104

MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1982
21e ANNÉE

MATH-ECOLE 104

21e ANNÉE Paraît cinq fois par an SEPTEMBRE 1982

Editorial

Le rôle des Mathématiques est fondamental à plusieurs titres. L'apprentissage des Mathématiques permet d'acquérir netteté du raisonnement et précision de la pensée; il donne aussi le goût de l'effort et, par la fascination des «solutions élégantes», un certain sens de l'esthétique.
Lorsqu'il est placé dans une perspective historique simple, l'enseignement des mathématiques explique «pourquoi» les différentes notions ont été introduites. Il explique comment l'introduction, à une époque donnée, de telle ou telle notion nouvelle répond soit à des réflexions de caractère fondamental (pour comprendre en profondeur, pour synthétiser, pour unifier) soit à des motivations utilitaires, appliquées.
C'est ainsi qu'on peut constater, au cours des siècles, une «mathématisation» de plus en plus poussée de questions de plus en plus nombreuses. La vitesse de progression de cette «mathématisation» dans des disciplines nouvelles s'accélère sous nos yeux.
Pour que cette évolution puisse être suivie par le plus grand nombre, l'entraînement au raisonnement mathématique est nécessaire et des professions de plus en plus nombreuses, jusqu'ici «à l'abri» des méthodes mathématiques, doivent assimiler des notions de base.
Le hasard des pérégrinations estivales et des lectures de vacances a porté mon attention sur la notion de culture scientifique et sur la place que devrait y prendre l'histoire des mathématiques. Dans le cadre d'un congrès récent, le professeur C. Houzel, chargé de préparer la section de mathématique d'un nouveau musée de l'histoire des sciences qui doit s'ouvrir à Paris, laissait entendre que la culture scientifique ne lui paraissait pas reconnue dans notre société.
Dans une autre rencontre, prenant une position opposée, des enseignants s'insurgeaient contre l'extension d'une formation scientifique dans laquelle ils voyaient la source de tous les maux de notre planète et la menace d'une valorisation excessive d'une société technologique.
Et pourtant, l'éminent généticien Albert Jacquard écrit: «... la science, qui a permis à l'homme de s'octroyer une place à part dans l'univers où il est apparu, qui nous rend capable non seulement de nous approprier peu à peu le monde, mais aussi de définir à l'avance les limites de notre compréhension de ce monde, pourquoi lui imputer les ratés, les erreurs de notre société?
C'est que la science n'est pas une sécrétion quelconque, parmi tant d'autres, du groupe humain; elle est le processus même par lequel nous, les hommes, nous sommes différenciés, distingués des autres primates.» (1)
Pour comprendre réellement le monde dans lequel nous vivons, une culture historique devrait comprendre des éléments de l'histoire des mathématiques. L'approche d'une période donnée s'est longtemps cantonnée au niveau scolaire à l'énumération des dynasties et des batailles. On a compris plus récemment tout l'intérêt de l'histoire des hommes, de leur économie, de leurs coutumes. L'état des connaissances scientifiques à un moment donné constitue également un apport explicatif intéressant.
Reste posé, bien sûr, le problème du contenu de cette culture que nous ne prétendons pas résoudre ici. Mais la publication récente, dans des collections à grand tirage, de plusieurs ouvrages touchant de près ou de loin à l'histoire des mathématiques permet de penser qu'un regain d'intérêt se manifeste dans ce domaine. Quoi qu'on en dise, la volonté de connaître, de comprendre, d'explorer des voies nouvelles ou de remonter dans le temps reste la caractéristique essentielle de l'homme et l'on peut souhaiter que l'école ne vienne pas, par des démarches inadaptées, priver une partie des jeunes de ce goût de savoir.

Raymond Hutin

(1) A. Jacquard – Au péril de la science – Ed. Seuil, 1982.

Mathémathique en ateliers protégés

par Arlette Boget, méthodologue SRP
et Jacques Perroux, maître d'atelier protégé SGIPA

Les ateliers protégés de la Société Genevoise pour l'intégration professionnelle des adolescents et adultes (S.G.I.P.A.), regroupe un peu plus d'une centaine de handicapés mentaux jeunes et adultes. Dans ces ateliers, le travail productif est vu comme un support d'éducation permanente. C'est-à-dire qu'au travers des diverses tâches proposées, on vise à faciliter l'acquisition de connaissances nouvelles. Bien que la plupart de ces handicapés ne puissent pas travailler ailleurs qu'en milieu protégé, il arrive chaque année que l'un ou l'autre ait suffisamment progressé pour quitter l'institution et entrer dans une vie professionnelle intégrée.

Ces dernières années, l'accent éducatif avait été mis sur le domaine logicomathématique, au travers du repérage des chiffres, de l'apprentissage du nombre, du comptage, des manipulations de monnaie, etc. S'étant heurtés à des difficultés, les maîtres éprouvèrent un besoin d'approfondissement, en vue d'un enseignement plus systématique. Pour qu'il soit répondu à cette requête, le directeur de la SGIPA, Monsieur André Grillet, s'adressa à son homologue du Service de la recherche pédagogique. Monsieur Raymond Hutin, auteur du rapport *Des chances pour tous,* manifesta son intérêt en accordant à la soussignée la possibilité de travailler dans les ateliers protégés à raison d'une matinée tous les quinze jours.

C'est un bref résumé de cette expérience menée durant trois ans, que nous voulons retracer ici.

Déroulement de l'expérience

Dès le départ, il fut décidé de travailler avec des groupes de plusieurs élèves, plutôt qu'individuellement. Les groupes, en effet, permettent une interaction et une stimulation qu'on ne trouve guère dans la relation duelle.
Quatre groupes furent constitués, qui se partagèrent la demi-journée mise à disposition. On tint compte du niveau de compréhension et des possibilités d'expression verbale des cinq ou six jeunes composant chaque groupe. Nous partîmes de l'hypothèse que les handicapés mentaux peuvent acquérir de nouvelles connaissances à tout moment de leur évolution, pourvu qu'on leur propose des tâches qui leur permettent de construire leur propre mode de fonctionnement.
C'est au «rôdage des groupes» et à l'expérimentation de la démarche que fut essentiellement consacrée la première année de travail. Il faut savoir que les sujets ont une moyenne d'âge de plus de vingt ans, avec un niveau mental oscillant entre quatre et huit ans. La difficulté fut alors de trouver un matériel simple mais non simpliste, s'adressant à des adultes qu'on ne voulait pas infantiliser. Un éventail de jeux éducatifs permettant successivement de faire intervenir l'anticipation, le choix impliquant une décision, la recherche de stratégies, l'aspect numérique, constitua une base de départ.

De ce tâtonnement expérimental découla un travail plus structuré en fonction des difficultés rencontrées dans les différents groupes. Par exemple, les notions de construction du nombre, de connexité, de conservation, la valeur positionnelle des chiffres, le passage à la dizaine, le concept additif...

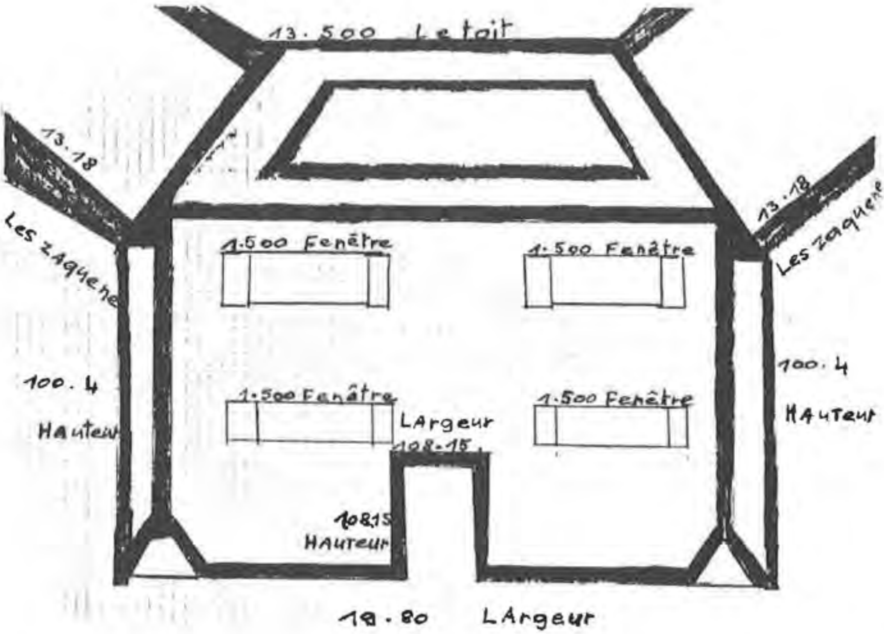
On constata une fois de plus que les occasions offertes par la vie courante ne résolvent pas automatiquement les difficultés, mais qu'elles les font plutôt ressortir. Par exemple, tel handicapé mental qui utilise le bus 14 reconnaît fort bien l'association 1-4, mais ne comprend pas que $1 + 4 \neq 14$! Cet exemple permet de comprendre que toute la construction est à faire, sans qu'il soit possible d'en sauter une étape...
Pour tenir compte de l'âge des handicapés, on utilisa volontairement un matériel qui fait partie de l'environnement quotidien, bien qu'il présente, par sa complexité, des difficultés certaines. Par exemple, dans la manipulation de l'argent, on rencontre les règles d'échanges, la notion de valeur (souvent liée au domaine affectif) et la notion d'équivalence, toutes choses qui ne vont pas forcément de soi: certains jeunes préfèrent les pièces de monnaie à un billet, qui paraît beaucoup moins solide! C'est dire, encore une fois, que l'utilisation du matériel courant ne permet pas de gagner du temps en esquivant les étapes de construction.
Dès la seconde année de l'expérience, on choisit des activités en fonction de la production propre à chaque atelier:

