14E RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

LES PROBLÈMES DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE

Le Rallye mathématique transalpin en est à sa 15e édition et le nombre de ses sections continue à augmenter pour arriver maintenant à 25. Le concours, initialement organisé pour les classes de la troisième à la cinquième primaire, s'est étendu progressivement aux degrés 6, puis 7 et 8, pour atteindre les degrés 9 depuis 2004 et 10 depuis cette année. Cette extension, combinée avec une ouverture géographique a un effet sur le nombre de classes inscrites, qui a dépassé les 2000 il y a deux ans et arrive maintenant à 2500. L'effectif des classes se stabilise cependant dans les différentes régions ; il atteint environ 300 dans les sections les plus anciennes comme la Suisse romande, Parma, Siena, Luxembourg. Ce nombre représente un maximum pour une équipe d'animateurs du point de vue de la gestion, mais c'est aussi un seuil « naturel » si l'on considère les contingences pour les maîtres des classes inscrites.

Participer au RMT n'est en effet pas une simple substitution de deux ou trois leçons de mathématiques par un « divertissement » : on s'engage à respecter des délais et des règles, à organiser la surveillance de l'épreuve par un collègue, à exploiter ou, au moins, à discuter des problèmes en classe après l'épreuve, à participer si possible aux corrections. On doit aussi faire confiance à ses élèves et à leurs capacités de travailler en groupe, avec toutes les implications dues à la confrontation avec d'autres classes. On doit encore être convaincu de l'intérêt de la résolution de problèmes pour y consacrer du temps normalement consacré au sacro-saint programme, a priori surchargé. La participation au RMT est donc en corrélation étroite avec des conceptions pédagogiques et didactiques bien particulières et, par conséquent, une partie seulement des maîtres s'y engagent.

Du point de vue de la construction des problèmes, on relève une évolution certaine, qui n'est peut-être pas toujours visible dans les énoncés mais qui est bien réelle dans les analyses a priori et dans les intentions didactiques. Le RMT, au travers de ses journées d'études, s'intéresse de plus en plus à l'exploitation de ses problèmes au-delà du « concours » ou de la confrontation entre classes. Il suffit de parcourir la liste des thèmes de ces rencontres internationale pour s'en convaincre : *Le RMT, quels apports pour la didactique ? RMT: Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, RMT: Potentialités pour la classe et la formation, RMT et évaluation, Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ? Les problèmes du RMT dans la pratique de la classe*, jusqu'à celui de la récente rencontre de 2006 : *Les problèmes au service de l'apprentissage : le rôle du RMT.*

Pour s'inscrire dans cette évolution, *Math-Ecole* présente cette fois-ci les problèmes de la première épreuve du 14e RMT, accompagnés pour la plupart de commentaires sur leurs potentialités pour l'enseignement des mathématiques : supports pour la construction de connaissances, instruments d'évaluation, opportunités de conduire des raisonnements déductifs, occasions de consolider ou de mettre en oeuvre des savoirs anciens dans des situations nouvelles, défis intellectuels, défis et jeux intellectuels pour valoriser les mathématiques et le plaisir qu'elles peuvent procurer lorsqu'on arrive à la solution.

1. SUDOKU (Cat. 3)

Placez dans chaque case vide de ce tableau l'une de ces quatre lettres : un **A** ou un **B** ou un **C** ou un **D**, en respectant les règles suivantes :
Il doit y avoir les quatre lettres différentes
- dans chaque ligne,
- dans chaque colonne,
- dans chacun des quatre carrés de quatre cases (blanc ou gris).

A	B		
		C	
D		A	

Expliquez comment vous avez fait pour remplir les cases vides.

Commentaires

Le Sudoku est à la mode et il fallait bien qu'il entre dans le RMT. Certains craignaient les difficultés dues à un sujet non scolaire et la grille est par conséquent de 4 x 4 seulement. Mais les craintes se sont révélées infondées : toutes les classes ont pu la remplir correctement. C'est au niveau des explications que le bât blesse. Si une grille de ce type est très facile à compléter, les élèves ont de la peine à décrire leurs démarches et leurs étapes. Il semble donc difficile d'exploiter ce genre de problèmes dans des buts didactiques, même si l'on est capable de décrire les opérations logiques mobilisées par le Sudoku : négations, conjonctions et déductions.

2. L'EVENTAIL DE JULIE (Cat. 3, 4)

Julie a un éventail construit avec 20 bandes en papier couleur. Elle désire l'embellir avec de petites étoiles. Sur la première bande, la plus petite, elle colle 3 étoiles ; sur la deuxième 5, sur la troisième 7. Elle continue en collant sur chaque bande deux étoiles de plus que sur la précédente, jusqu'à la dernière bande.

