement par la formule : $2\pi(r+\frac{L}{2})\times L$

Il est également possible d'interpréter l'aire de cette couronne de façon inhabituelle comme formée de l'aire du rectangle construit sur la circonférence du disque intérieur à laquelle on ajoute l'aire du disque (*figure 4*) parcouru par le vecteur $\vec{n}$. En effet, on vérifie facilement que cette formule classique donne bien le même résultat que l'accroissement de l'aire exprimé dans (2) :

$$PL+\pi L^2 = 2\pi(r+\frac{L}{2})\times L$$

Et l'on se retrouve ici en pleine géométrie de la tortue (LOGO) ; la géométrie des « petits pas » qui considère le cercle comme beaucoup de petits pas, chacun ajoutant une tranche de disque.

Et encore ...

Il est intéressant de noter que ce problème peut encore servir à des applications non triviales de calcul de longueur d'arc pour le niveau lycée. En conjuguant les deux cas, polygone et cercle, les mêmes formules sont presque établies pour une figure « quelconque » (*figure 5*). Les découpages et assemblages ne sont plus possibles, mais on peut utiliser la géométrie de la tortue le long des parties « lisses » et l'exemple du pré polygonal dans les « coins ».

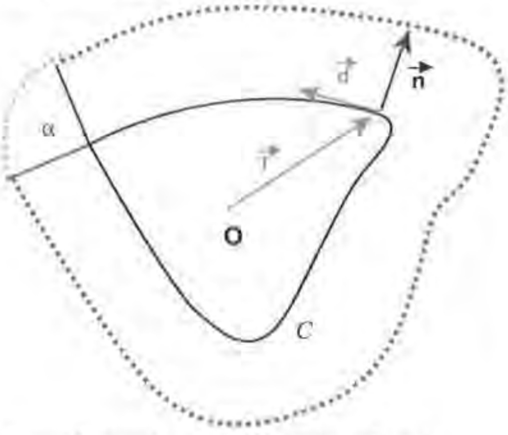


figure 5 : courbe avec un « coin » d'angle « externe » α

Globalement, on se trouve dans un paradigme de géométrie différentielle. Intuitivement, lorsque le rayon vecteur $\vec{r}$ parcourt la courbe *C*, $\vec{n}$ fait un tour sur lui-même (avec quelques « vibrations ») sauf une tranche α (on se permet ici d'utiliser la même lettre pour désigner l'angle et sa mesure).

Le lecteur intéressé trouvera sur le site de la revue la démonstration formelle avec :

Le périmètre $P' = \int_C \|d(\overrightarrow{r+n})\| + \alpha\|\vec{n}\|$ calculé à partir de $P = \oint \|d\vec{r}\|$ et l'aire, composante du vecteur $\vec{A'} = \frac{1}{2}\int_C (\overrightarrow{r+n})\times d(\overrightarrow{r+n}) + \alpha\|\vec{n}\|^2$, calculée à partir de $\vec{A} = \frac{1}{2}\oint \vec{r}\times\overrightarrow{dr}$.

Pour conclure

En partant d'un problème proposé par les moyens 7,8,9, quelques variations ont mis l'accent sur la variable didactique « forme du pré ». Avec tout d'abord un premier problème de lieu de point (selon la formulation qu'on lui donne), puis une activité de découpage-assemblage puis finalement une approche différentielle qui pourrait, sans apparaître dans cet « espace de problèmes », passer à côté de l'interprétation simple et élégante : « aire de la couronne = aire d'un rectangle + aire d'un disque ».

Cette « balade » permet de montrer, par exemple, que le niveau de complexité et celui de difficulté d'un problème entretiennent des rapports particuliers. La considération de propriétés générales, non numériques, peut rendre certains aspects plus aisés. Elle a aussi conduit à découvrir une nouvelle interprétation de la surface de la couronne. Elle permet également de constater que les « espaces de problèmes » peuvent enjamber les frontières de la scolarité obligatoire. On notera encore la connexion possible[11] avec l'espace de problèmes « rotations de disques

11 via notamment la recherche de la trajectoire du centre du disque qui roule.

roulant sur d'autres objets » proposé dans Math-Ecole 215[12] et dont des solutions se trouvent dans l'encadré ci-dessous et en page 34.

