DEVELOPPER LA SYMBOLISATION ALGEBRIQUE A TRAVERS LE PROCESSUS DE GENERALISATION

Said Abouhanifa

Equipe de recherche du développement de la pensée mathématique (ERDPM)

Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation

Casablanca-Settat, Maroc

INTRODUCTION

L'enseignement de l'introduction à l'algèbre est considéré comme un problème de la profession, au sens de Chevallard (2006). Une des raisons pour l'étudier est de mettre l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans l'usage du langage littéral (Squalli, Mary & Marchand, 2011). Une possibilité retenue par Larguier (2015) consiste à proposer aux élèves des activités de généralisation comme porte d'entrée vers l'algèbre. En effet, d'un point de vue historique, la généralisation constitue une des pierres angulaires de l'algèbre et elle joue un rôle important aussi en arithmétique (Mason, 1996) : les activités de généralisation constituent un potentiel pour développer la pensée algébrique dans la mesure où la généralité nécessite l'usage d'une indéterminée.

Les différents résultats de nos travaux (Abouhanifa et al., 2018) montrent qu'au collège les élèves ont des difficultés à mobiliser les outils algébriques dans les problèmes. En particulier, ils ont du mal à introduire une lettre ou un symbole dans la résolution d'un problème si on ne les leur désigne pas. Cependant les conceptions des enseignants sur l'algèbre et le raisonnement algébrique restent souvent attachées au symbolisme algébrique formel s'appuyant sur les symboles alphanumériques (Abouhanifa et al, 2019).

L'objectif de cet article consiste à analyser une activité de généralisation afin d'identifier et classifier les raisonnements et les symbolisations produites par des élèves. Ainsi cette activité pourrait être exploitée pour favoriser des progressions dans les processus de raisonnement et de symbolisation.

LES CATÉGORIES DE GÉNÉRALISATION

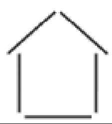
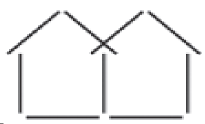
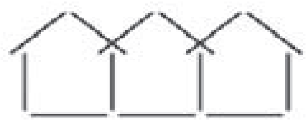
L'activité de généralisation est considérée par Mason (1996) et Radford (2008) comme une occasion propice d'identifier et d'exprimer des régularités dans un raisonnement. Pour amener l'élève à construire une pensée algébrique, ce dernier doit observer des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons. Notons que Dörfler (1991) distingue deux catégories de généralisation : empirique et théorique. La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques (1978). Les élèves expriment le plus souvent leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases, d'annotations sur le dessin ou à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. L'indéterminée peut être symbolisée par un substitut symbolique, mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître. La généralisation théorique, quant à elle, se réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets et elles sont adaptées aux situations de généralisations algébriques. Cette généralité consiste à se détacher de la situation de départ, pour proposer une écriture correcte sur le plan mathématique. Dans ce cas, la formulation symbolique de la généralisation ne comporte plus aucune trace permettant de relier les symboles à leurs signifiants.

Dans cet article, nous nous intéressons aux types de généralisation auxquels recourent les élèves confrontés à une suite arithmétique illustrée par des suites de maisons, et ceci en fonction de leur niveau scolaire et de leur introduction au symbolisme algébrique.

PRATIQUE DE DÉVELOPPEMENT D'UNE GÉNÉRALISATION BASÉE SUR LES PATTERNS FIGURATIFS

L'activité se déroule de la façon suivante : les élèves disposent d'un dessin pour visualiser et dénombrer quelques premiers termes de la suite. Mais pour un cas lointain, le terme de la suite ne peut plus être dessiné et les élèves doivent identifier des régularités pour l'exprimer. Il leur est ensuite demandé de proposer une expression de n'importe quel terme de la suite de maisons.

Ahmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtonnets, comme montré par le schéma suivant :

			…
Figure 1	Figure 2	Figure 3	…

Dans la figure 1 on compte 5 bâtonnets, la figure 2 comporte 9 bâtonnets, la figure 3, 13 bâtonnets…

Combien de bâtonnets y a-t-il dans la figure 10 ?

Combien de bâtonnets y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

Expliquez à l'un de vos collègues, avec vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtonnets d'une figure d'un numéro quelconque de cette suite de maisons.

Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtonnets d'une figure de n'importe quel numéro.

Fig. 1 : Version 1 de l'activité proposée

Dans cette version 1 de l'activité (proposée à 7 classes), l'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des 3 premiers termes de la suite (dans chaque figure, la variable indépendante est le nombre de maisons ou le numéro de la figure et la variable dépendante est le nombre de bâtonnets). Aux élèves de 6 autres classes, nous avons fait le choix de ne pas présenter les premiers termes successifs de la suite, car nous supposions que cela poussait les élèves à ne s'intéresser qu'aux écarts entre deux termes successifs, mais celui de présenter les figures non successives numéro 1, 3 et 6.

Au terme de l'année scolaire, l'activité[1] a donc été soumise à un total de 390 élèves de 13 classes de différents établissements, issus de deux années d'études : de la 6^{e} année primaire (âge 11-12 ans) et de la 1^{e} année du collégial (âge 12-13 ans) pour comparer les résultats de deux différents degrés d'élèves, les premiers n'ayant pas reçu d'introduction au symbolisme algébrique alors que les seconds ont eu un enseignement sur ce sujet. La Fig. 2 ci-après, illustre l'échantillon par grade et version de l'activité.

