CONCEPTIONS DES ELEVES DE PRIMAIRE SUR LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION

Sophie Soury-Lavergne, Stéphanie Croquelois, Jean-Luc Martinez, Jean-Pierre Rabatel

Institut Français de l'Education, Ecole Normale Supérieure de Lyon

Notre projet est de concevoir des situations permettant de faire évoluer les connaissances des élèves relatives à la numération décimale de position. Pour cela, nous avons conçu des situations didactiques utilisables en classe avec un dispositif hybride intégrant un robot et du matériel tangible (Rabatel & Soury-Lavergne, 2017 ; Mandin *et al.*, 2017 ; Soury-Lavergne, 2016) . Puis dans le cadre d'une collaboration entre enseignants, formateurs et chercheurs, nous avons caractérisé les conceptions des élèves grâce à un modèle issu des travaux de Vergnaud (1990) et de Balacheff sur les conceptions (présenté dans Balacheff et Margolinas (2005). Nous avons alors pu mesurer l'évolution des conceptions d'élèves de primaire[1].

Les connaissances actuelles sur la numération décimale de position font apparaître deux principes complémentaires pour coder les nombres : le principe décimal et le principe de position (expressions retenues dans les programmes scolaires français du cycle 2 et du cycle 3 publiés en 2016). Le principe de position signifie que la position d'un chiffre dans l'écriture du nombre indique à quelle unité de numération il renvoie. Le principe décimal renvoie au fait que deux chiffres adjacents dans l'écriture d'un nombre désignent des valeurs ayant un rapport de dix. Ce principe constitue l'une des principales difficultés d'apprentissage pour les élèves (Houdement & Tempier, 2019). Par exemple, les élèves ne convertissent pas facilement 10 dizaines en 1 centaine ou encore ne comptent pas avec une autre unité de compte que l'unité simple, autrement dit ils ne comptent pas « 1, 2, 3 dizaines » de façon aussi aisée que « 10, 20 30 » (Chambris, 2012 ; Croquelois *et al.*, 2019). Nous avons cherché à caractériser ces difficultés en termes de connaissances, de façon à pouvoir décrire ce que font les élèves, et donc ce qu'ils savent, quand ils ne disposent pas encore de la connaissance attendue relativement aux deux principes de la numération décimale de position.

LES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES COMME MOYEN DE DÉCRIRE LEURS CONNAISSANCES EN NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION

Nous avons modélisé les connaissances en terme de conceptions, au sens de Balacheff tel que présenté dans Balacheff et Margolinas (2005) pour pouvoir traiter de la même façon toutes les productions des élèves, qu'elles soient correctes ou pas, en considérant qu'elles sont la manifestation d'une connaissance dans la tradition de l'épistémologue Bachelard (1934). S'appuyant sur les travaux de Vergnaud (1990), Balacheff propose de décrire une conception à partir d'un quadruplet d'ensembles (problèmes, systèmes de représentation, opérateurs, structures de contrôle). Nous n'avons eu besoin que d'une partie du modèle pour obtenir des descriptions de conceptions relatives à la numération décimale suffisamment cohérentes et opérationnelles pour notre projet. Nous avons débuté en établissant la liste des problèmes, systèmes de représentations et opérateurs qui apparaissent dans ces conceptions :

- les problèmes que la conception permet de résoudre : problèmes de codage, c'est-à-dire produire une désignation pour chaque nombre (infinité de nombres et quantité réduite de symboles), problème de dénombrement de collections, problème de constitution de collections d'un cardinal

[1] Les classes de primaire de la Suisse romande correspondent, en France aux classes de cycle 2 (CP, CE1 et CE2, élèves de 5 à 8 ans) et aux classes de cycle 3 (CM1, CM2 et 6e, élèves de 8 à 11 ans).

donné, problème de conversion, comparaison et de calcul à partir d'un répertoire restreint de résultats connus pour les premiers nombres ;
- les systèmes de symboles qui sont mobilisés dans la résolution des problèmes : les chiffres, les positions de gauche à droite, les mots des unités de numération (unités, dizaines, centaines, dixièmes), la virgule, les tableaux et les organisations spatiales des algorithmes de calculs ;
- les opérateurs ou invariants opératoires (Vergnaud, 1990) qui résolvent les problèmes : association position-unité de numération, conversions, retenue, groupement, échange, comparaison à partir de l'écriture…

Nous avons cherché à identifier les invariants opératoires caractéristiques des différentes conceptions en partant du principe de position et du principe décimal. Les deux principes de la numération se sont avérés insuffisants pour caractériser et différencier les conceptions des élèves et expliquer les réponses qu'ils produisent. En particulier, ils n'ont pas permis à eux seuls de décrire les stratégies de résolution observables et de les rattacher à différentes conceptions. Nous avons alors distingué six invariants opératoires dans les stratégies des élèves. Nous les avons rattachés, pour trois d'entre eux, au principe de position et pour les trois autres au principe décimal (Fig. 1). L'identification et la définition de ces invariants opératoires se sont faites progressivement en les confrontant à l'observation des stratégies des élèves en résolution de problème.

Six invariants opératoires pour modéliser les conceptions relatives à la numération décimale de position

TROIS INVARIANTS OPÉRATOIRES RELEVANT DU PRINCIPE DE POSITION

Ordre des unités de numération : cet invariant opératoire se manifeste lorsque l'élève positionne les unités de numération dans l'ordre conventionnel, c'est-à-dire de droite à gauche pour les unités d'ordre de plus en plus grand.

Gestion des **zéros à droite** ou gestion des **zéros intercalaires** : il s'agit de deux invariants opératoires distincts qui se manifestent lorsque les zéros sont utilisés pour positionner les autres chiffres du nombre au bon endroit, c'est-à-dire en regard de la bonne unité de numération. L'invariant opératoire **zéros à droite** permet de compléter par des zéros un nombre de façon à positionner le chiffre non nul le plus à droite en relation avec la bonne unité de numération (c'est-à-dire placer respectivement un zéro aux unités, ou deux zéros pour les dizaines et les unités pour qu'un chiffre non nul soit bien respectivement un chiffre de dizaines ou de centaines). L'invariant opératoire **zéros intercalaires** permet de décrire l'action de placer des zéros entre deux chiffres non nuls, pour positionner les chiffres non nuls selon leur unité de numération. Ces deux invariants ont dû être distingués car la gestion correcte des zéros à droite est apparue dans les productions des élèves beaucoup plus souvent que celles des zéros intercalaires.

LES INVARIANTS OPÉRATOIRES RELEVANT DU PRINCIPE DÉCIMAL

Retour à l'unité : cet invariant opératoire rend compte de la conversion des unités de numération en unités simples (1 centaine = 100 unités ou 1 millier = 1000 unités).

