1/9801 ÉVOLUTION DU MILIEU D'UNE DIVISION UN PEU PARTICULIÈRE (PARTIE 1)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Cet article est le premier d'une série de trois, visant à restituer une recherche menée auprès d'étudiants en formation en enseignement primaire et d'élèves de 12 ans (8ème HarmoS).

Tout a commencé par l'interpellation d'un enseignant me faisant part de sa surprise au sujet de la division 1/9801. Celle-ci ne tarde pas à devenir ma division de chevet, de par la cohorte de surprises qu'elle recèle. J'exhorte ici le lecteur à suspendre le cours de sa lecture et à se saisir lui-même d'une calculette pour effectuer cette division. Le résultat affiché sur une petite machine ne le satisfera peut-être pas, ainsi prendra-t-il une calculatrice en ligne, comportant plus de positions décimales ou tombera-t-il sur l'un de ces logiciels de calcul qui permettent de calculer des centaines de décimales. Dès les premiers affichages, il pressent que cette division l'emmènera sur un terrain mouvant, où beaucoup de choses sont possibles et dans lequel la porte pour l'exploration est grande ouverte. Je vous invite à vous laisser emporter par cet élan instinctif et à vous engouffrer dans le monde des nombres, si fascinant pour les élèves de l'école primaire à tout le moins.

Contexte

Je me rends une fois par semaine dans une classe pour travailler avec des groupes d'élèves ; c'est le fruit de plus d'une année scolaire d'expérimentations que je souhaite partager ici. D'un point de vue macroscopique, je travaille sur la distinction chiffre/nombre, initié dans mon travail de thèse (Del Notaro, 2010). Cette tâche s'inscrit dans ma problématique, pour les questions qu'elle permet de poser sur les mathématiques, à travers les productions de connaissances et les expérimentations des élèves. Je vais donc tenter de montrer comment le milieu d'une tâche évolue à travers un jeu de tâches proposé à des élèves, aussi bien qu'à de futurs enseignants primaires.

Dans l'ordre chronologique, j'ai proposé cette division en premier lieu aux étudiants de deuxième année du baccalauréat (BSEP2) en sciences de l'éducation à l'université de Genève, formation en enseignement primaire, ce qui me donna l'envie de la soumettre aux élèves, toujours dans une perspective interactive.

Sans entrer dans trop de détails, voici toutefois quelques lignes directrices du jeu de tâches[1]:

« Il s'agit d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. L'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Cet ensemble de tâches procède d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience » (Del Notaro, 2011). Et encore : « Le jeu de tâches laisse une place importante à l'investigation du milieu en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant du savoir mathématique. Il procède donc d'une démarche de recherche axée sur l'investigation du milieu » (ibid., 2012).

Ce qui est à retenir pour cet article sont les notions d'investigation du milieu et d'interaction de connaissances.

Je commencerai par décrire mon propre jeu de tâches – mes cartes – et j'enchainerai avec celui proposé aux étudiants. Dans la 2e partie qui suivra dans un prochain numéro de Math-Ecole, je restituerai le jeu des élèves, pour terminer par la narration du dispositif interactif mis en place dans le but de voir ce qui ressort de la confrontation de ces deux milieux – tâche des élèves et tâche des étudiants.

---

1 Pour une définition plus complète de la notion de jeu de tâches, voir Favre (2008), Del Notaro (2011 ; 2012),

INVESTIGATION DU MILIEU DE 1/9801

Sans effectuer d'analyse a priori à proprement parler, je livre quelques constats autour de cette division, qui constituent la matière de mon jeu de tâches. Si l'on effectue cette division, l'une des premières surprises est le fait que les décimales s'organisent en une suite de 00 à 99, mais que cette dernière s'interrompt à un moment inattendu. Il faut, pour voir cela, un logiciel de calcul, sans quoi on passera à côté de cette curiosité ; le quotient obtenu est : 0,0001020304
05060708091011121314151617181920212223
24252627282930313233343536373839404142
43444546474849505152535455565758596061
62636465666768697071727374757677787980
81828384858687888990919293949596979900
puis la suite reprend : 010203… Il manque 98.