Combien de petites étoiles Julie va-t-elle coller sur la vingtième bande ?
Combien de petites étoiles doit-elle coller sur tout l'éventail ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Commentaires

L'analyse de la tâche prévoyait une résolution arithmétique :

- *Comprendre la disposition des « bandes » de l'éventail et comment se prolonge le dessin (les bandes manquantes),*
- *percevoir la progression arithmétique (de raison 2 à partir de 3) :3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ...*
- *déterminer son vingtième terme, par énumération en écrivant toute la progression : ...37 ; 39 ; 41ou par calcul : $3 + (2 \times 19) = 41$*
- *déterminer la somme des 20 termes : $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 37 + 39 + 41 = 440$, en les additionnant un à un en une seule addition, ou en calculant les sommes partielles successives : $3 + 5 = 8$; $8 + 7 = 15$; $15 + 9 = 24 \ldots 399 + 41 = 440$ ou encore en effectuant l'addition à la calculatrice, ou une résolution de type graphique :*
- *Dessiner tout l'éventail (les 20 bandes) avec toutes les étoiles, puis compter celles de la dernière bande et celles de tout l'ensemble.*

L'une et l'autre de ces procédures exigent un contrôle rigoureux.

Le barème d'attribution des points (commun à toutes les sections) était le suivant :

4 *Les 2 solutions correctes (41 et 440) avec explication de la démarche (liste des 20 termes, écriture des additions, ...)*
3 *Les 2 solutions correctes avec détails très partiels ou sans explications*
2 *Une seule erreur par exemple pour la 20e bande, avec total correspondant ou erreur dans le calcul de la somme*
1 *Deux ou trois erreurs de calcul*
0 *Plus de trois erreurs de calcul ou incompréhension du problème*

Les classes de 3e année ont obtenu des moyennes situées entre 1,5 et 2.
En 4e année, en revanche, la moyenne est voisine de 3.

Proposé à des classes entières, de degré 3 ou 4, ce problème va donc certainement faire apparaître des réponses différentes qui, lors de mises en commun, donneront lieu à des confrontations intéressant sur les manières les plus efficaces de contrôler les 20 premiers termes de la progression arithmétique 3 ; 5 ; 7 ; 9 ;... et la somme des 20 premiers.

La valeur de la variable « nombre de bandes », qui a été fixée à 20 après de longues réflexions lors de l'élaboration du problème, est essentielle pour faire basculer les procédures par dessin vers les procédures numériques.

Ce problème est à placer dans le champ de l'addition, au moment où toutes les propriétés de cette opération sont mises en oeuvre simultanément, avec rigueur et de manière consistante.

3. LES PAQUETS DU PERE NOËL (Cat. 3, 4)

Le Père Noël prépare des paquets rouges, des paquets bleus et des paquets verts.
Chaque paquet rouge pèse 3 kilos.
Chaque paquet bleu pèse 5 kilos.
Chaque paquet vert pèse 8 kilos.
Le Père Noël met plusieurs paquets dans sa hotte. Il veut que les paquets pèsent, ensemble, exactement 25 kilos.
Quels types de paquets peut-il mettre ensemble dans sa hotte ?

Notez toutes vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

Commentaires
Un autre problème d'arithmétique (addition, multiplication : décomposition de 25 en sommes de termes 3, 5 et 8) combiné avec de la logique (arrangements ou combinaisons), conduisant à quatre solutions, 5 bleus : 5 x 5 = 25 ; 5 rouges et 2 bleus (5 x 3) + (2 x 5) = 25 ; 3 rouges et 2 verts : (3 x 3) + (2 x 8) = 25 ; 4 rouges, un bleu et un vert : (4 x 3) + (1 x 5) + (1 x 8) = 25.

On voit ici que l'intérêt réside dans l'exhaustivité des solutions et leur écriture.

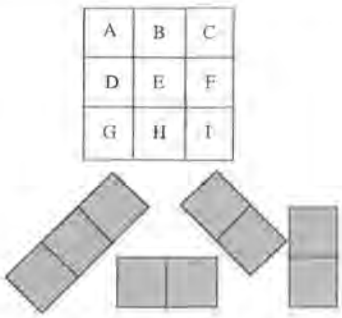
Les résultats sont du même ordre que ceux du problème précédent, ce qui permet de proposer cette petite recherche en 3e comme en 4e années, pour autant qu'elle soit accompagnée de phases collectives de validation et d'institutionnalisation.