Conversion entre unités : cet invariant opératoire rend compte de la conversion des unités de numération entre elles, qu'elles soient adjacentes ou non, mais sans passage à l'unité simple (Exemple : 1 millier = 100 dizaines sans qu'il s'agisse du résumé de la procédure qui consiste à convertir 1 millier en 1000 unités puis à utiliser la conversion 10 unités = 1 dizaine pour obtenir 1000/10 = 100 dizaines).

Conversion avec retenue : cet invariant opératoire rend compte du fait que lorsqu'il est nécessaire d'additionner au sein d'une unité de numération et que le résultat fait apparaître un nombre supérieur à 9, alors la conversion vers l'unité de numération supérieure est réalisée (Exemple : 8 dizaines et 3 dizaines cela fait 11 dizaines, donc 1 centaine et 1 dizaine).

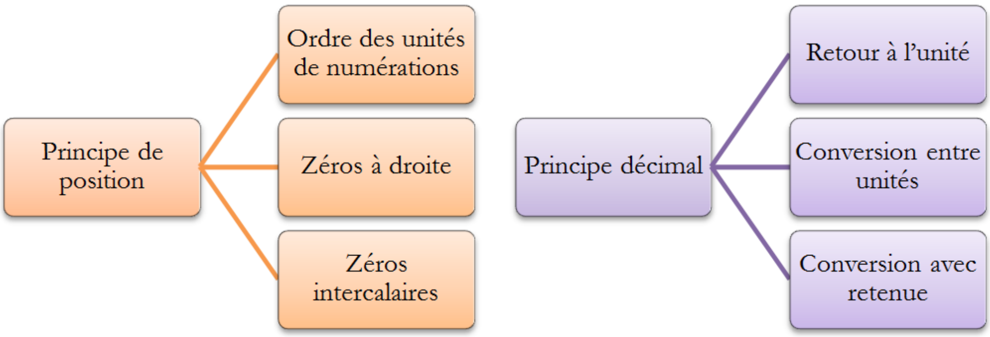


Fig. 1 : Six invariants opératoires identifiés dans les procédures des élèves et retenus pour modéliser les conceptions

Notre hypothèse est que les conceptions permettant d'expliquer la plupart des réponses des élèves dans les problèmes de numération sont principalement : une conception « position » qui inclut uniquement les invariants opératoires rattachés au principe de position et une conception « retour à l'unité » qui utilise essentiellement l'invariant opératoire retour à l'unité.

UNE PROPOSITION POUR FAIRE ÉVOLUER LES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES

Le projet OCINAEE[2] - Objets Connectés et Interfaces Numériques à l'École Élémentaire - a conçu des jeux et des situations d'apprentissage des mathématiques avec un dispositif de réalité mixte. Le dispositif consiste en des objets tangibles de type cartes, plateaux de jeu, stylets communiquant avec un environnement numérique, robot et tablettes, par l'intermédiaire d'un téléphone. Le jeu du Chiffroscope est l'un des quatre jeux exploitant les possibilités offertes par le dispositif. Il est utilisé par les enseignants et les élèves du LéA CiMéLyon - Lieu d'éducation Associé à l'Ifé (Croquelois *et al.*, 2019) avec l'objectif d'étudier les apprentissages des élèves en numération décimale de position, notamment en utilisation le jeu du Chiffroscope.

Le Chiffroscope

L'objectif du jeu du Chiffroscope est l'apprentissage de la numération décimale de position pour les nombres entiers et les nombres décimaux. Il permet de travailler la numération à partir de différentes situations de codage (dénombrement d'une collection jusqu'à plus de 2000 objets) et de conversion (écriture d'un nombre à partir de nombres associés à des unités de numération). La structure de jeu est identique du CP à la 6e. Le jeu du Chiffroscope est un jeu collaboratif pour deux joueurs. Pour la partie qui concerne l'étude menée, il se joue en trois étapes, avec une vingtaine de cartes (sélection de nombres compris entre 0 et 99), un plateau présentant des colonnes et une zone sur laquelle il est possible d'écrire, deux tablettes et le robot muni de son téléphone.

L'étape 1 consiste en un tirage de cartes nombres par les joueurs et d'unités de numération associées par le robot (Fig. 2). Au premier tirage d'une carte nombre, le robot tire une unité de numération et se déplace sur le plateau pour indiquer à quelle colonne cette unité de numération correspond. Le robot regagne alors une zone de repos et indique ensuite les unités de numération associées aux cartes tirées, mais ne se déplace plus pour indiquer la colonne du plateau qui correspond à ces nouvelles unités.

---

[2] OCINAEE 2014-2016, financement e-education, digiSchool, Awabot, Erasme (Lyon Métropole) et IFE-ENS de Lyon. www.ocinaee.la-classe.com

Fig. 2 : Cartes nombres et des unités de numération placées sur le plateau après l'étape 1 de tirage

L'étape 2 consiste à chercher le nombre final obtenu en réalisant des calculs et des conversions, sur le plateau ou sur les tablettes. L'étape 3 consiste à écrire le même nombre sur chacune des deux tablettes (incitant les élèves à la collaboration). La réussite est signifiée par la danse de la victoire du robot (la non réussite invite les élèves à revenir à la première étape erronée).

Mobilisation des invariants opératoires relatifs au principe de position

Dans ce jeu, le tableau de numération est un outil dans la résolution de problème. Le plateau de jeu est composé de sept colonnes vierges, non attribuées à une unité de numération. Lors de chaque partie, la colonne utilisée pour les unités simples est tirée au hasard, elle n'est pas forcément la plus à droite (Fig. 2). Les élèves doivent attribuer des colonnes aux unités de numération et donc mobiliser l'invariant opératoire "ordre" pour réaliser cette attribution. Selon les parties, le plateau peut ne représenter qu'une partie seulement du tableau de numération utile à l'écriture du nombre cherché.