- Activités de tri, correspondance terme à terme, comptage de petits jouets à mettre dans des paquets-surprises, cela pour les élèves du niveau le plus bas.
- Emploi de l'argent pour ceux qui s'en vont prendre le repas de midi à l'extérieur. Choix de menus en fonction de la somme à disposition, lecture du ticket de caisse et vérification de la monnaie rendue.
- Approche de la notion de mesure pour les handicapés du plus haut niveau, travaillant dans l'atelier de menuiserie.

En illustration de ce dernier point, voici quel fut le cheminement parcouru: appréhension de l'espace, étude d'un solide (le cube), passage volume-plan, travail sur la mesure, référence à son propre corps, emploi de matériel non-structuré, mesure à l'intérieur et à l'extérieur du bâtiment, production de plans, repérage à partir d'un plan d'architecte du local dans lequel travaillaient les participants, construction d'une maquette.

Réflexions et conclusion

On peut affirmer que cette démarche d'enseignement progressif a rencontré l'intérêt, et même l'enthousiasme des élèves. Il est arrivé que les membres d'un groupe reprochent aux maîtres d'avoir passé trop de temps avec l'équipe précédente au détriment de la leur! Nullement rebutés par la complexité des tâches, les handicapés venaient aux séances avec un plaisir visible. Ils ont certainement vécu cette démarche comme une expérience valorisante.
Notons aussi que, loin d'être passifs, certains ont formulé des suggestions et ont manifesté un intérêt spontané. Tel jeune a dessiné, lors d'un week-end et à sa manière, le «plan» de son chalet.



Une autre élève, vivement intéressée par le jeu de dés du Yat, l'a acheté spontanément, et y a initié ses camarades de foyer.

On peut dire en conclusion qu'une telle expérience ne constitue pas une perte de temps, bien au contraire. Certes c'est un travail de longue haleine, qu'il est nécessaire de poursuivre de façon régulière. Au départ, il faut poser l'acte de foi que le peu qu'on pense obtenir, on doit le tenter.

En ce domaine mathématique ainsi qu'en beaucoup d'autres, preuve a été faite que les handicapés mentaux étaient capables de performances beaucoup plus grandes que celles qu'on aurait pu supposer.

On n'a pas le droit de fixer d'arbitraires limites à la progression de ces êtres défavorisés.

Hommage à Gaston Bachelard

«Si nous allions au-delà des programmes scolaires jusqu'aux réalités psychologiques, nous comprendrions que l'enseignement des sciences est entièrement à réformer; nous nous rendrions compte que les sociétés modernes ne paraissent point avoir intégré la science dans la culture générale.»

La Formation de l'esprit scientifique (1938)

C'est en 1965, par un hasard de rencontre typiquement suisse puisque ce fut lors d'un cours de répétition, dans les fortifications d'Andermatt, que j'appris l'existence, par disciple interposé, d'une importante littérature signée Gaston Bachelard.

Le disciple, à qui toute ma vie je conserverai ma reconnaissance, était «médecin-complémentaire», qualification militaire à résonnance quelque peu péjorative mais portée, en l'occurrence, avec désinvolture par un grand «patron» de la médecine. Son admiration pour Bachelard était telle qu'elle l'avait poussé, en sa jeunesse, à forcer en quelque sorte, la porte du philosophe. Mentant effrontément, il s'était présenté au domicile du Professeur honoraire de la Sorbonne, ex-directeur de l'Institut d'histoire des sciences et membre de l'Académie des sciences morales et politiques, prétendant être attendu. Cette prouesse un peu malhonnête ayant réussi, il avait eu la chance de rencontrer Gaston Bachelard dans son bureau de la place Maubert et d'avoir une conversation avec lui.

Quel rapport ce souvenir personnel a-t-il avec Math-Ecole? Aucun! Si ce n'est que depuis cette rencontre d'Andermatt, j'ai pratiquement toujours eu un ouvrage de Bachelard sur mon bureau et qu'à l'occasion du vingtième anniversaire de sa mort, j'aimerais que les lecteurs de Math-Ecole partagent avec moi un peu de l'admiration que je lui porte.

C'est à Bachelard que je dois l'une de mes premières satisfactions esthétiques en mathématique, à la lecture des quelques pages de son ouvrage «Le rationalisme appliqué» (1949), consacrées au traditionnel théorème de Pythagore, texte que Math-Ecole reproduit en page 10 du présent numéro et qui se termine ainsi, dans le plus pur style bachelardien:

«Il semble que le professeur de mathématique puisse dire à son disciple:

«Coupe le triangle rectangle en deux et médite. Tu tiens une vérité première, une beauté rationnelle première. Elle éclairera toute ta vie de géomètre. Elle t'apprendra à aller à l'essentiel. Si quelque sphinx malveillant te posait, un jour d'examen, cette énigme: Prouvez-moi que le dodécagone construit sur l'hypothénuse du triangle rectangle est égal à la somme des dodécagones construits sur les autres côtés, applique la maxime de Peer Gynt: fais un détour. Ne te perds pas dans les méandres des douze côtés, dans le noir fouillis des diagonales. Georges Bouligand, en suscitant en toi le rationalisme éveillé, t'a appris à penser comme un dieu géomètre, à travailler sans rien faire.»

C'est chez Bachelard aussi, dans des pages écrites pourtant entre 1928 et 1962, que toujours je trouve la résonnance à chacune de mes préoccupations actuelles d'enseignant. Que penser, par exemple, du récent ouvrage de Seymour Papert «Jaillissement de l'esprit. Ordinateurs et apprentissage», lorsque l'auteur préconisant une remise en question fondamentale – Eh oui! Encore une fois! – de nos programmes scolaires de mathématique, rendue nécessaire par le nouvel environnement informatique, écrit:

Tout au long de ce chapitre, j'ai évoqué comment les choix des enseignants, des pouvoir publics, des associations et même des simples particuliers pouvaient peser sur les changements possibles, sur la révolution en puissance, dans la manière dont les enfants apprennent. Mais il n'est pas toujours aisé de faire le bon choix, entre autres raisons parce que nous sommes sous l'emprise des choix du passé. Dans une technologie nouvelle, c'est souvent le premier produit disponible, aussi primitif soit-il, qui a tendance à s'imposer – à s'incruster, dirais-je. J'appellerai volontiers ce phénomène le phénomène QWERTY[1].
Sur une machine à écrire, le début de la rangée supérieure des touches alphabétiques se lit QWERTY. C'est là pour moi le symbole de la façon dont, trop souvent, au lieu d'être une force de progrès, la technologie représente un élément de fixité. La disposition QWERTY n'a pas de justification rationnelle, seule l'histoire des machines l'éclaire. Elle est due à un problème du temps des premières machines à écrire: les touches avaient tendance à se coincer entre elles. Dans l'idée de diminuer les occasions de collision, on s'efforça de séparer les touches qui se suivaient fréquemment dans les mots de la langue anglaise. Quelques années plus tard seulement, une amélioration des machines à écrire vint supprimer ce problème de blocage, mais le système QWERTY demeura: trop tard; il était adopté. On le retrouvait (on le retrouve toujours) sur des millions de machines à écrire, alors qu'il entraîne l'adoption obligatoire d'une méthode d'apprentissage de la dactylographie (en fait, d'un programme de cours tout entier). Le coût social d'une modification de clavier (dans le but, par exemple, de rapprocher *les touches se présentant souvent à la suite) croissait en proportion du nombre incalculable de doigts accoutumés au clavier QWERTY. QWERTY est donc resté, en dépit de l'existence d'autres systèmes, plus rationnel. Mais si vous interrogez le public sur la disposition QWERTY, vous l'entendrez la justifier par des critères «objectifs». On vous dira qu'elle facilite ceci, cela, qu'elle limite tel ou tel risque... Ces justifications n'ont aucun fondement rationnel, mais elles illustrent bien comment se forge un mythe social, qui nous permet de conserver en toute bonne foi, dans un système quelconque, des vestiges pourtant inutiles de son aspect primitif. Et je crois bien que nous sommes partis pour faire exactement la même chose avec les ordinateurs. Nous sommes en train de nous raccrocher à un anachronisme, en conservant des pratiques qui n'ont aucun fondement rationnel, et qui ne se justifient que par leurs racines historiques, héritages d'une période antérieure du développement technologique et théorique.*

Jailissement de l'esprit, p. 47.

