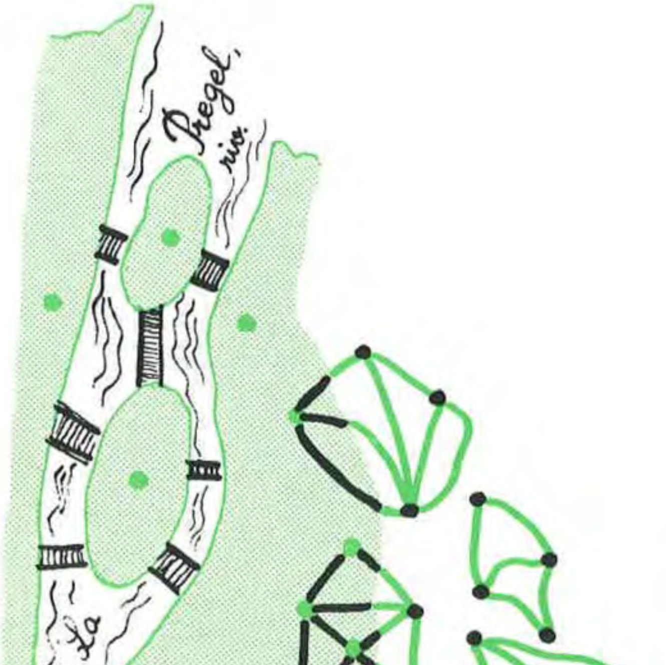
107



MATH ECOLE

MARS 1983
22e ANNÉE

MATH-ECOLE 107

22e ANNÉE Paraît cinq fois par an MARS 1983

Editorial

Libération, Structuration

Les deux mots-clés de la réforme de l'enseignement du français définissent les deux pôles de l'action éducative: encourager l'élève à s'exprimer, à s'affirmer, à échanger, à communiquer d'une part, contribuer à l'établissement d'un réseau cohérent de relations dans l'ensemble des connaissances que lui présente l'école d'autre part. Le premier ne va pas sans le second; le second n'est rien sans le premier.

Ces deux volets de l'apprentissage de la langue présentent d'évidentes convergences avec les idées que Math-Ecole tente de promouvoir depuis de nombreuses années. En mathématique, on parlera de recherche, d'exploration d'une situation, de création. C'est la face libération de l'activité mathématique, celle où l'enfant, l'élève, l'adulte se pose ses propres questions, détermine lui-même ses cheminements. La face structuration s'appelle acquisition de connaissances, consolidation, mise en ordre des découvertes.

En français, mis à part quelques voix extérieures à l'école, personne ne conteste l'importance de la libération de la parole. En mathématique, les réticences semblent nettement plus fortes au sein même du corps enseignant. Les activités de recherches paraissent un luxe, un superflu, alors qu'elles sont à la base même de ce qui rendra possible l'acquisition des connaissances.

Il n'y a pas plusieurs pédagogies parce qu'il y a plusieurs disciplines à enseigner. L'appropriation des connaissances et le développement des pouvoirs passent toujours par ce double mouvement simultané de libération et de structuration.

Il en va de même dans la formation de l'enseignant, initiale ou en cours d'emploi. Le maître a besoin de liberté pour s'exprimer, pour se réaliser, pour être utile à ses élèves. Mais cette nécessaire liberté fonctionne à vide en l'absence d'une solide structuration des connaissances notionnelles et des compétences didactiques. C'est la raison pour laquelle certains recyclages ne portent pas leurs fruits ou laissent des traces de désenchantement. On ne change pas un contenu indépendamment des coutumes pédagogiques en vigueur. On ne transforme pas sa pédagogie en ignorant les problèmes de contenu.

La liberté s'acquiert au prix de la compétence.

Raymond Hutin

VIIIe Forum suisse sur l'enseignement des mathématiques

par Roger Délez, animateur du groupe 3, SRP Genève

Sous les auspices de la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'Instruction publique (CDIP), le VIIIe Forum suisse sur l'enseignement des mathématiques s'est déroulé à la Chartreuse d'Ittingen (TG) les 29/30 novembre et 1er décembre 1982.

Le thème du Forum était:

«FINALITÉ DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DURANT LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE»

Ce Forum a regroupé 113 participants de 22 cantons: 72 délégués cantonaux
41 autres participants

Huit groupes de travail ont été formés sur place: 3 de langue française
5 de langue allemande

La présidence était assurée par M. Werner Heller, président du Groupe Mathématique.

Après un exposé de M. Jean Cardinet, chef du service de la Recherche de l'IRDP, sur l'«Adaptation des objectifs à la réalité», *les groupes se sont mis au travail.*

Voici les thèmes abordés dans les différents groupes:

1. *Objectifs de l'enseignement des mathématiques et pratiques du maître.*
2. *Passage des finalités à l'enseignement.*
3. *D'une activité pratique aux objectifs de l'enseignement des mathématiques.*
4. *Contribution de l'enseignement des mathématiques à l'épanouissement de la personnalité et à la maîtrise de la vie courante.*
5. *La mathématique n'est-elle que mathématique et l'enfant qu'une tête?*
6. *L'enseignement des mathématiques prépare-t-il à la vie?*
7. *Problèmes des élèves et élèves à problèmes dans l'enseignement des mathématiques.*
8. *De quelle quantité de mathématique avons-nous besoin?*

Un texte nous a grandement facilité la tâche et nous vous en donnerons un extrait au point 5: Il est tiré du Bulletin Coordination spécial CIRCE III donné en consultation dans les écoles romandes en 1982.

Rapport du groupe 3

D'une activité pratique aux objectifs de l'enseignement des mathématiques

1. Introduction

Contrairement à ce qui se fait habituellement, nous avons entrepris un travail *concret* nous permettant ensuite d'analyser les objectifs atteints après manipulations, représentations, recherches, analyse et mathématisation.

2. Présentation

Le matériel de base se composait de:
- petits cubes de bois de 2 cm d'arête;
- colle blanche;
- papiers divers: blanc, quadrillé, triangulé, hexagonal, losangé.

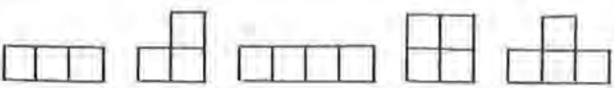
3. Consigne

> Construire avec 3 ou 4 cubes, collés face contre face, toutes les figures différentes.

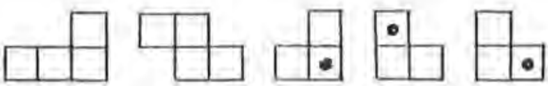
4. Evolution du travail

- Si chaque participant ne dispose que de 4 cubes au départ, il va se trouver confronté aux problèmes suivants:
  - Ai-je déjà fait telle ou telle pièce?
  - Combien y en aura-t-il?
  - Comment en être sûr?

Cette démarche impose tout naturellement une représentation graphique. Chacun peut alors choisir le papier qui lui convient le mieux. Il est évident que le papier quadrillé rencontre l'adhésion de la majorité.

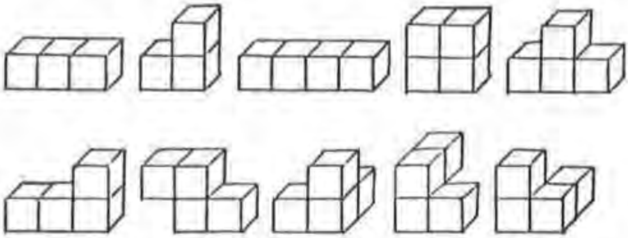


Au début, les pièces sont le plus souvent dessinées *en plan*.