---

[1] L'activité est présentée dans les deux langues d'enseignement : l'arabe et le français.

	Nombre de classes	Activité version 1	Activité version 2	Effectifs des élèves
6^e^ primaire	6	90	90	**180**
1^e^ collège	7	120	90	**210**
Total	**13**	**210**	**180**	**390**

Fig. 2 : Répartition de l'activité selon la version et le degré scolaire

Aux enseignants des 13 classes, nous avons présenté les objectifs de notre travail en précisant que les élèves devaient travailler l'activité individuellement pendant une durée de 50 minutes et que les enseignants ne devaient pas intervenir pendant la phase de travail des élèves.

ANALYSE PRÉALABLE DE L'ACTIVITÉ

L'activité proposée consiste à dénombrer les bâtonnets des figures dessinées, puis d'exprimer le nombre de bâtonnets de chaque figure en fonction du nombre de maisons.

Sur la base des réflexions de Radford, Miranda, et Demers (2009), nous avons présenté cette activité en quatre questions : la question 1 conduit les élèves vers le dénombrement concret des bâtonnets de la Figure 1. Cette question n'invite pas à un dénombrement raisonné bien que certains élèves puissent le faire. Il est ensuite demandé de trouver le nombre de bâtonnets de la maison de la Figure 101 : cette question invite l'élève à répéter le système d'actions initiales sur un exemple spécifique et guide l'élève à porter attention au schéma du calcul plus qu'au calcul lui-même. L'élève ne peut plus réaliser un dénombrement concret, mais il peut le réaliser mentalement. Il est ainsi mis dans la situation où il doit dégager des invariants à partir des cas antérieurement considérés et étendre ces invariants au nouveau cas.

Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, nous avons formulé la question 3 par : « expliquez à l'un de vos collègues avec vos propres mots… ». Cette question conduit l'élève à anticiper les cas potentiels non spécifiés. Elle amène l'élève à convertir les invariants en prototypes, les cas spécifiques antérieurs se transforment alors chez l'élève en exemples génériques. La généralité peut être formulée de manière libre, soit en utilisant le langage ordinaire, soit un langage mixte constitué de symboles mathématiques et non mathématiques, soit encore le langage formel.

Dans la question 4 l'élève est invité à réfléchir sur la formulation symbolique de la généralité et à représenter de manière explicite et mathématique la variable. Cette formulation est ainsi détachée du système d'actions initiales et peut alors se prêter à des manipulations syntaxiques en cohérence avec les règles du calcul et sans lien avec les signifiants (Squalli, 2015 ; Dörfler, 1991).

RÉUSSITE DE LA TÂCHE

Nous présentons dans la Fig. 3, la répartition des productions analysées au regard de la réussite et de la non-réussite.

Niveau scolaire	Action réussie	Action non réussie	Total
6^e^ primaire	17% (31)	85% (149)	100 % (180)
1^e^ collégial	28% (58)	72% (152)	100% (210)
Total	23% (89)	77% (301)	100 % (390)

Fig. 3 : Répartition de la réussite de l'activité selon le grade scolaire

Globalement, au vu de ces résultats, on peut considérer que la tâche était difficile pour les élèves puisque moins d'un quart des productions sont réussies (23 %). Si on se limite aux productions de 6e primaire (180), seulement 17% sont réussies, tandis qu'en 1ère du collège (210) la réussite passe à 27 % (Fig. 3). Notons que les élèves de la 6e primaire n'ont pas encore reçu un enseignement de l'algèbre alors que ceux de 1ère collège l'ont reçu.

Dans la Fig. 4 ci-après, nous exposons la répartition des productions des élèves de 1e collège au regard de la réussite et de la non-réussite, selon chaque version de l'activité :

	Activité réussie		**Activité non réussie**		**Total**
Activité	version 1	version 2	version 1	version 2	
1e collège	38% (46)	13% (12)	62% (74)	87% (78)	210
Total	28% (58)		72% (152)		100 % (210)

Fig. 4 : Répartition de la réussite selon la version au collégial

Sur la base des 210 copies analysées du collégial, on constate une meilleure réussite de la version 1 (38% versus 13%). Il semble que ces élèves n'aient pas nécessairement établi de lien entre l'algèbre qu'ils travaillaient habituellement en classe et l'activité proposée.

La Fig. 5 ci-dessous présente la répartition des productions des élèves de 6e primaire au regard de la réussite et de la non-réussite, selon chaque version de l'activité :

	Activité réussie		**Activité non réussie**		**Total**
Activité	version 1	version 2	version 1	version2	
6e primaire	27% (24)	8% (7)	73% (66)	92% (83)	180
Total	17% (31)		85% (149)		100% (180)

Fig. 5 : Répartition de la réussite selon la version au primaire

Comme au collégial, la version 1 est mieux réussie au primaire que la version 2 (27% versus 8%).