Il est important de garder présente à l'esprit la distinction entre les mathématiques, *immense champ d'exploitation dont les non-mathématiciens soupçonnent rarement la beauté, et ce quelque chose d'autre que j'appellerai volontiers* les maths *ou* les maths scolaires.
Je perçois ces maths scolaires comme une fabrication de la société, un produit du genre de QWERTY. Une série de hasards historiques (que nous évoquerons plus loin) ont présidé au choix de certains sujets mathématiques comme représentant le *bagage mathématique*

---

[1] *QWERTY: pour le lecteur français, ce serait le phénomène AZERTY, pour le lecteur suisse, le phénomène QWERTZ.*

dont devait disposer tout citoyen. De même que la disposition QWERTY sur les touches de machines à écrire, les maths scolaires ainsi conçues avaient bel et bien un sens dans un contexte historique donné. Seulement, tout comme QWERTY, elles se sont si bien enracinées qu'on a fini par les considérer comme nécessaires et allant de soi, les justifiant après coup, sans plus les remettre en question, par toutes sortes de raisons rationnelles, et ceci longtemps après que fussent devenues caduques les conditions historiques qui leur donnaient un sens. En fait, pour la plupart de ceux qui appartiennent à notre culture, il est parfaitement inconcevable que les maths scolaires puissent être bien différentes de ce qu'elles sont: ils n'en ont jamais connu d'autres.

Jaillissement de l'esprit, p. 69.

Comment alors ne me reviendraient pas à l'esprit ces autres lignes de Bachelard, tirées encore du «Rationalisme appliqué»?

«Les parents abusent souvent plus encore de leur savoir que de leur pouvoir... L'omniscience des parents, suivie bientôt à tous les niveaux de l'instruction par l'omniscience des maîtres, installe un dogmatisme qui est la négation de la culture. Quand ce dogmatisme est attaqué par les folles espérances de la jeunesse, il se fait prophétique. Il prétend s'appuyer sur «une expérience de la vie» pour prévoir l'avenir de la vie. Or, les conditions du progrès sont désormais si mobiles que «l'expérience de la vie» passée, si une sagesse pouvait la résumer, est presque fatalement un obstacle à surmonter si l'on veut diriger la vie présente.»

Le rationalisme appliqué, p. 75.

Je voudrais encore, dans ce modeste et bien imparfait hommage, souligner par deux citations ce qui certainement m'a le plus impressionné chez Bachelard: son «ambivalence philosophique» qui l'amena à s'intéresser, avec la plus grande compétence, aussi bien à la poésie qu'à la science, ce que François Dagognet, dans son ouvrage de la Collection «Philosophes» consacré à Gaston Bachelard, nomme les deux versants de la philosophie bachelardienne: le scientifique et le poétique.

CONTINUITÉ ET RUPTURE DANS L'HISTOIRE DES SCIENCES

Les mécaniques contemporaines, mécanique relativiste, mécanique quantique, mécanique ondulatoire sont des sciences sans aïeux. Nos arrière-neveux se désintéresseront sans doute de la science de nos arrière-grands-pères. Ils n'y verront qu'un musée de pensées devenues inactives, ou du moins de pensées qui ne peuvent plus valoir que comme prétexte de réforme de l'instruction. Déjà, si l'on nous permet cette formule, la bombe atomique a pulvérisé un grand secteur de l'histoire des sciences, car, dans l'esprit du physicien nucléaire, il n'y a plus trace des notions fondamentales de l'atomisme traditionnel. Il faut penser le noyau de l'atome dans une dynamique de l'énergie nucléaire et non plus dans une géométrie de l'agencement de ses constituants. Une telle science n'a pas d'analogue dans le passé. Elle apporte un exemple particulièrement net de la rupture historique dans l'évolution des sciences modernes.

Et cependant, malgré son caractère révolutionnaire, malgré son caractère de rupture avec l'évolution historique régulière, une doctrine comme la mécanique ondulatoire est une synthèse historique *parce que l'histoire, arrêtée deux fois dans des pensées bien faites: les pensées newtoniennes et les pensées fresnelliennes, reprend un nouveau départ et tend à une nouvelle esthétique des pensées scientifiques.*

L'Activité rationaliste de la physique contemporaine, p. 23-24.

LA SOLITUDE DU RÊVEUR DE CHANDELLE

Un homme solitaire, dans la gloire d'être seul, croit parfois pouvoir dire ce qu'est la solitude. Mais à chacun sa solitude... Pour moi, tout à la communion avec les images qui me sont offertes par les poètes, tout à la communion de la solitude des autres, je me fais seul avec les solitudes des autres... Le rêveur est à sa table; il est en sa mansarde; il allume sa lampe. Il allume une chandelle. Il allume sa bougie. Alors je me souviens, alors je me retrouve: je suis le veilleur qu'il est... Seul, la nuit, avec un livre éclairé par une chandelle – livre et chandelle, double îlot de lumière, contre les doubles ténèbres de l'esprit et de la nuit.
J'étudie! Je ne suis que le sujet du verbe étudier.
Penser je n'ose.
Avant de penser, il faut étudier.
Seuls les philosophes pensent avant d'étudier.
Mais la chandelle s'éteindra avant que le livre difficile soit compris. Il faut ne rien perdre du temps de lumière de la chandelle, des grandes heures de la vie studieuse.
Si je lève les yeux du livre pour regarder la chandelle, au lieu d'étudier, je rêve.
Alors les heures ondulent dans la solitaire vallée. Les heures ondulent entre la responsabilité d'un savoir et la liberté des rêveries, cette trop facile liberté d'un homme solitaire.

La Flamme d'une chandelle, p. 53-55.

Frédéric Oberson

Deux ouvrages à signaler au lecteur de Math-Ecole qui s'intéresserait à la vie et à l'œuvre de Gaston Bachelard:

«Bachelard», de Jean-Claude Margolin
Collection Ecrivains de toujours, Editions du Seuil, 1974

«Gaston Bachelard, sa vie, son œuvre» de François Dagognet
Collection Philosophes, Presses universitaires de France, 1965 Paris

Extraits de «Le rationalisme appliqué» de Gaston Bachelard
Presses universitaires de France, Paris 1970 (4e édition) pages 86 - 97.

Nous développerons longuement un seul exemple... le traditionnel théorème de Pythagore sur le triangle rectangle: le carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.
...Nous allons insister sur la démarche qui conduit aux résultats, en essayant de saisir le rationalisme dans son activité de mise en rapport des notions.

Avant d'envisager la démonstration sur un triangle rectangle quelconque nous allons essayer de réimaginer en quelque manière la préhistoire de la démonstration phythagoricienne. Nous avons en effet constaté nous-même, dans l'enseignement, que cette préhistoire pouvait servir avantageusement d'induction pédagogique. Le cas particulier va nous suggérer le cas général et nous guider dans les voies de l'identification.

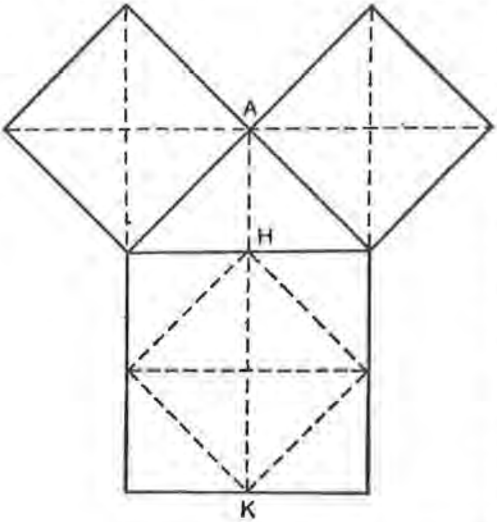


FIG. 1

Supposons donc d'abord que le triangle rectangle sur les côtés duquel on construit les carrés soit isocèle. La figure prend alors une totale symétrie (fig. 1). Des constructions immédiates évidentes font apparaître des triangles rectangles entièrement identiques au triangle central. Un simple travail de découpage suffit, dans ce cas particulier, à affirmer la validité du théorème de Pythagore. Les triangles isolés par la construction ne sont pas seulement d'égale surface, ils sont à tous les points de vue identiques. Ils ne diffèrent que par la place.