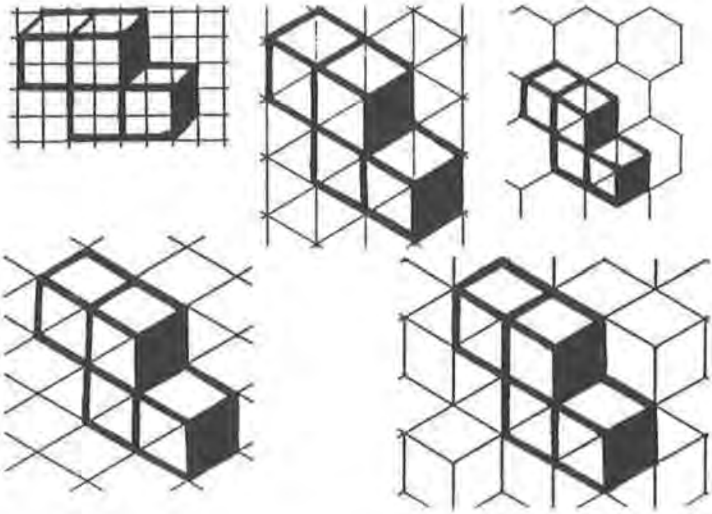


ici il faut un code!

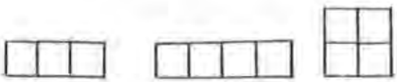
Puis en perspective:



Il n'est pas évident, au premier abord que les autres papiers peuvent convenir, pourtant chaque pièce peut parfaitement être représentée. En voici une:



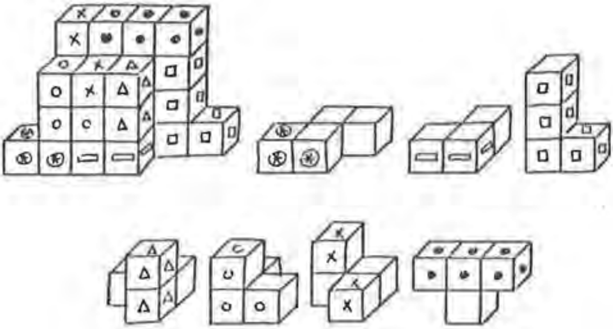
Pour la suite de l'activité, nous laissons de côté les 3 pièces régulières.



- Que peut-on faire des 7 pièces restantes?
- Des constructions plus ou moins compactes.

Il s'agit maintenant de construire une figure la plus compacte possible, de la représenter et d'établir un mode d'emploi afin que chacun puisse la reconstruire sur la base du schéma de montage.

En voici un exemple:



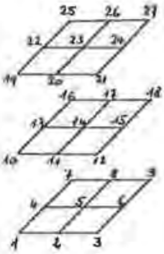
Après quelques manipulations, on prend de l'assurance et on émet des hypothèses.

Ex.: Ces pièces sont composées de 27 cubes, or $27 = 3^3$

• Pourrait-on recomposer un cube? Après quelques essais (car il faut vérifier l'hypothèse, on constate DE VISU que c'est possible!

En voici 4 sortes de représentations différentes (4 cubes différents).

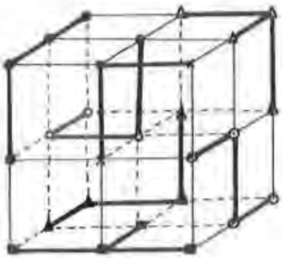
1.



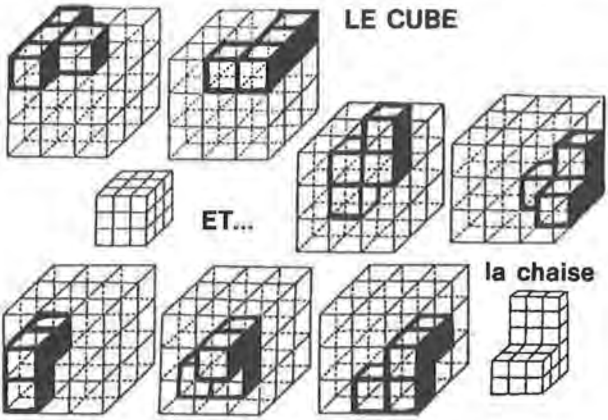
Pièces:

7 8 9 16
1 4 5 10
2 3 6 12
11 14 15 18
13 19 22 25
17 26 27 24
23 20 21

2.



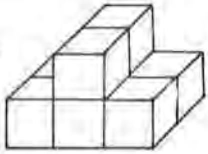
3.



4.

① *8 cubes, 2 pièces*

2 + 5



8

② *Le cube de 3 · 3 · 3*

– *1re notation*

pièces:	*couches:*	*places:*
I à VIII	1 à 3 de bas en haut	1 à 9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

VII	1 ; 7
	1 ; 8
	1 ; 4
	2 ; 7

I	1 ; 1
	1 ; 1
	2 ; 2

V	1 ; 5
	2 ; 4
	2 ; 5
	2 ; 1

VI	2 ; 8
	2 ; 9
	1 ; 9
	1 ; 6

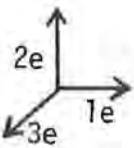
IV	1 ; 3
	2 ; 3
	2 ; 6
	3 ; 6

II	3 ; 4
	3 ; 1
	3 ; 2
	3 ; 3

III	3 ; 7
	3 ; 8
	3 ; 9
	3 ; 5

– *2e notation:*

A partir des coordonnées dans l'espace



VII	1 ; 1 ; 1
	2 ; 1 ; 1
	1 ; 1 ; 2
	1 ; 2 ; 1

I	1 ; 1 ; 1
	2 ; 3 ; 1
	2 ; 3 ; 2

V	2 ; 2 ; 1
	1 ; 2 ; 2
	1 ; 3 ; 2
	2 ; 2 ; 2

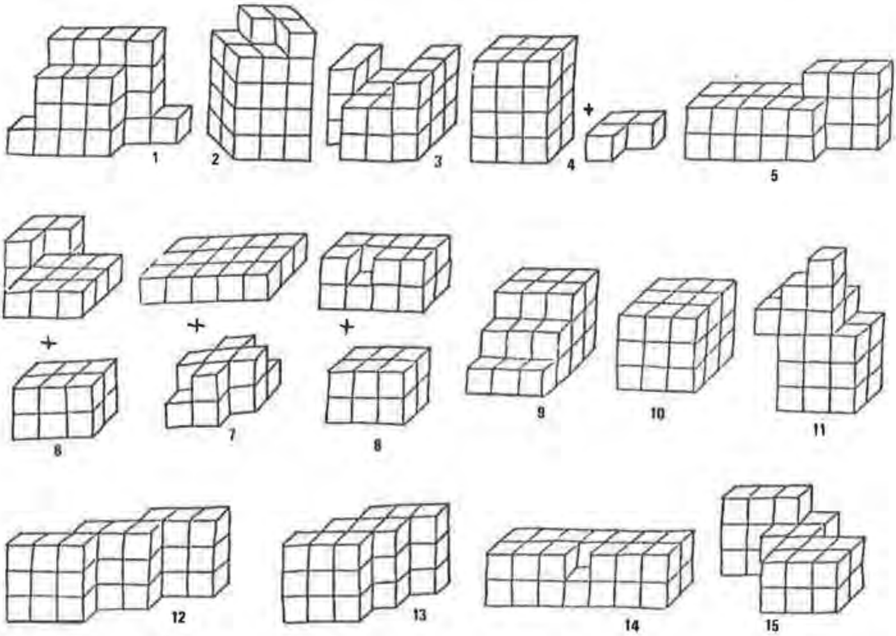
VI	2 ; 1 ; 2
	3 ; 1 ; 2
	3 ; 1 ; 1
	3 ; 2 ; 1