4. PLANCHE A RECOUVRIR (Cat. 3, 4, 5)

Zoé doit recouvrir complètement cette planche de 9 cases carrées :
Pour ce faire, elle dispose :
- d'une pièce recouvrant exactement 3 cases
- de trois pièces recouvrant chacune exactement 2 cases.

Comment Zoé peut-elle recouvrir complètement sa planche ?
Indiquez toutes les possibilités.

Expliquez votre démarche.



Commentaires
Dans ce problème de pavage, c'est l'inventaire exhaustif des 12 combinaisons qui est au centre de la tâche.La réussite augmente avec l'âge des élèves. En 3e année, les élèves ne trouvent que de 6 à 9 solutions. Il faut attendre la cinquième année pour voir apparaître les solutions complètes, avec explications claires de la démarche, dans un quart des classes.

5. LES FLEURS DE ROSALIE (Cat. 3, 4, 5)

Rosalie est fleuriste.
Aujourd'hui, elle compose un beau bouquet de tulipes de trois couleurs différentes: pour chaque tulipe rouge, elle met deux tulipes jaunes et trois tulipes blanches.
En tout, son bouquet comprend 48 tulipes.
Combien de tulipes rouges Rosalie met-elle dans son bouquet ?
Combien de tulipes jaunes Rosalie met-elle dans son bouquet ?
Combien de tulipes blanches Rosalie met-elle dans son bouquet ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Commentaires

Il s'agit ici d'un partage proportionnel de 48 en une somme de 3 nombres dans des rapports de 1, 2 et 3. On pourrait penser que cette notion ne figurant pas dans les programmes de l'école primaire, le problème est trop difficile. Mais les élèves peuvent y arriver par d'autres voies, comme le propose l'analyse a priori de la tâche:

- *Comprendre que le nombre de tulipes jaunes est le double de celui des tulipes rouges et que le nombre des tulipes blanches en est le triple.*
- *Imaginer que le bouquet peut se décomposer en petits bouquets comprenant six tulipes (1 rouge, 2 jaunes, 3 blanches) et qu'il y a 8 de ces petits bouquets (48 : 6 = 8), et donc qu'il y a 8 rouges, 16 jaunes et 24 blanches.*
- *Ou travailler à partir d'un dessin soit par groupements successifs jusqu'à obtention de 48 tulipes soit par "décomposition" du dessin de 48 tulipes ;*
- *Ou établir un tableau progressif (de proportionnalité).*

La réussite est moyenne en 3ᵉ, mais presque totale en 5ᵉ. Ce problème, repris en classe, dans le champ de la multiplication et de la division, conviendrait particulièrement à une approche de la proportionnalité, en augmentant éventuellement les nombres afin d'en faire émerger certaines propriétés générales.

6. LE TRIATHLON (Cat. 4, 5)

Le triathlon comporte trois disciplines sportives:
- la natation ;
- le vélo ;
- la course à pied.

Jack s'est inscrit à un triathlon.
Il décide d'organiser son entraînement de la façon suivante:
- une heure de natation tous les cinq jours ;
- un circuit de 40 km à vélo tous les trois jours ;
- une heure de course à pied tous les quatre jours.

Le 1er mai, il commence sa préparation en faisant une heure de natation.
Le 4 mai, il commence son entraînement de vélo.
Le 5 mai, il commence son entraînement de course à pied.
A quelle date Jack fera-t-il pour la première fois un entraînement des trois disciplines dans la même journée ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Commentaires

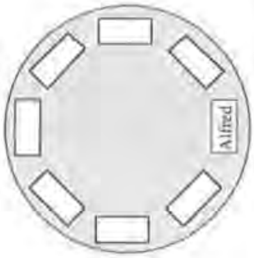
Ce problème a suscité bien des doutes lors de son élaboration. Il a été reformulé plusieurs fois sans qu'on arrive à un énoncé très clair. C'est peut-être dû au contexte, très artificiel, de cet entraînement ou à la perte de vue des savoirs mathématiques en jeu. L'analyse a priori n'a pu mettre en évidence, sous sa rubrique « domaine de connaissances », que le « comptage de 3 en 3, de 4 en 4 et de 5 en 5 et la connaissance du nombre de jours des mois.

Il n'y a pas d'autre moyen de le résoudre que d'établir un calendrier des différents entraînements et d'attendre le 30 juin pour les voir se dérouler le même jour.