... Après cette préparation pédagogique, où le principe d'identité a joué d'une manière naïve, examinons donc la proposition de Pythagore qui s'applique à un triangle rectangle quelconque.

De notre travail préparatoire nous pouvons présumer que la droite AHK qui coupait les surfaces à considérer en deux parties dans le cas particulier peut sans doute jouer un rôle essentiel dans la démonstration. Le rationalisme consiste précisément à effacer, non pas seulement en fait, mais en droit, cet inattendu. Et c'est en cela qu'il est non pas seulement une philosophie de la réflexion, mais une philosophie de deuxième réflexion. Toujours il faut se dire: mieux préparé, le théorème aurait pu être prévu. Dans le cas présent, après la «préparation» sur le triangle isocèle, on se trouve naturellement conduit à essayer de prouver l'égalité de la surface du petit carré et de la surface du petit rectangle. L'artifice qu'est la droite AK s'impose. Si l'identification carré-rectangle est réussie à gauche de la figure, il est bien évident qu'elle pourra de même se faire à droite.
Il apparaît tout de suite que les formes à comparer sont maintenant très différentes; on ne pourra pas réussir à en identifier les surfaces par le découpage et le contreplaqué. Voyons par quels intermédiaires on va réussir cette identification essentiellement indirecte (fig. 4).

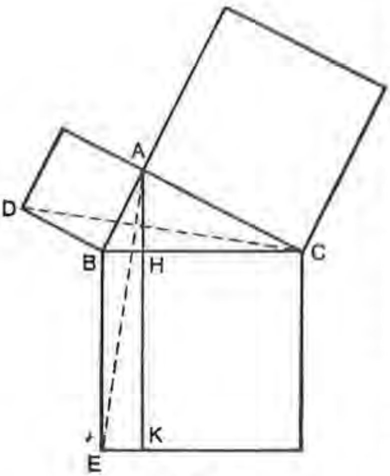


FIG. 4

Prenons la moitié du carré, soit le triangle ABD; et la moitié du rectangle, soit le triangle BHE. Le triangle ABD est égal au triangle DBC (même base DB et même hauteur AB). Le triangle BHE est égal au triangle ABE (même base CE et même hauteur BH).
Il suffit de constater que les deux triangles DBC et ABE sont égaux comme ayant un angle égal ($\widehat{DBC} = \widehat{ABE}$) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Finalement, en parcourant cette cascade d'identités on se convainc que le carré et le rectangle sont égaux à gauche et, comme nous le disions il y a un instant, qu'il en est de même naturellement pour le carré et le rectangle de droite.
... Toutefois, dans cette longue liste d'identités, il faut maintenir une finalité. Dans son premier aspect, la conviction laisse une impression de lenteur. Elle ne prend de la solidité que si elle est apprise, que si le dénombrement des connaissances intermédiaires est fait avec une certaine rapidité. La conviction est solidaire d'une organisation de la mémoire. Quand la mémoire a été organisée par l'induction rationnelle, les éléments de la démonstration se condensent. Cette condensation peut finalement imiter une intuition. Un maître habile doit mener l'élève à cette condensation intuitive, mais il doit pour cela ne pas négliger le psychologisme de la vitesse de pensée. Nous reviendrons en fin de chapitre sur cet aspect pédagogique.
Devant une propriété aussi belle que celle découverte dans le triangle rectangle par Pythagore, la philosophie du réalisme platonicien des idées a pu se donner carrière. En effet, le triangle rectangle, brodé de sa grecque géométrique, tenant ses trois carrés en leur imposant une merveilleuse égalité, peut bien servir d'exemple pour une réalité des idées pures. Il semble que la contemplation de la figure 4 détermine dans une âme mathématicienne une véritable admiration rationnelle. Cette admiration est un élément psychologique indispensable du rationalisme actif. Il double le fait par une valeur.
Lorsqu'on cherche pour quelle cause le carré vient illustrer une propriété touchant les longueurs des côtés du triangle rectangle, on ne tarde pas à voir, comme nous allons le montrer, que cette causalité du carré n'est qu'occasionnelle. Le carré n'est qu'une figure entre mille pour illustrer la pythagoricité du triangle rectangle. Il jouit d'un privilège historique immérité et c'est ce privilège que la culture récurrente va supprimer.
En effet si le carré permet de mettre en lumière la pythagoricité du triangle rectangle, il le doit au fait que le carré est un polygone régulier et que, par conséquent, tous les carrés sont semblables entre eux, comme sont semblables entre eux tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés.
Il est en effet tout de suite évident que la pythagoricité du triangle rectangle vaut pour tout polygone régulier. Ainsi dans l'hypothèse où le théorème de Pythagore est démontré sous sa forme classique, on se convainc aisément qu'il est vrai pour des triangles équilatéraux (fig. 5). En effet la surface d'un triangle équilatéral construit sur le côté d'un carré est égale à la surface du carré multipliée par $\frac{\sqrt{3}}{4}$

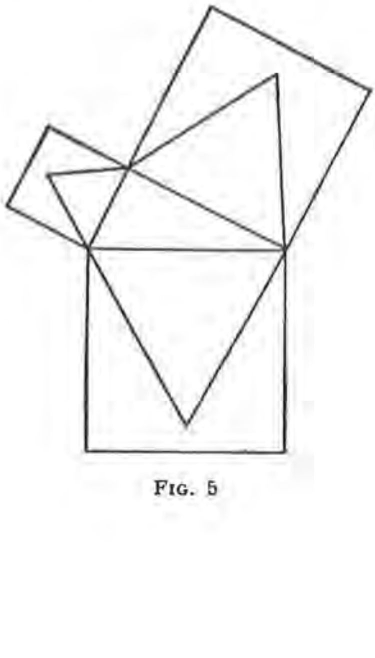


FIG. 5

L'imagerie triangulaire correspond donc, du point de vue de la grandeur des surfaces, à l'imagerie quadrangulaire réduite dans une proportion déterminée par le facteur $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Autrement dit, il suffit de multiplier par le facteur $\frac{\sqrt{3}}{4}$ les deux membres de l'équation livrée par le théorème de Pythagore classique pour avoir le théorème nouveau: le triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des triangles équilatéraux construits sur les deux autres côtés.

Un autre facteur, cette fois plus grand que l'unité, donnerait l'énoncé valable pour les pentagones (fig. 6). D'une manière générale, on peut donc énoncer la propriété suivante: Un polygone régulier de n côtés construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des polygones réguliers de n côtés construits sur les deux autres côtés du triangle.

Le théorème qui vient de recevoir une si belle extension peut encore être étendu. Il vaut pour tous les polygones réguliers. C'est en méditant sur cette régularité que nous allons découvrir la cause profonde de la proposition de Pythagore généralisée. La notion de régularité ne joue en effet ici que le rôle d'une économie verbale. La causalité est plus profonde, elle ne réside pas dans la régularité des polygones. La notion causale se trouvera en réfléchissant que tous les polygones réguliers à n côtés sont semblables entre eux. Tous les carrés sont semblables, tous les triangles équilatéraux sont semblables, tous les pentagones sont semblables. Autrement dit, dans le règne des idées, abstraction faite des dimensions, il n'y a qu'un carré, qu'un triangle équilatéral, qu'un pentagone.

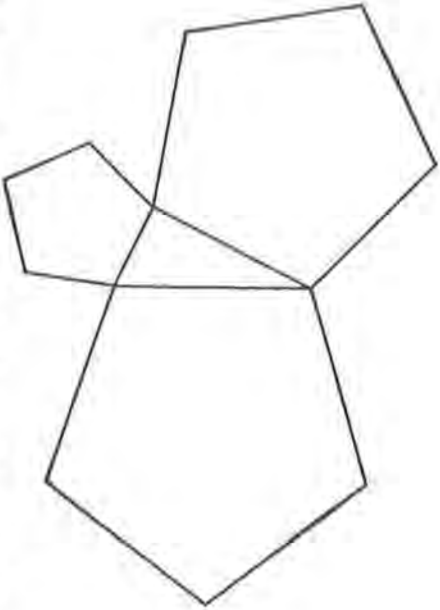


Fig. 6

Si une figure particulière jouit de cette sorte de similitude implicite, de cette similitude qu'on ne dit pas, elle donnera tout de suite un énoncé pythagoricien. Par exemple le demi-cercle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des demi-cercles construits sur les deux autres côtés (fig. 7).