Les catégories de généralisation selon le niveau scolaire et la réussite de l'activité sont exposées dans la Fig. 6 ci-dessous :

Catégorie de généralisation	**Activité réussie**	**Activité non réussie**	**Total**
Empirique	15% (44)	85% (252)	76% (296)
Théorique	11% (45)	13% (49)	24 % (94)
Total	23% (89)	77% (301)	100 % (390)

Fig. 6 : Répartition de la réussite selon les catégories de généralisation

Des 390 copies analysées, 76% (296) sont de la catégorie de généralisation empirique, et 24% (94) de la catégorie de généralisation théorique. Ces données montrent que les résolutions des élèves sont majoritairement de la catégorie empirique.

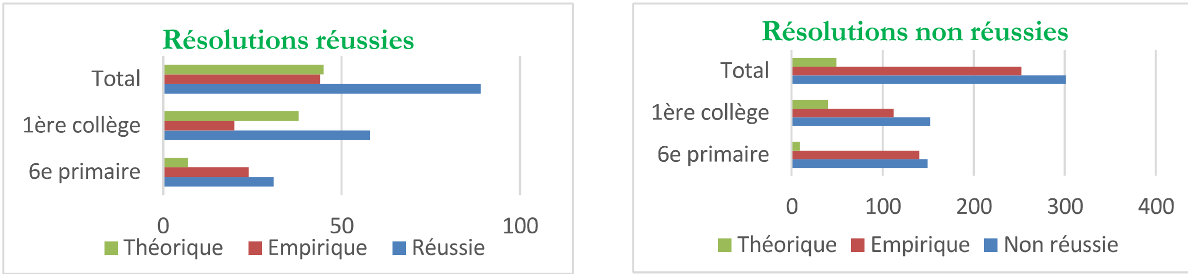


Fig. 7 : Répartition des catégories de généralisation selon le degré scolaire

Toutefois, pour les 89 productions réussies, on constate une répartition égale des généralisations empiriques (44) et théoriques (45), ces dernières étant surtout le fait des élèves du collégial (38 versus 7). Les élèves du primaire sont principalement dans l'empirie, que ce soit pour les résolutions réussies ou non.

PRODUCTIONS DES ÉLÈVES ET ANALYSE DES SYMBOLISATIONS POUR LA GÉNÉRALISATION

Nous avons catégorisé les productions des élèves en six classes de systèmes d'actions dans lesquelles l'attention de l'élève est orientée vers certaines relations entre les objets sur lesquels portent ses actions. Une classe est donc constituée de systèmes d'actions qui portent sur les mêmes objets et qui conduisent ainsi aux mêmes invariants.

Les classes de systèmes d'actions, qui témoignent de la variété des démarches développées par les élèves, sont résumées dans la Fig. 8 suivante :

Classe	Description	Formule
C1	Prendre 4 fois le nombre de maisons auquel on ajoute un bâtonnet.	$4n + 1$
C2	Prendre le nombre de bâtonnets de la première maison et ajouter quatre fois le nombre de maisons moins une.	$5 + (n - 1) \times 4$
C3	Exprimer le nombre de bâtonnets de chaque maison auquel on retranche le nombre de bâtonnets communs, soit 1 pour chaque maison sauf la première.	$5n - (n - 1)$
C4	Ajouter 5 pour la première maison à 4 bâtonnets pour chaque maison suivante (ce qui correspond à n+1 maisons en tout).	$4n + 5$
C5	Pour chaque maison, faire l'addition du nombre de bâtonnets de la base (1) avec le nombre de bâtonnets verticaux (bâtonnet de la base plus un) et le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base).	$n + (n + 1) + (n \times 2)$
C6	Faire l'addition du double de nombre de maisons avec le triple du nombre de maisons et retrancher du total obtenu le nombre de maisons moins une.	$n \times (3 - 1) + n \times (4 - 1) - (n - 1)$

Fig. 8 : Les classes de systèmes d'actions

La Fig. 9 suivante synthétise la symbolisation dans la généralisation théorique et permet de mettre en place la classe de symbolisation dans les résolutions des élèves, où AR indique que l'action est réussie et ANR l'action est non réussie.

Classe de Symbolisation	C1		C2		C3		C4		C5		C6		Total	
	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR
Effectifs (%)	12	13	8	9	9	11	10	9	4	5	2	2	11% (45)	13% (49)
	27% (25)		18% (17)		21% (20)		20% (19)		10% (9)		4% (4)		24% (94)	

Fig. 9 : La symbolisation dans la généralisation théorique

Ce sont les élèves de la 1e du collège qui ont produit des généralisations symboliques dans le langage algébrique. Ils expriment les généralités par des formules, tout en passant par le processus de détacher les invariants de leur contexte initial de l'activité de façon appropriée. Ce qui est conforme aux directives des programmes raccordant l'amorce de l'algèbre avec le travail relatif aux formules et aux expressions algébriques.

Dans la Fig. 10, nous présentons les classes de symbolisation dans la généralisation empirique :

Classe de Symbolisation	C1		C2		C3		C4		C5		C6		Total	
	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR
Effectifs (%)	10	56	8	39	10	55	11	74	3	13	2	15	15% (44)	85% (252)
	22% (66)		16% (47)		22% (65)		29 (85)		5% (16)		6% (17)		76% (296)	

Fig. 10 : La symbolisation dans la généralisation empirique

Dans cette catégorie de réponses, ce sont les élèves 6e primaire qui ont produit un nombre important de modes de signification des objets des généralisations empiriques. Ces élèves n'ont pas reçu un enseignement de l'algèbre, ils ont établi en revanche des raisonnements qui s'inscrivent dans le registre algébrique personnalisé comme étant une juxtaposition d'éléments du registre algébrique conventionnel et du registre du langage naturel. Cette catégorie d'élèves donne la preuve qu'ils sont capables de se passer d'exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre très proche du registre algébrique.