IV	3 ; 3 ; 1
	3 ; 2 ; 2
	3 ; 3 ; 2
	3 ; 2 ; 3

II	1 ; 2 ; 3
	1 ; 3 ; 3
	2 ; 3 ; 3
	3 ; 3 ; 3

III	1 ; 1 ; 3
	2 ; 1 ; 3
	3 ; 1 ; 3
	2 ; 2 ; 3

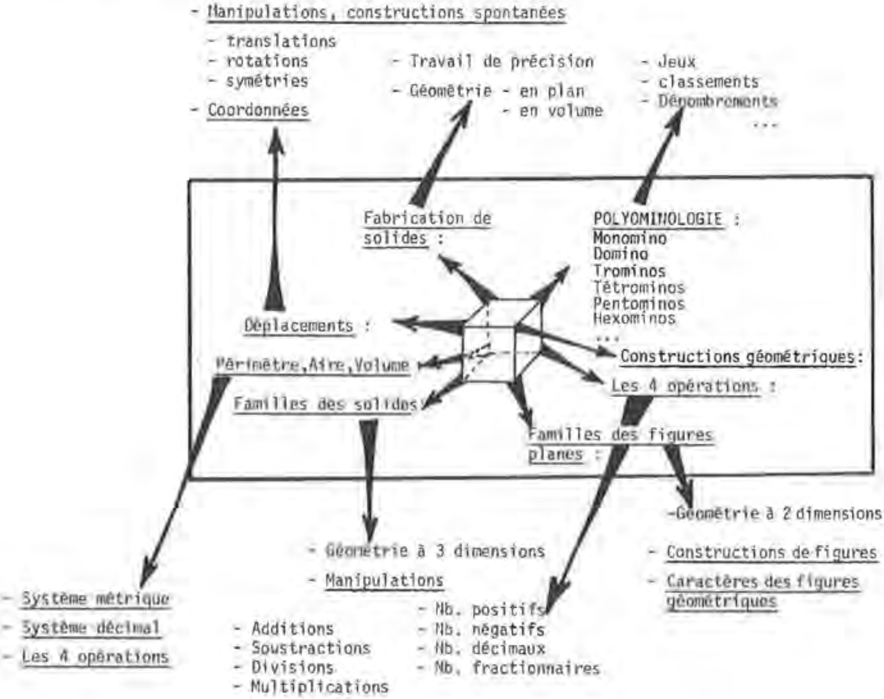
Cette recherche nous a amené à construire un certain nombre de modèles compacts dont *voici quelques exemples:*



Sur la base de ces 15 modèles nous avons entrepris de nouvelles recherches relatives au *périmètre* de la base, à *l'aire* (surface) recouverte par la base de l'objet, au *volume* occupé par l'étage inférieur.

- Périmètre en arêtes ou en cm
- Aire en carrés ou en cm^2
- Volume en cubes ou en cm^3

Voici encore d'autres pistes que l'on pourrait travailler en ayant comme matériel de base: DES CUBES. *Ce schéma n'est pas exhaustif.*



Voilà, de manière très succinte, le reflet de notre activité concrète. Ce reflet n'est en rien comparable à ce que nous avons vécu et ne peut servir de trame à une leçon en ce sens que, dès le début, il faut se laisser guider par sa propre imagination. A chaque stade de recherche, il faut avoir présent à l'esprit le leitmotiv:

«QUE PUIS-JE FAIRE AVEC CELA?»

Pendant ces 3 jours de Forum, aucun participant n'a cessé de manipuler ces objets pour CRÉER quelque chose! La manipulation des objets peut aussi simplement provenir d'une baisse d'intérêt pour la discussion ou d'une immobilité prolongée... Ne veut-on pas non plus s'«approprier» entièrement l'objet?

5. Analyse des objectifs à la lumière de l'expérimentation:

- *La mathématique est action d'analyse du nouveau, réel ou imaginaire.*
- *Elle est l'ensemble des outils créés jusqu'à ce jour par et pour cette action.*

LES OBJECTIFS GÉNÉRAUX DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Nous pensons que si nous réussissons à donner l'occasion aux élèves de faire des mathématiques telles que décrites ci-dessus, nous visons les objectifs de l'école.

En effet, cela signifie:

1. Que leur curiosité aura été aiguisée, ainsi que leur envie de la satisfaire.
2. Ils auront, seuls ou en groupe, été confrontés à des situations concrètes,
3. auront recherché les moyens par lesquels se les approprier,
4. soit de les coder en une formulation saisissable pour eux et pour leurs camarades,
5. auront fait des hypothèses, se seront donné les moyens de les vérifier, parfois au prix d'un long effort,
6. ils auront imaginé
7. modifié leur point de vue,
8. argumenté, critiqué, induit, déduit,
9. fait des abstractions, analysé.
10. Ils auront enfin découvert en eux quels moyens développer pour faire face à une situation nouvelle, acquis tout au long de ces activités la maîtrise de quelques outils de base.

caractère

coopération

aptitude à la recherche

compréhension

savoir-faire

échanges

aptitude à l'analyse, à la synthèse

créativité

être critique

mieux se connaître
développer une personnalité autonome

moyens d'action/
connaissances

Ainsi, l'élève apprend les mathématiques lorsque:

I. le maître donne l'occasion à l'enfant, le plus souvent possible, de développer ses multiples facultés pour vivre toutes les phases d'une recherche et acquérir ainsi le caractère et les aptitudes que cela nécessite.

II. Par cette activité essentiellement, le maître permet à l'enfant d'acquérir de manière solide quelques outils mathématiques reconnus de base.

Après la partie pratique, nous avons observé attentivement les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques proposés dans le document CIRCE III et analysé à fond notre recherche. *Nous retraçons ici, en style télégraphique, les différents point de vue, affirmations, doutes, questions émis dans notre groupe.*

Ce n'est pas un inventaire mais un moyen de poursuivre notre réflexion.

1. La valorisation du travail dès l'école enfantine, pourrait être intégrée jusqu'au niveau secondaire.

   A l'école enfantine, tout apprentissage passe par la manipulation d'un matériel concret, dans les degrés primaires également. Comment ne pas envisager l'appréhension de matériel concret au niveau secondaire pour matérialiser par exemple le théorème de Pythagore ou les polynômes tels que

   $$(a + b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$$
   $$(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3$$

   Il semble que ce qui est concrètement démontré et construit reste mieux en mémoire car on sait de quoi on parle, et on connaît l'outil que nous employons.

   La structure de la pensée de l'élève évolue, faut-il en rester au même niveau de concrétisation?

   La curiosité, qui devrait être une conviction personnelle du maître, serait un moyen pour atteindre un autre objectif (Ex.: dessin technique, plan, perspective, élévation).

   Donner envie de réfléchir est un objectif à long terme: le matériel est une bonne motivation et la construction concrète est très favorable à la recherche.

   Cette recherche est merveilleuse car on fait de la mathématique en ayant le CONCRET sous les yeux. Avec le matériel, on a envie de faire quelque chose, c'est un objectif affectif.

- Au niveau secondaire, il semble qu'il y ait un certain dédain pour le matériel. Quelles en sont les causes? le temps trop morcelé? la manipulation n'est-elle pas fondamentale? les programmes, dans le domaine des notions, sont-ils trop denses?

2. Ce travail a permis de développer une démarche, des stratégies, des représentations personnelles.

   Cette activité favorise à la fois le passage du concret à la représentation et inversément.

   Chaque situation peut privilégier soit le travail individuel soit en groupe.