Ainsi en cherchant le caractère de causalité rationnelle on passe successivement du carré aux polygones réguliers, des polygones réguliers aux figures semblables. Le caractère causal est la similitude.

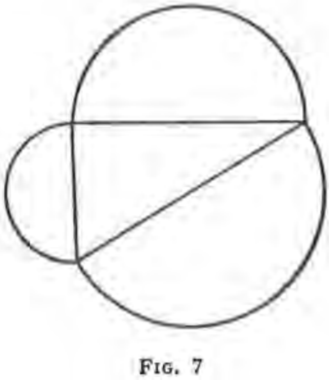


Fig. 7

Bien entendu, il nous importe peu que la grecque géométrique construite autour du triangle rectangle soit remplacée par un libre feston, dès qu'on impose la similitude des trois figures. Ainsi en commentant la figure 8 on pourra dire, pour être bref: le dromadaire construit sur l'hypoténuse

d'un triangle rectangle est égal à la somme des dromadaires construits sur les deux autres côtés. Nous avons donc atteint la suprême généralité de l'antique proposition de Pythagore du seul fait que nous en avons découvert la cause rationnelle. *Cette proposition se présente comme une administration très curieuse des figures* semblables. *Seul, le triangle rectangle donne cette distribution équilibrée des surfaces. Un triangle quelconque ne jouit pas de cette propriété qui est donc caractéristique de l'angle droit.*
Si l'on ajoute que le caractère d'orthogonalité ne se maintient pas dans une projection, on comprendra qu'il n'y ait nulle «pythagoricité» en géométrie projective. Enfin, si l'on se souvient que la géométrie euclidienne est liée au groupe des déplacements et des similitudes, on voit donc que le théorème de Pythagore commande les aspects les plus profonds de la géométrie euclidienne.

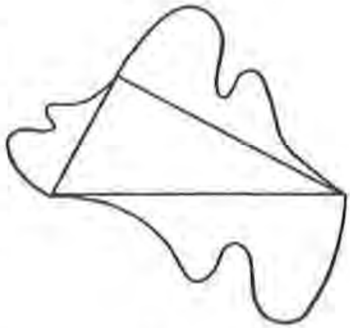


FIG. 8

Le théorème de Pythagore a ainsi une valeur philosophique considérable. Il y a donc le plus grand intérêt à le montrer dans toute sa généralité, dans les développements d'une identité continuée. En le bornant au cas des carrés, on le mutile. Sur les carrés, on ne voit pas la portée de la pythagoricité, *la hiérarchie de l'*idée pythagoricienne. *Sur le fond de la caverne, sur le tableau noir, on ne voit que l'ombre d'une grande vérité intelligible. Le carré n'est qu'un accident, c'est la* similitude, *«idée abstraite», qui donne la* loi. *La forme abstraite porte la pleine lumière.*
Une fois qu'on a ainsi réalisé la valeur *rationnelle de l'idée abstraite, on se rend compte que la plus grande compréhension va de pair avec la plus grande extension. C'est en étendant à l'extrême une idée qu'on en saisit la compréhension maxima.*

Correspondance
Gilbert Walusinski, rédacteur du Bulletin de l'association des professeurs de mathématique en France nous écrit:

C'est toujours avec le plus grand intérêt que je reçois *«Math-Ecole»* et je vous remercie très vivement de m'en assurer le service. Autant que je le pense, j'en répercute les sommaires dans notre Bulletin.
J'ai trouvé particulièrement heureuse la citation publiée et commentée par Françoise Waridel en tête du numéro 103 de mai 1982. A ce propos, une petite remarque: l'auteur du manuel cité n'est pas un pédagogue inconnu puisqu'il s'agit de Barrême (ou Barreme), antérieurement auteur d'un «Livre des comptes faits» dont la langue française a fait le mot commun *«barème»*.
Quant aux idées pédagogique de Bertrand Barrême, je ne suis pas certain que nous ayons avantage à les adopter telles qu'il les énonce; voyez en particulier son éloge de la règle de trois ou «de raison».

Trois approches des carrés magiques

par A, Calame

Nous n'avons pas l'intention de résumer ici ce que chacun peut trouver dans les ouvrages de récréations mathématiques, à commencer par les livres de Bachet de Méziriac ou de Lucas. Notre propos est de présenter trois approches des carrés magiques: la première est liée à la *combinatoire*, la deuxième fait appel aux *bases de numération* et la troisième fait intervenir la notion d'*espace vectoriel*.

Commençons par une définition. On appelle carré magique un tableau carré dans les cases duquel on inscrit des nombres de manière que la somme de ces nombres soit la même dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales.

Un exemple célèbre est le carré magique d'ordre 4 (carré de 4 sur 4) qui figure dans l'œuvre d'Albert Dürer intitulée «Melancholie»:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

La somme des termes en ligne, en colonne et en diagonale est toujours 34.

Comme première approche, essayons de construire un carré magique d'ordre 3 contenant les nombres naturels de 1 à 9. La somme de ces neuf nombres étant 45, la somme constante dans chaque ligne (colonne ou diagonale) sera

$$\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$$

Examinons toutes les possibilités de former la somme 15 avec trois nombres naturels différents, compris entre 1 et 9:

1 + 5 + 9	2 + 6 + 7
1 + 6 + 8	3 + 4 + 8
2 + 4 + 9	3 + 5 + 7
2 + 5 + 8	4 + 5 + 6

Il y a huit décompositions possibles. Regardons la fréquence d'apparitions des différents nombres dans ces décompositions:

les nombres 1, 3, 7, 9 figurent dans deux décompositions;
les nombres 2, 4, 6, 8 figurent dans trois décompositions;
le nombre 5 figure dans quatre décompositions.

Considérons maintenant le carré à remplir:

0	X	0
X	C	X
0	X	0

Puisque le carré comprend trois lignes, trois colonnes et deux diagonales, les huit décompositions à disposition devront être utilisées. Tout nombre qui figure sur le milieu d'un côté (X) doit appartenir à deux décompositions, tandis que les nombres dans les angles (O) appartiennent à trois décompositions. Enfin la case centrale (C) doit être ocupée par un nombre qui figure dans quatre décompositions. En conclusion, la case centrale doit contenir le nombre 5 et les cases des angles les nombres pairs. On peut alors compléter la construction du carré magique. On a ainsi huit solutions:

2 9 4	4 3 8	8 1 6	6 7 2
7 5 3	9 5 1	3 5 7	1 5 9
6 1 8	2 7 6	4 9 2	8 3 4
No 1	No 2	No 3	No 4
6 1 8	2 7 6	4 9 2	8 3 4
7 5 3	9 5 1	3 5 7	1 5 9
2 9 4	4 3 8	8 1 6	6 7 2
No 5	No 6	No 7	No 8

Les quatre solutions de la première ligne s'obtiennent par rotations successives de +90° du carré No 1. Chacune des solutions de la deuxième ligne est symétrique de la solution de la première ligne dans une symétrie d'axe horizontal. D'ailleurs, les solutions No 5 à 8 s'obtiennent aussi par rotations successives de −90° à partir du carré No 5. En fait, il n'y a qu'un *seul carré magique d'ordre 3* contenant les nombres naturels de 1 à 9, car on peut considérer comme équivalentes, à isométrie près, les huit dispositions énumérées.

Nous avons là un exemple de «problème fermé» avec une solution unique à la question posée. De plus, la méthode utilisée ne se laisse pas généraliser au cas d'un carré magique d'ordre supérieur. Revenons, par exemple, aux carrés magiques d'ordre 4.

Pour la construction du carré magique avec les nombres naturels de 1 à 16, on utilisera dix décompositions du nombre 34 (quatre lignes, quatre colonnes et deux diagonales). Or, il existe 86 décompositions du nombre 34 en une somme de quatre termes différents compris entre 1 et 16.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous n'allons pas décrire ici toutes les méthodes souvent astucieuses imaginées pour la construction de carrés magiques d'ordre supérieur ou égal à 4. Notons seulement que les algorithmes sont généralement plus simples pour les carrés d'ordre impair que pour les carrés d'ordre pair.

Deuxième approche

La deuxième approche des carrés magiques que nous envisageons repose, pour tous les carrés d'ordre n, sur le calcul en base n. Reprenons le carré magique d'ordre 3 et soustrayons 1 à chacun de ses termes. Le nouveau carré est encore magique avec une somme s'=12. Ecrivons alors chacun des nombres en base trois. Le fait d'avoir remplacé les nombres de 1 à 9 par les nombres de 0 à 8 permet d'obtenir l'ensemble des nombres de deux chiffres au maximum en base trois:

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 01 & 22 & 10 \\ 20 & 11 & 02 \\ 12 & 00 & 21 \end{matrix}$$

Le carré magique écrit en base trois peut se décomposer en deux carrés: l'un portant sur le nombre des groupements de trois, l'autre sur les unités:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chacun de ces carrés est appelé un *carré latin,* car chaque ligne, chaque colonne comprend une fois et une seule fois chacun des nombres 0, 1, 2. Les deux carrés latins T et U sont dits *orthogonaux,* car en les superposant, deux cases différentes sont toujours occupées par des couples différents (cette notion d'orthogonalité n'a rien à voir avec la notion d'orthogonalité utilisée en géométrie).