Quant à la classe de symbolisation algébrique qu'avaient produite les élèves des deux niveaux scolaires, il ressort que les classes C4, C1 et C3 sont les plus manifestées par ces élèves dans les deux catégories de généralisation.

À titre illustratif, nous présentons dans ce qui suit, des exemples prototypiques de symbolisation.

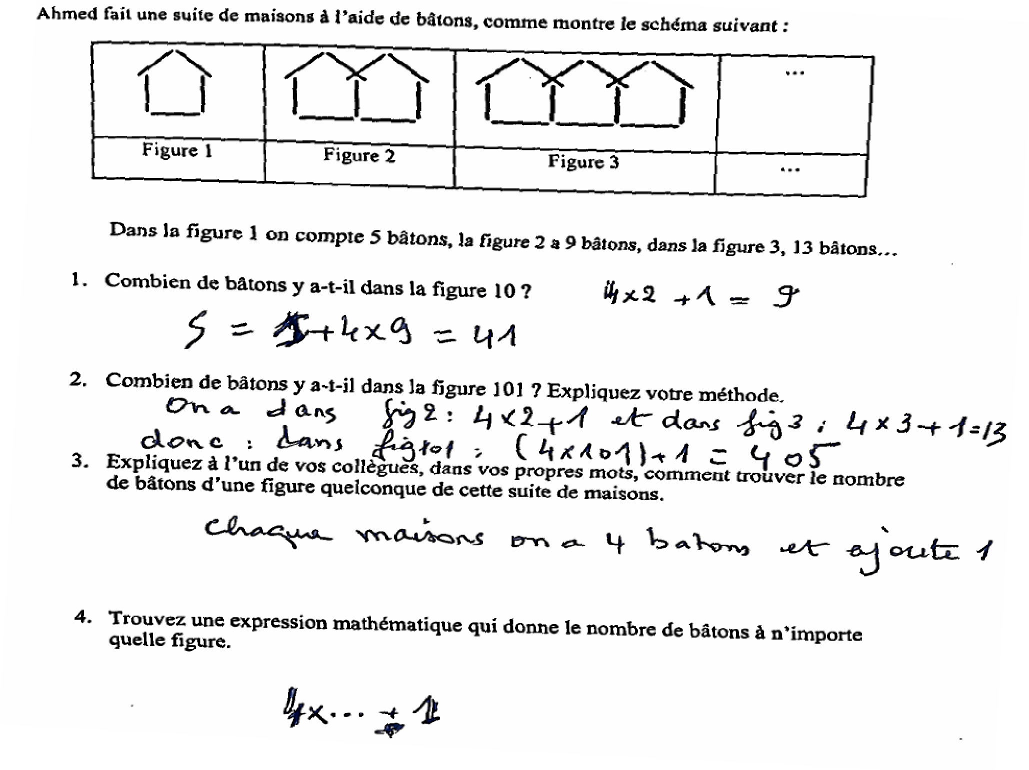

Ahmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :

Figure 1	Figure 2	Figure 3	...

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons...

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?

$4 \times 2 + 1 = 9$

$5 = \cancel{5} + 4 \times 9 = 41$

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

On a dans fig 2 : $4 \times 2 + 1$ et dans fig 3 ; $4 \times 3 + 1 = 13$
donc : dans fig 101 ; $(4 \times 101) + 1 = 405$

3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

Chaque maisons on a 4 batons et ajoute 1

4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

$4 \times \ldots + 1$

Fig. 11 : Élève de 6e primaire de la classe 1

La production de l'élève (Fig. 11) dévoile la formule $4x \ldots + 1$ qui appartient à la classe de systèmes d'actions C1. Il semblerait qu'il ait compris que cette relation est générale, ce qui va être effectivement exprimé à la suite de sa synthèse parce qu'il écrit que le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure est égal au nombre de maisons multiplié par 4 auquel on ajoute 1 bâtonnet. L'élève a représenté le statut de la lettre par des pointillés, comme substitut de l'indéterminée. L'indéterminée est symbolisée par ce substitut, mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître. La généralisation symbolique de cet élève appartient à la classe C1.

