MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1970
9e ANNÉE

44

La topologie à l'école primaire

«La topologie étudie les propriétés des figures tracées dans le plan ou dans l'espace qui demeurent invariantes sous l'effet de transformations continues et bijectives.»

Cette définition nous suffira pour le cadre que nous nous sommes fixé ici. Une définition formelle de la topologie est réservée aux cours universitaires.

A l'école primaire, la topologie peut être incluse avec la géométrie euclidienne dans un domaine que l'on appelle parfois: «Découverte du plan et de l'espace» ou plus simplement: «Découverte de l'espace».

En comparant la géométrie traditionnelle (géométrie euclidienne) à la topologie, il sera possible de donner un sentiment intuitif de cette dernière.

La géométrie traditionnelle est avant tout quantitative. Elle s'occupe généralement des dimensions des objets: distance, longueur, aire, etc.

La topologie, au contraire, est essentiellement qualitative. Elle fait abstraction de toute idée de mesure et s'intéresse aux rapports de position et d'inclusion entre objets.

Nous allons illustrer cette comparaison par deux exemples:

Exemple 1

Considérons la figure suivante:

Comité de rédaction:	**Abonnement:**
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, G. Guélat, R. Hutin, L. Pauli, N. Savary, S. Roller, rédacteur.	Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 12 - 16713. Paraît 5 fois par an. Service de la recherche pédagogique, 65, rue de Lausanne, 1202 Genève (022 31 71 57).

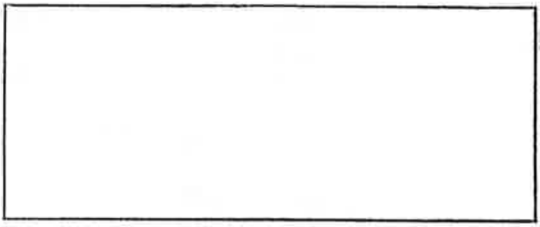


Figure 1

Les propriétés géométriques sont, entre autres:
— cette figure possède 4 angles;
— les angles de cette figure ont 90 degrés;
— cette figure est un rectangle;
— les côtés opposés sont parallèles;
— les petits côtés mesurent environ 3 cm.

Nous pouvons remarquer que les propriétés géométriques d'une figure sont basées sur le concept de congruence (équivalence géométrique); deux figures sont congruentes si l'une d'elles peut être placée sur l'autre de telle manière que les deux figures coïncident exactement.

Exemple 2

Considérons la figure suivante:

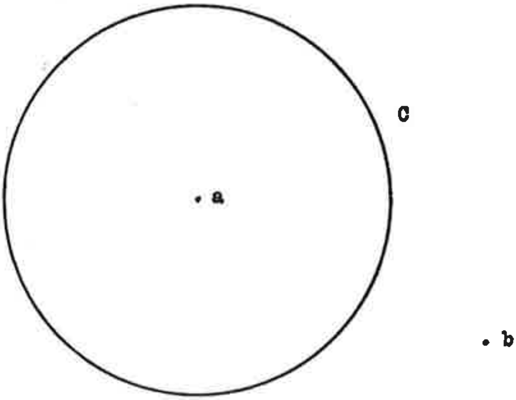


Figure 2

Les propriétés topologiques sont, entre autres:
— la corde C est fermée;
— le point a est à l'intérieur de la corde C;
— le point b est à l'extérieur de la corde C;
— la corde C partage les points du plan en 3 ensembles:
    l'ensemble des points qui sont à l'intérieur de la corde;
    celui des points qui sont sur la corde et celui des points qui sont à l'extérieur de la corde.

Remarquons que les figures suivantes possèdent les mêmes propriétés topologiques que la figure 2.

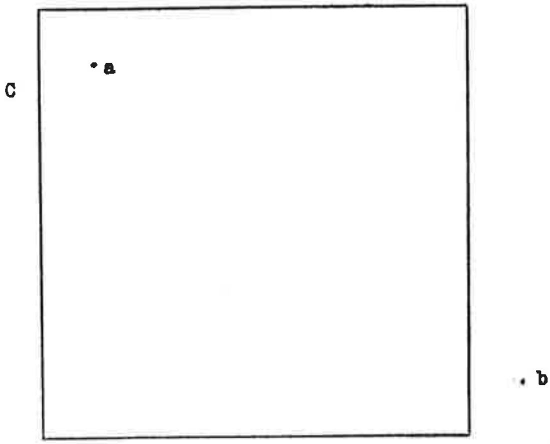


Figure 3

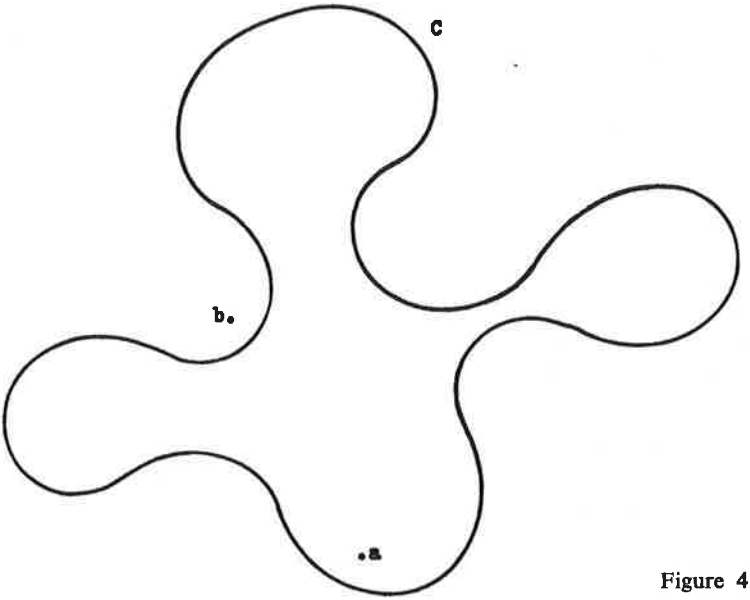


Figure 4

Nous dirons donc que les figures 2, 3 et 4 sont topologiquement équivalentes.

En topologie, nous pourrions appeler les transformations qui ne changent pas les propriétés d'une figure, des transformations élastiques. Nous imaginons que les figures sont tracées sur une feuille fine de caoutchouc très souple et qu'il est possible d'étirer, de courber, de tordre à volonté cette feuille.

Nous ne sommes toutefois pas autorisés à remplacer deux points différents par un seul. Lors de transformations élastiques, deux points distincts doivent rester distincts.

Ces transformations illustrent celles que nous avons appelées dans la définition: transformations continues et bijectives.