Autrefois, au lieu de parler de carrés latins orthogonaux, on disait carrés gréco-latins, en se référant aux travaux d'Euler qui utilisait des lettres grecques dans l'un des carrés et des lettres latines dans l'autre.

Essayons de construire un carré magique d'ordre 4 par cette méthode. Pour travailler dans un climat plus favorable et plus familier, on peut s'exercer avec les seize figures d'un jeu de cartes: valets (V), dames (D), rois (R), as (A) dans les quatre couleurs cœur (c), carreau (k), pique (p), trèfle (t). On dispose les cartes en carré de 4 sur 4 de manière que dans chaque ligne et dans chaque colonne se trouvent toutes les figures différentes et toutes les couleurs. On aura, par exemple:

Rt	Vp	Dk	Ac
Vc	Rk	Ap	Dt
Ak	Dc	Vt	Rp
Dp	At	Rc	Vk

Ceci fait, on attribue à chaque figure un nombre compris entre 0 et 3, ainsi qu'à chaque couleur. Le carré latin des «figures» et le carré latin des «couleurs» sont orthogonaux. Dans chaque ligne et dans chaque colonne la somme des nombres sera la même, soit:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 00 + 10 + 20 + 30 = 132 \text{ en base quatre}$$

Cette somme s'écrit 30 (trente) en base dix.

On a une marge de liberté pour attribuer à chaque figure et à chaque couleur un des nombres de 0 à 3. Il faut en profiter pour examiner les diagonales du carré formé avec les cartes, afin que le carré devienne magique. La diagonale principale (allant du roi de trèfle au valet de carreau) comprend deux types de figures (valets et rois) et deux couleurs (carreau et trèfle). De même pour la diagonale secondaire (as et dames; cœur et pique). Appelons f(R) et f(D) les valeurs attribuées aux rois et aux dames, etc.

On doit avoir: $2\ f(R) + 2\ f(V) = 2\ f(A) + 2\ f(D)$

$f(V) - f(D) + f(R) - f(A) = 0$

De même: $f(t) + f(k) - f(p) - f(c) = 0$

Ces relations seront satisfaites si l'on pose, par exemple:

$f(V) = 0$	$f(c) = 0$
$f(D) = 1$	$f(k) = 1$
$f(R) = 3$	$f(p) = 3$
$f(A) = 2$	$f(t) = 2$

Résumons ci-dessous les différentes étapes:

3	0	1	2
0	3	2	1
2	1	0	3
1	2	3	0

«figures»

2	3	1	0
0	1	3	2
1	0	2	3
3	2	0	1

«couleurs»

32	03	11	20
00	31	23	12
21	10	02	33
13	22	30	01

base quatre

14	3	5	8
0	13	11	6
9	4	2	15
7	10	12	1

base dix

15	4	6	9
1	14	12	7
10	5	3	16
8	11	13	2

carré magique

Cette deuxième approche des carrés magiques est plus «ouverte» que la première basée sur la combinatoire; elle fournit un procédé qui permet de construire d'innombrables carrés magiques.

Toutefois, on peut se poser deux questions au sujet de ce procédé de construction:

1) Existe-t-il pour tout nombre naturel n une paire de carrés latins orthogonaux?
2) A partir d'une paire de carrés latins orthogonaux peut-on toujours passer à un carré magique?

La première question nous ramène à un célèbre problème de l'histoire des mathématiques. Catherine de Russie posa à Euler le problème suivant, dit des 36 officiers:

«Comment disposer en carré 36 officiers de 6 grades différents et provenant de 6 régiments différents de manière que tous les rangs et toutes les colonnes comprennent un officier de chaque grade et de chaque régiment?»

Euler conjectura en 1782, un an avant sa mort, que le problème est impossible et non seulement pour un carré de côté $n = 6$, mais pour tout multiple de 6 augmenté de 4, c'est-à-dire pour tous les nombres naturels de la forme $n = 6k + 4$. En 1901, G. Tarry démontra, en effet, que le problème des 36 officiers n'admet pas de solution; il n'existe donc aucune paire de carrés latins orthogonaux pour $n = 6$. En revanche vers 1960, Bose, Shrickhande et Parker ont prouvé l'existence d'une paire de carrés latins orthogonaux pour tout $n = 6k + 4$ dès que $k \geqslant 1$.
Pour répondre à la seconde question, examinons à nouveau une disposition en carré des seize figures d'un jeu de cartes:

Rt	Dp	Vk	Ac
Vp	At	Rc	Dk
Ak	Vc	Dt	Rp
Dc	Rk	Ap	Vt

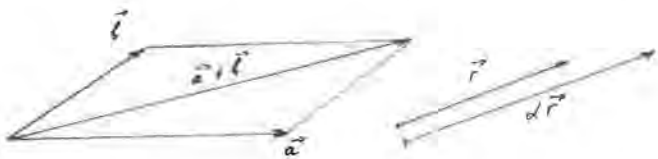
Il s'agit bien de deux carrés latins orthogonaux. Mais chacune des deux diagonales est occupée par quatre cartes de même couleur. On ne pourra donc pas passer à un carré magique, car il faudrait poser

$$f(t) = f(c)$$

La réponse négative à nos deux questions montre bien que le procédé décrit, si intéressant soit-il, ne permet pas de construire tous les carrés magiques.

Troisième approche

Abordons enfin une troisième approche des carrés magiques au moyen de la notion d'espace vectoriel. Les vecteurs du plan ou de l'espace forment un modèle bien connu d'espace vectoriel: on peut additionner deux vecteurs selon la «règle du parallélogramme» et cette addition a les propriétés d'un groupe abélien; on peut en outre multiplier un vecteur par un nombre et cette opération externe – action d'un nombre sur un vecteur – jouit de propriétés naturelles que nous ne rappelons pas ici.



On peut effectuer de même une addition sur les carrés magiques et une multiplication par un nombre en adoptant les règles du calcul matriciel. Pour les carrés magiques d'ordre 3, on aura par exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 \\ 16 & 10 & 4 \\ 8 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 45 & 20 \\ 35 & 25 & 15 \\ 30 & 5 & 40 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les carrés magiques obtenus ne sont plus formés des nombres naturels de 1 à n^2. On verra, en se reportant à la définition d'un carré magique donnée au début de cet article, que cette condition restrictive n'y figurait pas.
On a maintenant à disposition un réservoir très vaste de carrés magiques dont certains sont triviaux comme le carré magique nul ou le carré magique unité:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Toujours pour $n = 3$, on peut se poser la question de l'indépendance linéaire des carrés magiques. On démontrera plus loin que l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre 3 est de dimension 3. En d'autres termes, trois carrés magiques bien choisis (linéairement indépendants) permettent de reconstruire tous les autres carrés magiques par combinaisons linéaires. Par exemple, les trois carrés magiques suivants forment une base de l'espace vectoriel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que dans cette bases, on peut exprimer le carré magique M

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

par la combinaison linéaire $\quad M = -8 \cdot A - 4 \cdot B + 5 \cdot C$

D'une manière générale, on peut démontrer que l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre n a la dimension $d = n(n-2)$. La démonstration que nous allons donner comprend une remarque préalable, l'étude du cas $n = 3$, l'étude du cas $n = 4$ et enfin le cas général pour $n \geqslant 5$.

a) *Remarque préalable.*

La construction d'un carré magique d'ordre n fait intervenir 2n + 2 relations:

les n sommes des lignes : $b_1, b_2, ..., b_n$
les n sommes des colonnes: $c_1, c_2, ..., c_n$
les 2 sommes des diagonales: d_1 et d_2.

Parmi les 2n relations b_i et c_j, l'une quelconque est conséquence des 2n – 1 autres. Nous démontrons cette propriété pour b_n. Supposons que la somme des termes soit **s** dans les n – 1 premières lignes et dans les n colonnes du carré; soit **s'** la somme des termes de la dernière ligne. Additionnons de deux manières l'ensemble des termes du carré. En procédant par lignes, on obtient **s** dans les n – 1 premières lignes et **s'** dans la dernière ligne:

$$\text{(b)} \quad \mathbf{S} = (n-1)\,\mathbf{s} + \mathbf{s'} = n\mathbf{s} - \mathbf{s} + \mathbf{s'}$$

En procédant par colonnes, on obtient **s** dans les n colonnes:

$$\text{(c)} \quad \mathbf{S} = n\mathbf{s}$$

En comparant (b) et (c), on en déduit **s'** = **s**, ce qu'il fallait démontrer.