   Voici une affirmation tranchée d'un participant, à méditer:

   «Une mathématique non appliquée à la réalité ne sert à rien, à personne, sinon aux mathématiciens». Ici on expérimente des problèmes concrets.

   Des bacheliers mis devant une situation concrète éprouvent des difficultés, un malaise, dus à 2 critères:

   – On est pressé dans les études et on passe très vite à l'abstraction.

   – On voit trop rapidement plusieurs notions sans y revenir par la suite.

   On peut aussi parler de situations concrètes en utilisant comme matériel des nombres réels ou des notions mathématiques.

   - Part-on généralement dans l'abstrait trop tôt? Comment y remédier?

3. L'école a comme tâche de donner à l'enfant l'occasion de réfléchir.

   C'est le propre de l'homme que de vouloir s'approprier ce qui l'entoure. Dans notre activité, chacun d'entre nous a voulu s'approprier le cube.

   - Comment créer le besoin, l'envie de s'approprier une partie de la mathématique?

4. Dans le domaine de la communication, ce genre de travail est important car il favorise la communication verbale et écrite.

   - Comment communiquer avec un interlocuteur?

5. Formuler des hypothèses... est-ce un objectif ou un moyen didactique? On peut anticiper sur le résultat. Laisser à l'élève le droit de formuler des hypothèses est désécurisant pour l'enseignant, cependant il faut le lui permettre afin d'aiguiser son raisonnement.

   - Est-ce important? Utilise-t-on cet objectif à l'école? L'anticipation du résultat est-elle un facteur déterminant dans l'apprentissage si l'on veut que les acquisitions restent?

   Il faut encore imaginer une méthode de travail, ce qui demande du temps. Il est nécessaire de trouver un équilibre entre le temps de la recherche (obj. cat. I) et les notions (obj. cat. II).

Les difficultés principales dans le secondaire résident dans le fait qu'il faille raccourcir le temps de la manipulation, de la recherche pour arriver au but qui, actuellement, est seul mesurable.

- Comment étalonner, évaluer la manipulation, la recherche si on ne cherche pas de nouveaux critères d'évaluation?
- Comment prouver qu'on atteint les objectifs qu'on se fixe?

6. L'imagination doit prendre un rôle prépondérant:
   - Que peut-on faire dans telle ou telle situation? Quels sont les outils dont j'ai besoin?
7. Après discussion on peut adopter une autre attitude, un autre moyen d'appréhender la situation.
   - Doit-on absolument garder son point de vue, sa manière de voir?
8. Critiquer un travail ne signifie pas «démolir» mais critiquer doit être analysé dans le sens de «construire».
   - Ne doit-on pas, dans la vie, faire valoir un point de vue?
9. Il est nécessaire aussi de résumer, d'abstraire, d'analyser...
   - Pour soi-même ne peut-on pas simplifier un code, une manière de faire? Et pour le communiquer aux autres que doit-on faire?
10. Tout au long du travail de recherche, l'enfant aura développé des **méthodes* de travail pour passer du tâtonnement au travail systématique. Il aura acquis une méthode.
    - Ne pourrait-on pas mettre plus l'accent sur les objectifs comportementaux?

    * Cette affirmation paraît ambitieuse: la méthode peut en rester au tâtonnement renouvelé de cas en cas. Il s'agit plutôt d'une stratégie pouvant engendrer la méthode.

6. De l'analyse des objectifs à nos thèses:

- Faut-il laisser du temps à la recherche?
  - Dans ce cas, il serait nécessaire de renoncer à évaluer des notions dans l'immédiat.
  - Les comportements n'ont pas encore été mis en route.
  - Les objectifs n'ont pas encore été réellement appliqués.
- Est-ce réellement ces objectifs-là que nous voulons?
- A quoi utilise-t-on les math?
- Comment faire passer ces objectifs?
  - On peut toujours philosopher mais mieux vaut passer par une <u>SITUATION.</u>

On connaît donc un point de départ!

Le groupe semble d'accord sur l'importance des objectifs généraux de la catégorie I qui apparaissent toujours en premier dans les manuels mais qui deviennent ensuite les parents pauvres.

Au point de vue des matières à enseigner, on dit volontiers qu'il y en a trop pour qu'on puisse agrémenter par des situations, des manipulations, des problèmes ouverts, cela étant dû à la pression – du milieu professionnel
– du milieu politique.

Une diminution des programmes entraîne la question: «Assurer l'essentiel, mais pour qui?»

7. Nos thèses:

① Les objectifs de la catégorie I sont les plus importants à atteindre ce qui implique:

a) Les questions suivantes:

- Comment faire pour que ces objectifs soient reconnus comme prioritaires par les enseignants eux-mêmes? (ex. formation continue).
- Comment les réaliser dans la classes? (ex. situations, manipulations problèmes ouverts).
- Quelles mesures prendre au niveau politique pour qu'ils deviennent prioritaires?

b) Les tâches suivantes:

- Entreprendre une étude de points de départ pour les atteindre.
- Entreprendre une étude sur l'évaluation de ce type de travail.
- Trouver les possibilités d'évaluer ces objectifs afin de les valoriser.

② Les objectifs de la catégorie I étant les plus importants à atteindre, il faut donner le temps de développer les aptitudes nécessaires à la recherche en allégeant le corpus notionnel des programmes.

8. Discussion finale du groupe:

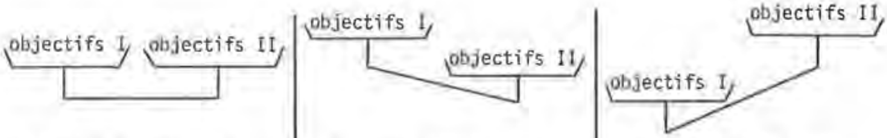
- Pour savoir si tous les objectifs sont atteints, il faudrait faire le travail suivant pour chaque phase de la recherche.

Ex.: au début (assemblage des cubes): Combiner, envie de savoir si on les a tous, s'assurer qu'on les a tous, faire un plan pour y arriver, établir une stratégie, l'améliorer, ...

- Nous constaterons alors qu'il est impossible de dresser une liste exhaustive des objectifs!
- Il est stupéfiant de constater que la majorité des participants de chaque groupe est d'accord avec l'idée que les objectifs de la catégorie I sont les plus importants, ce qui est contraire à la pratique de l'école en général.
- Il faudrait que le FORUM affirme que ce sont bien les objectifs de la catégorie I qui sont importants.

9. Reflet des tendances du groupe:

Dans notre groupe de travail nous avons relevé les tendances suivantes:



2 participants sont favorables à l'équilibre.

2 participants sont plutôt favorables à une plus grande importance des objectifs notionnels (obj. II).

6 participants sont d'accord pour favoriser davantage les obj. comportementaux (obj. I).

Enigme

Voici le nombre: ? ? ?

Si tu le divises par 4 ou par 8, il reste 1.

Si tu le divises par 5 ou par 6, il reste 3.

Si tu le divises par 3 ou par 9, le reste est 0.

Enfin, si tu le divises par 7, il reste 6.

Quel est ce nombre?

Pascal et le traité du triangle arithmétique

Tout le monde ou presque connaît les «Pensées» de Pascal. Elles ont fait le bonheur des éphémérides et causé quelque souffrance pendant les heures de dissertation. On connait moins, l'histoire des sciences n'étant guère enseignée, ses écrits mathématiques.

Né en 1623, mort en 1662, son génie pour la géométrie avait été remarqué, selon sa sœur, dès l'âge de douze ans. C'est vers 1642 qu'il imagine, pour aider son père dans ses calculs, sa fameuse machine à calculer, la première de ce type, semble-t-il.