On remarque que toute propriété topologique d'une figure est aussi une propriété géométrique, mais que certaines des propriétés géométriques ne sont pas des propriétés topologiques. Notons enfin que nous aurions pu trouver des propriétés qui ne sont ni topologiques, ni géométriques. A propos de la figure 2, par exemple: cette figure est tracée à l'encre noire.

La topologie est une science jeune.

Le mathématicien allemand Riemann en a jeté les premières bases vers 1850 avec ses travaux sur les fondements de la géométrie ainsi que ceux sur la théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales.

Le mathématicien français Poincaré, vers la fin du XIXe siècle, avec la publication de ses mémoires sur la topologie combinatoire, a permis à cette science de se développer d'une manière autonome.

Dès le début de notre siècle, le développement de la topologie a été aidé par la large diffusion de la théorie des ensembles.

Relevons que des problèmes relevant directement de la topologie avaient été étudiés bien avant Riemann. Citons simplement, car nous aurons l'occasion d'y revenir, le problème des ponts de Koenigsberg, celui du coloriage des cartes, ou encore les théorèmes d'Euler, comme celui qui lie les nombres d'éléments de natures diverses dans les polyèdres. Il s'agit de la topologie antérieure à Riemann. Celle que l'on appelle parfois «analysis situs», expression employée par Leibniz ou «analyse de position», terme dû à Gauss qui avait prédit le développement de cette science.

Certains concepts de la topologie intuitive ont leur place à l'école primaire. Dans un enseignement actuel de mathématique, il est utile de faire découvrir quelques propriétés de figures tracées dans le plan qui ne tiennent pas compte des longueurs et des formes. C'est l'occasion de développer une forme d'abstraction et de donner des exercices de recherche et d'anticipation qui provoquent de bonnes et vraies attitudes mathématiques.

Remarquons que l'enfant qui suit un enseignement de mathématique moderne est habitué à une vue topologique des figures par l'emploi du diagramme de Venn, pour la représentation d'un ou de plusieurs ensembles. Par exemple, pour représenter deux ensembles A et B dont le premier est inclus dans le second, les différents dessins suivants sont équivalents:

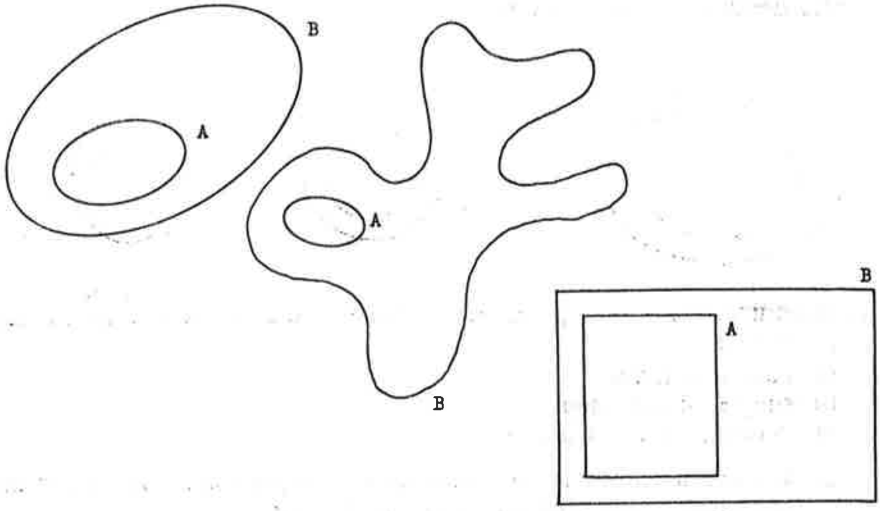


Figure 5

Par ailleurs, notons encore que dans de nombreux problèmes pratiques les propriétés topologiques passent bien avant les questions de mesure. Par exemple, pour le voyageur qui se rend en train de Genève à Fribourg, il est plus important de savoir qu'il doit descendre dans une gare située entre Lausanne et Berne que de connaître la distance Genève-Fribourg ou la vitesse du train. Or les relations: «... être situé entre...» ou «... être situé après...» etc. sont précisément des relations qui relèvent de la topologie.

Cette science joue aujourd'hui, dans la vie de l'homme moderne, un rôle des plus importants.

Ainsi, nous pensons qu'il est nécessaire d'en donner une initiation à l'école primaire, initiation qui propose à l'enfant des recherches utiles et intéressantes.

Plusieurs thèmes peuvent être développés sur plusieurs années, dès le début de l'école primaire.

I. LES RESEAUX

Dans les pages qui suivent nous nous limiterons à deux thèmes: celui des réseaux et celui des cartes. Il est clair que nous ne pourrons pas faire le tour de tous les problèmes que posent ces thèmes.

Par exemple les tracés suivants sont des réseaux:

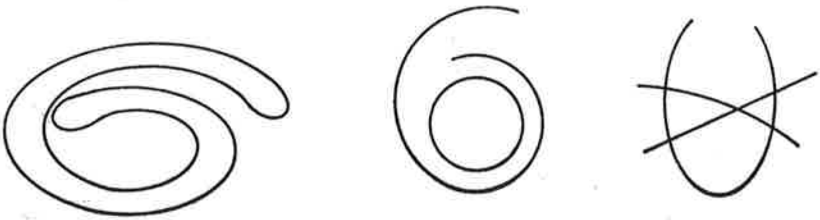
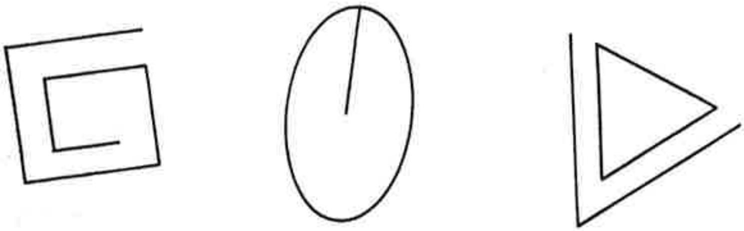


Figure 6

1. Dans une première étape, il sera possible de classer les réseaux suivant les critères:
   a) ouvert ou fermé;
   b) simple ou non-simple;
   c) connexe ou non-connexe.

   a) Un réseau est ouvert s'il comprend une ou plusieurs lignes interrompues. Dans le cas contraire, le réseau est fermé.

