

MATH ECOLE

NOVEMBRE 1982
21^e ANNÉE

Editorial

Analyse... sans synthèse ?

En voulant suivre un «ordre pédagogique» allant du simple au compliqué on insiste sur de tout petits problèmes, sur des «questions à un pas». L'évaluation privilégie les items courts, plus faciles à juger et permettant de mieux cerner l'effet des variables qu'on veut isoler. En formulant des objectifs pédagogiques, on les fait d'autant plus petits qu'on désire mieux les contrôler. Et, bien sûr, c'est une méthode de travail utile que d'isoler et de fragmenter les difficultés.

Il n'en reste pas moins que toutes ces démarches, parfaitement légitimes en elles-mêmes, concourent à accentuer l'aspect analytique des activités mathématiques. On décortique, on isole et on examine les détails, on restreint son champ de vision.

De nombreux indices montrent qu'il faut plus souvent prendre en considération les multiples aspects d'une même question, que la spécialisation trop poussée a des inconvénients, qu'à côté de l'analyse, on a aussi besoin de synthèse.

On dit parfois que les mathématiques sont un outil d'analyse. Bien sûr, mais ne sont-elles que cela ?

Je crois qu'il vaudrait mieux ne pas se laisser glisser vers l'analyse seulement. Ne pas se restreindre à résoudre de petits problèmes, mais aborder aussi des situations plus complètes, à étudier globalement. Favoriser les synthèses, les vues d'ensemble. Pour cela, il convient par exemple de donner toute son importance à la confection de bons schémas, car un schéma peut servir à donner une vue synoptique.

L'apprentissage de la synthèse commence bien plus tôt qu'on ne l'imagine.

Th. Bernet

Appréhender l'espace par le mouvement entre 5 et 7 ans

par Edda Gasser

«Nous ne pouvons acquérir des idées, des sentiments, des techniques que si nous les vivons.»

(John Dewey)

«Nos apprentissages dépendront donc essentiellement de ce que nous avons réellement vécu et de la façon dont nous l'avons vécu. En conséquence, c'est par sa pratique personnelle, par sa propre exploration que l'enfant maîtrise et comprend une situation nouvelle et non pas par référence à l'expérience du maître. Les explications, les démonstrations n'aident donc pas l'enfant, mais au contraire le gênent et limitent sa propre expérience.»

(L'Education par le mouvement, Dr Jean Le Boulch).

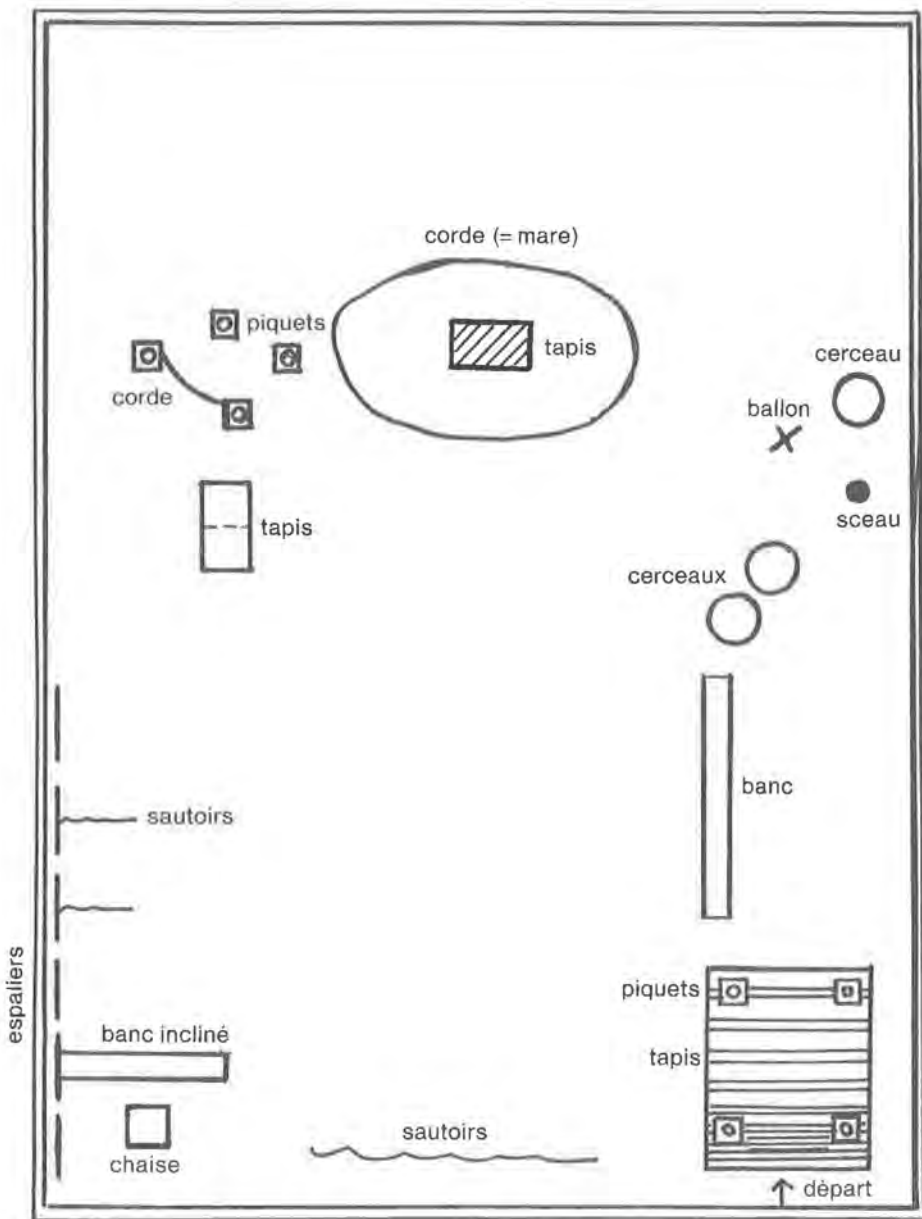
Nous avons souvent constaté combien il est difficile, sur le plan de l'espace, de faire sentir aux enfants de 5 à 6 ans les notions notamment de haut, de bas, d'avant, d'arrière, d'entre, d'au milieu, sans parler de droite et de gauche.

Est-ce parce que, dans la plupart des cas, l'enseignante passe beaucoup trop rapidement à la représentation de ces notions par le dessin, donc sans permettre la phase de conceptualisation, même si la précaution est prise de les laisser découvrir ou exercer, au préalable, en faisant agir les élèves sur des objets ?

Ne faut-il pas plutôt, en tout premier lieu, permettre à l'enfant de créer ses propres représentations mentales en projetant dans l'espace les dites notions à partir de l'orientation de son corps propre, donc par une pédagogie du mouvement ?

Cet échange de réflexions nous a conduites à tenter une expérience dans une classe dont la titulaire est sensible à la nécessité de faire vivre à ses élèves toutes les notions relatives au domaine de l'espace par des jeux de déplacements en salle.

Dans un premier temps, la maîtresse prépare une sorte de parcours Vita. Les enfants l'effectuent librement, selon leurs propres inspirations, puis arrivent finalement à un accord commun pour un itinéraire unique, par exemple selon le schéma suivant:



Visiblement les élèves éprouvent du plaisir à effectuer ces trajets. Mais est-ce suffisant pour leur permettre d'intérioriser les notions jouées? Un commentaire

verbal émanant de leur part pour souligner leurs interventions les sensibiliserait-il davantage?