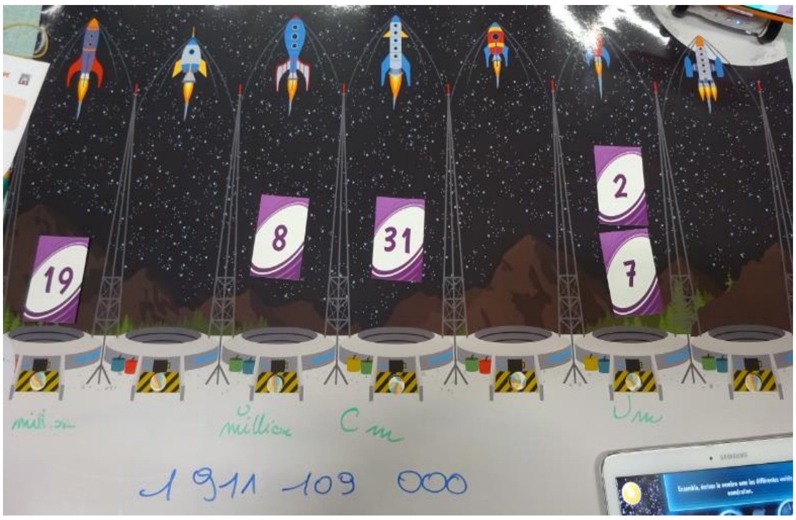


Fig. 3 : Tableau de numération partiellement matérialisé par le plateau. Tirage nécessitant l'utilisation de zéro

Lorsque toutes les unités de numération ne font pas l'objet d'un tirage, l'écriture du nombre nécessite la mise en œuvre de l'invariant opératoire zéros à droite ou zéros intercalaires (Fig. 3), en application du principe de position. Des unités de numération peuvent être associées à plusieurs nombres à 1 ou 2 chiffres (Fig. 2 et Fig. 3), ce qui peut nécessiter d'effectuer des conversions entre unités de numération et donc la mise en œuvre du principe décimal. Lorsqu'une colonne adjacente est vide à gauche (cas du 10 dans la Fig. 2), les élèves peuvent obtenir le bon résultat au moment de l'écriture, sans nécessairement mobiliser l'invariant opératoire conversion. Mais lorsque cette conversion produit un nombre dans une unité de numération déjà utilisée ou qui n'est pas celle de plus grand ordre (cas du 31 dans la colonne des centaines de mille de la Fig. 3), alors la mobilisation des invariants opératoires conversion entre unités ou conversion avec retenue est nécessaire.

Invariants opératoires liés au principe décimal : limite du retour à l'unité avec les grands nombres

La stratégie de retour à l'unité, par conversion de chaque nombre associé à une unité de numération en unités simples devient coûteuse et source d'erreur avec les grands nombres (à partir du million). Par exemple, le tirage 91 dizaines de millions, 3 millions, 57 centaines de mille, 42 milliers et 8 centaines a pour solution le nombre 918 742 800. Le nombre de calculs nécessaires et la gestion des zéros, conduisent à de multiples erreurs (Fig. 4). Cette stratégie reste cependant robuste car elle est applicable et efficace dans les entiers et permet de trouver le bon résultat lorsqu'il s'agit de petits nombres entiers.

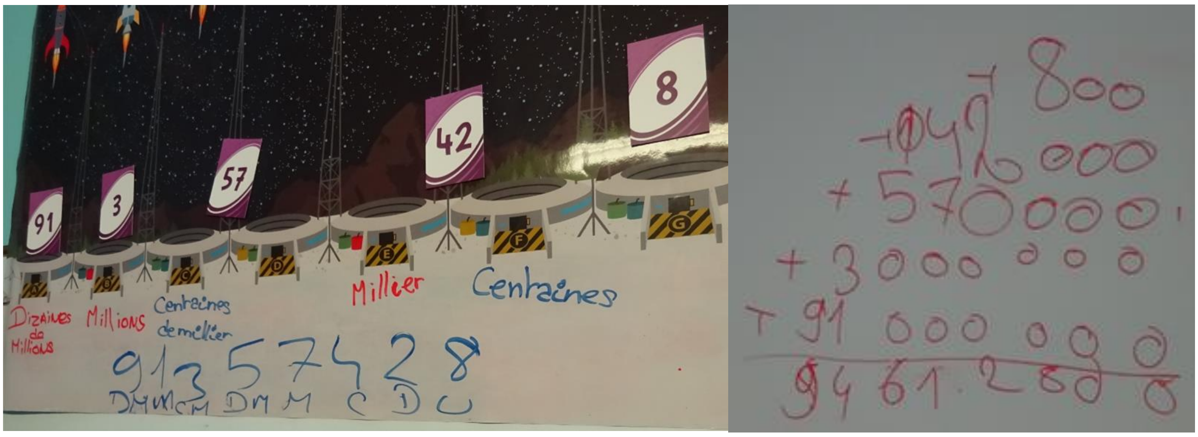
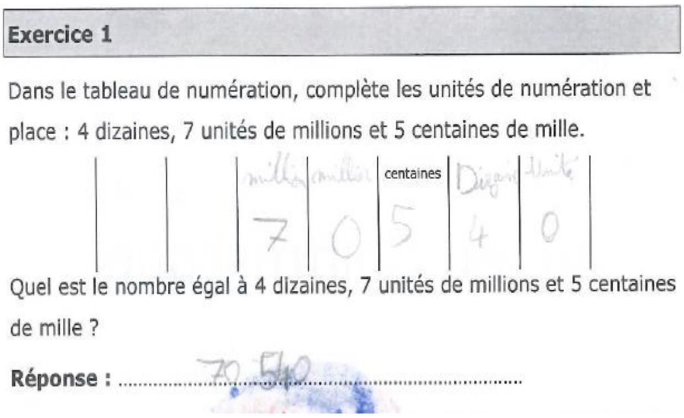


Fig. 4 : Stratégie mobilisant l'invariant opératoire retour à l'unité. Erreur des élèves sur la conversion de 57 centaines de mille et 91 dizaines de millions

Ces invariants opératoires sont utilisables pour analyser les réponses d'élèves obtenues dans d'autres types de problèmes que ceux du jeu Chiffroscope. Ils sont aussi utilisables pour l'analyse des réponses finales, correctes ou non, en l'absence d'observation directe de la procédure. Ils permettent de considérer les réponses incorrectes comme la manifestation d'une connaissance : quand l'élève ne sait pas, que sait-il quand même ? En voici deux exemples.

Identification d'invariants opératoires liés au principe de position ou au principe décimal à partir de la réponse finale de l'élève

Dans le problème « quel est le nombre égal à 4 dizaines, 7 unités de millions et 5 centaines de mille », la réponse attendue est 7 500 040. Dans la réponse incorrecte 70 540, les chiffres 7, 5 et 4 sont placés dans l'ordre des unités de numération résultant d'une réorganisation des chiffres par rapport à l'énoncé (Fig. 5). Ainsi l'invariant opératoire "ordre" a pu être mobilisé pour produire cette réponse. Un zéro étant placé aux unités, l'invariant opératoire gestion des zéros à droite semble également expliquer la réponse donnée. Ces deux invariants opératoires relèvent du principe de position ; ils sont mobilisés dans la production de la réponse erronée.


Exercice 1

Dans le tableau de numération, complète les unités de numération et place : 4 dizaines, 7 unités de millions et 5 centaines de mille.