Si le 1er mai n'avait pas été une exception à la règle, (les trois entraînements auraient dû avoir lieu ce jour-là, mais ce n'est pas relevé dans l'énoncé), la tâche aurait été plus simple pour ceux qui maîtrisent la notion de plus petit multiple commun. Il aurait suffi de calculer le ppmc de 3, 4 et 5: 60 et d'attendre le 60e jour après le 1er mai.
Les résultats sont très moyens en 4e comme en 5e et il semble bien que l'origine des difficultés se situe au niveau du décryptage de l'énoncé et non des savoirs mathématiques.
Il y a toujours, dans chaque épreuve du RMT et des autres concours, des problèmes comme celui-ci où les auteurs se sont un peu perdus dans « l'habillage » et qui restent en marge des mathématiques.

7. CHACUN A SA PLACE (Cat. 4, 5, 6)

Alfred, Brice, Carla, Dany, Émile, Frédéric, Gina et Henri vont s'installer autour d'une table ronde. Alfred a déjà choisi sa place et a mis des cartons vides sur la table pour indiquer la place de ses camarades.



- Gina veut être à côté de Frédéric, mais pas à sa gauche.
- Carla veut être assise entre Brice et Émile.
- Dany veut être à côté de Gina.
- Émile veut être juste en face d'Alfred.
- Henri veut être assis juste à la droite d'Alfred.

Trouvez une disposition possible et écrivez le nom des enfants à leur place.

Indiquez les étapes qui vous ont permis de placer toutes les personnes.

Commentaires

Les savoirs mathématiques mobilisés ici sont difficiles à définir, on les trouve en géométrie dans des positions relatives et en logique. Et pourtant, ce type de problème revient régulièrement dans les épreuves du RMT.
C'est à la lecture des explications des élèves pour l'attribution des points qu'apparaît l'intérêt de cette petite reconstitution car on a relevé deux types de démarche bien distincts conduisant à la solution correcte:

I. Dans le premier type, on place les deux personnages dont la position est sans équivoque: Émile et Henri. On met ensuite Clara à la gauche d'Émile, puis Brice, pour combler le groupe des deux places libres entre Émile et Henri, mais sans imaginer que Clara, puis Brice auraient aussi pu être placés à la droite d Émile, dans deux des trois places libres entre Émile et Henri. Il est facile enfin de placer les trois autres enfants.

II Le second type de démarche fait appel à une hypothèse et à sa vérification. Après avoir placé Émile et Henri comme précédemment, on essaye chacun des deux placements de Clara, à gauche ou à droite d'Émile et l'on abandonne l'essai qui conduit à une contradiction. Ce second type de démarche peut aussi reposer sur la constatation que Gina est entre Frédéric et Dany et que ces trois enfants doivent se placer dans le groupe des trois places encore vides. Mais cette démarche est plus rare car elle nécessite la prise en compte simultanée de deux consignes pour former le groupe des trois enfants.

Le premier type de démarche est très fréquent en 4e et 5e où de très nombreux groupes se contentent de la première solution « qui marche », même si elle a été trouvée au hasard, sans se soucier de son unicité. Il y a un grand saut de qualité du premier au second type de démarche, qui prend en compte les différentes éventualités et qui permet d'être certain que la solution est unique. Les critères d'attribution des points (voir ci-dessous) cherchaient à souligner la différence entre une « explication » et une simple « vérification », mais ils n'étaient pas assez clairs pour dissiper tous les doutes des correcteurs et garantir la distinction entre les deux types de démarche.

Critères d'attribution des points :

- 4 *Réponse correcte (dans le sens des aiguilles d'une montre : A, D, G, F, E, C, B, H), avec explication sur la démarche*
- 3 *Réponse correcte, sans explication ou avec explication partielle, mais vérification explicite des contraintes*
- 2 *Réponse correcte, sans explication de la démarche ni vérification des contraintes ou réponse erronée, mais expliquée, où une consigne n'a pas été respectée*
- 1 *Réponse partiellement correcte (au moins 3 personnages bien placés) ou réponse « en miroir » A, H, B, C, E, F, G, D.*
- 0 *Incompréhension du problème*

Selon ces critères, les moyennes obtenues vont, selon les sections, de 1,6 à 2 en catégorie 4, de 1,8 à 2,5 en catégorie 5 et de 2,5 à 2,9 en catégorie 6.

C'est dans l'analyse des stratégies que réside l'intérêt de ce problème pour l'évaluation : il y une évolution sensible des démarches de résolution, donnant des informations pertinentes sur la rigueur des raisonnements suivis.

8. LES SOURIS EN CHOCOLAT (Cat. 5, 6, 7)

Max et André ont acheté chacun une boîte de 25 souris en chocolat. La boîte de Max coûte 40 euros et contient seulement des grandes souris. La boîte d'André coûte 30 euros et contient seulement des petites souris. Pour que chacun ait des souris de chaque sorte, Max donne 12 grandes souris à André et André donne 12 petites souris à Max.