S'intéressant à l'analyse combinatoire il développe, en 1654, la théorie du triangle arithmétique qu'on appellera par la suite le triangle de Pascal.

On peut approcher le triangle de Pascal de différentes manières. Celle que nous proposons ici et qui paraîtra certainement inhabituelle, c'est d'en faire une activité visant à développer la capacité de lecture. Dans toutes les classes, on reproche aux élèves leurs lacunes lorsqu'il s'agit de lire une consigne, de saisir le contenu de l'énoncé d'un problème. Que fait-on, réellement, pour aider l'enfant ou l'adolescent dans cette démarche?

Pourquoi ne pas utiliser leur goût pour les choses anciennes en les confrontant avec ce qui va suivre?

Pour en faciliter la lecture, nous nous autorisons le remplacement des lettres grecques par des minuscules.

Définitions

J'appelle Triangle arithmétique une figure dont la construction est telle:

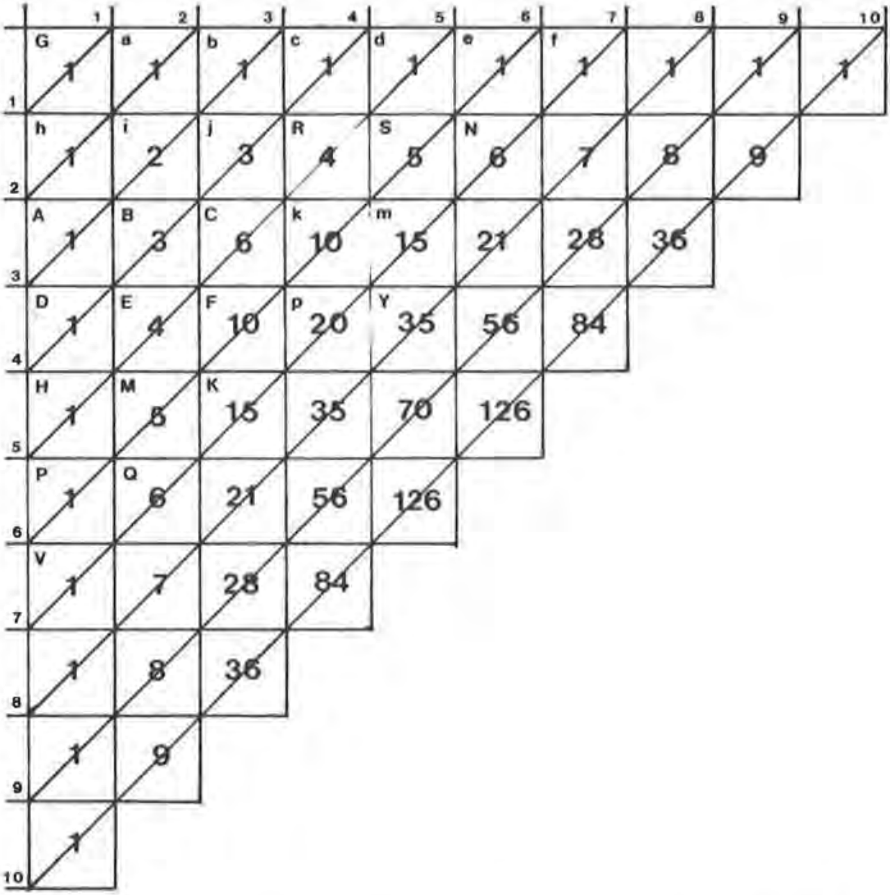
Je mène d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre GV, Gf, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues, à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc.; et ces nombres sont les *exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans chacune des deux lignes par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base*.

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est la base.

Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant de triangles et de bases.

Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules*.



Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite s'appellent cellules d'un même rang parallèle, comme les cellules G, a, b, etc. ou h, i, j, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas s'appellent cellules d'un même rang perpendiculaire, comme les cellules G, h, A, D, etc., et celles-ci, a, i, B, etc. Et celles qu'une même base traverse diagonalement sont dites cellules d'une même base, comme celles qui suivent, D, B, j, c, et celles-ci, A, i, b.

[...]

Il est bien facile de démontrer que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallèle, surpasse de l'unité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F est dans le troisième rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle, et dans la sixième base, et ces deux exposants des rangs 3 + 4 surpassent de l'unité l'exposant de la base 6, ce qui vient de ce que les deux côtés du triangle sont divisés en un pareil nombre de parties; mais cela est plutôt compris que démontré.

Cette remarque est de même nature, que chaque base contient une cellule de plus que la précédente, et chacune autant que son exposant d'unités; ainsi la seconde *h a* a deux cellules, la troisième *A i b* en a trois, etc.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule qui est à l'angle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, les autres sont forcés; et pour cette raison il s'appelle le *générateur* du triangle. Et chacun des autres est spécifié par cette seule règle.

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. Ainsi la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E, et ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considère les triangles dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

[Nous présentons ici les conséquences formulées par Pascal; en revanche, pour des raisons didactiques, la présentation des exemples est simplifiées par rapport au texte initial.]

Conséquence première

En tout triangle arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallèle et du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la génératrice.

Exemple: $h = G + O = G$
$A = h + O = h$
$a = G + O = G$

Conséquence seconde

En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.

Exemple: $k = R + j + i + h$

Conséquence troisième

En tout triangle arithmétique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, comprises depuis son rang parallèle jusqu'au premier inclusivement.

Exemple: $C = B + i + a$

Conséquence quatrième

En tout triangle arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes celles qui sont perpendiculaires exclusivement.

Exemple: $m - G = R + j + i + h + c + b + a + G$

Avertissement: J'ai dit dans l'énonciation: chaque cellule diminuée de l'unité, parce que l'unité est le générateur: mais si c'était un autre nombre, il faudrait dire: chaque cellule diminuée du nombre générateur.

Conséquence septième

En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente.

Exemple: $P + M + F + k + s + e = 2\ (H + E + C + R + d)$

Conséquence huitième

En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double qui commence par l'unité dont l'exposant est le même que celui de la base.

Car la première base est l'unité
La seconde est double de la première, donc elle est 2
La troisième est double de la seconde, donc elle est 4
Et ainsi à l'infini.

Avertissement: Si le générateur n'était pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même chose serait vraie: mais il ne faudrait pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'unité, savoir 1, 2, 4, 8, 16, etc., mais ceux d'une autre progression double à commencer par le générateur 3, savoir 3, 6, 12, 24, 48, etc.

Conséquence neuvième

En tout triangle arithmétique, chaque base diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précédentes.

Avertissement: Si le générateur était autre que l'unité, il faudrait dire: chaque base diminuée du générateur.

...

L'exploitation pédagogique de ce texte peut s'effectuer à plusieurs niveaux avec ou sans l'aide du maître selon l'âge des élèves:

- *Lecture du texte ou présentation orale simplifiée de ce même texte en vue de la construction d'un triangle arithmétique.*
- *Présentation du triangle ayant pour générateur l'unité et demande de construction d'un triangle ayant pour générateur 2, 3, 5, 10 ...*
- *Lecture d'une des conséquences tirées par Pascal et recherche, dans des triangles différents, de plusieurs exemples permettant de les vérifier.*
- *Etc...*

Un lecteur de Math-Ecole aurait-il déjà fait des essais de ce genre? La rédaction serait heureuse de le connaître et de publier un compte rendu de ses expériences.

R.H.