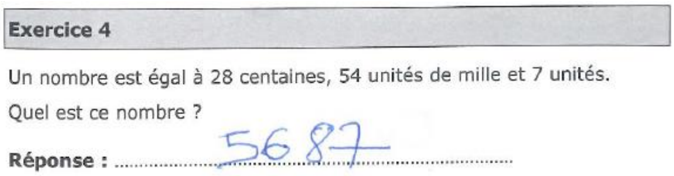
				centaines		
		7	0	5	4	0

Quel est le nombre égal à 4 dizaines, 7 unités de millions et 5 centaines de mille ?

Réponse : 70 540

Fig. 5 : Production erronée en CM2 mais qui manifeste la mobilisation de l'invariant opératoire zéro à droite

Dans l'exercice 4 la réponse attendue est 56 807. Dans la réponse incorrecte 5687, la présence du 56 à gauche signale l'ajout de 54 unités de mille et de 2 unités de mille, donc une conversion de 20 centaines (Fig. 6). L'invariant opératoire conversion entre unités adjacentes a pu être mobilisé pour produire cette réponse bien qu'elle soit erronée.


Exercice 4

Un nombre est égal à 28 centaines, 54 unités de mille et 7 unités.

Quel est ce nombre ?

Réponse : 5687

Fig. 6 : Production erronée en CM2 mais qui manifeste la mobilisation de l'invariant opératoire conversion entre unités adjacentes

Conclusion sur l'analyse des stratégies et réponses des élèves en termes d'invariants opératoires

Ces extraits de parties de Chiffroscope montrent comment les invariants opératoires permettent d'analyser les stratégies de résolution à partir des traces observables, la réponse et donc de modéliser les conceptions des élèves. Nous faisons l'hypothèse que ce jeu amène les élèves à mobiliser de nouveaux invariants opératoires, notamment ceux relatifs aux zéros et celui relatif à la conversion entre unités, et fait ainsi évoluer leurs conceptions. De plus, à partir de l'observation des réponses finales sans accès aux stratégies de résolution, il est également possible de déterminer quels invariants opératoires ont pu être mobilisés et donc de diagnostiquer ces conceptions.

Expérimentation et méthodologie

L'expérimentation conduite au cours de l'année 2018-2019 a eu comme objectif de répondre à la question suivante : **quelle est l'évolution des conceptions et de la maîtrise des deux principes de numération d'un élève au cours de l'année scolaire ?**

Pour répondre à cette question, la méthodologie mise en place s'appuie sur la comparaison des conceptions d'élèves au cours d'une année, incluant l'utilisation du jeu Chiffroscope. Elle a été conduite au cours de l'année 2018-2019, avec les 18 enseignants du LéA (dont certains ont participé à la conception des jeux) et leurs 356 élèves de cycle 2 et cycle 3, du CP à la 6e. Selon une méthodologie de recherche orientée par la conception (Coob *et al.*, 2003 ; Sanchez & Monod-Ansaldi, 2014), le collectif d'enseignants et de chercheurs du LéA a élaboré le diagnostic, les modalités d'utilisation du jeu et analysé les résultats. Les diagnostics ont été passés en tout début d'année et en fin d'année scolaire par tous les élèves des classes du LéA. Les enseignants ont entre-temps enseigné la numération décimale, en utilisant le jeu du Chiffroscope comme bon leur a semblé parmi d'autres situations et selon leur progression annuelle. Sur les 356 élèves du LéA en 2018-2019 seulement 236 élèves ont passé entièrement les deux diagnostics (perte d'effectif de 32% Fig. 7). De plus, l'effectif des élèves de CP étant trop faible pour en tirer des résultats valides, l'analyse porte finalement sur 103 élèves de cycle 2 (CE1 et CE2) et 114 élèves de cycle 3 (CM1, CM2 et 6e) soit 217 élèves.

	Nombre d'élèves sept 2018	Nombre d'élèves ayant passé diagnostic AVANT en entier	Nombre d'élèves ayant passé les 2 diagnostics AVANT et APRÈS en entier
CP			19
Cycle 2 hors CP	189	144	103
Cycle 3	167	168	114
Total	356	312	336

Fig. 7 : Effectifs d'élèves ayant participé aux diagnostics

Diagnostics avant/après enseignement incluant le Chiffroscope

Deux diagnostics différents ont été conçus et utilisés selon le cycle : un pour les autres élèves de cycle 2 (CE1-CE2) et un pour les élèves du cycle 3. Ces diagnostics, sous forme de livret papier (voir annexe) comportent le même type d'exercices permettant d'identifier la mobilisation par les élèves des mêmes invariants opératoires (Fig. 8). Dans le cadre du LéA, ils constituent un élément de continuité entre tous les élèves, du cycle 2 au cycle 3.

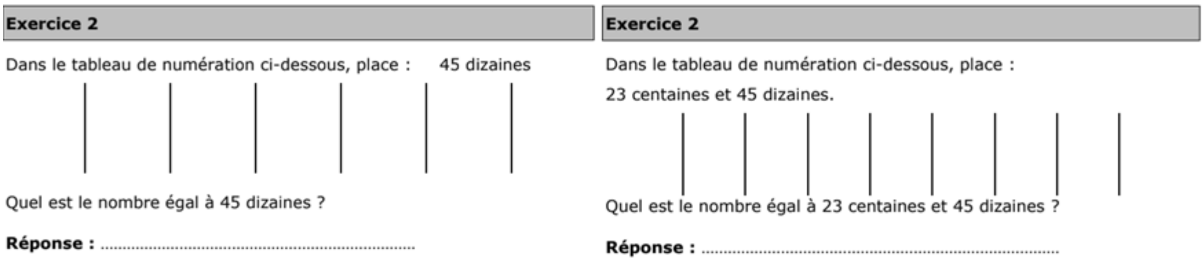


Fig. 8 : Exercice 2 du diagnostic, à gauche version CE1-CE2, à droite version cycle 3

Les exercices 1 et 3 des diagnostics permettent d'identifier plus particulièrement la mobilisation du principe de position. Les exercices 2 et 4 nécessitent des conversions et permettent d'identifier plus particulièrement la mobilisation du principe décimal associé au principe de position.

RÉSULTATS

Evolution des conceptions des élèves entre le début et la fin de l'année scolaire

Nous présentons les résultats pour les deux cycles, en donnant d'abord les taux de réussite aux exercices puis en analysant les réponses en termes d'invariants opératoires.