En revanche, les relations (d_1) et (d_2) sont indépendantes des autres relations. En conséquence, pour la construction des carrés magiques d'ordre n, on tiendra compte de toutes les relations ci-dessus, sauf de la relation b_n qui sera satisfaite automatiquement.

b) *Cas n = 3.*

Dans le carré magique d'ordre 3

$$\begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

supposons donnés les nombres, a, b, c qui déterminent la somme
s = $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. On calcule alors d, e, f, g, h, i au moyen des 6 relations suivantes:

$$\begin{array}{lrcl}
(b_2) & d + e + f & = & \mathbf{s} \\
(c_1) & d + g & = & \mathbf{s} - \underline{a} \\
(c_2) & e + h & = & \mathbf{s} - \underline{b} \\
(c_3) & f + i & = & \mathbf{s} - \underline{c} \\
(d_1) & e + i & = & \mathbf{s} - \underline{a} \\
(d_2) & e + g & = & \mathbf{s} - \underline{c}
\end{array}$$

La solution du système est la suivante:

$$
\begin{aligned}
d &= -\frac{2}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b + \frac{4}{3}\,c \\
e &= \frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b + \frac{2}{3}\,c \\
f &= \frac{4}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b - \frac{2}{3}\,c \\
g &= \frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b - \frac{1}{3}\,c \\
h &= \frac{2}{3}\,a - \frac{1}{3}\,b + \frac{2}{3}\,c \\
i &= \frac{1}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b + \frac{2}{3}\,c
\end{aligned}
$$

En choisissant, par exemple, comme base les carrés magiques A, B, C dans lesquels on pose:

pour A , $a = 1 \quad b = 0 \quad c = 0$
pour B , $a = 0 \quad b = 1 \quad c = 0$
pour C , $a = 0 \quad b = 0 \quad c = 1$

on aura:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\qquad
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
$$

c) *Cas $n = 4$.*
Soit à construire un carré magique d'ordre 4

$$
\begin{matrix}
\underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \\
\underline{e} & \underline{f} & \underline{g} & h \\
\underline{i} & j & k & l \\
m & n & p & q
\end{matrix}
$$

On choisit arbitrairement les 8 éléments soulignés. Sachant que $s = a + b + c + d$, on détermine successivement h, m, puis j (par la relation d_2) et n (relation c_2). Il reste alors à calculer k, l, p, q au moyen des 4 relations:

$$
\begin{aligned}
&(b_3) \quad k + l = s - i - j \\
&(c_3) \quad k + p = s - c - g \\
&(c_4) \quad l + q = s - d - h \\
&(d_1) \quad k + q = s - a - f
\end{aligned}
$$

Ainsi tout carré magique d'ordre 4 est déterminé au moyen de huit carrés magiques linéairement indépendants construits par un choix approprié de a, b, c, d, e, f, g, i.

d) *Cas n ⩾ 5.*
C'est le cas le plus simple à traiter. Dans le carré à construire nous désignons par des croix les éléments choisis arbitrairement et par des ronds les éléments imposés par la somme s:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & X & X & X & X & X & X \\
X & X & X & X & X & X & 0 \\
X & X & X & X & X & X & 0 \\
X & X & X & X & X & X & 0 \\
X & X & X & X & X & X & 0 \\
X & 0 & & & & 0 & X \\
0 & 0 & & & & 0 & 0
\end{array}$$

On choisit arbitrairement les n éléments de la première ligne, ce qui détermine la somme s. Dans les n–3 lignes suivantes, on choisit arbitrairement les n–1 premiers termes, le dernier étant calculé par différence à s. Dans l'avant-dernière ligne, on choisit arbitrairement le premier et le dernier élément, puis on complète la première colonne, la dernière colonne et les deux diagonales. Enfin, on complète la deuxième et l'avant-dernière colonne. Il reste alors à remplir un rectangle de n–4 cases de long et de 2 cases de haut. On peut donc choisir arbitrairement n–5 nombres dans l'avant-dernière ligne, puis compléter cette ligne et chacune des colonnes restantes. Le nombre des éléments arbitrairement choisis est donc:

$$\begin{aligned} d &= n + (n-3)\ (n-1) + 2 + (n-5) = \\ &\quad n + n^2 - 3n - n + 3 + 2 + n - 5 = n^2 - 2n = n(n-2) \end{aligned}$$

En conclusion, la dimension de l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre n est bien $d = n\ (n-2)$ dès que $n \geqslant 3$. Pour $n = 2$, tous les carrés magiques sont triviaux et de la forme

$$\begin{array}{cc} a & a \\ a & a \end{array}$$

c'est-à-dire que cet espace vectoriel est de dimension 1 avec comme base particulière le carré magique unité

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ce qui précède montre bien toute l'ouverture que permet la notion d'espace vectoriel appliquée aux carrés magiques. Bien d'autres propriétés d'algèbre linéaire s'appliquent à la théorie des carrés magiques. Nous n'en citerons que deux en conclusion de cet article:

Dans l'ensemble des carrés magiques d'ordre n

1) Les carrés magiques à somme nulle forment un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-2)-1$;
2) l'ensemble des carrés magiques de somme s s'obtient en additionnant un carré magique quelconque de somme nulle et un carré magique particulier de somme s.

Une idée du Québec:

La calculatrice qui parle

Extrait d'un article de L. Grenier paru dans «Instantanés mathématiques», mai 1982

Savais-tu que ta calculatrice pouvait parler? Enfin presque. Fais les opérations indiquées et elle te dira ce que tu veux savoir.

1. Ce que te fera un coup de bâton sur la tête (5918 × 2 × 3).
2. Où poussent les champignons? (1277 × 2 × 2).
3. Ce qu'on fait avec des pommes pour tartiner le pain (5681 + 28 058).
4. Ce qu'il faut pour faire mûrir des tomates (142 741 × 5).

Activité A

D'après un messages que vient de te donner ta calculatrice, as-tu découvert son code?
Quelles sont les neuf (9) lettres de l'alphabet qu'elle peut utiliser?
Trouve le chiffre qui correspond à chaque lettre de l'alphabet que ta calculatrice peut utiliser.

Activité B

Si tu donnes une opération qui égalera 708 à ta calculatrice, elle écrira »bol». Tu as donc plusieurs possibilités de lui faire dire «bol».
Il y a 354 × 2 ou 1000 – 292 ou encore 394 + 314.
Trouve une autre façon de lui faire dire «bol».

Quelles opérations peux-tu donner à ta calculatrice pour qu'elle écrive les mots suivants:

billes:	gelez:	Lise:	soi:
Eloi:	Gisèle:	osez:	sole:
Esso:	glissez:	selle:	solo:
gel:	illisible:	silo:	zoologie:

Activité C

Essayer de découvrir d'autres mots que ta calculatrice peut afficher. Trouve les opérations qui te permettraient d'écrire ces mots avec ta calculatrice.

Congrès de la CIEAEM – Août 1982

par Raymond Hutin

La CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) a tenu son congrès annuel au début d'août à Orléans. Plus de deux cents participants de tous pays ont consacré une semaine à débattre des nombreux problèmes posés par les moyens d'enseignement.

Il est difficile de saisir une tendance générale dans une assemblée aussi vaste où de nombreux groupes de travail fonctionnent en parallèle. Les sujets sont très variés allant, par exemple, de l'utilisation d'une machine pour découper des polyèdres en polyester à la présentation de situations «concrètes» dans le cadre de la formation mathématique des futurs biologistes, en passant par les multiples utilisations des mini-ordinateurs.

Sans conteste, l'ordinateur est à la mode (c'est certainement davantage qu'une mode passagère) mais les opinions divergent. Pour les uns, l'ordinateur rendra inutile l'enseignement de nombreuses notions qui figurent actuellement dans les plans d'études tandis que pour d'autres, il s'agit de préserver l'enseignement d'une invasion technologique excessive.

Autre signe d'évolution, la manipulation d'objets en papier, en carton, de ressorts, de poulies, etc. se fait plus fréquente et surtout déborde de l'enseignement élémentaire pour atteindre le niveau secondaire. Les tentatives de développer chez les élèves de 12 à 16 ans, une réelle attitude expérimentale et d'allier mathématique et technique sont nombreuses.

Les conférences générales laissent une impression mitigée. Ainsi, le débat sur le rôle des moyens audio-visuels dans l'enseignement est resté relativement stérile, seul l'emploi du rétro-projecteur ayant fait l'objet d'une véritable discussion. Il faut ici souligner plusieurs interventions proposant que le rétro-projecteur soit utilisé par les élèves et non seulement pour les démonstrations du professeur.

