MON VELO A-T-IL 27 VITESSES ?

Jean-Luc Dorier[1]

Université de Genève

INTRODUCTION

On trouve facilement de nos jours à un prix abordable un vélo de route vendu comme ayant 27 vitesses, ce qui correspond à 3 plateaux et 9 pignons. Les plateaux sont les roues crantées solidaires du pédalier et les pignons (dont l'ensemble constitue la *cassette*) sont les roues crantées solidaires de la roue arrière.

Fig.1 : Système de transmission d'un vélo

Mais que signifie réellement avoir 27 vitesses ? Les écarts de l'une à l'autre sont-ils toujours identiques ? Peut-on les passer une à une de la plus petite à la plus grande sans difficulté ?

Quiconque a fait du vélo a pu se rendre compte que plus on est sur un grand plateau et un petit pignon, plus il faut forcer pour avancer, mais aussi qu'on avance plus avec un seul coup de pédale. A l'inverse quand ça monte, on passe sur des pignons plus grands pour moins forcer, mais on doit plus pédaler pour avancer. Quand on est arrivé sur le plus grand pignon, on peut passer sur un plateau plus petit, mais alors l'écart est plus important que lors d'un changement de pignon. Et si l'on revient sur le pignon le plus petit, on va plus forcer…

L'objet de cet article est de mieux comprendre comment fonctionnent les vitesses sur un vélo à l'aide de quelques outils mathématiques accessibles surtout au niveau du cycle mais que l'on peut envisager dès la fin du primaire : essentiellement les fractions, les proportions et le périmètre du cercle.

BRAQUETS ET DÉVELOPPEMENT

Le principe de base du vélo est que le mouvement produit par le cycliste en appuyant sur les pédales fait tourner le pédalier qui entraine grâce à la chaine la rotation de la roue arrière, qui fait avancer le vélo.

[1] Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet fiancé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique–FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

Fig.2 : Le grand bi, ancêtre du vélo

L'ancêtre du vélo, que l'on appelle le *grand bi,* a un fonctionnement plus rudimentaire puisque la rotation de la roue avant se fait directement par l'intermédiaire du pédalier. Ainsi un tour de pédale correspond à un tour de roue. Et donc la distance parcourue en un tour de pédale est égale au périmètre de la roue. C'est pour cette raison que le grand bi a une très grande roue avant !

Avec un vélo moderne, le système de plateaux et de pignons reliés par une chaine permet de moduler le nombre de tours que fait la roue arrière pour un tour de pédale. La question essentielle est donc de déterminer ce nombre (non forcément entier) en fonction de la taille du plateau et du pignon utilisés.

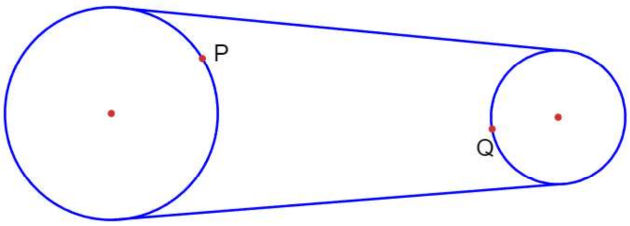

Fig.3 : Schéma de transmission par la chaine

Sur le schéma ci-dessus le grand cercle correspond à un plateau de diamètre D et le petit à un pignon de diamètre d. Grâce à la chaine, la rotation du plateau entraine la rotation du pignon et donc de la roue arrière, de telle sorte que tout point P d'un plateau parcourt la même distance que tout point Q d'un pignon. En un tour de pédale ces deux points parcourent donc une distance égale au périmètre du plateau soit πD. Or un tour de pignon vaut πd donc le point Q fait $\frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d}$ tours. Autrement dit pour un tour de pédale (donc de plateau), le pignon, et donc la roue arrière, fait (D/d) tours.

Par exemple si le plateau a un diamètre double de celui du pignon (comme sur le dessin), le pignon fait deux tours pendant que le plateau en fait un. Autrement dit dans ce cas, en un tour de pédale le vélo avance de deux fois la longueur de la circonférence de la roue arrière.

Ici il est important de noter que le rapport des diamètres est égal au rapport des périmètres. C'est une conséquence de la proportionnalité du périmètre et du diamètre du cercle. Si on appelle ∂_r le diamètre de la roue arrière, en un tour de roue le vélo avance du périmètre de la roue soit $\pi\partial_r$ et donc en un tour de pédale, le vélo parcourt $(D/d)\pi\partial_r$. On retrouve ici le résultat que tous ceux qui ont utilisé un vélo à vitesses ont ressenti et que nous rappelions plus haut : plus le plateau (D) est grand ou plus le pignon (d) est petit, plus on avance en un tour de pédale – ce qui coûte cependant plus d'effort.