Mais Max n'est pas satisfait car il estime qu'André lui doit encore quelque chose.

Combien de petites souris André doit-il encore donner à Max pour que les comptes soient justes ?

Expliquez votre raisonnement.

Commentaires

L'énoncé a subi de nombreuses modifications en cours d'élaboration. Certaines sections ont préféré les « souris » aux « cigares » de la version originale et il a fallu préciser les conditions de l'échange.

L'analyse de la tâche prévoyait ceci :

- *Constater que si les nombres de souris de chacun restent les mêmes après les échanges (Max a 25 souris : 13 grandes et 12 petites; André a aussi 25 souris, 12 grandes et 13 petites), les échanges ne sont pas équitables pour les valeurs en euros.*
- *On peut calculer le prix unitaire des souris par des divisions par 25 (1,60 les grandes et 1,20 les petites) et en déduire la valeur des nouvelles boîtes :* $13 \times 1,60 + 12 \times 1,20 = 35,20$ € *pour celle de Max et* $12 \times 1,60 + 13 \times 1,20 = 34,80$ € *pour celle d'André. Ce dernier, dont la boîte ini-*

tiale coûtait 30 €, doit donc 4,80 € à Max., ce qui représente 4 petites souris. On peut aussi considérer la différence entre la valeur de la boîte de Max et celle d'André, qui vaut douze fois la différence entre le prix d'une grande souris et le prix d'une petite souris: 1,60 - 1,20 = 0,40. Une grande souris vaut 0,40 euro de plus qu'une petite souris. Donc, André doit 12 x 0,40 = 4,80 euros à Max.

- *En déduire que André doit encore donner 4 petites souris supplémentaires à Max. Ou : calculer la différence après le partage directement en « grandes souris » ou en « petites », sans déterminer leurs valeurs en euros : du rapport 30/40 on peut déduire qu'une « petite » vaut les 3/4 d'une « grande » ou que 3 « grandes » valent 4 « petites » et que 12 « grandes » valent 16 « petites ».*

À la lecture de ce qui précède, on constate que ce problème d'échanges requiert des raisonnements en plusieurs étapes et fait intervenir soit les nombres décimaux, soit les fractions.

Les résultats sont très variables d'une année à l'autre et d'une section à l'autre. Par exemple, en Suisse romande, les moyennes des points attribués (sur 4 pour la réussite avec explications) vont de 0,79 en 5e, 1,60 en 6e à 2,83 en 7e. Dans d'autres régions d'Italie, la moyenne est plus élevée en 5e, ce qui laisse penser à une influence des programmes. Les nombres décimaux ne sont en effet abordés qu'en 5e en Suisse romande mais un ou deux ans plus tôt en Italie.

En conclusion, ce problème met en oeuvre de nombreux savoirs et révèle leur degré de maîtrise chez les élèves qui le résolvent.

9. DES CARRES EMPILES (Cat. 5, 6, 7, 8)

Huit carrés de 10 cm de côté, désignés par des lettres A, B, C, D, E, F, G et H, ont été collés dans un certain ordre, l'un après l'autre, sur un carton carré de 20 cm de côté.

Les voici dessinés :

A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	E	E	E	E	C	C
A	A	E	E	E	E	C	C
G	G	E	E	E	E	D	D
G	G	E	E	E	E	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D

Retrouvez dans quel ordre les carrés ont été collés.

Expliquez votre démarche.

Commentaires

Voici un joli problème, qui vient de Belgique, sur une sériation temporelle à reconstituer. Le plus simple est de « décoller » les carrés un à un en partant de « E » qui était le dernier à avoir été placé. Le « A » apparaît alors en entier, c'est l'avant dernier à avoir été placé. Ensuite, il faut trouver des relations partielles dans la sériation : G est sur F (sinon la case G serait couverte par F), H est sur D (sinon la case H serait recouverte par D), C sur B, (sinon la case C serait recouverte par B), et aussi : D est sur C, F est sur H ... D'où l'ordre suivant pour empiler les carrés : B-C-D-H-F-G-A-E.

On peut classer ce problème dans les défis ou divertissements intellectuels, mais il faut relever que les élèves peuvent le résoudre par essais et erreurs s'ils prennent la peine de découper les huit carrés. La validation peut donc être laissée à la charge des élève, ce qui leur donne une bonne occasion de développer leur autonomie.