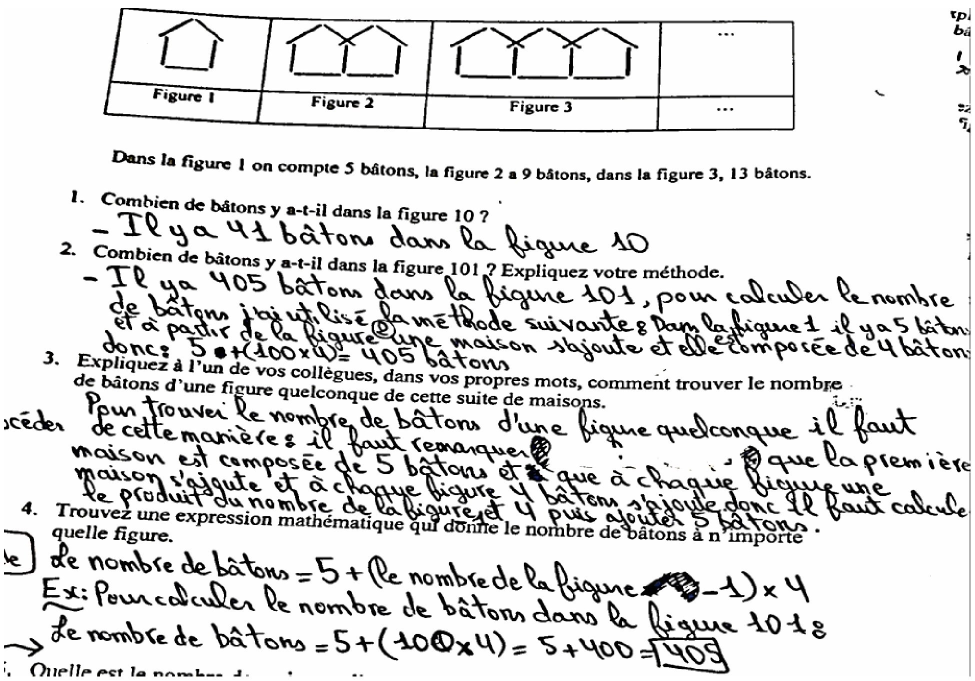


Figure 1	Figure 2	Figure 3	...

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?

- Il y a 41 bâtons dans la figure 10

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

- Il y a 405 bâtons dans la figure 101, pour calculer le nombre de bâtons j'ai utilisé la méthode suivante : Dans la figure 1 il y a 5 bâtons et à partir de la figure 2 une maison s'ajoute et elle est composée de 4 bâtons donc : $5 + (100 \times 4) = 405$ bâtons

3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

Pour trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque il faut procéder de cette manière : il faut remarquer que la première maison est composée de 5 bâtons et que à chaque figure une maison s'ajoute et à chaque figure 4 bâtons s'ajoute donc il faut calculer le produit du nombre de la figure −1 et 4 puis ajouter 5 bâtons.

4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

Le nombre de bâtons = 5 + (le nombre de la figure − 1) × 4
Ex : Pour calculer le nombre de bâtons dans la figure 101 :
Le nombre de bâtons = $5 + (100 \times 4) = 5 + 400 = \boxed{405}$

Fig.12 : Élève de 6e primaire de la classe 2

Dans cette production (Fig. 12), l'élève n'a pas attribué une lettre à l'indéterminée qu'il nomme le numéro de la figure. La généralité exprimée par cet élève montre la relation entre le nombre de bâtonnets pour un certain nombre de maisons et le nombre bâtonnets pour une maison supplémentaire. Autrement dit, l'élève a saisi que pour une maison de plus, il faut ajouter 4 bâtonnets. L'élève a modélisé l'activité dans un langage proche de celui du langage algébrique dans le savoir de référence. Il a produit un calcul qui fait intervenir des nombres connus et des mots du langage naturel désignent les variables. Ces symboles sont alors de nouveaux objets de la pensée, des objets mathématiques dont la signification réside dans les invariants. Le détachement total des actions originales consiste à produire une formule correcte du point de vue mathématique qui ne conserve plus la trace des éléments de contexte. Dans le raisonnement de cet élève, il semble y avoir une anticipation pour détacher l'invariant du contexte de l'activité puis il a procédé à une simplification de la formule comme dans toute autre expression algébrique (Fig. 13).

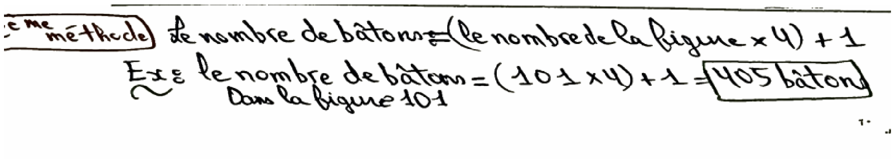
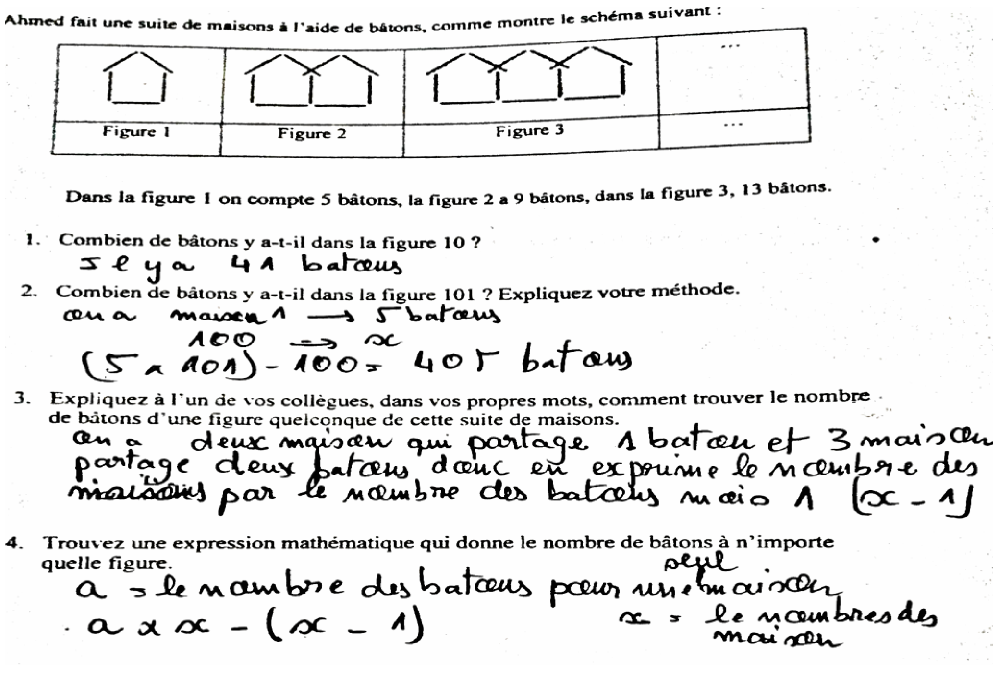