Ayant pris conscience, en cours d'observation, des difficultés rencontrées par des enfants de cet âge pour commenter à l'intention de leurs camarades ce qu'ils sont en train de réaliser en déplacement, nous avons pensé utile de faire désigner un speaker par les élèves.

Fabienne se propose et décrit le parcours effectué par Gilberto, comme suit:

- «Il frappe 3 coups avec les bambous et se met en route.
- Il regarde à *gauche*, puis à *droite* avant de traverser le passage de sécurité.
- Il se glisse *sous* le banc puis il passe *sur* le banc.
- Il passe à *travers* les cerceaux.
- Il prend le ballon et le lance *contre* le mur; il le remet *dans* le seau.
- Il saute à *l'intérieur* de la mare.
- Il saute à *l'extérieur* de la mare.
- Il court *autour* de la mare.
- Il passe *entre* les piquets.
- Il passe *par dessous* la corde.
- Il fait la culbute *sur* le tapis.
- Il monte tout *en haut* de l'espalier au sautoir rouge.
- Il passe *sur* l'espalier au sautoir bleu, s'arrête *au milieu*, s'assied *sur* le banc et se laisse glisser tout *en bas*.
- Il passe *derrière* la chaise.
- Il marche *le long* du chemin vert et retourne à sa place.»

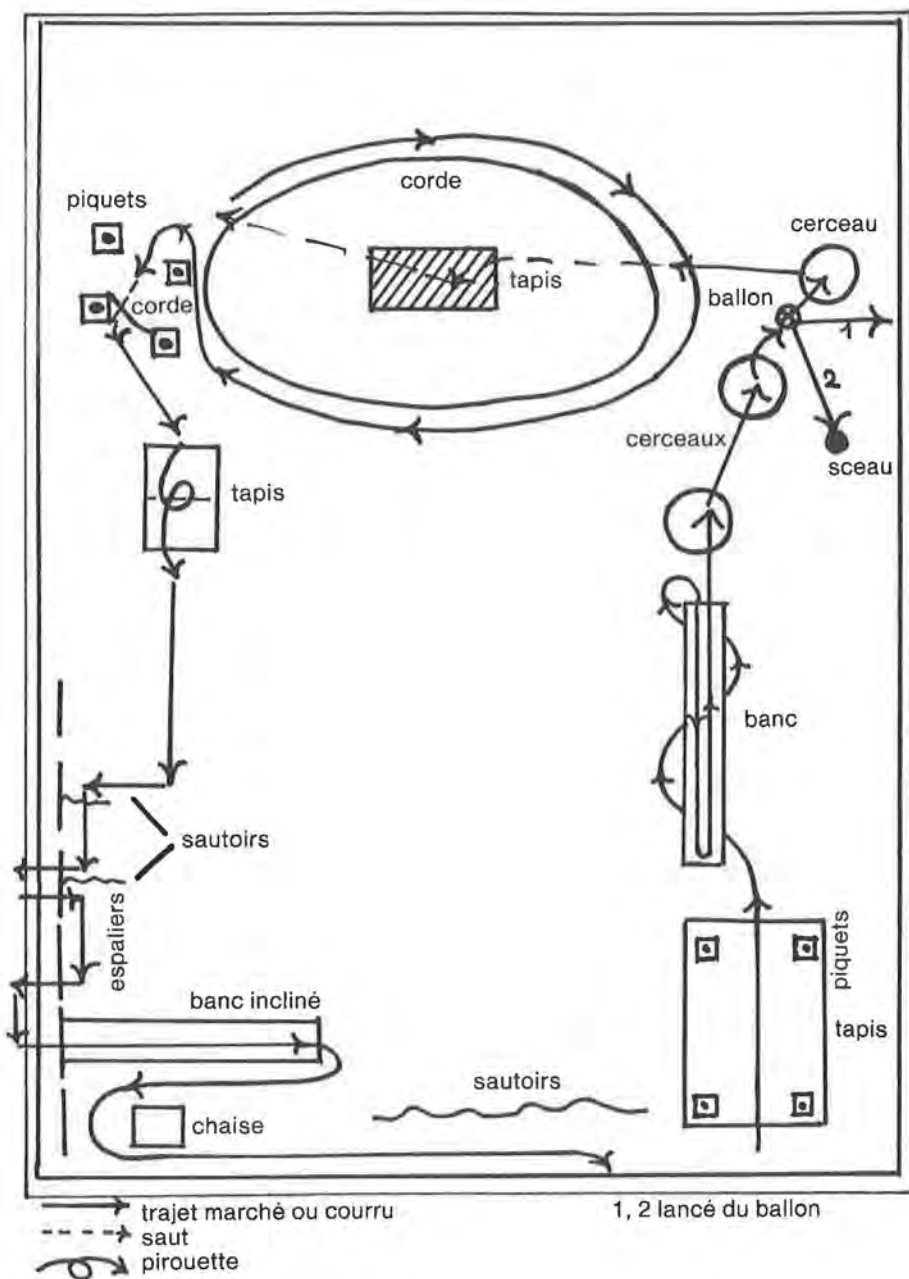
Dans un second temps, Alexandre estimant avoir bien mémorisé le parcours, décide d'être à la fois l'exécutant et le speaker. Cependant, en cours de trajet, devant penser d'une part à ne rien oublier dans son intervention et, d'autre part, à relater toutes ses actions, il commettra quelques erreurs uniquement sur le plan verbal. Il a dit, par exemple:

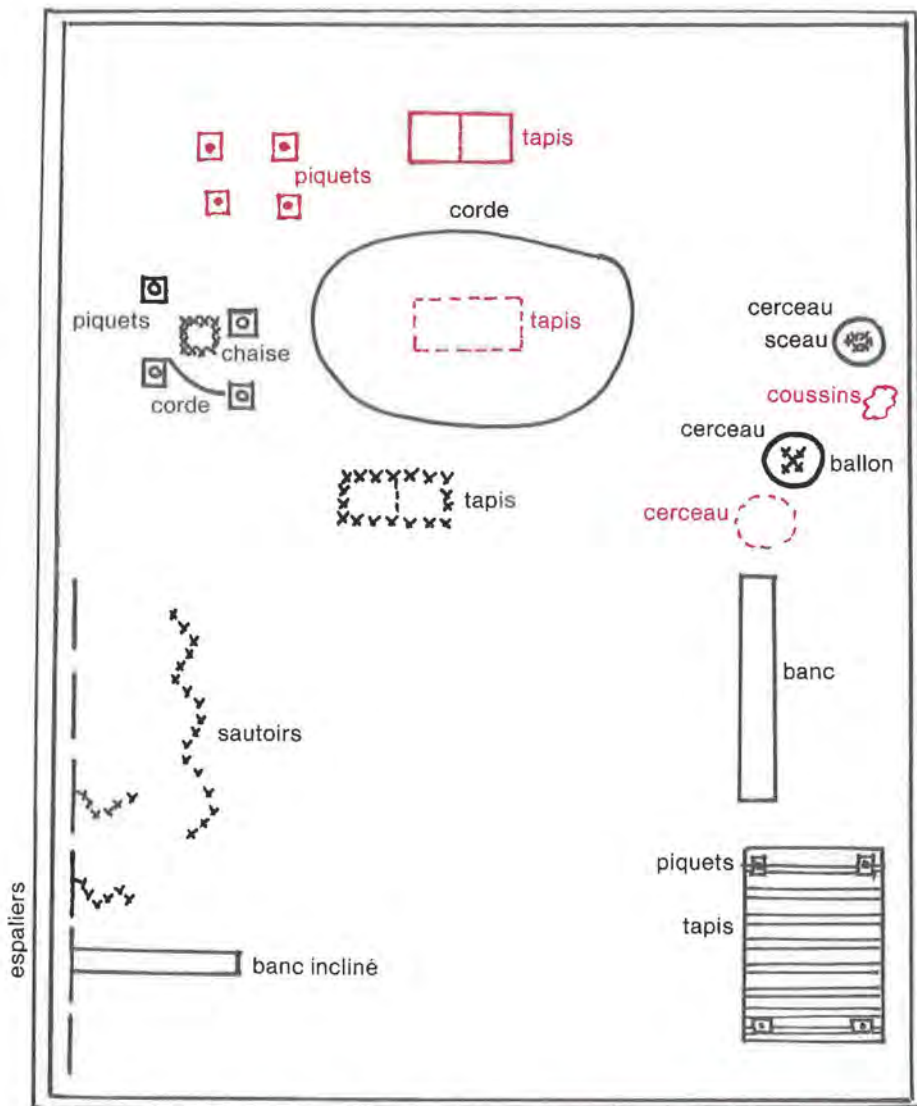
- «Je mets le ballon à l'extérieur du seau», alors qu'il le place dedans, puis «Je saute dans la mare» alors qu'il a sauté en dehors (voir p. 5).

Ultérieurement, comme nous demandons aux élèves si un enfant peut renoncer au parcours effectué et en inventer un nouveau, Christina, sans hésitation, intervient. Elle exécutera en fait le même trajet mais en sens contraire.

Par la suite, Doris manifeste l'intention de créer autre chose, mais l'itinéraire restera le même, elle se contentera de déplacer ou d'ajouter un bon nombre d'accessoires, compliquant ainsi le parcours (voir p. 6).

Un mois plus tard, sur notre demande, alors que les élèves avaient déjà effectué plusieurs trajets différents, des enfants de cette classe furent à même de représenter à notre intention, au moyen d'un dessin, le plan de la salle de jeu et l'itinéraire qu'ils avaient préféré.





— éléments restants

— éléments nouveaux

- - - éléments supprimés

x x x x x éléments déplacés

Cette démarche nous a paru intéressante non seulement en relation avec les notions abordées en action dans le domaine de l'espace, mais également parce que ces interventions, vécues comme des expériences individuelles au sein d'un groupe, favorisent la décentralisation de l'enfant.

D'autre part, elle a son importance sur le plan de la socialisation car, comme le précise J. Le Boulch :

«L'élève qui agit devant ses camarades se sent impliqué en tant que personne, ce qui introduit une dimension affective dans la relation de l'individu au groupe, d'autant plus forte que la spontanéité de l'être est sollicitée par l'attitude non directive de l'éducateur».

ENIGME

Partagez chacune de ces grilles en cinq morceaux de cinq cases de telle manière que :

- dans chaque morceau, tous les nombres soient différents;
- la somme des nombres de chaque morceau soit toujours la même.

3	2	1	8	9
2	3	1	8	9
9	1	7	2	5
5	6	4	4	3
7	6	5	2	3

5	4	7	8	9
5	6	6	8	7
7	4	9	3	11
11	10	2	6	4
11	10	3	4	5

A propos du «compendium»

par Marcelle Goerg

Cherchez-le!



... il se trouve
quelque part
dans votre école.*

*La DEP genevoise a doté chaque école de la division moyenne d'un matériel expérimental sur la «Mesure».

Pour ma part, je suis entrée dans une classe de 3P avec ce matériel



et quelques pommes, oranges, bananes, noisettes, noix, une boîte transparente de jetons et des œufs au maniement délicat.

- La banane est plus lourde que l'orange parce que plus longue.
- L'orange a des pépins, la pomme aussi, elles pèsent la même chose; ah non! l'orange a plus de jus que la pomme, elle pèse plus.
- Oui, mais il y a de grosses oranges et de petites pommes.
- Combien faut-il d'oranges pour un kilo de fruits? Faut-il autant de pommes que d'oranges?
- Est-ce qu'un œuf dur pèse plus qu'un œuf frais?
- Pourquoi avez-vous apporté une boîte de jetons?
- Les noix, c'est très léger. (Nous sommes en mars et en effet les noix semblent très légères).



Puis les mots cent grammes, deux grammes, un kilogramme apparaissent dans la discussion et l'on s'aperçoit que la relation objet-poids est bien difficile.

- *Moi, je te dis qu'une banane, ça pèse au moins une livre; une livre! qu'est-ce que c'est?*
- *C'est lourd.*

On essaie, on va de surprise en surprise.



- *Tiens! C'est moins lourd que je ne pensais.*
- Deux fruits qui ont la même forme ne pèsent pas la même chose. Deux fruits différents pèsent presque la même chose.

On s'étonne, on relève la valeur des vrais poids posés sur la balance, on compare avec son intuition, on s'attendrit sur ces tout petits poids de 1 g, 2 g, 3 g, on expérimente...

Parfois, la main crispée sur une pomme, certains articulent un poids sans hésitation, le notent au tableau, estimant inutile d'utiliser la balance. Mais, l'écart est souvent grand entre l'impression qu'on a d'une chose et la réalité.

- *J'ai toujours dit que les oranges pèsent deux cents grammes, assure Jérémie.*
- *Combien faut-il d'oranges pour avoir un kilo?*
- *Il faut essayer.*

Après de nombreuses manipulations, six oranges équilibrent la masse d'un kilo sur les plateaux. Ouf, on ne pensait jamais y arriver.

Alors, est-ce que toutes les oranges pèsent vraiment 200 g?

On les évalue; celle-ci est plus petite, elle doit peser moins que celle-là, plus grosse. C'est facile de s'en assurer, on place, une des oranges sur le plateau et l'autre sur le deuxième plateau.

Surprise! La plus grosse orange, à l'écorce épaisse, est plus légère...

Comment est-ce possible? Est-ce à cause des plateaux? On change les oranges de place, même réponse de la balance: la plus grosse est plus légère.

- *On ne l'aurait pas dit!*
- *Moi, je veux savoir son poids!*

Les ongles impatients des enfants pénètrent dans les fruits, un doux parfum d'orange enveloppe le groupe.