   Exemples:
   Réseaux ouverts:



   Réseaux fermés:

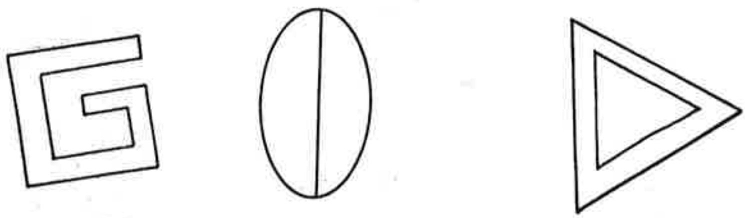
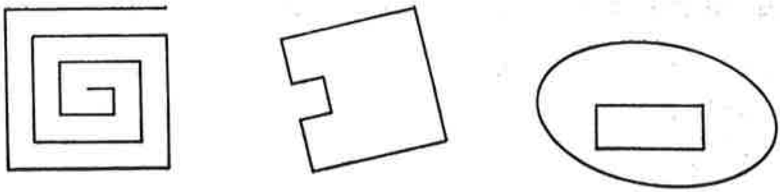


Figure 7

   b) Un réseau est simple s'il ne comprend aucun point d'intersection. Dans le cas contraire, le réseau est non-simple.

   Exemples:
   Réseaux simples:



Réseaux non-simples:

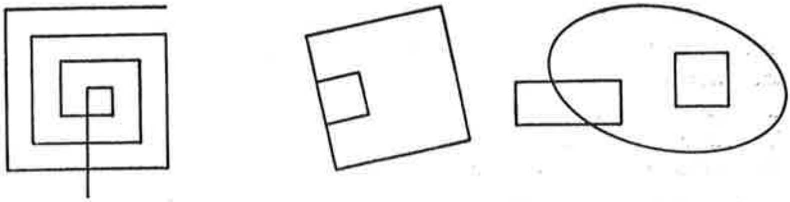
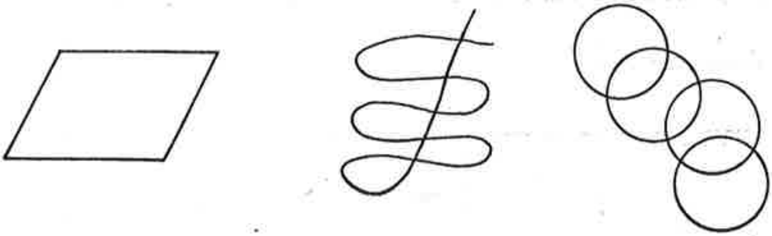


Figure 8

c) Un réseau est connexe s'il est possible d'aller d'un point quelconque du réseau à un autre en suivant une ligne du réseau. Dans le cas contraire, le réseau est non-connexe.

Exemples:

Réseaux connexes:



Réseaux non-connexes:

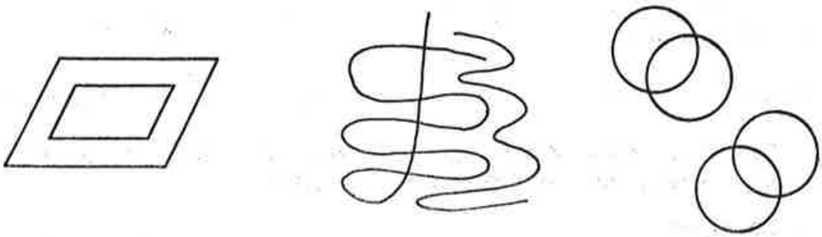


Figure 9

Il est maintenant possible de classer tout réseau selon les critères qui viennent d'être définis.

Par exemple le réseau suivant:

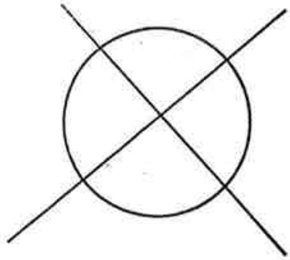


Figure 10

est ouvert, non-simple, connexe.

Différents exercices de classement pourront être utilisés.

Par exemple, le diagramme de Carroll peut être présenté et l'on aura:

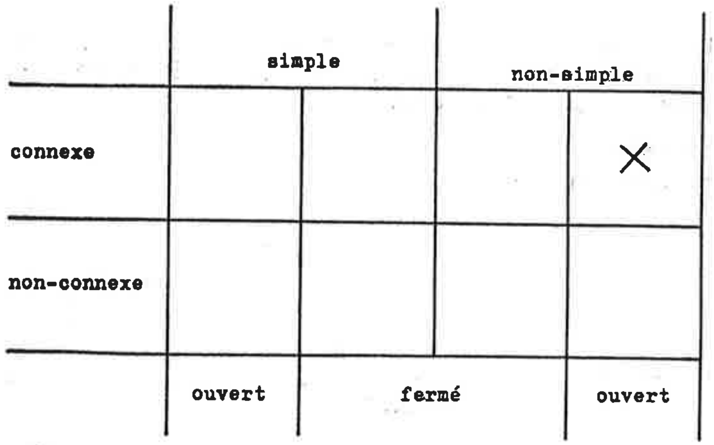


Figure 11

Tout réseau pourra occuper une des huit cases de ce diagramme.

Le réseau donné à la figure 10 occupera, par exemple, la case indiquée par une croix.

2. Dans une deuxième étape, il sera intéressant de concentrer notre attention sur les réseaux non-simples et connexes, et d'étudier le nombre de «coups de crayon» qui sont nécessaires pour les tracer.

Nous remarquons, par exemple, que:

a) Les réseaux suivants ne nécessitent qu'un seul coup de crayon — ils peuvent être tracés d'une manière continue sans repasser sur un trait.

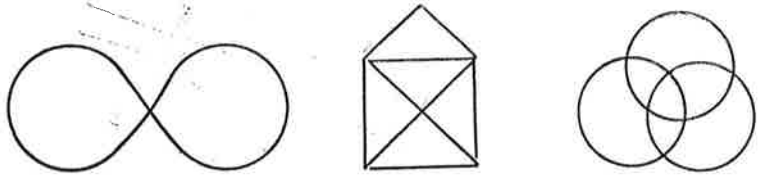


Figure 12

b) Pour tracer les réseaux ci-dessous, deux coups de crayon sont nécessaires.

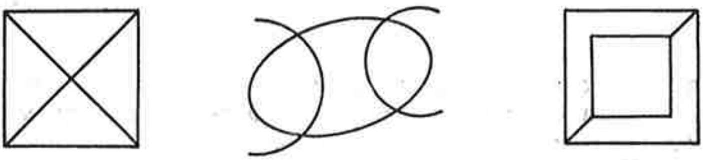


Figure 13

c) Trois coups de crayon sont nécessaires pour les réseaux suivants:

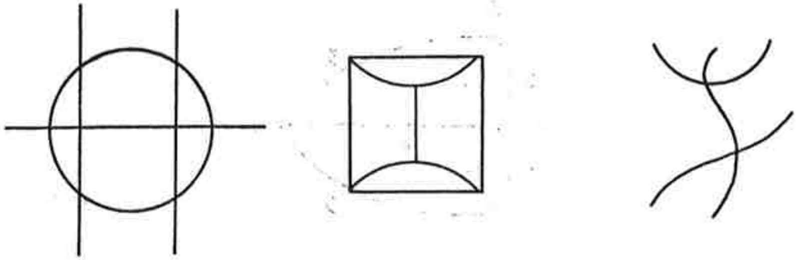


Figure 14

Il sera encore possible de trouver des réseaux qui nécessitent quatre coups de crayon et ainsi de suite.