Si l'on navigue sur les différents sites web de mathématiques[2], on comprendra que cette absence s'explique par un effet de cascade de retenues, où le 8 disparait à la faveur du 9; il en va de même pour 1/998001, où, par groupes de 3 décimales, on obtient tous les entiers de 000 à 999, sauf 998. La suite de l'investigation porte à explorer d'autres nombres et à rechercher des absences de régularité ; on tombera alors rapidement sur les racines carrées de ces nombres (99, 999), qui nous permettent de considérer 9 et de constater que la division 1/81 a pour quotient la suite 0,012345679012345… dans laquelle le 8 est absent également. A ce point de l'investigation, nous avons déjà plusieurs cartes en mains : 1/998001 et la série qui en découle : 1/99980001, 1/81, etc. Ainsi que 1/9 (= 0,111…), et la série qui en découle : 1/99 = 0,010101…), 1/999, etc.

Ajoutons-en quelques-unes. Que peut-on se demander ensuite ? Ce qu'il advient si le dividende double ? Par exemple, 2/9801 = 0,0002040608101214 et 3/9801 = 0,00030609121518212427… ; on reconnait les multiples de 2 et de 3 dans la suite décimale. Est-ce que cela continue ainsi ? Avec 4/9801, le quotient est 0,00040812162024283236… On retrouve en effet les multiples de 4. Il en va de même avec la division 5/9801 (= 0,00051015202530354045…), où l'on voit les multiples de 5. Fixons encore 10 au dénominateur ; sans surprise, on trouve 0,0010203040506070… Le jeu sur les propriétés de la division pointe alors.

La suite du jeu de tâches se décline à partir de ces constats et après avoir continué mon exploration avec les multiples de 11 au dividende (11/9801 ; 22/9801, etc.), au vu de leurs curiosités, je m'embarque dans l'exploration de nombres moins attendus, s'il en est. Je prends, par exemple, 247/9801, ce qui donne: 0,0252015100499489847974696... Je constate à ce moment-là que je retrouve la question des retenues qui expliquent l'absence du 98 dans la division originale. J'obtiens les multiples de 247 dans les décimales de ce nombre, moyennant quelques soustractions successives. Ainsi, les premiers multiples de 247 = {247 ; 494 ; 741 ; 988 ; …} se retrouvent de la manière suivante : dans 0,0252, on peut voir 247, et il reste 5 (252-247). J'abaisse ensuite les deux chiffres suivants, 0 et 1, ce qui me donne 501 et je continue ainsi : à 501, je soustrais 494, il reste 7 ; j'abaisse 5 et 1 :

```
0,0252015100
   -247
  ---------
   00501
  -  494
  ---------
  reste 7
```

À 751, j'enlève 741, il reste 10. J'abaisse les deux zéros et j'obtiens 1000. 1000 – 988 = 12, et ainsi de suite.

Ce premier fait est intéressant et explique bien d'autres quotients, comme ceux explorés auparavant : prenons par exemple 33/9801, puisque j'ai parlé de curiosités précédement. Le quotient en est 0,003367003367003367… Considérons les M33 {33 ; 66 ; 99 ; 132 ;…} et effectuons les soustractions successives comme pour 247. On retrouve bel et bien les multiples de 33.

Au passage, remarquons que l'on pense « nombre » dans cet exemple.

Un deuxième fait a retenu mon attention lorsque le logiciel utilisé a mis les nombres en forme de la façon suivante : 0, 0252 0151 0049 9948 9847 9746 9645 9544… ; cela permet de faire un autre constat : ici, je pense « chiffres », si je lis le quotient en scandant

2 Cf. webographie en fin d'article.

(0,) 02-52-01-51-00-49-99-48 etc. ; d'autres régularités apparaissent. Je sais par expérience, que les élèves vont effectuer ce genre de constat, aspirés qu'ils sont par ce type de démarche.

J'ai suffisamment d'éléments en main pour proposer ce jeu de tâches en cours et pour me rendre sur le terrain ensuite. D'autres faits que je n'avais pas prévus se sont offerts à moi, alimentant ma réflexion autour de la question chiffre/nombre. J'ai alors une vision claire de mon dispositif, que j'exposerai dans un prochain numéro.