Fig.13 : Suite du raisonnement de cet élève de 6^{e} primaire

Le raisonnement de cet élève montre que ce n'est pas nécessairement l'usage de la lettre qui est le signe du développement d'une pensée algébrique. La généralisation symbolique de cet élève appartient à la classe C2 et il a montré qu'elle est équivalente à celle de C1.



Ahmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :

Figure 1	Figure 2	Figure 3	...

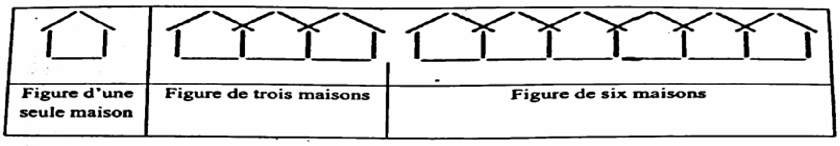
Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?
   Il y a 41 batons
2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.
   on a maison 1 → 5 batons
   100 → x
   (5 × 101) - 100 = 405 batons
3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.
   On a deux maison qui partage 1 baton et 3 maison partage deux batons donc en exprime le nombre des maisons par le nombre des batons moins 1 (x - 1)
4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.
   a = le nombre des batons pour une seule maison
   a × x - (x - 1)
   x = le nombres des maison

Fig. 14 : Élève de 1er du collège de la classe 3

Cet élève (Fig. 14) exprime le nombre de bâtonnets de chaque maison auquel il retranche le nombre de bâtonnets communs ; il découvre la formule $5n - (n - 1)$ où n noté x désigne la variable indépendante. Son processus de généralisation passe par une série d'abstractions d'invariants. En effet, en supposant que chaque maison de n'importe quelle figure comporte 5 bâtonnets, l'élève a considéré qu'une maison comporte 5 bâtonnets, deux maisons comportent 5 bâtonnets multipliés par 2 auquel il retranche un bâtonnet, étant le bâtonnet en commun pour les deux maisons. De proche en proche, il déduit la formule générale décrivant le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure en tant que soustraction de deux expressions $5n$ et $(n - 1)$. Il a traduit sa symbolisation par la formule $5n - (n - 1)$ qui appartient à la classe de systèmes d'actions C3.

.hmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtonnets, comme montre le schéma suivant :



ns une seule maison on compte 5 bâtonnets, dans une figure de trois maisons on compte 13 onnets, dans une figure de six maisons on compte 25 bâtonnets…

1. Combien de bâtonnets y a-t-il dans une figure de10 maisons ?

Il y'a 41 bâtonnets dans une figure de 10 maisons.

2. Combien de bâtonnets y a-t-il dans une figure de101 maisons ? Expliquez votre méthode.

Il y'a 405 bâtonnets dans une figure de 101 maisons
5 + (100 × 4) = 405

. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtonnets d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

L'orsqu'on addition une maison, on addition 4 bâtonnets.

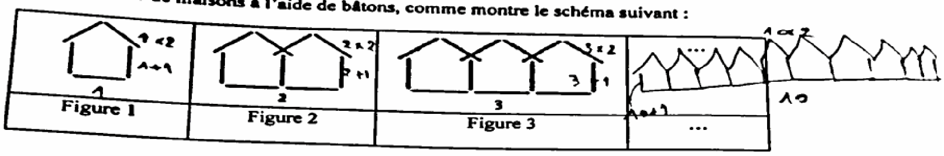
Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtonnets à n'importe quelle figure de suite de maisons.

5 + (x × 4)

Fig. 15 : Élève de 1er du collège de la classe 4

Dans sa production (Fig.15), cet élève donne la preuve qu'il est capable de passer par des exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre algébrique. Il a produit l'expression $4n + 5$ qui appartient à la classe 4. Cette formule permet d'exprimer le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure en multipliant quatre fois le nombre de maisons auquel il faut ajouter le nombre de bâtonnets d'une seule maison, ce qui correspond à prendre quatre fois le nombre de maisons et lui ajouter le nombre de bâtonnets d'une seule maison.

.hmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :



Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?