Nous dirons qu'un réseau est **d'ordre un** s'il ne nécessite qu'**un seul coup de crayon,** qu'il est d'**ordre deux** s'il nécessite **deux coups de crayon,** etc.

En d'autres termes: **n coups de crayon** sont nécessaires pour tracer **un réseau d'ordre n.**

Un premier résultat sur les réseaux a été publié en 1736 par le mathématicien suisse Euler qui a étudié ce problème à propos des ponts de Koenigsberg.

Cette ville de Russie, actuellement appelée Kaliningrad se trouve à l'endroit où deux bras de la rivière Pregel se joignent. Près du point de jonction une île s'est formée. Au XVIIIe siècle, sept ponts avaient été construits, comme le montre la figure suivante:

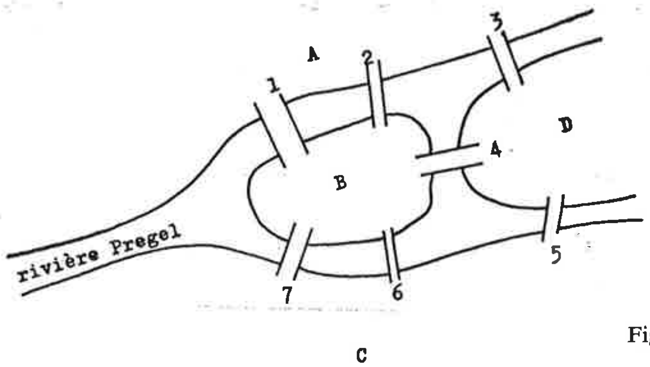


Figure 15

La question que l'on se posait alors était: peut-on ou ne peut-on pas faire un tour dans la ville de Koenigsberg qui permette de passer une fois exactement par chaque pont? Cette question était liée à d'autres problèmes qui avaient déjà été étudiés par Euler. Celui-ci remplaça le plan de la ville par le diagramme ci-dessous qui montre comment les différentes parties de la ville sont reliées par les ponts:

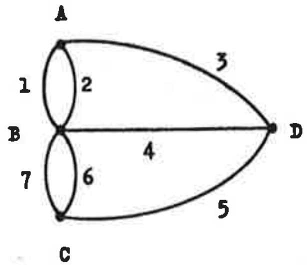


Figure 16

On remarque que les ponts sont devenus des traits dans le réseau et que les parties de la ville ont été remplacées par des points.

Les figures 15 et 16 sont topologiquement équivalentes. En effet, la transformation qui permet de passer d'une figure à l'autre est celle que nous avons appelé: «transformation élastique». Les rapports de position ont été conservés.

La figure 16 a l'avantage de présenter d'une manière simple la situation et de mettre en évidence l'importance des ponts de la ville.

Dès lors, il était plus facile de trouver la solution au problème qui était posé et de l'étendre à des situations plus générales.

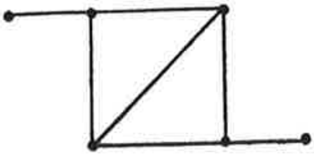
Avant d'en continuer avec ce problème, il convient d'avoir une terminologie qui aura son utilité dans d'autres réseaux. Nous appellerons **nœud** tout point d'intersection, ou toute extrémité d'une ligne ou encore tout point choisi arbitrairement sur une ligne.

D'autre part nous appellerons **branche** tout trait d'un réseau ayant un nœud à chacune de ses extrémités.

Exemples:

Les réseaux suivants comprennent 6 nœuds et 7 branches:

a)

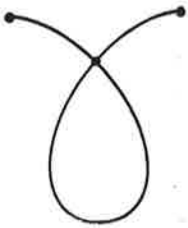


b)

Figure 17

Les réseaux suivants comprennent 3 nœuds et 3 branches:

a)



b)

Figure 18

Remarquons que tout point d'intersection ou toute extrémité d'un trait est obligatoirement un nœud. En revanche le choix est libre pour tout autre point d'une ligne, que ce soit à un angle ou non.

Par exemple, le réseau suivant comprend obligatoirement 2 nœuds:

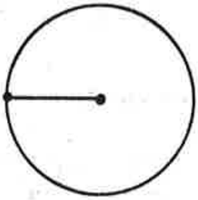


Figure 19

On vérifiera qu'ajouter un nœud sur une ligne à un point qui n'est ni un point d'intersection, ni une extrémité a simplement pour effet d'augmenter d'une unité le nombre de branches du réseau, et que les propriétés topologiques qui nous intéressent ne changent pas.

Nous définirons encore **l'ordre d'un nœud** qui est **le nombre de branches qui partent de ce nœud.**

Un nœud est d'ordre «un» si une seule branche part de ce nœud. C'est le cas lorsque ce nœud est situé à l'extrémité d'un trait.

Un nœud est d'ordre «deux» si deux branches partent de ce nœud. C'est le cas lorsque ce nœud est situé à un point d'une ligne qui n'est ni une extrémité, ni un point d'intersection.

D'une manière générale, nous dirons qu'un nœud est d'ordre n si n branches partent de ce nœud.

Exemple:

Dans le réseau suivant qui comprend 7 nœuds:

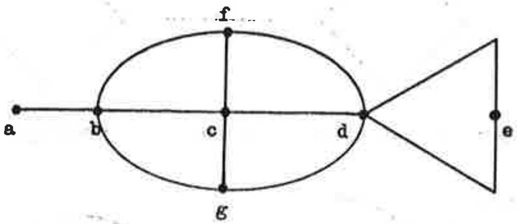


Figure 20

le nœud a est d'ordre 1;
le nœud e est d'ordre 2;
les nœuds f et g sont d'ordre 3;
les nœuds b et c sont d'ordre 4;
le nœud d est d'ordre 5.

Nous dirons enfin qu'un nœud est pair si l'ordre de ce nœud est un nombre pair et qu'un nœud est impair si l'ordre de ce nœud est un nombre impair.

Par exemple, le réseau de la figure 20 comprend 3 nœuds pairs, ce sont les nœuds b, c, e et 4 nœuds impairs qui sont a, d, f, g.