Les résultats des élèves progressent pour les quatre exercices et tous les cycles (Fig. 9). Les exercices 1 et 3, dont la résolution mobilise spécifiquement le principe de position enregistrent des meilleurs scores et des meilleures progressions (+24% et +50% en cycle 2). Les exercices 2 et 4, qui mobilisent, eux, également le principe décimal sont moins bien réussis que les autres, quel que soit le cycle (taux inférieur à 30%). Les résultats des élèves de cycle 2 ont fortement progressé dans les exercices 1 et 3, (+24% et +50%) mobilisant le principe de position pour arriver à un taux de réussite élevé (64% et 71%). La progression est nettement moins forte pour les élèves de cycle 3 (meilleure progression +21% pour l'exercice 2). Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par Tempier (2016) qui montrent que le principe de position est mieux maîtrisé par les élèves que le principe décimal. Mais ils indiquent en plus que la progression ralentit en cycle 3.

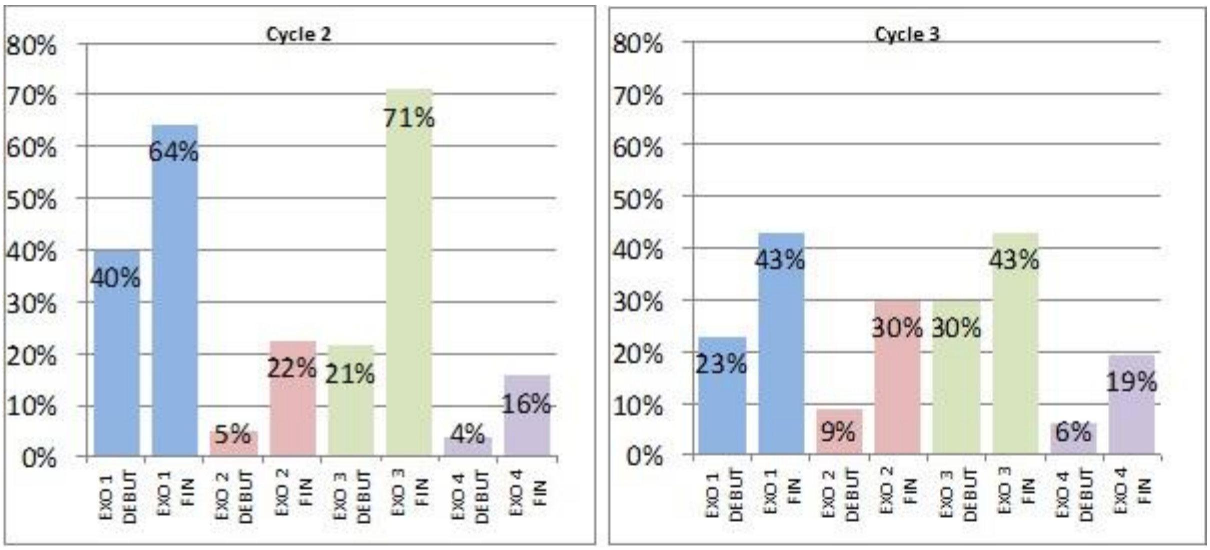


Fig. 9 : Pourcentage de réponses correctes en début et fin d'année scolaire, exercice par exercice, (cycle 2 à gauche, cycle 3 à droite)

L'évolution positive du taux d'absence de réponse aux exercices entre le début de l'année scolaire et la fin montre que tous les élèves (cycle 2 et cycle 3) sont plus facilement rentrés dans la tâche ou ont mieux compris les exercices lors de la deuxième passation (graphique en annexe). Pour les élèves de cycle 2, à propos des exercices qui mobilisent le principe décimal, la chute du taux d'absence de réponse est significative (baisse de 36% pour l'exercice 2 et de 19% pour l'exercice 4). Pour les élèves de cycle 3, la baisse du taux d'absence de réponse est bonne mais moins forte, partant d'un niveau déjà plus bas. Ceci montre que les élèves de cycle 3 sont moins surpris par la confrontation à des exercices mobilisant le principe décimal dès le début de l'année. Enfin, le taux d'absence de réponse dans les diagnostics après enseignement est équivalent quel que soit le cycle, ce qui pose la question de l'existence d'un "taux incompressible" d'élèves qui ne répondent pas à un exercice.

Une autre évolution intéressante est celle des élèves qui réussissent un exercice en début d'année puis l'échouent en fin d'année. Près de 10% des élèves échouent aux exercices relatifs au principe de position après les avoir réussis (graphique en annexe). Ils sont moins nombreux dans ce cas pour les exercices relatifs au principe décimal. Cela montrerait que si le principe décimal est plus difficile à acquérir pour les élèves, une fois qu'il l'est, il serait plus stable. Les enseignants du LéA, ont aussi remarqué que des élèves se seraient démobilisés lors du passage du deuxième diagnostic, ayant reconnu qu'ils avaient déjà fait ces mêmes exercices. Enfin, la méthodologie peut être mise en cause avec l'éloignement entre le temps de l'apprentissage et la passation du diagnostic.

Evolution de la mobilisation des invariants opératoires « ordre » et « conversion entre unités » dans les réponses correctes ou erronées des élèves

Pour tous les élèves du cycle 2 confondus et pour tous les exercices, l'évolution dans l'année du pourcentage de réponses, correctes ou non, pouvant résulter de la mobilisation de l'invariant opératoire ordre est notable (de +8% à +42% selon les exercices). Cette progression est nettement moins sensible pour les cycles 3 (de +20% pour l'exercice 1, elle n'est que de 3 ou 4% pour les exercices 3 et 4 et même négative −1% pour l'exercice 2). Cela montre que l'utilisation du jeu et l'enseignement des professeurs du LéA contribuent à faire évoluer positivement les conceptions des élèves de cycle 2 relativement au principe de position (Fig. 10).