- *Si on pèse chaque orange l'une après l'autre – il y en a 6 – est-ce qu'on trouvera un kilo?*

- *Non*, affirme Jérémie, toujours convaincu qu'elles pèsent toutes 200 g, ça fait beaucoup plus qu'un kilo.
- *Oui*, parce qu'un kilo, c'est 1000 g.
(On aimerait bien avoir les mille petits grammes, juste pour vérifier).
 $500 + 500$ ça fait 1000.
 $200 + 200 + 200 + 200 + 200$ ça fait aussi 1000.
- Souvenez-vous, pour un kilo, il y avait 6 oranges...
- *Il faut les peser les unes après les autres et additionner.*
- *Inutile, puisqu'on sait qu'elles font un kilo.*
- Silence...
- Qu'est-ce qu'on peut faire d'autre?
- Est-ce que j'obtiens le même poids d'un kilo si j'utilise d'autres poids, tels que 100 100 50 20 500 200 20 10?
- *Ce n'est pas intéressant, moi j'aimerais mieux savoir combien pèsent 6 œufs.*
- *Mais, on n'en a pas six, on ne pourra jamais connaître le poids exact!*
- *C'est ennuyeux!*

Approximatif, exact, que peuvent bien signifier ces mots, quelle est leur importance?

- *Pourquoi avez-vous apporté une boîte de jetons?*
(J'attendais cette question).
- Que pourrais-je dire de cette boîte?
- *Elle est pleine de jetons bruns.*
- *Il y en a beaucoup.*
- Pourriez-vous, à l'aide de la balance, me dire combien il y a de jetons dans cette boîte?

La question laisse songeurs les enfants, ils soupèsent la boîte; l'idée qu'un jeton ou dix jetons pourraient avoir un poids, comme l'orange, ne semble pas pour l'instant s'imposer à eux.

Le problème se résoudra ces prochains jours, car la balance restera à portée des enfants dans la classe et chacun pourra l'approcher, la faire réagir selon ses propres préoccupations.

Quinze jours passent...

Quand je reviens, plus de balance dans la classe.

On a perdu le poids de 1 kg.

On s'est peut-être fait gronder.

Les portes du «compendium» se sont refermées!

C'est bien, cela me permettra de travailler à un autre niveau.

Au tableau, je note:

3g	5g	7g	8g
----	----	----	----

et demande aux enfants:

Quels sont les paquets que je peux peser à l'aide de ces «poids»?

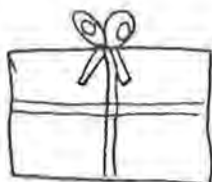
Cherchez-les tous et notez sur votre feuille les poids utilisés!

- *Ce sont de très petits paquets.* (Bonne remarque).
- *Si on les dessine, on n'aura pas besoin de mettre une ficelle.* (Le mot paquet est accrocheur, paquet-cadeau, les paquets représentés sur les feuilles des enfants auront des nœuds).

Marie



5 grammes



7 grammes



10 grammes



Très vite les enfants trouvent le paquet de 23 g. A chaque somme correspond un paquet.

Nicole imagine la balance, elle se réfère à une action précédemment exécutée.

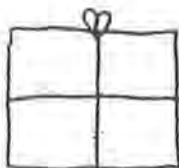
Elle écrit: j'ai mis, c'est-à-dire, j'ai pesé le poids de 8 g et celui de 3 g; je n'ai pas pris celui de 7 g et de 5 g,

(je prends... je ne prends pas!...)

Par le dessin, Nicole tente de lier la grosseur du paquet à son poids.

Nicole

8g	7g	5g	3g
----	----	----	----



8gr et 3 et 5 et 7gr = j'ai mis tous les poids 23gr



8gr et 3 = 11 j'ai mis 8 et 3



8 et 7 = 15 gr



7 et 3 = 10 gr



5 et 8 = 14 gr



5 et 3 = 8gr



7 et 5 = 12



5 et 8 et = 16

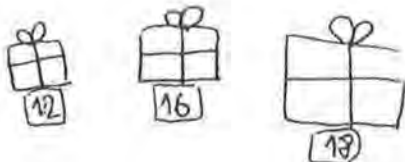
Vanessa a pesé un poids de 46 g, est-ce possible?

Oui, si l'on observe son travail.

Elle constitue les paquets de 12 g, de 16 g, de 18 g et elle en fait la somme.

- C'est impossible, disent les enfants, de cette façon elle utilise plusieurs fois le même poids.

Vanessa
3 P



$$5 + 7 = 12$$

$$8 + 5 + 3 = 16$$

$$8 + 7 + 3 = 18$$

Vanessa n'est pas convaincue, elle trouve beaucoup plus intéressant sa façon de faire, elle est soutenue dans son idée par Frédéric.

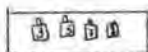
$$12 + 16 = 28$$

$$5 + 3 + 7 + 8 = 23$$



$$12 + 16 + 18 = 46$$

Shira



$$\text{Circled gift} = 23 \text{ g}$$

$$\text{Circled gift} = 20 \text{ g}$$



$$3 + 5 + 7 + 8 = 23$$



$$5 + 7 + 8 = 20$$



$$\text{Circled gift} = 18$$

$$\text{Circled gift} = 10 \text{ g}$$



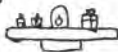
$$7 + 3 = 10$$



$$3 + 7 + 8 = 18$$

$$\text{Circled gift} = 15$$

$$8 + 7 = 15$$



Shira a besoin de dessiner la balance et les poids en position. Son souci n'est pas uniquement de décomposition du nombre, le paquet de 20 g existe.

Garance s'organise pour savoir si elle a trouvé tous les paquets possibles pesés à l'aide de ces 4 poids.

Certains se pèsent de manières différentes.

Garance 3P

1?

2?

30u

4?

50u

6?

70u

80u

9?

100u

110u

120u

130u

14?

150u

160u

17?

180u

Pour Yannis le problème prend une forme différente. Il demande au cours de son travail:

- Est-ce qu'on peut utiliser les «moins» (les signes -).
- Non, disent les camarades.

Peu importe, lui, il les utilise!

$$7\text{ g} + 3\text{ g} - 3\text{ g} = 7\text{ g}$$



Ses camarades ne sont pas d'accord:

- Si tu poses un poids de 3 g et que tu l'enlèves du plateau de la balance, il ne pèse plus.

Pour eux tout se passe du même côté de la balance: d'un côté le paquet, de l'autre les poids.

Protestation quand Yannis annonce qu'il pèse le paquet de 12 g de cette façon

$$8 \text{ g} + 7 \text{ g} - 3 \text{ g} = 12 \text{ g}$$

- Impossible, disent ses camarades. Tu ne peux pas enlever un poids de 3 g si tu ne l'as pas mis avec les autres sur le plateau et si tu as mis la masse de 3 g et que tu l'enlèves, le poids restant est de $8 \text{ g} + 7 \text{ g} = 15 \text{ g}$!

Yannis se laisse-t-il envahir par la notion décomposition – recombinaison des nombres ou a-t-il compris autre chose, a-t-il une autre idée, une bonne idée pour peser ses paquets?