On peut maintenant formuler quelques propriétés qui font l'objet de théorèmes et qui peuvent être démontrés d'une manière formelle. Au niveau scolaire, qui nous intéresse, il s'agit de découvrir ces propriétés, d'énoncer des hypothèses et de les vérifier expérimentalement.

On constatera par exemple:

1. Il n'est pas possible de construire un réseau ayant un nombre impair de nœuds impairs.
2. Tout réseau comprend un nombre pair de nœuds impairs (propriété qui est logiquement équivalente à la première).
3. Un réseau qui comprend 0 ou 2 nœuds impairs est un réseau d'ordre 1, il peut être construit au moyen d'un seul trait de crayon d'une manière continue sans passer deux fois sur le même trait.

L'enfant remarquera en outre qu'il ne peut pas formuler des hypothèses à propos des nœuds pairs puisqu'il a toute liberté d'ajouter autant de nœuds d'ordre 2 qu'il veut.

Revenons à la propriété 3 qui vient d'être énoncée. Elle apportera la réponse au problème des ponts de Koenigsberg. Par ailleurs il est facile de la justifier d'une manière satisfaisante. En effet, si nous prenons quelques nœuds pairs, un nœud d'ordre 2 d'abord: une des branches permettra d'arriver sur le nœud et l'autre permettra de partir. Pour un nœud d'ordre 4, il faudra passer deux fois sur le nœud et il y aura chaque fois la possibilité de trouver une branche d'arrivée et une autre branche de départ. Si nous prenons maintenant des nœuds impairs, un nœud d'ordre 1 d'abord, ce nœud est obligatoirement un point initial ou un point final dans le tracé du réseau. C'est également le cas pour un nœud d'ordre 3. Deux branches permettent bien d'arriver puis de repartir, mais la troisième est une branche initiale ou finale du tracé. Comme dans un réseau d'ordre 1, on ne peut avoir qu'un seul point initial et qu'un seul point final, il est évident que l'on peut avoir au plus deux nœuds impairs.

L'enfant constatera encore:

4. Si le réseau ne comprend pas de nœud impair, il peut le tracer d'un seul trait de crayon en commençant à n'importe quel point. Le point initial et le point final sont confondus.
5. Si le réseau comprend deux nœuds impairs, le tracé doit commencer à un des deux nœuds impairs et doit se terminer à l'autre.

Par exemple, dans le petit jeu bien connu de l'enveloppe il n'est possible de faire le dessin d'un seul coup de crayon qu'à condition de commencer à un des deux nœuds impairs.

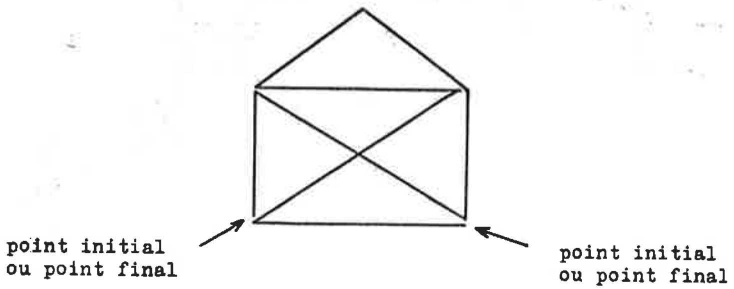


Figure 21

D'une manière générale, on vérifiera que:

6. Un réseau d'ordre 2 comprend 4 nœuds impairs, un réseau d'ordre 3 comprend 6 nœuds impairs et ainsi de suite.

Les résultats que l'on vient d'énoncer permettent d'affirmer que, dans le problème des ponts de Koenigsberg, il n'est pas possible de trouver un itinéraire qui fasse passer une seul fois par chaque pont de la ville car le réseau comprend 4 nœuds impairs, il est d'ordre 2. A propos de cette situation, il est possible de se poser d'autres questions. Par exemple:

a) Peut-on faire un tour dans la ville qui permette de passer deux fois exactement par chaque pont?
La question qui paraît plus difficile que la première a maintenant une réponse positive, car chaque nœud du réseau est pair, comme le montre la figure ci-dessous:

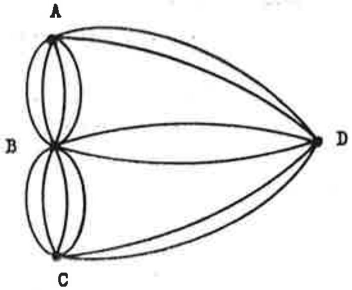


Figure 22

b) Actuellement, la ville de Koenigsberg, comprend 9 ponts:

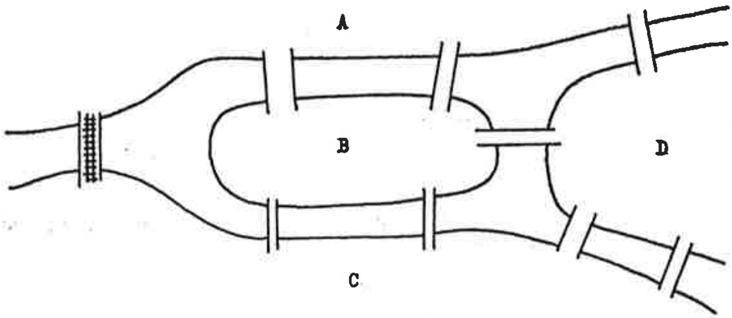


Figure 23

(un des ponts est un pont de chemin de fer)

— De nos jours, peut-on trouver un itinéraire dans la ville de Koenigsberg qui passe exactement une fois par chaque pont?
— Si oui, peut-on prendre comme point de départ n'importe quelle partie de la ville?
Les mêmes questions peuvent être reprises en excluant le pont de chemin de fer.

II. LE COLORIAGE DES CARTES

Nous appelons **carte** tout réseau dont on considère les parties du plan qui sont limitées par les branches du réseau.

A première vue, la différence entre un réseau et une carte peut paraître mineure. Ce n'est cependant pas le cas. Le point de vue est changé. Dans une carte l'intérêt est centré sur les parties du plan qui sont, en fait, les pays dans une carte ordinaire. Ces parties sont appelées **régions.** Nous compterons ici la surface qui se trouve à l'extérieur de la carte. Ainsi, dans toute carte une des régions sera illimitée.

Les branches et les nœuds du réseaux sont appelés **frontières** et **nœuds** de la carte.

Comme pour les branches d'un réseau, les frontières d'une carte sont les traits qui comprennnent un nœud à chaque extrémité.

Notons que le nœud situé à une extrémité peut être confondu avec le nœud situé à l'autre extrémité.