Mais d'autres variantes sont possibles et vraisemblablement mieux adaptées aux objectifs de la fin de la scolarité obligatoire qui permettraient d'insérer cette situation dans d'autres « espaces de problèmes ». Une version plus sérieuse de ce jeu des variations serait, en se limitant à un cadre scolaire précis, de voir comment ce tissage a priori peut se transformer en une carte de connaissance chez les élèves.

À l'heure où l'on discute des résultats des récentes évaluations de l'enseignement mathématique, cet article n'a pas d'autre ambition que de faire partager quelques réflexions didactiques agrémentées de touches historiques. On aurait tort en effet d'oublier que l'amélioration de l'enseignement des mathématiques a une longue histoire. « L'éducation mathématique n'est rien d'autre que le développement de l'activité mathématique de l'élève et il n'y a pas d'activité sans problèmes » proclamait déjà Anna Zofia Krygowska[13] lors de la 28e rencontre de la CIEAEM[14]. Depuis lors des progrès théoriques ont été accomplis, mais c'est chez ces pionniers que l'on retrouve souvent l'essence et la force des propositions.

12 Genoud, A. & Jaquet, F. (2005). Qualifications régionales valaisannes: commentaires et développements de quelques problèmes. Math-Ecole, 215, 42-47.

13 L'exposé de Anna Zofia Krygowska reprend des thèses présentées en 1966 à Moscou lors du Congrès international des mathématiciens. Il se base sur des thèses de G. Polya qui, lui, ajoute: « La résolution des problèmes a été la charpente de l'enseignement des mathématiques depuis l'époque du papyrus RHIND ».

14 Vanhamme, W. & J. (Eds) (1976). *La problématique et l'enseignement des mathématiques.* Compte rendus de la XXVIIIe Rencontre organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques – CIEAEM, 5-12 août 1976, Louvain-La-Neuve.

LES ROTATIONS DE DISQUES ROULANT SUR D'AUTRES OBJETS

Solutions des problèmes du numéro 215 (p. 47)

Augustin Genoud

La recherche des solutions m'a permis de trouver une stratégie permettant de résoudre facilement ce type de problèmes. Il s'agit de faire le rapport entre la distance parcourue par le centre de la pièce en mouvement et le périmètre de la pièce en mouvement.

$$\text{nombre de tours } (n) = \frac{\text{distance parcourue par le centre de la pièce en mouvement } (d)}{\text{périmètre de la pièce en mouvement } (p)}$$

Les distances sont donnée ici en cm. L'approximation de π utilisée ici est 22/7.

1. $d = 50$, $p = 7\pi$, $n = 50 / 7\pi \approx 50 / (7 \times (22/7))$ = **25/11 tours**, ou 2 tours et 3/11 d'un tour
2. $d = 2(3{,}5+3{,}5)\pi = 14\pi$ $p = 7\pi \approx 22$ $n = 14\pi / 7\pi$ = **2 tours**
   (Nos élèves qui préfèrent les approximations trouvent aussi 2 tours ! une bonne occasion de discuter des « mérites » des valeurs approchées par rapport aux vraies valeurs des nombres non décimaux. Cette remarque est valable aussi pour la plupart des exemples suivants)
3. $d = 2\pi(7 + 3{,}5) = 21\pi$, $p = 7\pi \approx 7 = 22$, $n = 21\pi / 7\pi$ = **3 tours**
   (Par approximations, pour entraîner le calcul sur les fractions :
   (21 x 22/7 = 66, 7 x 22/7 = 22 et 66 : 22 = 3)
4. $d = 2\pi(7 + 3{,}5) = 21\pi$, $p = 14\pi$, $n = 21\pi : 14\pi$ = **1,5 tours**
5. $d = 2\pi(6 + 3{,}5) = 19\pi$, $p = 7\pi$, $n = 19\pi / 7\pi$ = **19/7 tours**, ou 2 tours et 5/7 de tour

Suite en page 34