10. LES POTS DE BONBONS (Cat. 5, 6, 7, 8, 9, 10)

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.
Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.
Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.
À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Commentaires
L'analyse des réponses et explications des élèves[1] donne des indications très précises sur le passage d'une interprétation additive de la situation à l'approche de la notion de probabilité basée sur des rapports (dans le champ de la multiplication et de la division) :

I Dans un premier groupe de démarches, ce sont les différences entre les nombres de bonbons de chaque saveur au sein d'un pot qui sont prises en compte. Ces élèves affirment que Julien doit prendre un bonbon dans le pot I car il y n'y a que 4 (10 – 6) bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange alors qu'il y en a 6 (14 – 8) de plus dans le pot II. Selon eux, le risque de prendre un bonbon au citron est le plus élevé là où la différence est la plus grande.

II Un deuxième groupe de protocoles utilise aussi des différences, mais en s'intéressant aux changements d'un pot à l'autre : on a ajouté 2 (8 – 6) bonbons à l'orange en passant du pot I au pot II, et 4 (14 – 10) au citron ; par conséquent la première répartition est la plus favorable pour celui qui n'aime pas le goût du citron, car on renforce sa présence dans le deuxième pot en y ajoutant plus de bonbons au citron.

III Dans le troisième groupe de procédures, ce sont les rapports entre les nombres de bonbons de chaque saveur ou ceux entre le nombre des bonbons d'une sorte et le nombre total qui permettent de conclure. au plan mathématique, il s'agit alors de comparer deux rapports, soit sous forme de fraction, sous forme de pourcentages ou sous forme de nombres décimaux. Par exemple : 6 bonbons à l'orange sur 16 au total donnent plus de chances de tirer un bonbon à l'orange que 8 sur 22.

Les procédures additives des deux premiers groupes sont majoritaires aux degrés 5 et 6, celles du troisième groupe, rares à ces degrés, deviennent de plus en plus fréquentes au passage de la catégorie 6 à la catégorie 7, et représentent la grande majorité au degré 8.
La tâche des correcteurs de ce problème n'était pas aisée car les trois démarches exposées ci-dessus conduisaient à la même réponse : « il faut choisir le pot I » ! Ils devaient donc attribuer « 0 point » à des réponses « correctes » mais fondées sur un raisonnement additif et donc inadéquat dans cette situation. Si, par exemple, on avait remplacé les 8 et 14 bonbons du second pot par 4 et 7, on aurait conservé le même rapport mais « inversé » les différences. Les procédures additives auraient vraisemblablement conduit à la réponse, erronée dans ce cas : « il faut choisir le pot II ».

1 Un article sur ce sujet, de Henry M. & Jaquet F. « Probabilité intuitive ou intuition de probabilité » est en cours de rédaction

L'analyse a priori n'avait pas prévu les démarches reposant sur les différences, sinon elle aurait conduit à une modification des données pour éviter ce paradoxe d'une réponse apparemment « correcte » mais reposant sur un raisonnement faux.

Il faudrait y penser en cas de reprise de ce problème en classe.

Il est probable que de nouveaux problèmes du RMT reprennent ce thème de l'approche des probabilités.

11. LA NAPPE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

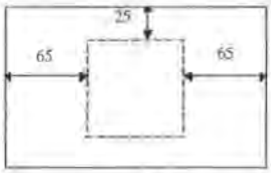
Dans la salle à manger de Luc, il y a une table carrée avec des rallonges. Quand les rallonges sont sorties, la table devient rectangulaire et sa longueur est le double de sa largeur.
Une nappe placée sur la table rectangulaire retombe alors de 25 cm de chaque côté.
La même nappe placée sur la table carrée, retombe de 65 cm de chacun des deux côtés où les rallonges sont rentrées.
Quelles sont les dimensions de la nappe ?

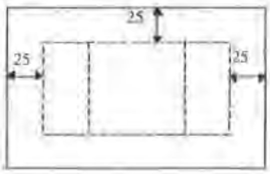
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Commentaires

Devant ce genre de problèmes, on entend souvent dire, de la part de ceux qui sont déjà capables de le résoudre : « il suffit de faire un dessin ! »
C'est bien ainsi que l'analyse a priori décrivait une des manière de procéder :

- *Interpréter géométriquement la situation par des dessins du genre ci-contre :*
  en se rendant compte que pour passer d'un carré à un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, les rallonges doivent être deux « demi-carrés » (si elles sont égales, ce qui est habituel) ou former un carré (si elles n'étaient pas égales).
- *Constater que la différence entre 65 et 25 correspond à une largeur de rallonge de 40 (ou que la différence globale entre 130 (2 x 65) et 50 (2 x 25) est 80 et correspond à l'allongement total dû aux rallonges. (mesures en cm)*
- *En déduire que le carré a un côté de 80 la table avec les rallonges a une longueur de 160, et que la nappe a des dimensions de 130 (80 + 2 x 25) et 210 (160 + 2 x 25) (mesures en cm).*