Un peu de logique... avec Lewis Carrol

*Le petit Archimède * (dont nous ne pouvons que recommander la lecture à tout enseignant) poursuit ses publications riches et intéressantes. Le numéro double 88-89 est entièrement consacré à Lewis Carrol dont l'imagination débordante mériterait une meilleure exploitation. Plutôt que de disserter sur les aspects mathématiques de l'œuvre, nous préférons vous allécher avec deux courts extraits:*

Essayez de faire une autre Soustraction: «Prenez un chien; ôtez-lui un os. Que reste-t-il?»
Alice réfléchit: «L'os ne restera pas, bien sûr, si nous l'ôtons... le chien ne restera pas; il viendra essayer de me mordre... et je suis certaine que, *moi*, je ne resterai pas là, à attendre qu'il le fasse.»
«Vous pensez donc qu'il ne restera rien?» demanda la Reine Rouge.
«Oui, je crois que c'est là la bonne réponse.»
«Vous vous trompez, comme d'habitude, dit la Reine Rouge; il restera la patience du chien.»
«Mais je ne vois pas comment...»
«Eh bien, écoutez un peu! s'écria la Reine Rouge. Le chien perdra patience, n'est-il pas vrai?»
«C'est, en effet, possible», répondit prudemment Alice.
«Alors si le chien s'en va, s'exclama la Reine, la patience qu'il aura perdue restera.» (suite p. 28)

* ADCS - Abonnement - 61 rue St-Fuscien 80000 Amiens, 10 numéros par an, 50 FF.

Un essai d'observation globale

par Raymond Hutin

L'évaluation du travail des élèves reste un problème difficile bien qu'il soit très actuel et suscite de nombreuses publications. Mais les mérites ou les défauts respectifs de l'évaluation formative et de l'évaluation sommative, des tests ou des grilles d'observation, de l'évaluation par objectifs ou de l'approche interactive, provoquent plus de discours que de réalisations concrètes utilisables dans la pratique quotidienne de la classe.

Avec un soupçon de pessimisme, Jean Cardinet écrit [1]:

> «Pour pouvoir justifier vis-à-vis des parents les notes attribuées aux élèves, les maîtres sont heureux d'utiliser parfois des épreuves de références. Des tests étalonnés sont aussi utiles pour fonder auprès de l'administration des demandes de redoublement ou de placement. Ces évaluations ont surtout pour but de faire un bilan ou d'affiner une prédiction. Leur utilité pour l'enseignement est minime. Il nous a été difficile de trouver des cas où une décision d'adaptation pédagogique ait résulté de l'observation des résultats d'un élève...»

Si cette position était véritablement celle de la majorité des enseignants, cela signifierait que ceux-ci ne s'intéressent guère aux performances de leurs élèves dans la préparation de leurs leçons mais qu'ils se bornent à suivre un programme pré-établi. Notre propre pratique des classes nous permet d'être nettement plus optimiste. La plupart des enseignants que nous connaissons suivent attentivement les progrès des enfants qui leur sont confiés et ajustent ou différencient les exercices en fonction des réussites et des échecs recensés. Mais peut-être n'utilisent-ils pas les instruments sophistiqués que les tenants de l'évaluation formative voudraient leur voir appliquer. A cet égard, nous sommes partiellement en accord avec J. Cardinet qui écrit [2].

> «Même si des instruments d'analyse étaient mis à leur disposition, les maîtresses n'auraient pas le temps de les utiliser pour guider une individualisation de leur enseignement...
> ... De plus, la préparation, la correction, l'analyse d'épreuves pour chaque étape d'avancement de chaque discipline prendraient au maître un temps énorme hors de la classe. Nous avons observé que des institutrices qui avaient préparé une épreuve formative dans le cadre d'un séminaire universitaire ne parviendraient même pas à la réutiliser les années suivantes, faute de temps.»

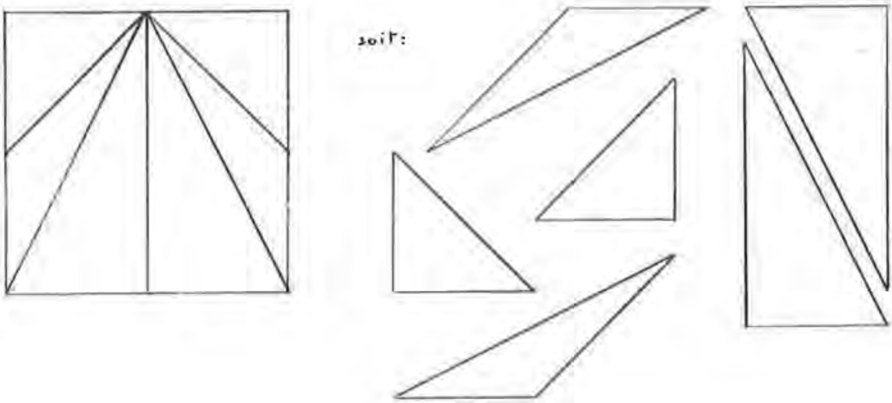
[1] Education et recherche, 4. Jahrgang, Heft 3/82, p. 290.
[2] Ibidem.

On peut néanmoins se demander si l'une des sources de difficulté ne vient pas du fait que l'on cherche à effectuer des évaluations formatives descendant bien trop dans le détail des notions et que l'on souhaite employer des instruments d'évaluation permettant, comme dans les épreuves de sélection, d'attribuer un score très précis à chaque élève.

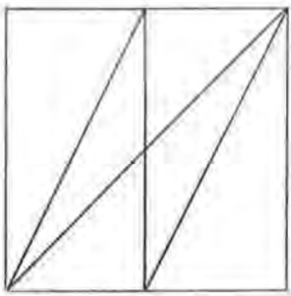
Pour essayer de contourner la difficulté, nous avons tenté dans quelques classes de 3e année primaire, une expérience que nous ne situerons pas vraiment dans le cadre de l'évaluation formative au sens strict mais qui semble susceptible, tout en constituant une activité d'apprentissage pour les élèves, d'apporter un grand nombre d'informations sur le fonctionnement général de la classe et sur les démarches individuelles des enfants dans un laps de temps se situant entre une et deux heures selon les classes.

Le matériel

Le matériel est très simple. Il se compose de triangles obtenus par découpage d'un carré de 12 cm de côté de la manière suivante:



La collection comporte donc trois triangles différents à deux exemplaires chacun. On peut aussi l'obtenir simplement par un autre découpage:



Le travail étant prévu pour des groupes de trois ou quatre élèves, quatre ou cinq collections de ces figures, découpées dans du bristol léger de couleurs différentes, sont rassemblées en vrac dans une enveloppe. On prépare une enveloppe par groupe.

Les observations

Observation 1. L'engagement du travail, le fonctionnement du groupe.

Consigne: «Dans cette enveloppe, vous trouverez des pièces de différentes couleurs. Chaque membre du groupe doit prendre toutes les pièces d'une même couleur.»

L'observation porte sur la manière dont le groupe s'organise, l'absence de dispute pour la possession du matériel, la coopération dans le tri, la capacité de laisser sans autre de côté la collection supplémentaire.

En d'autres termes, il s'agit de répondre aux deux questions suivantes:

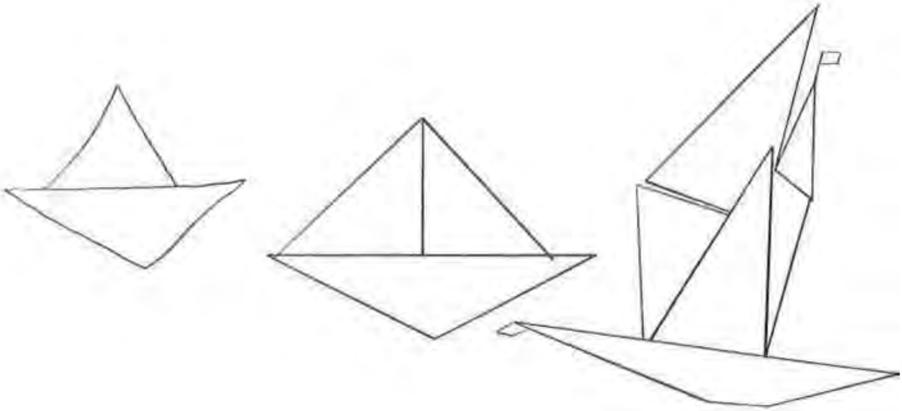
- La classe est-elle capable de s'organiser sans perte de temps pour un travail en groupes?
- Quels sont les enfants qui posent problème à ce niveau?