INTERACTION DE CONNAISSANCES AVEC DES ÉTUDIANTS EN DÉBUT DE FORMATION BSEP[3]

Une remarque de fond s'impose, à la fois banale et fondamentale lorsque l'on traite de questions numériques : rien n'est jamais trop simple et rien ne va jamais de soi. C'est un constat qui prévaut autant pour les élèves que les étudiants et, si j'osais, pour les formateurs d'enseignants ou les chercheurs… Nous verrons que des étudiants porteurs d'un bagage mathématique conséquent en viennent à reconsidérer des notions essentielles et à les reconstruire à la faveur de leurs expérimentations, se trompant même quelquefois. Ces faits d'expérience se révèlent, pour autant que l'on s'autorise à jouer avec les nombres, à tâtonner, chercher, se questionner ; c'est du moins le constat effectué au fil de mes propres expérimentations dans des classes.

J'ai consacré une période de 45 minutes à la fin des trois derniers cours de l'année académique 2011-2012, pour acculturer les étudiants d'une part à la notion de jeu de tâches et d'autre part, au fait que j'allais jouer ce jeu avec eux. Je me mets donc en interaction – et quelque peu en danger, ne pouvant tenir pour acquis, de maintenir l'interaction vive face à vingt-cinq étudiants – avec chacun de mes quatre groupes, une calculette prise sur le net et projetée pour effectuer les opérations qu'ils me diraient de faire, toujours à propos de la division 1/9801. Deux étudiants par groupe sont chargés de garder trace de ce qui se passe.

3 Baccalauréat en sciences de l'éducation orientation Enseignement primaire.

Jeu de tâches

Voici un jeu de tâches qui ressort de l'une de ces narrations :

« $1/9801=1,02030\text{x}10^{-4}$

$10/9801=0,00102030$

$100/9801=0,0102030$

$1000/9801=0,10203$

$10000/9801=1,0203$

$100000/9801=10,203$

1. A chaque fois qu'on ajoute un 0, on augmente d'une puissance de 10. Le numérateur est 10 fois plus grand. Le résultat sera donc toujours 10 fois plus grand. Nous avons une division qui est proportionnelle.

$2/9801=2,0406\ \text{x}10^{-4}$

$20/9801=0,0020406$

2. Le résultat sera le même pour 2, 20, 200. On aura toujours 2,0406… mais à des puissances de plus en plus grandes dès qu'on aura un numérateur plus grand.

3. Le rapport entre $1/9801=1.02030\text{x}10^{-4}$ et $2/9801 = 2.0406\text{x}10^{-4}$. Le résultat de 1/9801 et 2/9801 c'est que l'un est le double de l'autre. Si on a 4/9801 le résultat sera le double de 2/9801.

4. Si on multiplie le numérateur de la division 1/9801 par n'importe quel nombre le résultat sera ce nombre fois le résultat de la division 1/9801. $\text{a}\text{x}1/9801=\text{a}\text{x}1,1012\text{x}10^{-4}$ pour tout a.

5. Si on multiplie le dénominateur par 10 que se passe-t-il ?

$1/\ (9801\text{x}10)=1,1012\text{x}10^{-5}$

$1/\ (9801\text{x}100)=1,1012\text{x}\ 10^{-6}$

A chaque fois que le dénominateur est multiplié par 10 le résultat est lui divisé par 10.

6. Si on divise le dénominateur par 10 que se passe-t-ill ?

$1/(9801/10)=1,1012\text{x}10^{-3}$

$1/(9801/100)=1,1012\text{x}10^{-2}$

A chaque fois le dénominateur est divisé par 10 le résultat est lui multiplié par 10.

7. Si à présent on double le dénominateur ? $1/(9801\text{x}2)=2,04060\text{x}10^{-5}$

Le rapport entre $2,04060\text{x}10^{-5}$ et $1,1012\text{x}10^{-4}$ est….2. Donc si on multiplie le dénominateur par 2 le résultat sera divisé par 2. Et si on divise le dénominateur par 2 ? $1/(9801/2)=2,04060\ \text{x}\ 10^{-4}$ ce qui est la même chose que 2/9801, le résultat a donc doublé.