Exemple:

Ce trait est une frontière:

Celui-ci n'est pas une frontière:

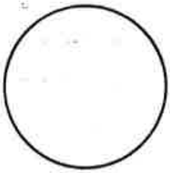


Figure 24

Nous dirons en fin qu'une carte est connexe si le réseau qui détermine la carte est connexe.

Exemples:

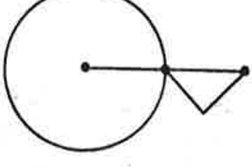


Figure 25

Dans cette carte connexe:

Le nombre de nœuds: $N = 3$.
Le nombre de régions: $R = 3$.
Le nombre de frontières: $F = 4$.

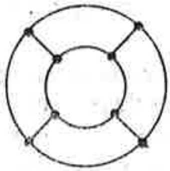


Figure 26

Dans cette carte connexe:
Le nombre de nœuds: $N = 8$.
Le nombre de régions: $R = 6$.
Le nombre de frontières: $F = 12$.

1. Dans une première étape, il est possible, en partant de cartes très simples, d'établir la relation qui existe entre les nœuds, les régions et les frontières d'une carte.

Le résultat important, qui fait l'objet d'un théorème, est dû à Euler:

— Dans toute carte connexe, si N, R et F sont respectivement les nombres de nœuds, de régions et de frontières, on a la relation:

$$N + R - F = 2$$

Nous donnons ici la démonstration du théorème à titre indicatif pour montrer le type de raisonnement qui est utilisé. Précisons qu'il ne s'agit pas d'une démonstration donnée à des élèves de l'école primaire.

Prenons une carte connexe quelconque:

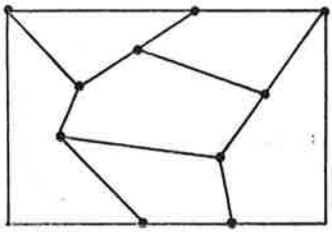


Figure 27

et considérons le nombre $N + R - F$

a) Ce nombre $N + R - F$ ne change pas si nous faisons la transformation suivante:

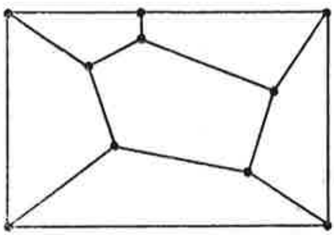


Figure 28

car aucun nœud, aucune région et aucune frontière n'ont été ajoutés.

b) Prenons le pentagone du centre et traçons une nouvelle droite (la droite double).

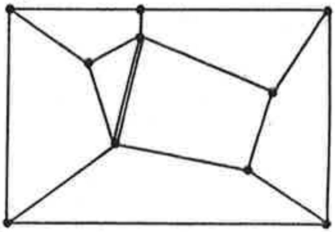


Figure 29

Dans la nouvelle carte, le nombre N +R — F n'a pas changé car une nouvelle région et une nouvelle frontière ont été ajoutées. En d'autres termes, on a obtenu:

N + (R + 1) — (F + 1)
qui est égal à N + R + 1 — F — 1
qui est égal à N + R — F.

c) On peut continuer la construction de nouvelles frontières sans changer le nombre N + R — F.

Finalement on arrive à une carte dont chaque région est limitée par trois frontières (triangulation).

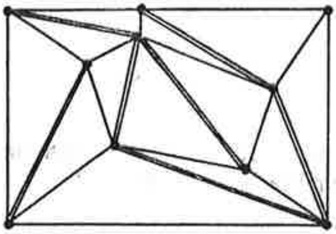


Figure 30

Dans cette nouvelle carte le nombre N + R — F n'a pas changé.

d) Prenons une région au bord de la carte et supprimons la frontière extérieure:

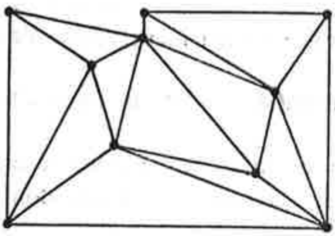


Figure 31

Dans cette nouvelle carte, le nombre N + R — F n'a pas changé car on a enlevé une frontière et une région, en d'autres termes on a obtenu:

N + (R — 1) — (F — 1)
qui est égal à N + R — 1 — F + 1
qui est égal à N + R — F.

e) Dans la carte suivante le nombre $N + R - F$ sera également inchangé.

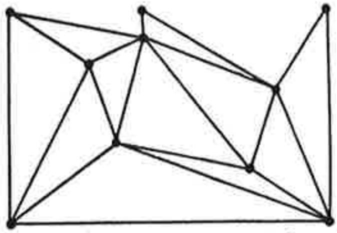


Figure 32

f) Pour les régions qui ont maintenant 2 frontières extérieures il sera encore possible de supprimer ces 2 frontières sans changer le nombre $N + R - F$.

En effet, à la suppression de 2 frontières correspond la suppression d'un nœud et d'une région. En d'autres termes on a:

$(N - 1) + (R - 1) - (F - 2)$
qui est égal à $N - 1 + R - 1 - F + 2$
qui est égal à $N + R - F$.

g) En poursuivant le travail on arrive finalement à la figure:

Figure 33

dont le nombre $N + R - F$ est évidemment le même que dans la carte donnée. Comme $N = 3$, $R = 2$ et $F = 3$, ce nombre vaut 2.

h) Toute carte pourra être transformée selon le procédé utilisé dans le cas donné ci-dessus. Par conséquent dans toute carte connexe, on a:

$N + R - F = 2$
ou encore $N + R = F + 2$ c. q. f. d.

Le résultat obtenu est facilement vérifié dans les cartes des figures 25 et 26.

Notons que ce résultat s'étend aux propriétés des polyèdres comme le cube.

Il sera intéressant de chercher des contre-exemples:

a) En particulier, prenons un dessin dont les traits ne sont pas des frontières:

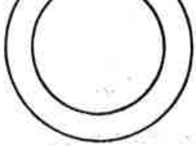


Figure 34

dans ce cas, ii n'y a pas de nœud: $N = 0$, le nombre de régions est $R = 3$ et l'on compte 2 traits que l'on peut noter $f = 2$.

On constate que le théorème n'est pas vérifié:
$N + R - f = 1$

b) Il est encore possible de donner une carte non-connexe:

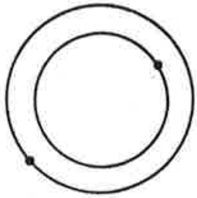


Figure 35

dans ce cas, on compte $N = 2$; $R = 3$; $F = 2$.
et le théorème n'est pas vérifié:
$N + R - F = 3$.

Il sera encore intéressant de se demander s'il existe des cartes telles que $N + R - F = 4$ ou $N + R - F = 0$, etc.