On constate, par exemple, qu'un enfant cherche à s'approprier plus de matériel qu'il n'est demandé, qu'un autre ne remarque pas qu'il a pris cinq pièces au lieu de six, etc.

Observation 2. La création de figures libres
La capacité de laisser une trace écrite des figures obtenues.

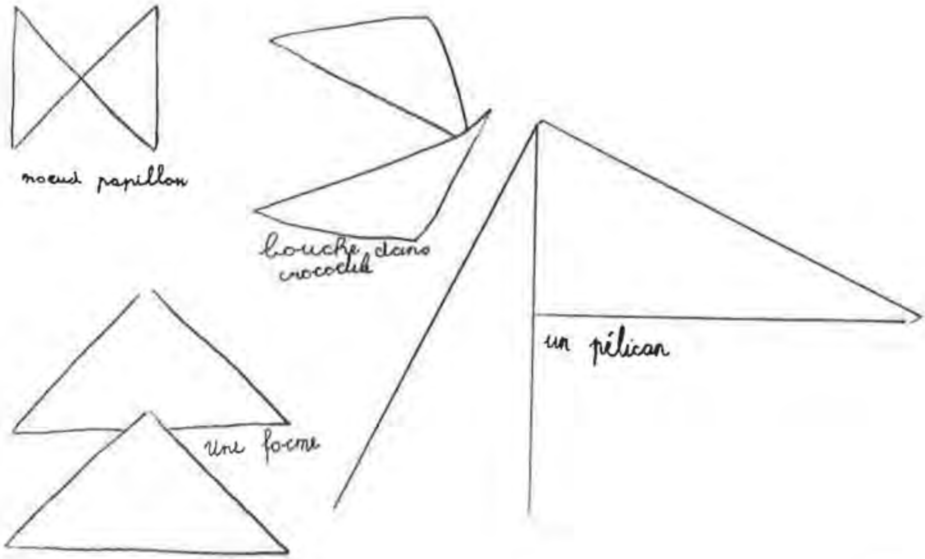
Consigne: «Avec les six figures (formes, triangles) que vous avez devant vous, formez plusieurs dessins différents. Pour vous rappeler ce que vous avez fait, dessinez-le sur une feuille de papier.»

L'observation porte d'abord sur les types de figures réalisées par les enfants. Certains d'entre eux se bornent à assembler deux éléments, d'autres utilisent chaque fois toute la collection. Par exemple, le bateau revient souvent mais sous des formes très diverses.



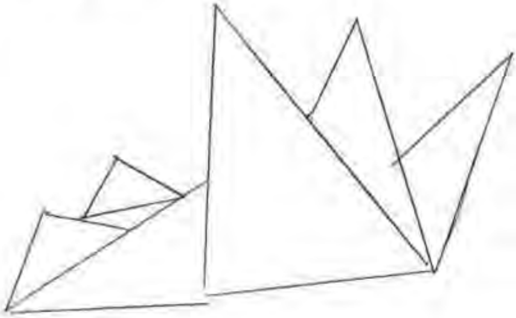
Cet exemple montre bien la variation du niveau d'élaboration.

Avec les mêmes éléments, certains élèves sont plus imaginatifs que d'autres.

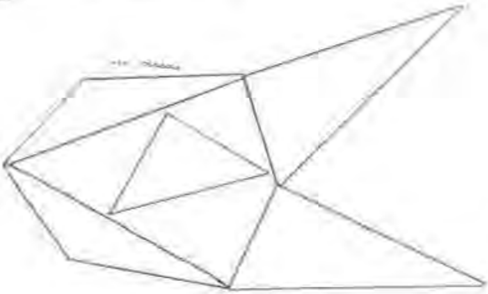


Dans les constructions plus complexes, nous trouvons par exemple:

Un glacier



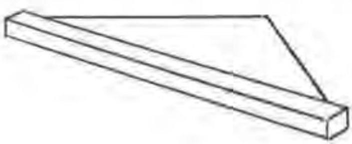
un poisson mangé



L'observation porte aussi sur la manière dont sont réalisés les dessins. Certains enfants ne se soucient pas de respecter le nombre ou la forme des pièces. Ils dessinent librement des triangles ressemblant à peu près aux figures proposées. D'autres utilisent ces pièces comme chablons et essaient d'en respecter scrupuleusement le contour.

Laurent a disposé les six pièces sur sa feuille de papier et a marqué d'un point les sommets des triangles. Mais, comme il enlève toutes ses pièces à la fois, il se trouve en présence de dix-huit points qu'il ne parvient pas à relier; il n'a pas l'idée de remettre les pièces en place pour contrôler.

Sonia rencontre une autre difficulté. Elle essaie de tracer, avec sa règle, une droite ayant exactement la longueur d'une des pièces. Elle pose donc la figure contre sa règle.



Elle se trouve alors embarrassée parce qu'elle voudrait passer son crayon entre la règle et le triangle. L'enseignant lui suggère de marquer d'abord par un point les extrémités du triangle mais cette proposition s'avère prématurée car la fillette n'en voit pas l'utilité. Elle renonce plutôt à sa première idée et se met à dessiner des triangles à main levée.

Observation 3. L'expression orale.

Reprenant un instant la classe en travail collectif, l'enseignant demande aux élèves de s'exprimer sur la nature des pièces qu'ils utilisent. L'activité précédente leur a permis de faire des observations sur la forme et la dimension des triangles. La formulation orale de ces constatations varie fortement d'un enfant à l'autre.

Observation 4. L'expression écrite.

Dans la phase décrite sous Observation 2, il a été demandé que les enfants écrivent à côté de leurs dessins le nom des objets qu'ils ont voulu représenter. Dans l'une des classes, par exemple, on relève que deux enfants sur vingt seulement ont commis des erreurs d'ordre orthographique. Dans une autre classe, le nombre de «fautes» est nettement plus élevé.

Après avoir conduit le travail Observation 3, la consigne suivante est formulée:

«Vous m'avez dit beaucoup de choses intéressantes au sujet du matériel que vous avez sous les yeux. Vous avez très bien vu comment il est construit. Pourriez-vous le redire par écrit?
Ecrivez sur votre feuille deux ou trois phrases commençant par:
– J'ai vu... (Les mots «j'ai vu...» sont inscrits au tableau noir)»

Voici quelques productions de l'une des classes:

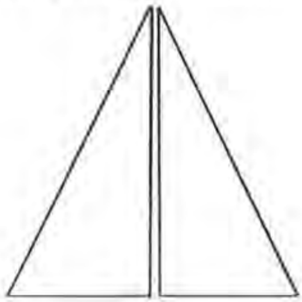
- J'ai vu un triangle.
- J'ai vu un triangle plas et un triangle normale.
- J'ai vu qu'il y avait deux foit la même forme.
- J'ai vu un triangle plat.
- J'ai vu qu'on peux faire beaucoup de formes.
- J'ai vu que c'était des triangles mes pas la même formes.
- J'ai vu qui avait beaucoup de formes.
- J'ai vu une maison, un bateau, des triangles.
- J'ai vu que il y a vait des formes qui son long et large.
- J'ai vu que les formes étaient de différentes couleurs.
- Iena qui son plus gran et ienna qui son plus petit.
- Les triengle son pa touse la maimchause.
- J'ai vu qu'un pièce pizzar avait une sairtaine forme et quand on met un triangle à côté sa fesais la maime un plus grande.