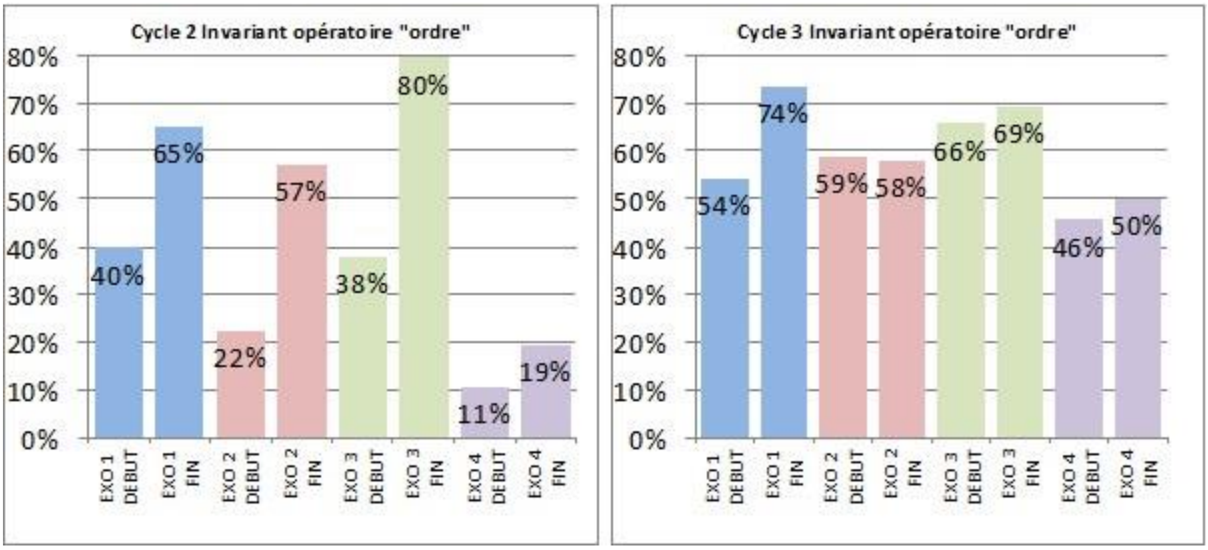


Fig. 10 : Pourcentage de réponses explicables par la mobilisation de l'invariant opératoire ordre, exercice par exercice, (à gauche cycle 2 et à droite cycle 3)

Il faut surtout noter que la différence entre les réponses correctes et les réponses explicables par cet invariant opératoire, qu'elles soient correctes ou non, est important. Par exemple en cycle 2, après usage du Chiffroscope, il y a seulement 22% de réponses correctes à l'exercice 2, mais 57% de réponses explicables par la mobilisation de l'invariant opératoire ordre. En cycle 3, pour le même exercice après usage du jeu, c'est 30% de réponses correctes et 58% de réponses mobilisant l'invariant opératoire ordre. Cela signifie que les élèves, même lorsqu'ils répondent de façon erronée, ont pu mobiliser l'invariant opératoire ordre et qu'ils le font nettement plus après l'usage du jeu.

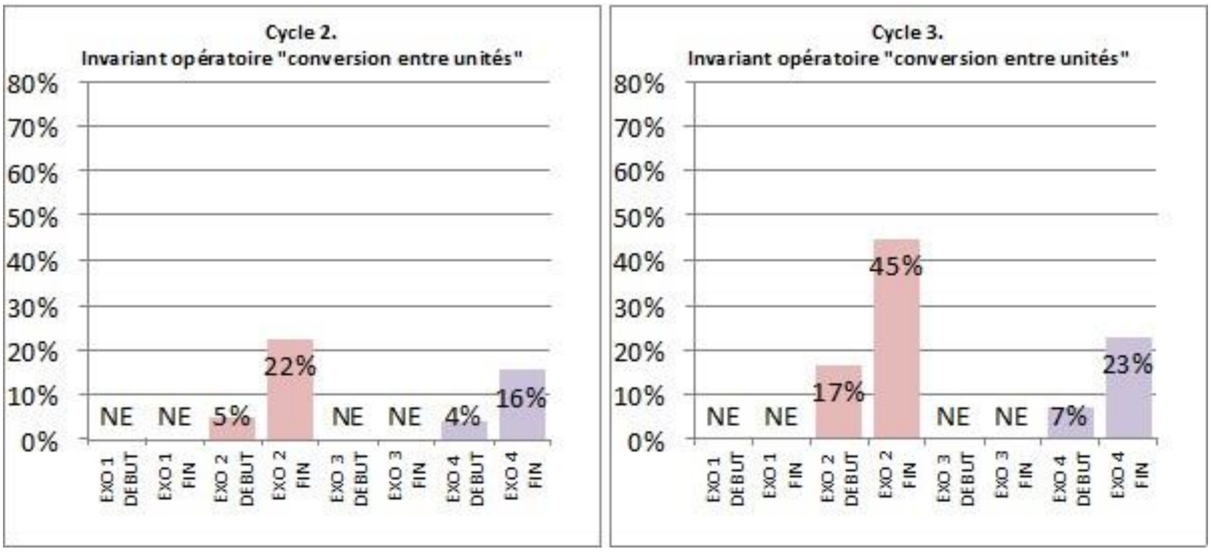


Fig. 11 : Pourcentage de réponses pouvant résulter de la mobilisation de l'invariant opératoire conversion entre unités, exercice par exercice, (à gauche cycle 2 et à droite cycle 3), NE pour non–évaluable

En ce qui concerne l'invariant opératoire conversion entre unités, relevant du principe décimal et seulement testable dans les exercices 2 et 4, il y a une progression (de +14% à +28%) mais le taux de manifestation de cet invariant opératoire dans les réponses reste faible après enseignement. La progression montre que l'utilisation du jeu et l'enseignement des professeurs permet de confronter les élèves et de faire évoluer leurs conceptions. Mais ces résultats montrent également que cet invariant opératoire est plus difficile à attraper pour les élèves. Il est également plus complexe à enseigner car la mobilisation de cet invariant repose sur des procédures qui ne sont pas toujours visibles dans les traces des élèves. Pour les élèves de cycle 3, la progression des résultats relative à cet invariant opératoire est plus importante que pour les élèves de cycle 2. De plus, le taux de réponses pouvant résulter de la mobilisation de cet invariant est également bien supérieur chez les élèves de cycle 3 (45% et 23%) que chez les élèves de cycle 2 (22% et 16%). Ceci montre que la mobilisation de l'invariant opératoire « conversion entre unités » demande une certaine maturité en numération, qui s'acquiert à partir du cycle 3.

Concurrence entre les deux principes, disparition des invariants opératoires de position lorsque les conversions sont à l'œuvre

Dans cette expérimentation, les résultats montrent une évolution positive des connaissances des élèves, notamment relatives au principe de position. Les invariants opératoires caractérisant de conceptions position de la numération, expliquent plus les réponses des élèves que ceux relatifs au principe décimal. En fin d'année après enseignement, ils expliquent de 65% à 80% des réponses correctes ou pas. En revanche, lorsque l'exercice incite les élèves à utiliser les conversions entre unités, les invariants opératoires relevant de la position ne sont plus aussi bien mobilisés. Il semble que les élèves soient accaparés par les conversions et n'arrivent plus à appliquer ce qu'ils savent du principe de position. Nous faisons l'hypothèse qu'il est probable qu'une fois le principe décimal maîtrisé, le principe de position redevienne correctement mobilisé également. Même pour des professeurs avertis, il est plus difficile de faire évoluer les conceptions des élèves relatives au principe décimal, peut-être à cause du fait que la mobilisation des invariants opératoires relevant de ce principe est moins facilement visible dans les réponses finales des élèves et nécessite l'accès aux processus de résolution. Enfin, au vu des résultats, étant donné que les invariants opératoires rattachés au principe décimal ne caractérisent que très peu des réponses correctes ou non des élèves de cycle 2, il semble que nous soyons devant une alternative : soit le diagnostic ne permet pas d'évaluer le recours au principe décimal dans les réponses des élèves de cycle 2, soit, ce qui semble plus probable, le principe décimal ne caractérise pas les conceptions des élèves de cycle 2 en numération.