En pratique, les constructeurs ne donnent pas les diamètres des pignons ou des plateaux mais le nombre de dents. En effet, pour que la chaine fonctionne toutes les dents de tous les pignons et de tous les plateaux d'un même vélo doivent avoir la même largeur et le même espacement. Ainsi le nombre de dents est proportionnel au périmètre et donc aussi au diamètre d'un pignon ou d'un plateau. Donc le rapport (D/d) est aussi égal au rapport des nombres de dents du plateau et du pignon, c'est ce qu'on appelle le *braquet*.

La longueur de la circonférence de la roue arrière est donnée dans les références des pneus.

Le produit du braquet par la longueur de cette circonférence correspond à la distance parcourue par le vélo en un tour de pédale et s'appelle *développement*.

$$\textbf{\textit{Braquet}} = \frac{\text{Nombre de dents du plateau}}{\text{Nombre de dents du pignon}} = \frac{\text{Diamètre du plateau}}{\text{Diamètre du pignon}}$$

$$\textbf{\textit{Développement}} = \text{Braquet} \times (\text{Circonférence de la roue arrière})$$

LA VÉRITÉ SUR LE VÉLO À 27 VITESSES

Nous allons maintenant pouvoir répondre aux questions posées en début d'article concernant notre vélo à 27 vitesses. En épluchant la notice du magasin, on peut voir que les 3 plateaux de ce vélo ont respectivement 50, 39 et 30 dents et une cassette 12/25 avec 9 pignons de respectivement 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23 et 25 dents. Cela nous permet de faire un tableau donnant les différents braquets arrondis au centième.

	12	**13**	**14**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	**25**
50	4.17	3.85	3.57	3.33	2.94	2.63	2.38	2.17	2.00
39	3.25	3.00	2.79	2.60	2.29	2.05	1.86	1.70	1.56
30	2.50	2.31	2.14	2.00	1.76	1.58	1.43	1.30	1.20

Fig. 4 : Tableau des braquets en fonction du nombre de dents des plateaux et des pignons

Si maintenant on ordonne tous ces braquets et qu'on les multiplie par la circonférence de 2.146 m qui correspond à la longueur de la circonférence de la roue d'un vélo adulte de taille L, on obtient le tableau suivant :

Braquet	1.2	1.3	1.43	1.56	1.58	1.7	1.76	1.86	2	2	2.05	2.14	2.17	2.29
Développement	2.58	2.79	3.07	3.35	3.39	3.65	3.78	3.99	4.29	4.29	4.4	4.59	4.66	4.91

Braquet	2.31	2.38	2.5	2.6	2.63	2.79	2.94	3	3.25	3.33	3.57	3.85	4.17
Développement	4.96	5.11	5.37	5.58	5.64	5.99	6.31	6.44	6.97	7.15	7.66	8.26	8.95

Fig. 5 : Braquets et développements (en mètres) arrondis au centième ordonnés par ordre croissant

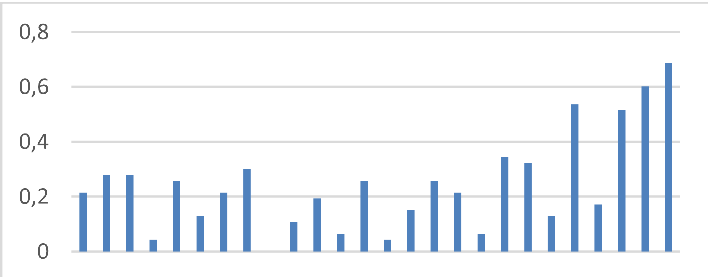

Fig. 6 : Graphique des écarts entre deux développements successifs en mètres

On voit donc que les écarts entre les braquets ou les développements ne sont pas réguliers et varient de 0 à 69 cm pour les développements. Seuls deux développements (ou braquets) sont identiques, mais si on considère qu'un écart de moins de 20 cm entre deux développements n'est pas significatif, on voit qu'il ne reste plus que 15 des 27 vitesses qui soient significativement différentes. Finalement ce qui importe le plus c'est le plus petit et le plus grand des développements, ici 2.58m et 8.95m.

Examinons maintenant la possibilité d'effectivement utiliser toutes les vitesses. Dans le tableau de la Fig. 4, si vous suivez le chemin qui vous mène du plus grand au plus petit braquet vous verrez que pour pouvoir passer une à une toutes les vitesses par ordre croissant de braquet il faudrait commencer par le plus grand plateau en augmentant du plus petit jusqu'au 4e pignon, puis passer au 2e plateau du premier et deuxième pignons, puis revenir au premier plateau 5e pignon, etc.. Le tableau ci-dessous donne cet ordre (attention il y a deux fois le numéro 18 car deux braquets sont identiques).