2. Dans une deuxième étape, on pourra s'intéresser au problème du coloriage des cartes. Il s'agit de colorier des cartes de telle manière que 2 régions qui ont une frontière commune ne soient pas de la même couleur. Si deux régions ont seulement un nœud en commun ou s'ils n'ont pas de frontière commune, ils peuvent être coloriés de la même couleur. Jusqu'à maintenant, en partant du théorème qui vient d'être énoncé, les mathématiciens on démontré que pour colorier une carte dessinée dans le plan, cinq couleurs étaient suffisantes. Toutefois l'expérience a montré que 4 couleurs étaient toujours suffisantes. En d'autres termes, on n'a jamais trouvé de carte qui nécessitait 5 couleurs.

   L'étude portera sur les cartes particulières.

   Il existe évidemment des cartes qui peuvent être coloriées avec deux couleurs. C'est le cas pour la carte de la figure 35. C'est également le cas pour la carte ci-dessous:

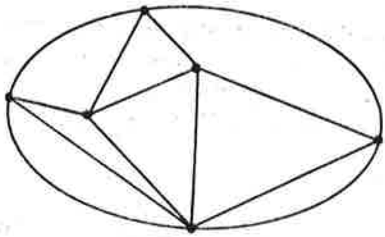


Figure 36

Remarquons ici que chaque nœud est pair.

D'autres cartes peuvent être coloriées avec trois couleurs seulement, c'est le cas pour cette carte:

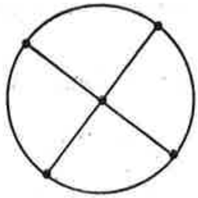


Figure 38

c'est également le cas pour celle-ci:

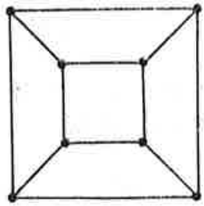


Figure 37

Remarquons ici que chaque nœud est d'ordre 3, et qu'il est intéressant d'observer la disposition des couleurs autour de chaque nœud.

Dans le coloriage des cartes, comme dans les problèmes précédents, l'élève a l'occasion de faire de simples observations puis de découvrir certaines propriétés topologiques. En partant ensuite des notions déjà étudiées comme celle de l'ordre d'un nœud, il pourra essayer de formuler des hypothèses puis de les vérifier expérimentalement.

CONCLUSION

En présentant d'une manière incomplète deux sujets de topologie intuitive qui sont à la portée des élèves de l'école primaire, nous avons voulu montrer qu'il existait, en dehors de la géométrie traditionnelle, une étude du plan qui offrait des activités mathématiques riches et variées. Cette étude permet à l'enfant d'utiliser des méthodes cohérentes et un vocabulaire précis.

Elle le prépare à son activité mathématique future.

Charles Burdet

BIBLIOGRAPHIE

1. **Arnold B. H.:** Intuitive Concepts in Elementary Topology. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.
2. **Coxeter H.S.M.:** Introduction to Geometry. New York, Londres: Wiley, 1969.

3. **Dienes Z.P. et Golding E.W.:** Exploration de l'espace et pratique de la mesure. Paris: O.C.D.L., 1966.
4. **Dienes Z.P. et Golding E.W.:** Topologie, géométrie projective et affine. Paris: O.C.D.L., 1967.
5. **Fletcher T.J.:** L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui. Paris: O.C.D.L., 1966.
6. **Gamow G.:** Un, deux, trois... l'infini. Paris: Dunod, 1963.
7. **Kaufmann A.:** Des points et des flèches... la théorie des graphes. Paris: Dunod, 1968.
8. **Kemeny J.G., Snell J.L., Thompson G.L.:** Algèbre moderne et activités humaines. Paris: Dunod, 1969.
9. **Northrop E.P.:** Fantaisies et paradoxes mathématiques. Paris: Dunod, 1964.
10. **Patterson E.M.:** Topology. New York: Oliver and Boyd, 1959.

POUR VOTRE BIBLIOTHEQUE

Nicole Picard. **«Mathématique et jeux d'enfants»,** collection «E 3» Castermann-poche. Paris, 1970. Un volume de 192 pages et 8 hors-texes en couleurs, format 11,5×18.

Mathématiques «nouvelles», mathématique «moderne» ... les parents sont un peu perdus, certains enseignants aussi.

L'une des originalités de ce livre est de conduire le lecteur à participer directement à la formulation et à la résolution mathématiques de problèmes. Il pourra ainsi expérimenter l'authentique démarche du mathématicien, laquelle est aussi celle de l'enfant en train d'apprendre.

Les éducateurs, parents ou enseignants, seront de la sorte mieux à même de guider les enfants dont ils ont la charge afin de leur faire acquérir une attitude de pensée mathématique dont ils pourront plus tard tirer profit dans leur vie scolaire, universitaire ou professionnelle.

Tous ceux qui connaissent Nicole Picard, qu'ils aient eu le privilège de la lire ou de l'entendre, seront heureux de pouvoir, une fois de plus, se nourrir de sa pensée si riche, si claire, si propre à stimuler et, en même temps, à rassurer. Cette mathématicienne poursuit ainsi son œuvre d'humaniste et d'humaniste chrétienne. Ne nous rappelait-elle pas, tout récemment, un propos de Jean XXIII (Mater et Magistra): «... qu'à tous, les biens de la culture soient accessibles sous la forme et au niveau appropriés». L'école ainsi change d'orientation. Elle n'est plus au service des conformismes. Elle fait des hommes aptes à critiquer ce qui est et disposés à concourir à la réalisation de ce qui doit être selon la vérité et la charité.

S. R.

Picard (N.) et al.

«La mathématique au cycle élémentaire»

Coll. «Recherches pédagogiques», brochure no 40, Paris, Institut pédagogique national, Département de la recherche pédagogique, 1970 (Service d'édition et de vente des productions de l'Education nationale, 13, r. du Four, Paris 6e).

Le document que vient de produire l'IPN fournit aux enseignants français travaillant de la maternelle au cours moyen 2 (dès 5-6 ans à 10-11 ans) le nouveau programme du nouvel enseignement de la mathématique. Plusieurs instituteurs et plusieurs professeurs ont, pendant cinq ans, travaillé à sa mise au point en se fondant sur des expériences dûment contrôlées. Il s'agit donc d'un texte qui peut être appliqué sans qu'on ait à craindre des déconvenues. Des précautions cependant doivent être prises — et elles le seront — avant que le programme ne soit mis en vigueur dans toute la France à la rentrée des classes de 1973: application progressive à partir du Cours préparatoire (6-7 ans), puis niveau par niveau; organisation de réunions de travail hebdomadaire; aide d'un animateur qualifié en mathématique.