Conclusion, résistance de la conception « position » de la numération

Le principe décimal, qui n'est que peu travaillé par les enseignants d'après les récents travaux de Houdement et Tempier (2019), n'est pas encore au cœur de toutes les stratégies des élèves utilisant le jeu du Chiffroscope. Lorsqu'il l'est, c'est la stratégie de retour à l'unité qui est mobilisée bien qu'elle rencontre ses limites avec les grands nombres et les décimaux. Malgré les nombreuses erreurs, cette stratégie de retour à l'unité, qui consiste à transformer toutes les informations en unités simples puis à additionner, est résistante. Les élèves n'éprouvent pas le besoin de remplacer cette stratégie par une stratégie plus générale qui consiste à réaliser des conversions entre unités et qui serait non seulement plus efficace sur les grands nombres mais aussi valide sur les décimaux. Une des limites de l'expérimentation est surement de n'avoir pas mesuré l'évolution des conceptions de la numération décimale avec les nombres décimaux.

Le rôle central de cette stratégie de conversion à l'unité a rendu nécessaire de distinguer au moins trois conceptions sur la numération décimale, selon qu'elles incluent ou non certains des invariants opératoires. Ainsi, la conception « position » n'inclut que les trois invariants relatifs à la position. La conception « retour à l'unité » inclut les invariants opératoires rattachés au principe de position et l'invariant opératoire « conversion à l'unité » sans autres invariants opératoires relatifs au principe décimal. La conception « décimale » est plus complète avec les trois invariants opératoires relatifs à la position et l'invariant conversion entre unités (qui permet aussi la conversion à l'unité simple). Cette modélisation de la connaissance en conceptions selon leurs invariants opératoires, a permis de rendre opérationnelle l'analyse didactique et d'identifier ce que savent les élèves quand bien même leurs réponses ne sont pas correctes.

Cependant, notre analyse pourrait être améliorée. Nous avons identifié six invariants opératoires distincts en les reliant directement aux principes de la numération. Mais les stratégies et les réponses des élèves pourraient être mieux modélisés en prenant en compte d'autres invariants opératoires possibles tels que : décaler les unités de numération à droite, sommer les nombres disponibles, inverser les unités de numération ou juxtaposer chiffres ou nombres. Par ailleurs, si les invariants opératoires liés au principe position sont plus travaillés dans les classes c'est peut-être parce qu'ils sont plus faciles à observer, en particulier directement dans la réponse finale des élèves. En effet, nous nous sommes rendus compte qu'ils ne nécessitent pas d'observer toute la procédure pour pouvoir être identifiés, contrairement aux invariants opératoires du principe décimal.

L'élaboration du diagnostic et l'analyse des résultats obtenus, conduites à partir du modèle des conceptions et particulièrement des invariants opératoires tels que présentées dans cet article, montrent leur pertinence pour évaluer les connaissances et les apprentissages des élèves. Cela ouvre la possibilité de les mettre en œuvre avec un autre type de méthodologie, telle que celle incluant un groupe contrôle pour tester l'intérêt du recours au jeu du Chiffroscope pour l'apprentissage de la numération décimale de position. Cela permettrait d'objectiver le décalage entre le ressenti positif des enseignants et l'évolution des conceptions des élèves mesurée expérimentalement. En effet, lors de la présentation des résultats, les enseignants du LéA CiMéLyon ont été surpris de ne pas retrouver leur évaluation positive des progrès de leurs élèves. Les progrès d'un quart ou d'un tiers des élèves observés expérimentalement peuvent être très significatifs pour les enseignants qui s'intéressent à la réussite des élèves individuellement. Au-delà des résultats, les enseignants sont positifs sur les apports de l'expérimentation et de l'usage du jeu du Chiffroscope. Ils évoquent une dynamique de travail différente, des élèves qui osent davantage produire une réponse, éléments non mesurés par les diagnostics en place. Ils témoignent du fait que le jeu a transformé l'usage du tableau de numération, qui devient un outil pour résoudre des problèmes. Ses règles d'usage sont justifiées par leur nécessité mathématique et pragmatique et non pour respecter des injonctions arbitraires. Les enseignants évoquent également dans leur grande majorité une évolution de leurs propres pratiques consécutive à la prise de conscience que le jeu a provoquée chez eux.

BIBLIOGRAPHIE

Bachelard, G. (1934). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris : Presses Universitaires de France.

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans C. Margolinas & A. Mercier (dir.), *Ecole d'Ete de Didactique des Mathématiques* (p. 1-32). La pensée Sauvage : Grenoble, France.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, *89*, 39-69.

Coob, P., Confrey, J., diSessa, A. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Croquelois, S., Martinez, J.-L., Rabatel, J.-P. & Soury-Lavergne, S. (2020). Du projet collaboratif à la formation : Continuité des apprentissages et de l'enseignement de la numération du cycle 2 au cycle 3. Dans COPIRELEM, a*ctes du 46ème colloque de la COPIRELEM*. Lausanne : ARPEME.

Houdement, C. & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM*, *51*(1), 25-37.

Mandin, S., De Simone, M. & Soury-Lavergne, S. (2017). Robot Moves as Tangible Feedback in a Mathematical Game at Primary School. Dans M. Merdan, W. Lepuschitz, G. Koppensteiner & R. Balogh (dir.), *Robotics in Education: Research and Practices for Robotics in STEM Education* (p. 245-257).

Rabatel, J.-P. & Soury-Lavergne, S. (2017). Faire des mathématiques avec des cartes et un robot, le projet OCINAEE. Dans COPIRELEM, *actes du 43ième colloque de la COPIRELEM*. Le Puy-en-Velais : ARPEME.

Sanchez, E. & Monod-Ansaldi, R. (2014). Recherche collaborative orientée par la conception. Un paradigme méthodologique pour prendre en compte la complexité des situations d'enseignement-apprentissage. *Éducation et didactique*, *9*(2), 73-94.

Soury-Lavergne, S. (2016). Duos of artefacts, connecting technology and manipulatives to enhance mathematical learning. *Communication au 13th International Congress on Mathematical Education,* Hamburg, Germany.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : Un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, *98*, 67-90.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-170.