Observez son travail!

$$3 \text{ g} \quad 7 \text{ g} \quad 5 \text{ g} \quad 8 \text{ g}$$

Yannis

Yannis's work shows several calculations using gift icons and weights:

- Initial weights: 8 gr, 7 gr, 5 gr, 3 gr
- Calculations:
 - $5 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 8 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 7 \text{ gr} - 8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 8 \text{ gr}$
 - $7 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 10 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 11 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 13 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 16 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 12 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} + 5 \text{ gr} + 3 \text{ gr} - 8 \text{ gr} = 15 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} - 3 \text{ gr} = 8 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} + 7 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 23 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 7 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 20 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 7 \text{ gr} = 15$
 - $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} + 7 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 23$
 - $7 \text{ gr} + 3 \text{ gr} = 10 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 16 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 2 \text{ gr} + 3 \text{ gr} - 7 \text{ gr} = 6 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} + 5 \text{ gr} + 3 \text{ gr} - 8 \text{ gr} = 15 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} = 12 \text{ gr}$
 - $8 \text{ gr} + 3 \text{ gr} - 3 \text{ gr} = 8 \text{ gr}$
 - $7 \text{ gr} + 3 \text{ gr} + 8 \text{ gr} - 7 \text{ gr} = 11 \text{ gr}$
 - $3 \text{ gr} + 5 \text{ gr} - 3 \text{ gr} = 5 \text{ gr}$
- Final result in a box: $8 \text{ gr} + 5 \text{ gr} - 3 \text{ gr} = 12 \text{ gr}$!

Et regardez celui de Shira!

$$\text{📦} = 1$$

$$8 - 7 = 1$$

$$\text{📦} = 0$$

$$8 - 5 - 3 = 0$$



Existe-t-il des paquets de 0 g? de 1 g?

C'est difficile à imaginer. Si je pose un paquet sur la balance, le fléau bouge. L'égalité est rompue.

Shira a une idée. L'entêtement de Yannis à utiliser les signes moins l'a impressionnée.

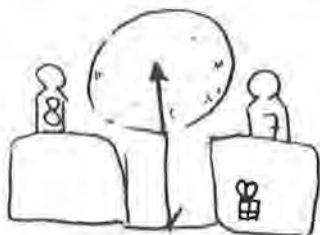
Dès aujourd'hui, il faut remettre la balance dans la classe pour faire progresser le travail et permettre la mise en relation de ce qui se passe sur le plan des nombres et sur celui de l'expérience.

$$8 - 7 = 1$$

Où mettre le poids de 8 g, de 7 g?

Où se trouve le paquet de 1 g?

Voici la réponse de Vanessa.



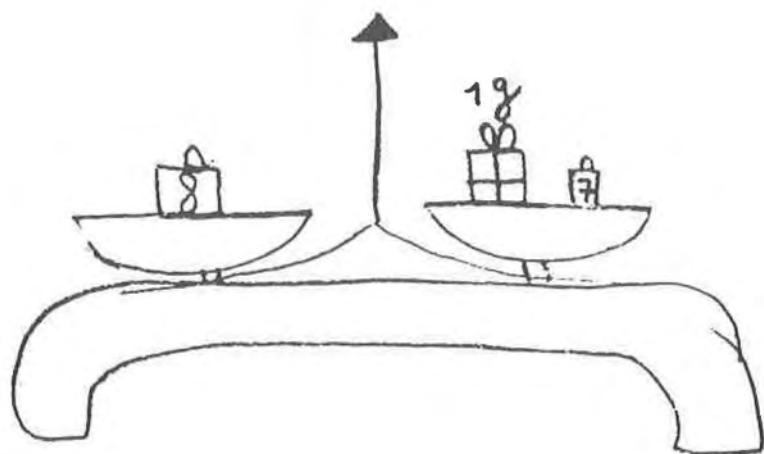
Vanessa

Avant de quitter la classe, je ne peux m'empêcher de leur lancer un dernier défi à relever les jours prochains.

Vous disposez d'une balance juste, de quatre poids de 3g 5g 7g 8g et de 18 pièces de monnaie étrangère qui pèsent de 1 à 18 g. Chacune a un poids différent de toutes les autres.

Une seule de ces pièces ne peut être équilibrée avec ces masses. Laquelle?

Gabrielle 3P (avril)



A propos de statistique robuste

par Pierre Favre

1. Introduction

Ceux qui, parmi nous, ont été confrontés aux histogrammes d'épreuves communes dans leur école, n'ont pas manqué d'être troublés par les allures parfois insolites de ceux-ci. Faute de mieux, nous appliquions à ces résultats les techniques classiques, à base de moyenne et d'écart type. Mais le doute s'installait; quelle interprétation pouvait-on en tirer? La distribution sous-jacente était-elle normale, mais contaminée par des éléments perturbateurs, ou autre que normale, la forme de la distribution ne s'imposant pas du fait d'erreurs grossières? Le théorème limite central apportait une faible consolation, la droite de Henry ondulait un peu et le mathématicien de service était toujours pris entre des obligations pratiques et les exigences théoriques de sa discipline.

Diverses réponses, on le sait, ont été apportées à ce genre de préoccupations: transformations portant sur la variable (racine, logarithme) et «normalisant» la distribution; tests indépendants du type de distribution (Wilcoxon, par exemple); recherche de paramètres moins sensibles aux éléments étrangers dans l'échantillon (ce point amenant l'idée de statistique robuste). Bien que différentes dans leur formalisme mathématique et dans leur conception, ces méthodes correspondent souvent aux mêmes besoins dans la pratique. Il paraît utile d'en tenir compte dès les premiers stades de l'enseignement de la statistique. C'est à quoi se sont attachés Tukey et d'autres (2) au Congrès de l'enseignement des mathématiques de Berkeley (ICME IV) en 1980. Ils ont particulièrement insisté sur l'idée de statistique robuste à un niveau élémentaire, idée que nous présentons brièvement ci-après.

2. Premières notions de statistique robuste

Prenons comme échantillon l'ensemble de nombres {1; 3; 5; 8; 30}; sa moyenne \bar{x} vaut 9,4 et l'écart type correspondant, s , est égal à 10,6. Il est évident que c'est la valeur 30 qui déplace la moyenne vers la droite et accroît fortement la dispersion. Si 30 était remplacé par 10, on obtiendrait $\bar{x} = 5,4$ et $s \cong 3,3$. Si, en revanche, on avait employé la médiane (valeur de x pour laquelle l'effectif se sépare en deux moitiés égales), celle-ci aurait valu 5 dans les deux cas. De même, si nous définissons une autre caractéristique de dispersion que l'écart type, le MAD (médiane des valeurs absolues des écarts par rapport à la médiane), nous constatons qu'il est de 3 dans les deux cas. Cela nous conduit à déclarer que la médiane et le MAD sont plus **robustes** que la moyenne et l'écart type face à des valeurs extrêmes (résultant, par exemple, d'erreurs grossières lors de manipulations expérimentales). A ce propos, on vient d'utiliser un

peu abusivement le pluriel en parlant des valeurs extrêmes, alors qu'il n'y en a qu'une dans notre exemple. Un critère de robustesse peut précisément être le taux de valeurs à modifier dans un échantillon pour que le paramètre estimé varie de façon significative. Une autre façon d'aborder le problème consiste à se demander quelle est l'influence exercée par la variation d'un élément dans un échantillon dont les autres éléments sont fixes. Dans ce but, on calcule la différence entre le paramètre déterminé pour les n valeurs fixes et le paramètre estimé pour $n+1$ valeurs (les n précédentes et une variable x). Pour la moyenne, on a ainsi:

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = \frac{x + n\bar{x}_n}{n+1} - \bar{x}_n = \frac{1}{n+1} (x - \bar{x}_n)$$

soit l'expression d'une fonction affine par rapport à l'élément supplémentaire x . Pour la médiane, un exemple illustrera le même procédé; si l'échantillon est formé des éléments de {4; 6; 7; 9; 10; 13; 15; 16}, la médiane m_n est de 9.5 (moyenne des éléments centraux 9 et 10). L'ajout d'un neuvième élément x entraîne que la médiane égale 9 si x est inférieur à 9, qu'elle vaut x quand ce même x est compris entre 9 et 10, puis 10 quand x est supérieur à 10. On a donc pour la médiane:

$$m_{n+1} - m_n = \begin{cases} -0.5 & x < 9 \\ x - 9.5 & 9 < x < 10 \\ 0.5 & 10 < x \end{cases}$$

On retrouve ici la propriété de la médiane qui nous a frappé dans le premier exemple.