«Ce programme, volontairement, n'a pas été rédigé année par année, ceci dans le souci de donner la possibilité réelle aux maîtres de n'aborder une notion que lorsque les enfants sont prêts pour le faire. Il n'est pas en effet raisonnablement possible d'affirmer que **tous** les enfants français **doivent** avoir acquis telle notion à tel âge ou à tel niveau: une telle obligation conduirait les maîtres à faire acquérir des techniques d'utilisation de la notion en cause par une mécanisation basée sur la répétition d'un grand nombre d'exercices de même type plutôt que la notion elle-même.»

L'éventail des notions enseignées est beaucoup plus large que dans le programme actuel. Une grande place, notamment, est faite au **non-numérique.** Cela n'a absolument pas la conséquence que les enfants savent moins bien calculer sur les nombres: l'expérience montre tout le contraire.

Les rédacteurs, en plusieurs endroits, insistent sur le fait que la mathématique ne doit pas être enseignée comme une matière sans contact et sans rapport avec la vie courante. Ainsi, dès le Cours préparatoire les enfants disposent de représentations (schémas, diagrammes, tableaux...) qui leur permettent de rendre compte de situations concrètes, familières. Peu à peu ils prennent explicitement conscience du fait que l'emploi des méthodes utilisées en mathématique est rentable pour organiser et traiter les informations déjà fort nombreuses reçues tant de la famille que de l'école.

Le programme, commenté avec force exemples tirés des expériences faites dans les classes (nombreux travaux d'élèves reproduits en couleurs): I - Initiation logique, II - Relations, III - Notion de cardinal, IV - Numération, V - Opérations sur les cardinaux, VI - Nombres à virgules, VII - Relations numériques, VIII - Algébrisation de situations conduisant à certaines structures mathématiques, IX - Organisation de l'espace, X - Mesure, XI - Représentations.

Une importante bibliographie (12 pages) achève le document.

Un ouvrage fondamental.

S. R.

Hug (Colette), assistante à l'Institut de psychologie de Grenoble.

«L'enfant et la mathématique»

Expérience originale de rénovation de l'enseignement mathématique à l'école primaire.

Collection «Etudes supérieures», no 15, Paris, 1968, Bordas-Mouton.

L'ouvrage de Mme Hug nous est connu depuis bientôt deux ans et nous déplorons de ne le signaler qu'aujourd'hui aux lecteurs de MATH-ECOLE. Il s'agit d'une fort belle étude dont pourront faire leur profit tous ceux qui ont la responsabilité, parfois périlleuse, d'introduire la math moderne dans le contexe scolaire traditionnel. L'auteur critique d'abord les instructions officielles françaises et la pédagogie «classique» de l'arithmétique et aboutit, sans peine, hélas, à montrer l'inefficacité notoire de l'enseignement du calcul. (Un semblable constat d'échec a été fait ailleurs; voir, entre autre, l'enquête sur le niveau des connaissances en arithmétique des apprentis — Raymond Hutin — 1968). Vient ensuite un double développement, celui concernant l'expérience de Chambéry conduite par une mathématicienne, Mme Robert, directrice d'Ecole normale, celui de Grenoble concernant les travaux de caractère expérimental conduits par Mme Hug elle-même. Deux hypothèse sous-tendaient son expérience: l'une pédagogique: l'échec en mathématique n'est pas imputable aux enfants, mais au système d'enseignement; on doit pouvoir trouver un moyen de l'éviter et de ne pas dégoûter les élèves de cette discipline. L'autre, psychologique: il existe chez l'enfant des liaisons logiques fondamentales qui ne demandent qu'à jouer. Pour cela, il faut leur fournir des situations simples et pures.

L'auteur s'inspire des travaux de Dienes, de Nicole Picard, de Papy aussi, et forge un enseignement qui refuse les facilités d'une école qui, par souci de motivation, appâtait les élèves avec des moyens sensoriels, voire sensuels (les bonbons) indignes d'eux et, somme toute, abêtissants. Les enfants sont plus intelligents qu'on ne l'a longtemps cru. Ils sont même plus «sérieux» que les adultes; et ce qu'ils demandent — comme ce qu'ils reçoivent avec une joie grave — c'est qu'on leur donne l'occasion de faire fonctionner à plein leur pensée. Ils éprouvent alors un bonheur qui constitue la meilleure des motivations, sinon la seule.

L'étude attentive des élèves de Grenoble a permis à l'auteur de voir se confirmer ses hypothèses: les enfants aiment le grand jeu mathématique; ils aiment jouer à penser.

S. R.

Corne (Christian) et Robineau (François) **«Les mathématiques nouvelles dans votre vie quotidienne et celle de vos enfants».** Collection «E 3» No 5. Paris, Castermann/Poche, 1970.

«Comprendre pour transmettre, mais aussi parce que comprendre est une nécessité. Tel est le thème de cet ouvrage qui, à partir de situations familières (lecture du journal, jeu de cartes ou orchestre de musiciens), et à travers les sentiers d'une logique décrite avec précision, guide d'abord le lecteur vers une prise de conscience de ce qu'est la mathématique par rapport à la vie quotidienne, à l'expérience vécue.

C'est avec le souci constant de références aux situations psychologiques rencontrées par l'enfant, que sont développés les éléments des mathématiques nouvelles et expliquées, parallèlement, les grandes lignes de leur pédagogie.

En même temps qu'un livre pour les parents désireux d'aider leurs enfants, c'est aussi un livre pour adultes qui fonde son développement sur l'expérience de l'adulte et qui l'amène à comprendre avant de tenter d'aider à comprendre.

Journée d'étude

Math moderne et technologie éducationnelle

Le GRETI (Groupe romand pour l'étude des techniques d'instruction) organise le samedi 10 octobre, à Genève, une journée d'étude destinée à montrer le rôle que peuvent jouer les techniques modernes d'instruction dans l'enseignement de la mathématique contemporaine.

Programme (provisoire arrêté en juillet):

1. **L'œuvre d'un pionnier: les films de J. L. Nicolet,** par M. André Delessert, professeur de mathématique à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
2. **La contribution du film au renouvellement de l'enseignement de la mathématique,** par Mme Nicole Picard, chargée de recherches à l'IPN de Paris.
3. **Les circuits logiques; leur tratuction en machine,** par M. J. D. Nicoud, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
4. **Ordinateur et motivation dans l'enseignement de la mathématique** (illustrations, simulations, expériences numériques), par M. Pierre Bolli, maître de mathématiques au Gymnase de Genève (collège Rousseau); avec démonstrations.

Lieu: Genève, Collège Rousseau, chemin du Bouchet.

Renseignements: Administration du GRETI, 2, ch. de Allinges, 1006 Lausanne (téléphone (021) 27 91 59).