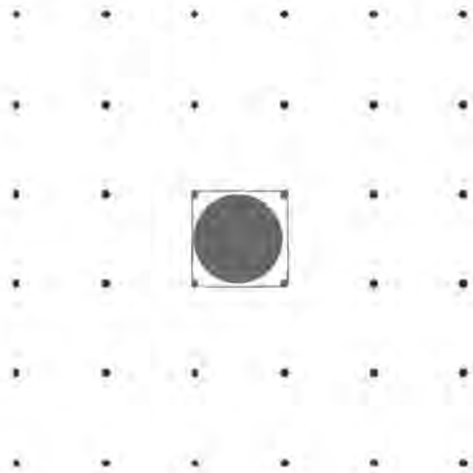




Mais il y a un grand pas à franchir entre l'injonction et la réalisation. On pourrait presque dire que lorsque le dessin est fait, le problème est résolu. il ne reste que quelques calculs élémentaires à propos de mesures de longueurs à additionner ou à soustraire.
La difficulté d'interpréter géométriquement les données est ici au cœur du problème. Les élèves de la catégorie 6 n'y sont manifestement pas parvenus. Les moyennes de points obtenus sont inférieures à 1 pour toutes les sections (entre « incompréhension du problème » et « début de recherche » selon les critères d'attribution). Il faut attendre les degrés 8, voire 9 ou 10 pour qu'apparaissent les réponses correctes, bien souvent encore mal argumentées.
Il y a là une piste intéressante pour un travail en classe, au moment où les notions de rectangle, carré, longueur, largeur, double ... semblent bien assimilées mais s'avèrent difficiles à mobiliser dans une situation où l'on sort de la feuille de papier et où il faut « relever » les pans de la nappe qui « retombent ».

12. LA PIECE BIEN MERITEE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Au milieu d'une planche à clous, comme le montre cette figure, se trouve une pièce d'or.



Max et David utilisent des élastiques et essaient de former le plus possible de carrés qui enferment la pièce de monnaie sans toutefois la toucher. (Le plus petit de ces carrés est déjà dessiné). Celui qui arrive à former le plus de carrés gagnera la pièce d'or.
Max réussit à former 19 carrés, David en trouve 23, il gagne donc la pièce.
Pourriez-vous gagner contre David ? À votre avis, combien peut-on former de carrés ?

Indiquez les carrés que vous avez trouvés.

Commentaires
Il y a 37 carrés, et les trouver tous est une belle recherche qui exige rigueur et systématique.
Il y a beaucoup d'activités de ce genre dans les moyens d'enseignement de Suisse romande et nos élèves obtiennent effectivement des résultats supérieurs à ceux des autres sections. Mais, même dans nos classes de catégories 7 et 8 (dont une majorité appartiennent à des filières orientées vers les études « longues », car celles des autres filières ne participent pas ou rarement au RMT) aucune classe n'a découvert les 37 carrés, la majorité se contentant des 19 dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille.
Ce problème pourrait être bien utile à ceux qui souhaitent évaluer le concept de « carré » chez leurs élèves.

13. LE NUMERO DE TELEPHONE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Carla ne se rappelle plus le numéro de téléphone de son amie Ada et le demande à Giorgio, un ami commun. Giorgio s'amuse et lui donne quelques renseignements sur les 6 chiffres qui composent ce numéro de téléphone.

- le premier et le dernier chiffre sont identiques et représentent un nombre impair ;
- le troisième et le quatrième chiffre forment un nombre égal au tiers du nombre formé par les deux premiers chiffres,
- les trois derniers chiffres représentent trois nombres consécutifs, qui se suivent dans l'ordre croissant.

Selon les renseignements de Giorgio, quel peut être le numéro de téléphone d'Ada ?

Justifiez votre réponse.

Commentaires

Le problème n'est pas très difficile et une majorité de groupes trouvent l'ou ou les deux numéros possibles (331123 et 752567). En revanche, la qualité des justifications laisse souvent à désirer et en particulier le fait que ces numéros sont les seuls possibles.

14. LA PREDICTION (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marc propose le jeu suivant à son copain Luc :

- *Choisis un nombre entier ;*
- *ajoute le nombre qui le suit immédiatement ;*
- *augmente de 9 la somme précédente,*
- *divise le résultat obtenu par 2 ;*
- *soustrais le nombre que tu as choisi au début.*

Le résultat est 5, n'est-ce pas ?

Luc est étonné, pourtant cela n'a rien de magique ; il s'agit tout simplement de maths.

Pourquoi obtient-on toujours le même résultat quel que soit le nombre d'origine ?