	12	***13***	***14***	***15***	***17***	***19***	***21***	***23***	***25***
50	1	2	3	4	7	9	12	15	18
39	5	6	8	10	14	17	19	21	23
30	11	13	16	18	20	22	24	25	26

Fig. 7 : Ordre croissant des braquets

On voit bien que ce cheminement n'est techniquement pas possible. De fait, plus on a de plateaux, plus le passage progressif des vitesses est problématique. Avec un seul plateau, le passage progressif est possible, il suffit de passer d'un pignon à l'autre. Mais pouvoir jouer sur la taille des plateaux et sur la taille des pignons est le meilleur moyen d'avoir une bonne amplitude de développements possibles. Avec un seul plateau il faut une cassette comprenant de nombreux pignons avec des écarts importants.

RETOMBÉES DIDACTIQUES

Dans la formule donnant le périmètre du cercle on s'appesantit souvent sur l'introduction du nombre π. Mais la formule $P = \pi D$ est avant tout importante parce qu'elle marque la proportionnalité de deux grandeurs liées au cercle : son périmètre et son diamètre.

De fait, on peut introduire cette question de la proportionnalité en amenant en classe par exemple deux cerceaux de diamètres doubles l'un de l'autre. Avec un peu d'adhésif de couleur, on peut alors facilement montrer qu'un point sur le plus grand parcourt une distance double d'un point sur le plus petit quand chacun des cerceaux fait un tour complet. C'est une vérification expérimentale de la proportionnalité du périmètre et du diamètre et π n'est rien d'autre que le nom qu'on donne à ce rapport de proportionnalité. Avec les cerceaux, on peut en calculer ainsi une valeur approchée et c'est aussi un bon problème d'introduction pour déboucher sur le vélo et les vitesses.

L'intérêt est ici de mettre en œuvre des outils mathématiques pour traiter d'un problème pratique qui devrait être familier à beaucoup d'élèves. On peut aisément construire une séquence didactique sur la base de cet article.

POST-SCRIPTUM

Pour celles et ceux qui voudraient aller plus loin sur le cercle, une question que peu de gens se posent mais qui mérite qu'on s'y arrête est de savoir pourquoi on retrouve le π introduit plus haut comme rapport de proportionnalité entre le diamètre et le périmètre du cercle également dans la formule de l'aire, comme rapport de proportionnalité entre le carré du rayon et l'aire du disque. En effet cela n'a rien d'évident *a priori*.

Une jolie « démonstration visuelle » de ce résultat consiste à découper un disque en tranches comme on le montre dans la figure ci-dessous.

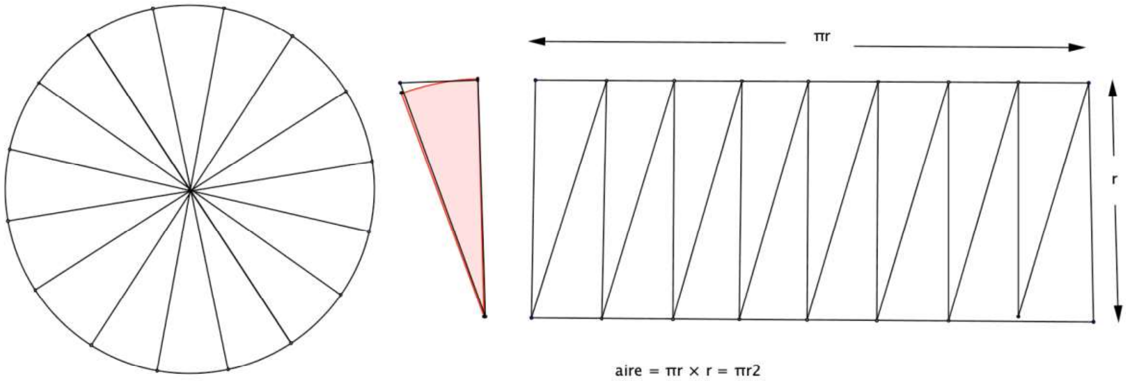

Fig. 8 : L'aire d'un disque est presque celle d'un rectangle

Ensuite on remplace chaque tranche par un triangle rectangle d'aire très proche (voir ci-dessus). On met alors ces triangles deux par deux tête-bêche les uns à la suite des autres, de sorte à constituer un rectangle dont la largeur est le rayon du disque et la longueur tend vers le demi-périmètre quand le découpage tend vers une infinité de parts. Comme dans ce cas l'aire du rectangle tend vers celle du disque on montre que à la limite :

$$(\text{aire du disque}) = (\text{demi-périmètre}) \times (\text{rayon}) = \pi r \times r = \pi r^2.$$

On voit ainsi que le facteur π apparaît bien aussi dans la formule de l'aire.