Si les idées générales ne manquent pas, la plupart des problèmes débattus ne paraissent pas nouveaux et les solutions proposées restent vagues. On peut s'étonner, par exemple, que l'idée de tester systématiquement de nouveaux manuels auprès des élèves soit encore présentée comme un vœu et non comme une chose allant de soi.

Le débat consacré à la culture mathématique met en évidence un hiatus entre les connaissances mathématiques scolaires d'une part et une véritable culture mathématique d'autre part. Mais la définition même d'une culture mathématique pour tous reste encore à inventer.

A noter, dans cette dernière perspective, la présentation d'une exposition très intéressante mise sur pied par l'IREM d'Orléans. Cette exposition itinérante, destinée au grand public a été ouverte dans les maisons de la culture de plusieurs villes. Elle cherche à montrer de façon attractive quelques aspects de la mathématique: solides platoniciens, jeux de couleurs, probabilités, ruban de machines, Tan gram, problèmes topologiques, fractales, etc. A chaque étape, le visiteur est invité à agir, à jouer avec des objets, à manipuler, à faire des essais, à réfléchir.

En voici un exemple:

$\sqrt{2}$ vous connaissez?
et π quoi encore!

Choisissez un nombre positif
Appuyez dix fois sur la séquence de touches

$\boxed{+}\quad\boxed{1}\quad\boxed{=}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{+}\quad\boxed{1}\quad\boxed{=}$

Observez à chaque fois le début du nombre qui s'affiche.
Que trouvez-vous?
Le résultat est dans le titre?
Oui... où plutôt la machine affiche un résultat approché de ce nombre.

Solution positive de l'équation

$$x = 1 + \frac{1}{x+1}$$

qui correspond à la séquence de touches.

Les curieux diront qu'écrire $x = 1 + \frac{1}{x+1}$
c'est écrire autrement $x = \frac{2}{x}$
et que l'on aurait pu le faire avec la séquence

$\boxed{1/x}\quad\boxed{x}\quad\boxed{2}\quad\boxed{=}$

Essayez.
Et π? Comme $\sqrt{2}$, c'est un irrationnel.
Il n'est pas algébrique mais transcendant car il peut être solution d'une équation formée de polynomes à coefficients entiers et de quotients de polynomes.
Choisissez un nombre entre 2 et 4 puis répétez la séquence de touches

$\boxed{\text{STO}}\quad\boxed{\div}\quad\boxed{2}\quad\boxed{=}\quad\boxed{\text{SIN}}\quad\boxed{x}\quad\boxed{\text{RCL}}\quad\boxed{=}$

Arrêtez-vous quand vous êtes satisfait.
Est-ce π?

Quelques livres

Avez-vous lu *«Les étoiles de Compostelle»* le dernier ouvrage d'Henri Vincenot, un des best-seller de l'été? Non. Alors vous devez le faire. Vous le lirez une première fois pour le plaisir de découvrir ou de redécouvrir l'itinéraire d'un apprenti charpentier au temps des cathédrales. Puis vous le relirez pour alimenter vos leçons sur le Moyen Age, pour y choisir des textes à l'intention de vos élèves, mais surtout pour y trouver matière à quelques merveilleuses leçons de géométrie élémentaire. Savez-vous, comme nos ancêtres qui n'allaient pas à l'école, faire un triangle rectangle avec la corde à 13 nœuds? Pouvez-vous construire un pentagone avec le compas seulement? Etes-vous capable de trouver, au moyen d'une formule simple, les côtés des cinq corps réguliers par rapport au diamètre d'une sphère? Vous penserez peut-être comme Henri Vincenot que l'avènement de l'école obligatoire nous a fait perdre quelques richesses issues de la nuit des temps.

Accrochés comme moi par ce premier ouvrage, vous ne manquerez pas de lire ensuite une réédition de l'ouvrage de D. Neroman intitulé *«Le nombre d'or, clé du monde vivant»*. Partant des relations entre musique et nombre d'or, l'ouvrage aborde la série de Fibonnaci, la géométrie qui a présidé à la construction des pyramides égyptiennes, la représentation du corps humain, la croissance des plantes. Une lecture approfondie de cet ouvrage vous demandera un certain effort.

Pour vous reposer, vous parcourrez rapidement le petit opuscule de M. H. Gobert *«Les nombres sacrés et l'origine des religions»* où vous découvrirez entre mille autre choses que suivant l'évangile de Jean, les disciples prirent lors de la Pêche miraculeuse 153 poissons qui, pour les Hébreux (comme pour nous d'ailleurs) signifiait la somme de 17 premiers nombres.

Moins ésotérique et plus sérieux, *«Routes et dédales»* de A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer présente une histoire des mathématiques d'excellente qualité. Vous y trouverez Thalès, Pythagore et Euclide, le rôle éminent des Arabes, les Italiens de la Renaissance, Copernic et Kepler, Gauss, Hamilton, Cauchy, Galois... De quoi passer bien des soirées passionnantes.

Sous le titre *«Penser les mathématiques»* sont regroupées quelques-unes des conférences du Séminaire de philosophie et mathématique de l'école normale supérieure de Paris. Mathématiciens, logiciens, philosophes et linguistes s'interrogent sur les rapports entre les mathématiques, le langage et la réalité. Cet ouvrage très dense demande un certain effort de lecture mais il ne requiert pas de connaissances mathématiques très poussées.

Enfin si vous songez à un investissement plus important, nous vous signalons la parution d'un ouvrage de premier ordre, la *«Petite encyclopédie des mathématiques»*. Publiée originellement en Allemagne (Kleine Enzyklopädie der Mathematik), traduit en anglais (Mathematics at a glance) en 1975, elle est aujourd'hui disponible en français et devrait figurer dans la bibliothèque de chaque enseignant.

Et si vous préférez l'histoire des hommes à celle des mathématiques vous découvrirez dans *«Le médecin de Cordoue»* d'H. Le Porrier l'histoire de Moïse

Maimonide, médecin juif né en 1135, qui vous fera rencontrer un arabe célèbre, Ibn Rosch, que les mathématiciens et les philosophes connaissent sous le nom d'Averroes.

Vincenot H.	Les étoiles de Compostelle. Ed. Denoel.
Neroman -D.	Le nombre d'or. Ed. Dervy-Livres.
Gobert M. H.	Les nombres sacrés et l'origine des religions. Ed. Stock+Plus.
Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J.	Routes et dédales. Ed. Etudes Vivantes.
Apery R. et A.	Penser les mathématiques. Ed. Seuil. Coll. Points.
Petite encyclopédie des mathématiques. Ed. K. Pagoulatos (environ 95 FS).	
Le Porrier H.	Le médecin de Cordoue. Ed. Seuil, Coll. Points.

Bonne feuille...

– Prends trois fois trois fois trois, c'est-à-dire neuf fois trois. Additionne ou multiplie, ça donne toujours vingt-sept. Or, deux plus sept font neuf.

J'ouvrais de grands yeux étonnés et il riait d'un air fin:
– Et ce n'est pas tout! continuait-il. Si tu multiplies neuf par lui-même, ça donne quatre-vingt-un. Or, huit et un font neuf!

Je bâillais bleu.
– Récite-moi la table des neuf! ordonnait-il enfin.

J'ânonnais, en chantonnant comme il se doit:
– Neuf fois deux: dix-huit.
– Huit et un: neuf!
– Neuf fois trois: vingt-sept.
– Sept et deux: neuf!
– Neuf fois quatre: trente-six.
– Six et trois: neuf!
– Neuf fois cinq: quarante-cinq.
– Cinq et quatre: neuf!

... Et ainsi de suite. Toute la table des «neuf» y passait et le total des chiffres du résultat donnait toujours neuf, que le vieux clamait de plus en plus fort. Et il continuait, pour lui seul:
– ... Neuf fois onze: quatre-vingt-dix-neuf, or neuf et neuf, dix-huit: huit et un: neuf!...

Et il grimpait comme cela jusqu'à neuf fois trente-six: trois cent vingt-quatre. Or trois plus deux plus quatre: neuf! J'avais le vertige des neuf. J'étais au comble de l'émerveillement alors que le grand-père concluait, avec un sens du raccourci qui m'échappait forcément:
– Voilà pourquoi ta cousine Honorine est guérie!
Et effectivement la cousine Honorine, dont le seul nom mettait la chamade dans mon cœur, avait fait une neuvaine et elle était guérie!

Henri Vincenot
«La billebaude»
Folio 1978 p. 75

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud, R. Délez, Ch. Félix, M. Ferrario, F. Jaquet, F. Oberson.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina & Burgener, 1950 Sion