10 + (10 + 1) + 2 × 10 = 41 baton

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

101 + (101 + 1) + 2 × 101 = 405

Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

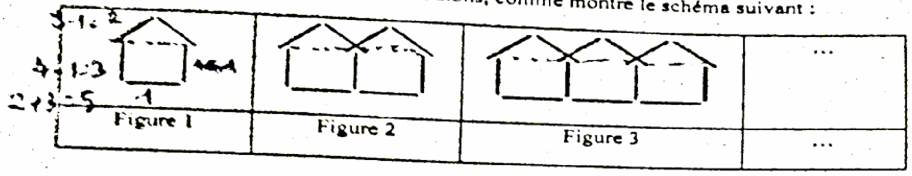
Pour calculer les nbs du batton, le nb de baton en bas il est égale aux nb des maisons, et les verticales égale au nombres des maisons plus un bâton et le toi égale le nb des maison fois 2.

Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

a + (a + 1) + (a × 2) = nombre des battons

Fig. 16 : Élève de 1e du collège de la classe 5

Cet élève (Fig. 16) a exprimé une formule basée sur l'ajout de trois généralités. En effet, dans la généralité globale exprimée $a + (a + 1) + (a \times 2)$, l'élève a effectué une généralisation sur le nombre de bâtonnets de la base de chaque figure et une autre sur le nombre de bâtonnets verticaux (le nombre de bâtonnets de la base plus un) et ensuite sur le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base) avec comme variable indépendante le nombre de bâtonnets de la base de chaque figure, tandis que la variable dépendante est le nombre de bâtonnets total de chaque figure.
La généralisation symbolique de cet élève se prête à l'analyse de la classe C5 : faire la somme du nombre de bâtonnets de la base avec le nombre de bâtonnets verticaux (bâtonnets de la base plus un) et le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base).


... une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?
   (10×2) $10 \times 3 = 41$ -9 $S = 41$
   triangle = 3 batonets
   carré = 4 batons

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.
   $(101 \times 2) + (101 \times 3) - 100 = 405$ $S = 405$.
   nombre de figure = les maisons.

3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.
   maisons (triangle -1) + les maisons (carré -1) $-$ (les maisons -1)

4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.
   les maisons fois 2 plus les maisons fois 3 moins les maisons moins un bâton.

Fig. 17 : Élève de 6e primaire de la classe 6

Dans cette production (Fig. 17), l'élève a exprimé une généralisation basée sur l'addition de trois différentes généralités ; il a considéré que chaque maison est composée de la somme de bâtonnets d'un triangle incomplet de trois bâtonnets moins un bâtonnet, avec un carré incomplet de quatre bâtonnets moins un bâtonnet. Il a déduit la formule globale $n \times (3 - 1) + n \times (4 - 1) - (n - 1)$ où n désigne le nombre de maisons qui exprime que le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure est donné par l'addition du double de nombre de maisons avec le triple du nombre de maisons dont on retranche le nombre de maisons moins une. La généralisation non symbolique de cet élève se prête à la même analyse de la classe C6.

SYNTHÈSE POUR LES CLASSES

Les élèves ont utilisé les systèmes d'action des classes C4, C1 et C3 pour la version 1 et C5 et C6 pour la version 2. Compte tenu de l'agencement des figures dans l'activité, les formes se prêtaient naturellement à être le véhicule des actions des élèves. Les invariants construits sont justifiés par la structure de la représentation visuelle des maisons.

Le schéma classique d'une généralisation empirique est de dégager des régularités à partir de la constance des résultats de quelques cas. Les productions choisies pour exemplifier les classes C1, C2 et C6 sont des généralisations empiriques, les formules produites par ces élèves sont contextuelles dans la mesure où elles portent toutes la marque des actions posées par les élèves pour généraliser. Ces formules prennent tout leur sens pour les élèves en relation avec le calcul posé dans l'activité (par exemple, 4x … +1). Même s'il s'agit d'une étape plus avancée dans la symbolisation algébrique, celle-ci reste encore ancrée dans le contexte de l'activité. Les élèves ont produit une expression, mathématiquement correcte, mais encore calquée sur les actions posées. Ils semblent ensuite s'être détachés du contexte et l'ont simplifiée comme toute autre expression algébrique (Fig.13).

Les productions choisies pour exemplifier les classes C3, C4 et C5 sont des généralisations de nature théorique. Cette généralisation se détache, quant à elle, de l'activité, qui n'est plus enracinée dans le contexte de la suite. On peut cependant considérer que le fait de réduire l'expression implique un changement de perspective où l'élève passe d'une description des actions posées à la réflexion sur l'objet même de cette expression pour la réduire. Malgré une expression réduite et correcte, il n'est pas certain que les élèves aient effectivement produit une généralisation théorique (algébrique symbolique) ou soient parvenus au détachement total. Pour en être sûr, il nécessiterait que les élèves puissent considérer d'autres formules de généralisation comme équivalentes à la leur.

L'enjeu du développement de la généralisation algébrique chez les élèves consiste à les amener à se détacher d'une généralisation empirique et de tendre vers l'utilisation de celle théorique.