A côté de l'analyse de ces réalisations sur le plan de la syntaxe et de l'orthographe, on retiendra le volume produit et la plus ou moins grande facilité avec laquelle les enfants entreprennent cette tâche. D'une manière générale, nous avons été frappé par l'aisance des enfants dans cet exercice. Ils manifestent presque tous un plaisir évident à écrire quelque chose, même si leur technique est encore chancelante.

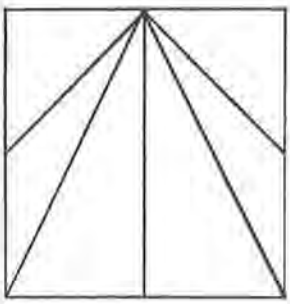
Observation 5. Les arrangements spatiaux.

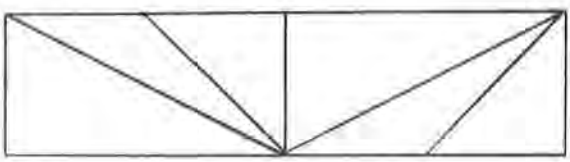
Consigne: «En utilisant vos six triangles, essayez de former un grand carré puis un grand rectangle».

En troisième année, cet exercice s'avère difficile. On observe avec intérêt la démarche de construction. Il convient de noter que presque tous les enfants cherchent une approche par symétrie et commencent par utiliser les deux plus grands triangles.



Ceux qui réussissent à former le carré parviennent sans difficulté au rectangle équivalent.





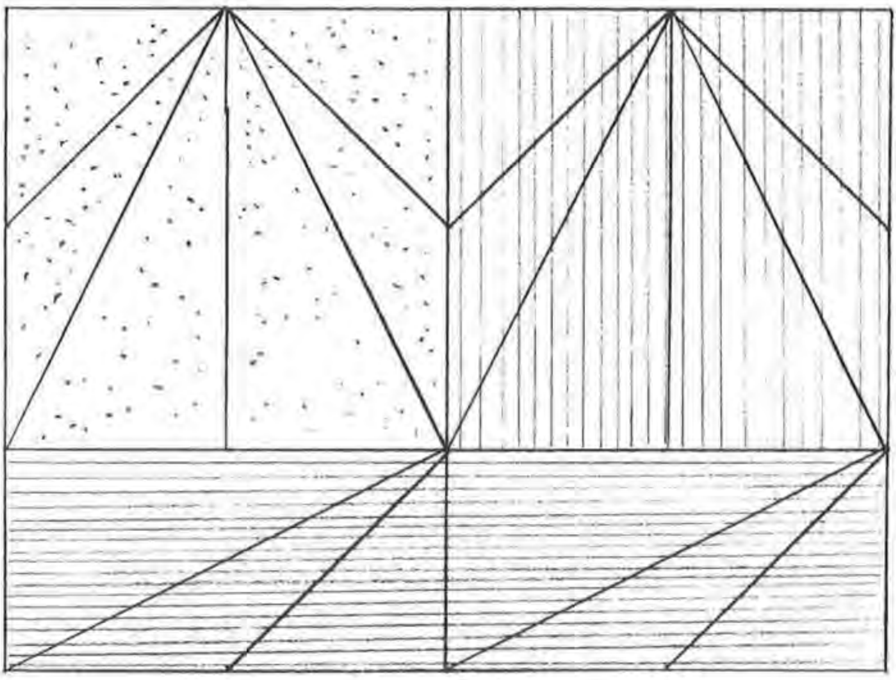
Relevons encore que la réussite du voisin ne semble pas aider l'enfant qui tâtonne.

Observation 6. Le pavage.
La coopération entre élèves.

Lorsque chaque enfant, éventuellement avec l'aide du maître, a obtenu le carré de 12 × 12. Une feuille sur laquelle est tracé un rectangle de 18 × 24 est distribuée à chaque groupe.

Consigne: «– Essayez de recouvrir ce grand rectangle avec vos pièces. Combien faut-il de «grands» carrés pour cela?»

Le résultat attendu est donc le suivant:



L'observation porte sur la manière par laquelle les élèves exécutent la tâche et la façon dont ils se comportent pour obtenir le résultat demandé.

En général, ils n'ont pas l'idée de transporter sans le défaire un de leurs carrés sur le rectangle. Ils prennent les pièces une à une et, comme ils les posent à tour de rôle, mélangent les couleurs. La difficulté de la tâche les conduit souvent à échanger ensuite les pièces pour réunir celles qui sont de même couleur. La situation est plus complexe si le groupe comprend quatre enfants car il faut que l'un d'entre eux accepte de ne pas utiliser son propre matériel.

Les avantages et les limites de l'exercice

Les activités décrites ci-dessus offrent une bonne possibilité d'évaluation globale du fonctionnement de la classe et permettent, en raison des traces écrites laissées par chaque enfant, une analyse à posteriori de leurs productions.

En revanche, il n'est pas possible que le maître soit attentif à la démarche adoptée par chacun des élèves. Nous suggérons que, dans un exercice de ce genre, l'enseignant focalise son attention sur les quatre élèves de l'un des groupes. D'autres activités du même genre permettront d'observer plus particulièrement d'autres enfants.

L'ensemble de l'activité constituant aussi une occasion de recherche, de création et de production écrite, elle fournit une bonne situation d'apprentissage. Il n'y a donc pas de perte de temps à cause de l'évaluation.

L'examen des performances des élèves apporte des renseignements intéressants en vue des travaux ultérieurs à conduire avec l'ensemble de la classe et des remédiations à engager sur tel ou tel point avec certains enfants.

Il ne paraît guère concevable d'attribuer une note (une note de quoi?) aux enfants après un tel exercice qui a essentiellement pour but de renseigner sur le niveau moyen de performances de la classe ainsi que sur les réussites et les lacunes de certains élèves.

C'est en ce sens que nous inscririons cette tentative dans le cadre d'une évaluation formative au sens large des termes. D'autres travaux, plus spécifiques, seront utilisés pour renseigner les parents.

Paradoxe

Nous sommes tous d'accord, n'est-ce pas, pour considérer que la meilleure horloge est celle qui indique le plus souvent l'heure exacte. Supposons que nous ayons à choisir entre deux horloges dont l'une retarde d'une minute par jour, alors que l'autre ne marche pas. Laquelle prendrons-nous? Le sens commun nous fera choisir celle qui retarde d'une minute par jour, mais si nous appliquons strictement notre définition, nous devrons prendre celle qui ne marche pas. Pourquoi? Parce que l'horloge qui retarde d'une minute par jour devra une fois mise à l'heure exacte, retarder de 12 heures, soit 720 minutes, avant de marquer à nouveau l'heure exacte. Et puisqu'elle retarde seulement d'une minute par jour, il lui faudra 720 jours pour retarder de 720 minutes. En d'autres termes, elle marquera l'heure exacte une fois tous les deux ans environ. Mais l'horloge qui ne marche pas du tout marque l'heure exacte deux fois par jour!

J. A. 1211 GENEVE 6

Monsieur François JAQUET
Recorne 21
2300 LA CHAUX-DE-FONDS

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:
Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina & Burgener, 1950 Sion