Expliquez votre raisonnement.

Commentaires

Voici une bonne introduction à l'algèbre, soulignée par l'analyse de la tâche :

- *Remarquer les régularités au cours de nombreuses tentatives faites à partir de nombres différents.*
- *Comprendre qu'il vaut mieux indiquer le nombre envisagé par un terme général ou par une lettre.*
- *Traduire en symboles les instructions que Marc a données en se servant du calcul littéral ou en opérations de rhétorique (affirmations généralisables).*
- *Écrire l'expression correspondante ; par exemple : $(x + x + 1 + 9) : 2 - x$ puis la simplifier pour constater qu'elle est équivalente à 5 ; par exemple : $(2x + 10) : 2 - x = x + 5 - x = 5$ Ou : sans recours à l'algèbre, expliquer de manière rhétorique qu'ajouter à un « nombre choisi » le nombre suivant signifie obtenir « le double du nombre choisi plus un ». Ajouter encore 9 signifie obtenir « le double du nombre choisi plus 10 ». Diviser le tout par 2, revient à prendre la moitié du « double du nombre choisi plus 10 » et obtenir le « nombre choisi plus 5 ». En soustrayant le « nombre choisi », on obtient 5.*

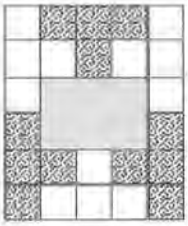
15. LES MANIES DES GRANDS CHAMPIONS (Cat. 8, 9, 10)

Un célèbre champion olympique acheta un jour un grand terrain rectangulaire de 600 mètres de longueur et de 500 m de largeur. Il bâtit un centre sportif rectangulaire de 300 m sur 200 m, de même centre que le terrain, selon la figure ci-contre (la longueur du terrain est parallèle à la largeur du centre sportif) : Comme il avait six enfants, il demanda dans son testament que le reste du terrain, autour du centre sportif, soit divisé en 6 parcelles de même forme et de mêmes dimensions et que le centre sportif soit accessible directement de chacune des 6 parcelles.

Dessinez les 6 parcelles et expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

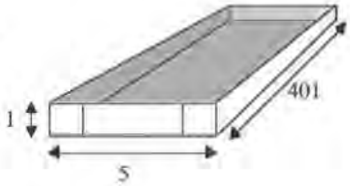
Commentaires

Les calculs ne présentent pas d'obstacles majeurs pour des élèves de 14 à 16 ans. C'est le partage en parcelles isométriques qui est le plus délicat à trouver, pour les adultes comme pour les élèves. La clé passe par la décomposition en carrés.



16. LES CUBES DE L'ANNEE (Cat. 9, 10)

Julie a une belle collection de cubes de bois de 1 cm d'arête. L'an dernier, elle en avait 2005 et elle a construit une boîte, sans couvercle, pour les contenir tous, exactement. Mais la boîte la plus courte possible était très encombrante. Julie a utilisé un rectangle de carton, de 403 cm de longueur et 7 cm de largeur, pour pouvoir construire le fond et les parois de la boîte, par pliage, découpage et collage. (Voir la figure ci-contre)



Cette année Julie a ajouté un cube à sa collection. Elle doit donc construire une nouvelle boîte pour contenir exactement ses 2006 cubes de 1 cm d'arête. Elle espère pouvoir utiliser moins de carton que l'an dernier et ranger les cubes en couches superposées.

Quelles seront les dimensions de la nouvelle boîte, utilisant le moins de carton possible ? Et quelles seront les dimensions du rectangle de carton que Julie devra utiliser pour la construire ?

Justifiez votre réponse.

Commentaires

Ce problème, réservé aux catégories 9 et 10 n'a pas été proposé en Suisse romande (où c'est le concours *Mathématiques sans frontières* qui s'adresse aux classes de ces degrés). Les résultats de la section du Tessin font état d'une bonne réussite.

On peut le proposer à des classes de degré 8, dans le cadre de la décomposition en facteurs premiers.

Il suffit de déterminer toutes les décompositions de 2006 en trois facteurs entiers. $1 \times 1 \times 2006$, $1 \times 17 \times 118$, $1 \times 34 \times 59$ et $2 \times 17 \times 59$, de comprendre qu'il faut prendre le facteur le plus petit comme hauteur et de constater que le fond de la boîte est 2006 dans les trois premiers cas et seulement 1003 dans le quatrième cas, correspondant à une utilisation minimale de carton. Il ne reste plus alors qu'à calculer les dimensions de la feuille de papier:

$59 + (2 \times 2) = 63$ et $17 + (2 \times 2) = 21$.