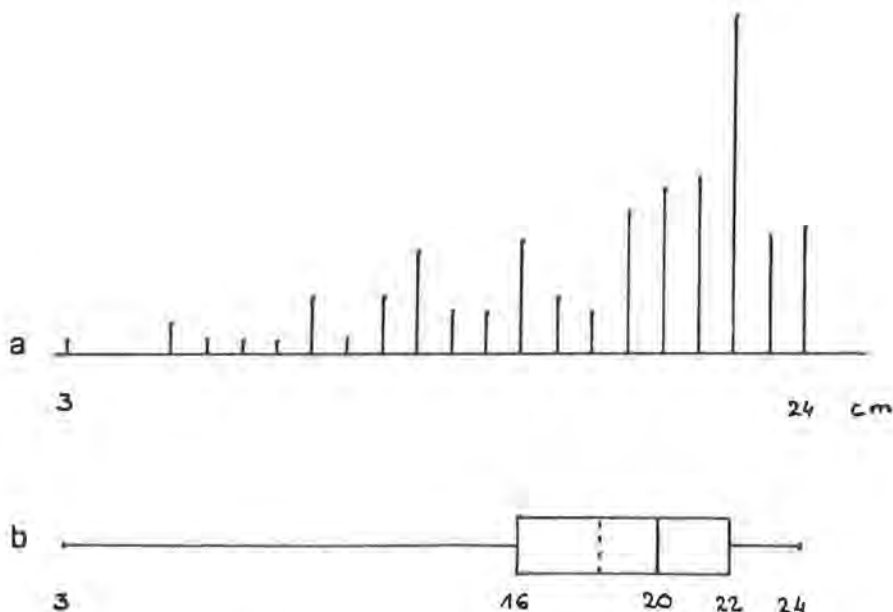
A ce stade, on imagine volontiers qu'il est aisé de définir une statistique robuste, en précisant un peu les caractéristiques énoncées dans le paragraphe précédent. Or, l'opération est plus difficile qu'il n'y paraît. Dans les premiers énoncés, on se réfère plus ou moins implicitement à des distributions sous-jacentes dont on souhaite estimer un paramètre. D'autre part, la robustesse devrait exister aussi face à des manipulations courantes en statistique; ainsi, la médiane n'est pas robuste face à des regroupements. Huber (1) a bien décrit, dans sa publication, l'historique de la notion de statistique robuste et montré la difficulté à cerner cette idée dans un contexte mathématique exigeant; nous y renvoyons le lecteur à la recherche de précisions sur ce point. Il faut donc, pour l'instant, renoncer à une présentation unitaire, ce qui explique probablement que le sujet ne soit pas abordé systématiquement et qu'il échappe en partie à nos systèmes de formation. Toutefois, à travers les nombreuses études et propositions présentées, un certain consensus s'est réalisé sur l'idée que c'est la robustesse de la performance, mesurée par la dispersion (variance) des valeurs du paramètre, qui est essentielle. Cet accord a été à l'origine de la célèbre expérience de simulation de Princeton (1972), dont les résultats sont souvent

reproduits dans les ouvrages spécialisés. En utilisant la méthode de Monte-Carlo sur des échantillons de taille 20, on a déterminé la variance des estimateurs les plus connus à l'époque pour diverses distributions, dont, en particulier, la distribution normale pure $N(0; 1)$ et des distributions normales contaminées (exemple: 18 éléments sont pris au hasard dans $N(0; 1)$ et 2 dans $N(0; 9)$). On constate que la moyenne n'est un bon estimateur que dans $N(0; 1)$ pure, alors qu'elle est systématiquement la plus mauvaise dans les autres cas. Ainsi, on possède là une technique pour attribuer un indice de qualité à des méthodes robustes dans un contexte donné. Parmi les bons estimateurs mis en évidence par cette étude et susceptibles d'être mis en œuvre à notre niveau, on retiendra la moyenne après élagage (α -trimmed mean), technique consistant à calculer la moyenne après avoir éliminé symétriquement un pourcentage α de valeurs extrêmes. Reproduisons l'exemple cité par Siegel (2): on mesure, en minutes, le temps d'attention continue de 10 étudiants et l'on note 5, 18, 15, 2, 8, 55, 11, 3, 9 et 8 minutes. La moyenne \bar{x} est de 13.4 minutes. La moyenne après élagage de 10 % se calcule sur les mesures ordonnées (2, 3, 5, 8, 8, 9, 11, 15, 18, 55); on obtient $\bar{x}_{0.1} = 9.6$ minutes. Quant à la médiane, elle est de 8.5 minutes. Cet exemple ne permet pas de décider laquelle de la médiane ou de la moyenne après élagage est meilleure que l'autre; l'étude de Princeton donne l'avantage dans la plupart des cas à la seconde statistique (taux d'élagage variant de 10 à 25 %).

3. Conséquences pour l'enseignement

3.1. Enseignant et élèves

Notre propos n'est pas d'ajouter un nouveau chapitre à la liste déjà trop longue de nos programmes officiels. Pour nous, l'idée de statistique robuste s'inscrit d'abord dans la ligne d'une réflexion personnelle et critique sur les buts et les moyens de la statistique descriptive face à des situations tirées de la vie réelle. Cela devrait nous amener à éviter de conditionner nos élèves sur le schéma moyenne – écart type – distribution normale (même si les deux derniers sujets n'apparaissent en général pas explicitement en scolarité obligatoire). Dans l'esprit du programme romand, une place importante devrait être laissée à l'exploration et à l'expérimentation par l'élève. Incidemment, on sera conduit à lui procurer quelques outils supplémentaires. Parmi ceux-ci, la médiane et les quartiles paraissent s'introduire assez bien quand on classe des nombres par ordre de grandeur. Après le graphique à bâtons et l'histogramme, on peut suggérer la construction de boîtes à moustaches (voir figure et explications ci-dessous) qui, d'une part utilisent des caractéristiques plus robustes et d'accès plus intuitif que la moyenne et l'écart type, et, d'autre part, décrivent mieux des descriptions asymétriques, l'interquartile étant également un indice de dispersion.



Hauteur de levage chez 119 enfants (exemple cité par P. Mengal, Statistique descriptive, P. Lang, 1979).

a. graphique à bâtons des hauteurs de levage.

b. boîte à moustaches résumant les mêmes données.

$Q_1 = 16$ (premier quartile, 25 % de résultats inférieurs à Q_1)

$m = 20$ (médiane, 50 % de résultats inférieurs à m)

$Q_3 = 22$ (3^e quartile, 75 % de résultats inférieurs à Q_3)

Les moustaches relient la boîte aux valeurs extrêmes. On a indiqué la moyenne 18.5 en pointillé.