8. En général si on multiplie le dénominateur par n'importe quel nombre, le résultat sera divisé

par ce nombre. Si on divise le dénominateur par n'importe quel nombre, c'est comme multiplier le numérateur par ce nombre et donc multiplier le résultat par ce nombre. »

Résumé :

Si a vaut 10, 100, 1000, 1000…[4]

(ax1)/9801 la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à droite que a possède de 0

(a/1)/9801 la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à gauche que a possède de 0

1/(ax9801) la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à gauche que a possède de 0

1/(9801/a) la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à droite que a possède de 0

Le premier constat qui s'impose à la lecture de ce rapport est que des connaissances ont été activées et sont restituées par les étudiants, de manière méthodique. À la faveur de leur exploration, sont réétudiés notamment les liens entre le numérateur et/ou le dénominateur et le quotient. C'est fondamental et trivial à la fois. Nous verrons que les élèves réaliseront les mêmes constats. Toutefois, je fais l'hypothèse que ce n'est pas si banal pour les étudiants, si j'en juge par le dernier paragraphe intitulé résumé, qui trahit, si j'ose dire, leur re-découverte de certaines de ces propriétés, pourtant déjà décrites de manière précise et répétées au point 8. Ils ont trouvé sur un site web un résumé, qu'ils ont copié et collé dans leur rapport. Il est écrit de manière plus simpliste et moins scientifique que leur propre restitution, comme s'ils voulaient s'assurer que l'on comprenne bien.

Ces formules viennent soutenir leur pensée, et les rassurent.

La question chiffre/nombre prend peu à peu corps dans ces jeux de tâches qui sont l'occasion, en formation, de discuter certaines propriétés des nombres sans crainte de jugement ou d'évaluation. L'un des premiers ajustements s'est porté sur la lecture du quotient : lit-on « zéro virgule zéro zéro, zéro un, zéro deux, zéro trois ou : zéro virgule zéro zéro zéro, dix, vingt, trente ? » La question que je pose alors est : un nombre peut-il se lire de façons différentes ? Oui ? Non ? Ils ne savent pas, et vous, lecteurs ? Qu'en pensez-vous ? Les élèves sont plus hardis, prenant position et trouvant des lois qui leur permettent de continuer.

Face à une multitude de liens possibles, le jeu de tâches propose une manière de comprendre les relations et les expériences effectuées par les différents interlocuteurs.

La question qui m'occupe dès lors est de comprendre comment exporter ces trouvailles mathématiques dans un dispositif de formation d'enseignants, tout autant qu'auprès d'élèves de 11-12 ans. Les conditions nécessaires sont, avant tout, un savoir fort ainsi qu'un jeu de tâches révélateur de ce savoir, le tout, finement saupoudré de surprises.

Dans un prochain numéro, je ferai état des productions des élèves et de leur incroyable ingéniosité, pour terminer ensuite par l'exposé du dispositif interactif mis en place durant l'année suivante.

Références bibliographiques

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées *Education et francophonie, 31(2)*, 82-102. Page consultée le 1er février 2011 : www.acelf.ca

Del Notaro, C. (2011). Le jeu de tâches, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves, *Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM,* IREM de Dijon.

Del Notaro, C. (2012). La distinction chiffre/nombre dans un jeu de tâches chez des élèves de 11 ans, *Actes du XXXIXe colloque COPIRELEM,* IREM de Brest.

Favre, J.-M. (2008). Jeux de tâches. Un mode d'interactions dynamique pour aménager des expériences mathématiques aux acteurs de la relation didactique dans l'enseignement spécialisé, *Grand N, 82,* 9-30.

Références webographiques

http://serge.mehl.free.fr/exos/division9801.html

http://math.stackexchange.com/questions/102682/what-is-special-about-the-numbers-9801-998001-99980001

4 *J'ai gardé les formulations qui suivent telles quelles, mal orthographiées.*