Le processus de généralisation peut être résumé dans le schéma suivant :

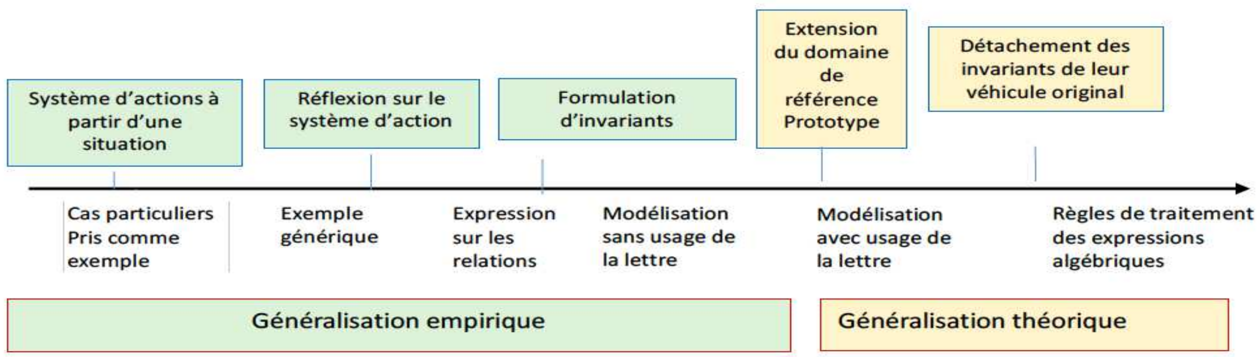


Fig. 18 : Le processus de généralisation, adapté de Squalli (2015)

Conclusion

Les élèves des deux degrés perçoivent les enjeux de l'activité et de sa structuration. Ils identifient les invariants et déterminent un prototype sur la base des schémas proposés dans l'activité. Leur principale préoccupation réside donc dans la symbolisation de cette généralisation.

Même si les aspects outil de la généralisation, de preuve et de modélisation ne sont pas mis en avant dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire, il convient de souligner que les élèves n'avaient jamais eu l'occasion de résoudre ce type d'activité ; l'analyse de leurs productions montre que sans aucune intervention de l'enseignant, ces élèves produisent des généralités variées. Dans les productions analysées apparaissent des difficultés importantes des élèves débutant en algèbre pour exprimer, à l'aide du formalisme algébrique, leur raisonnement : un quart des productions est réussi et les résolutions des élèves sont majoritairement de la catégorie empirique. Cependant, pour les élèves de la 1e année du collège, il s'agit d'un pas important étant donné qu'il s'agissait de leur première rencontre avec l'algèbre. Dans le processus d'actions développées par les élèves, la formule contextuelle émerge et est calquée sur les opérations. Nous notons qu'un huitième d'entre eux parvient à symboliser correctement le raisonnement en utilisant spontanément la lettre.

L'activité de généralisation dans laquelle les élèves étaient engagés requiert de la part de ceux-ci une utilisation de l'algèbre très différente de celle qu'ils ont l'habitude de développer. Il ne s'agit pas d'appliquer une technique étudiée dans les classes, mais de deviner une nouvelle expression algébrique, ce qui sollicite un point de vue très différent de l'utilisation du langage algébrique, en lien notamment avec le sens de l'égalité, de la lettre et des relations entre les différents symboles.

L'activité des patterns figuratifs apporte des éclairages sur les conditions favorisant le développement de la généralisation algébrique chez les élèves avant ou au début de l'enseignement de l'algèbre. L'entrée par ce type d'activité pourrait paraître inadéquate puisque certains élèves éprouvent d'importantes difficultés à la réussir, mais par ailleurs cette entrée permettra aux élèves de donner sens à l'expression des opérations et de la généralité.

La comparaison des différentes données met ainsi en évidence le fait que les manifestations des généralisations théoriques apparaissent aussi en 6e primaire, ce constat mériterait d'être approfondi en mettant l'élève du primaire au contact avec ce type d'activité très tôt et ne pas attendre l'entrée au collège. Ce type d'activité offre en effet aux élèves la capacité à utiliser différents niveaux de langage, de passer d'un niveau de langage à un autre et aussi un espace qui leur permet de mettre en évidence des contenus leur permettant de développer la pensée algébrique.

BIBLIOPRAPHIE

Abouhanifa, S., & Squalli, H. (2019). *Les stratégies exprimées par les élèves dans la résolution d'un problème de généralisation.* Communication présentée au Colloque OIPA-2019, (Université de Liège – Belgique, 6-7 mars 2019).

Abouhanifa,S., El ibbaoui, M., Seddoug, B. & Squalli, H.(2018). *Enquête sur les procédures de résolution de problèmes algébriques chez des élèves marocains de 12 à 15 ans.* Communication présentée au Colloque OIPA-2018, Université de Sherbrooke à Longueuil, Faculté d'éducation, 7-8-9 Mai 2018.

Chevallard, Y. (2006). *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire.* Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation–Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006. Repéré à : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. Van Dormolen (Eds.). *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In L. Theis (Éd.). *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* Actes du colloque EMF 2015 _ GT3 (pp. 313-333).

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht : Springer.

Piaget P., & Henriques, G. (1978). *Recherches sur la généralisation.* Paris : Presses Universitaires de France.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education 40*(1), 83-96.

Radford, L., Miranda, I., & Demers, S. (2009). *Processus de généralisation en mathématiques.* Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Rojano, T. (1991). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving within a Spreadsheet Environment. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 137- 146). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme généralisation d'invariants essentiels. In L. Theis (Éd.). *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* Actes du colloque EMF 2015 _ GT3 (pp. 346-356).

Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In J. Lebeaume, A. Hasni, & I. Harlé (Eds). *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie.* (pp 65-78) Bruxelles : DeBoeke.