Pour conclure cette première partie, on citera pêle-mêle quelques sujets d'application et de réflexion au niveau de l'enseignant: les revenus des pensionnés AVS, l'âge et la durée de séjour du personnel soignant dans un hôpital, ou encore, dans l'actualité scolaire, l'effectif des classes pour un collège ou une région donnée.

3.2 Docimologie

Pour ceux qui vivent un système d'évaluation et de promotion fondé sur des moyennes d'appréciations numériques, il est utile de s'interroger sur les effets qu'aurait la substitution de la médiane à la moyenne arithmétique pour l'attribution d'une note semestrielle ou annuelle. Dans la discussion de certains cas individuels en conseil de classe la détermination de la médiane peut apporter un argument nouveau, ne serait-ce qu'en mettant en évidence le côté arbitraire du

choix de la moyenne. Il est par ailleurs évident qu'à l'échelon personnel une moyenne après élagage serait mal reçue par les parents et les élèves. En revanche, cette dernière technique réduit l'effet d'éléments parasites comme les bilingues ou les immigrés d'autres cantons quand il faut dégager une tendance de classe. Dans le traitement d'épreuves communes, enfin, on ne manquera pas non plus de procéder à quelques comparaisons entre les diverses caractéristiques de tendance centrale ou de dispersion; quelle échelle faut-il alors choisir pour l'attribution de scores?

3.3. Informatique

L'offre d'activités de type informatique dès la scolarité obligatoire ouvre des perspectives qui iront en s'élargissant avec les années. D'un côté, on simule assez bien l'extraction d'échantillons de populations diversement distribuées, ceux-ci servant de base d'expérimentation. Par ailleurs, il y a fort à faire avec l'élaboration de programmes mettant en évidence d'autres paramètres que la moyenne arithmétique. Dans les caractéristiques de dispersion, il sera plus facile, grâce à l'ordinateur, de comparer l'écart type, l'écart moyen (valeurs absolues!), le MAD ou l'interquartile calculés sur les mêmes échantillons. Beaucoup de ces statistiques étant liées au rang, elles nécessiteront d'aborder rapidement des algorithmes de tri. On conçoit bien, dans ce domaine particulier, la nécessité d'établir une progression dans l'acquisition et la mise au point de ces connaissances tout au long de la scolarité secondaire; plus précisément, le niveau atteignable à la fin de l'école obligatoire reste à discuter. Quoi qu'il en soit, le mariage de l'informatique et de la statistique ne peut qu'être fécond, en favorisant l'expérimentation et la participation de l'élève.

4. Conclusion

La lecture des lignes qui précèdent pourrait s'interpréter comme une condamnation des méthodes de la statistique classique. Or, il n'en est rien, il faut continuer de les utiliser; elles ont fait leurs preuves entre les mains de statisticiens expérimentés et prudents. Mais un fait nouveau est apparu avec la diffusion de calculatrices scientifiques comprenant au moins un programme de moyenne / écart type, voire celui de la régression linéaire. Le phénomène paraît s'étendre aux micro-ordinateurs, dont les logiciels contiennent usuellement des éléments peu différents de ceux implantés sur les calculatrices. Au moment donc, où, à la suite du Forum des Diablerets, on songe à accroître le poids du domaine probabilités-statistique, le rôle des enseignants paraît bel et bien de mettre en garde la population scolaire contre l'interprétation abusive de statistiques calculées trop facilement grâce aux machines. Les quelques idées présentées ici n'ont pas d'autre but que de contribuer au rétablissement d'un certain équilibre.

Bibliographie

- (1) Peter J. Huber: *Robust Statistics: A Review*. The Annals of Mathematical Statistics 1972, Vol. 43, n° 4, 1041-1067.
- (2) Tukey, Siegel, Kettnering: *Exploratory Data Analysis Overview*, ICME IV, Berkeley, 1980.
- (3) John F. Tukey: *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley, 1977.
- (4) Frederick Mosteller, John W. Tukey: *Data Analysis and Regression*. Addison-Wesley, 1977.

L'article de Huber donne une bibliographie couvrant les publications associées à l'essor des statistiques robustes.

Les ouvrages de Tukey et Mosteller élargissent d'une façon originale le champ de la statistique descriptive, en y incluant, entre autres, des méthodes robustes.

Parution nouvelle:

Mathématiques appliquées et calculatrices programmables

L. Solomon et M. Hocquemiller

Editions Masson 1982, 256 p.

Les auteurs montrent comment, avec une calculatrice peu coûteuse, on peut étudier des problèmes qui étaient autrefois l'apanage de spécialistes entraînés et pourvus de machines puissantes.

A titre d'exemple, outre des problèmes relativement élémentaires de géométrie et d'algèbre linéaire à trois dimensions, on peut calculer la fonction Gamma, les fonctions de Bessel, quelques intégrales doubles, rechercher les zéros et les extrema d'une fonction, calculer sa dérivée.

Le dernier chapitre est consacré aux équations différentielles (problème de Cauchy), traitées par différentes méthodes.

Ce livre contient environ 120 programmes pour la calculatrice TI57, avec souvent leurs variantes pour TI 58/59, expliqués, commentés, illustrés d'exemples et accompagnés de références bibliographiques.

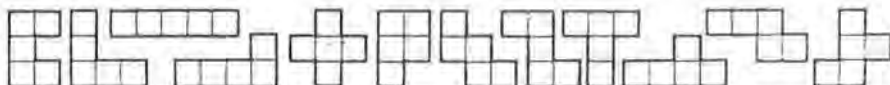
Pentominos sur une grille

par Roger Délez (voir Math-Ecole N° 103, p. 23)

Une autre manière d'appréhender le jeu

Voici 12 pentominos que l'on doit placer sur une grille sans se superposer. Chaque pièce vaudra le nombre de points notés sur les cases qu'elle occupe.

Consigne: Place les pentominos sur la grille et totalise les points.



5	0	1	3	8	3	0	8	2	0	8	8	4	8	0	9	8	3	3	5	6	1	5	7	1	0	2	6	9	2	1	0	3	3	8
3	4	0	6	7	1	3	5	5	3	0	3	0	6	5	7	3	5	0	9	4	0	2	0	3	7	3	7	1	6	7	2	2	8	0
8	9	0	9	3	6	2	6	5	9	3	5	3	3	9	5	3	2	5	1	7	2	0	1	7	4	9	7	8	5	9	5	9	2	4
8	1	1	9	4	3	4	4	4	7	2	5	9	4	2	0	5	9	7	2	6	9	1	9	6	8	2	9	7	3	5	1	7	2	0
8	0	2	2	5	0	7	2	9	8	2	8	4	1	6	8	0	7	3	1	3	4	8	5	5	3	5	4	6	6	6	0	7	4	1
1	1	3	9	1	4	2	7	6	5	0	1	8	5	3	3	8	7	3	6	8	2	4	5	0	2	1	4	5	3	0	5	9	9	4
1	3	1	8	7	8	5	5	1	1	3	9	5	7	7	9	3	4	8	1	1	3	6	3	5	6	7	3	1	3	8	2	0	3	
8	8	9	5	0	8	6	2	0	7	2	7	0	3	8	7	3	7	4	5	5	5	3	4	5	5	8	1	3	3	5	5	1	8	5

Le pentomino placé en exemple sur la grille a une valeur de 6 ($4 + 1 + 0 + 0 + 1$).

Comment réagissent les élèves? Je vais succinctement retracer ici l'expérience faite dans la classe de M^{lle} Lucienne Gerdil, 6P, au Grand-Saconnex, à fin mai 1982.

Face à cette «énigme» je ne réponds d'abord à aucune question, les élèves devant appliquer la consigne.

Voici la première série de résultats obtenus:

241	251	261	270	283	292	323	338	379
243	256	262	271					
245	256	265	273					
246	259		276					
246			278					
247								

Remarque: La «situation» se ferme déjà de par la non manipulation des objets: les pièces sont placées comme sur le modèle dans 14 cas sur 23!

Comment faire pour ouvrir le champ d'investigations?

Le simple fait de donner l'indication: «Les pièces peuvent être placées dans n'importe quel sens» permet de repartir de plus belle.

Les élèves entreprennent de nouvelles démarches...

Passons alors à l'analyse des résultats obtenus.
Que pourrait-on chercher?

«Le plus grand total possible.»

«Le plus petit total possible.»

«Tous les totaux de 5 en 5, du plus petit au plus grand.»

«La manière la plus «serrée» de placer les pentominos.»

«La meilleure place pour chaque pièce.»

Nouveaux essais.

Paul: «M'sieur j'ai découvert qu'on peut placer les 12 pièces en formant un rectangle. J'ai envie de voir combien il peut y avoir de rectangles différents dans ma grille, et celui qui vaut plus!»

L'enthousiasme éclate et chacun veut parvenir à une forme possible.

Je ne puis passer sous silence à ce stade ces 2 citations extraites d'un rapport du Centre Suisse de documentation en matière d'enseignement et d'éducation:

«*Objectifs de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire supérieur*». Colloque de Macolin/Bienne (Suisse) des 9, 10 et 11 mai 1975:

«Le maître doit savoir guider la recherche sans priver l'élève des errements profitables et de la joie de la découverte.»

«Les problèmes offrent à l'élève l'occasion de se mesurer à de réelles difficultés et d'aiguiser son esprit de persévérance; il est capable de juger lui-même s'il a ou non réussi à les vaincre. La joie qu'il trouve dans l'exercice de ce pouvoir stimule son intérêt et contribue à son équilibre intérieur.»

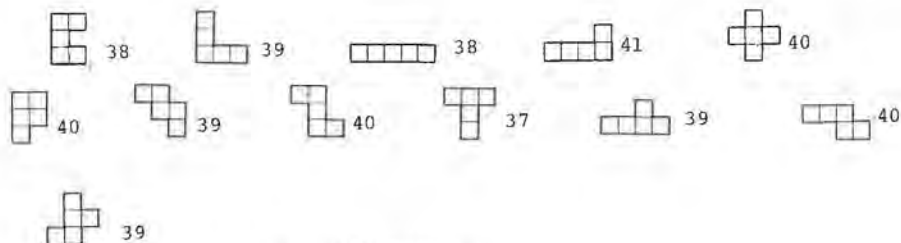
La joie de Paul a permis la relance de l'activité qui a éclaté dans toutes les directions.

Résultats de notre recherche (à mi-juin) 82)

1) Nous avons trouvé **tous les totaux se suivant de 5 en 5**
de 95, 100, 105, ... jusqu'à 440, 445, 450.

2) **le plus petit: 93**
le plus grand: 451

3) **la plus grande valeur pour chaque pièce:**



soit 470 points

irréalisable sans chevauchement!

4) **des rectangles de:** 5×12
 6×10
 4×15

La poursuite de cette activité pourrait être envisagée selon les questions des enfants. Je les cite:

- Combien y a-t-il de rectangles possibles de 5×12 ?
 6×10 ?
 4×15 ?
(en restant dans la grille donnée)

Ximena.

- Nous avons trouvé 93 et 451, y a-t-il plus petit ?
plus grand ?

Barbara.

- Puis-je trouver une même valeur pour chaque pièce séparément ?

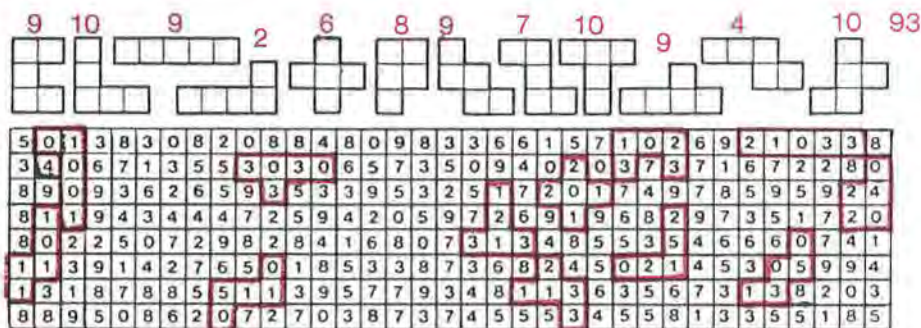
Stéphane.

- J'obtiens par exemple 327; en déplaçant le moins de pièces possibles, puis-je faire 320, 325 et 330 ?

François O.

Voici enfin nos deux grilles:

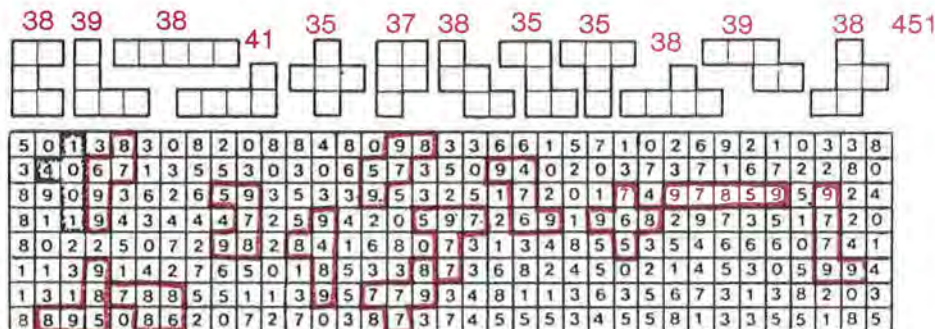
La plus petite:



Moyenne par pièce: 7,75

Moyenne par case: 1,55

La plus grande:



Moyenne par pièce: 37,583

Moyenne par case: 7,516

Conclusion

Claude: «M'sieur, vous pourrez nous dire à combien on peut arriver au plus?»

Ce sera chose faite quand l'auteur de l'article nous aura donné la ou les solutions.

TABLE DES MATIÈRES

Editorial, <i>Th. Bernet</i>	1
Appréhender l'espace par le mouvement entre 5 et 7 ans, <i>E. Gasser</i> ...	2
A propos du «compendium», <i>M. Goerg</i>	8
A propos de statistique robuste, <i>P. Favre</i>	19
Pentominos sur une grille, <i>R. Délez</i>	25

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet,
F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud,
R. Délez, Ch. Félix, M. Ferrario,
F. Jaquet, F. Oberson.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—,
CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an.
Service de la Recherche Pédagogi-
que; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève.
(Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983