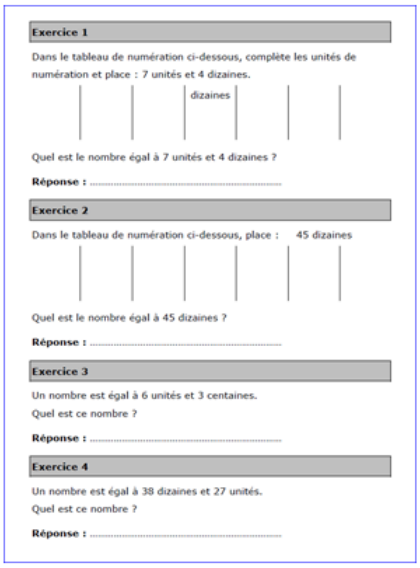
Annexes

Diagnostics du LéA CE1-CE2


Prénom : ……………… Classe : ………
Ecole : ………………………

Avant-Après utilisation du jeu Chiffroscope

Cycle 2 – CE1/CE2


Exercice 1

Dans le tableau de numération ci-dessous, complète les unités de numération et place : 7 unités et 4 dizaines.

		dizaines		

Quel est le nombre égal à 7 unités et 4 dizaines ?

Réponse : ………………………………

Exercice 2

Dans le tableau de numération ci-dessous, place : 45 dizaines

Quel est le nombre égal à 45 dizaines ?

Réponse : ………………………………

Exercice 3

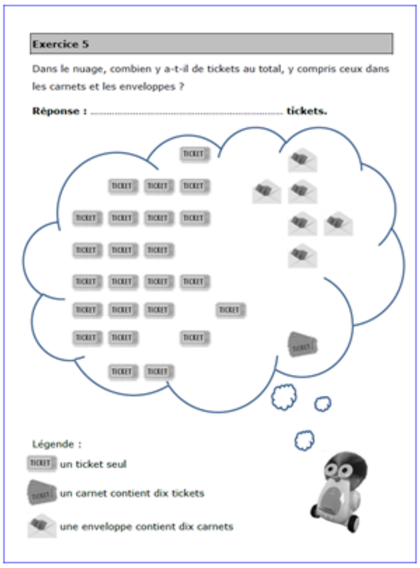
Un nombre est égal à 6 unités et 3 centaines.
Quel est ce nombre ?

Réponse : ………………………………

Exercice 4

Un nombre est égal à 38 dizaines et 27 unités.
Quel est ce nombre ?

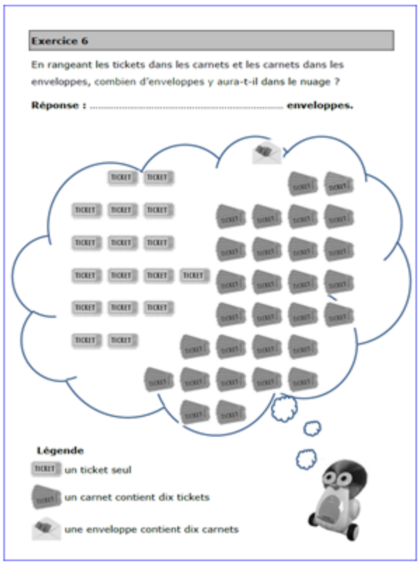
Réponse : ………………………………


Exercice 5

Dans le nuage, combien y a-t-il de tickets au total, y compris ceux dans les carnets et les enveloppes ?

Réponse : ……………………………… **tickets.**

Légende :
un ticket seul
un carnet contient dix tickets
une enveloppe contient dix carnets


Exercice 6

En rangeant les tickets dans les carnets et les carnets dans les enveloppes, combien d'enveloppes y aura-t-il dans le nuage ?

Réponse : ……………………………… **enveloppes.**

Légende
un ticket seul
un carnet contient dix tickets
une enveloppe contient dix carnets


Exercice 7

Le robot a besoin de 615 tickets.
Combien doit-il commander d'enveloppes, de carnets et de tickets seuls ?

Réponse : Le robot doit commander ………………………………
………………………………
………………………………
………………………………

Légende
un ticket seul
un carnet contient dix tickets
une enveloppe contient dix carnets


Exercice 8

Le robot a besoin de 380 tickets mais il n'y a plus que des carnets.
Combien de carnets doit-il commander ?

Réponse : Le robot doit commander ………………………………
………………………………
………………………………
………………………………

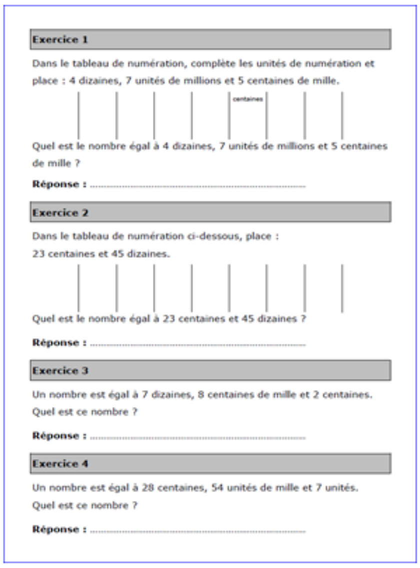
Légende
un ticket seul
un carnet contient dix tickets
une enveloppe contient dix carnets

Diagnostics du LéA Cycle 3


Prénom : .... Classe : ....
Ecole : ....

Avant-Après utilisation du jeu Chiffroscope

Cycle 3


Exercice 1

Dans le tableau de numération, complète les unités de numération et place : 4 dizaines, 7 unités de millions et 5 centaines de mille.

centaines

Quel est le nombre égal à 4 dizaines, 7 unités de millions et 5 centaines de mille ?

Réponse : ....

Exercice 2

Dans le tableau de numération ci-dessous, place : 23 centaines et 45 dizaines.

Quel est le nombre égal à 23 centaines et 45 dizaines ?

Réponse : ....

Exercice 3

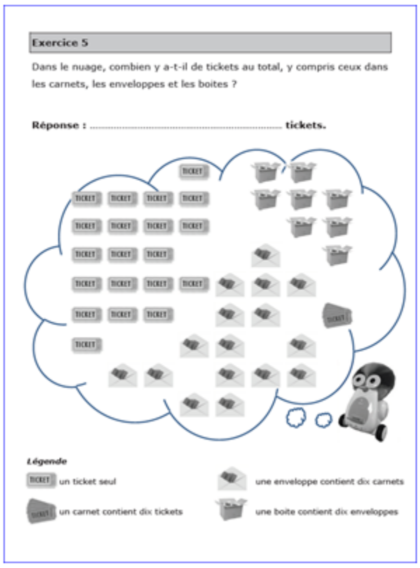
Un nombre est égal à 7 dizaines, 8 centaines de mille et 2 centaines. Quel est ce nombre ?

Réponse : ....

Exercice 4

Un nombre est égal à 28 centaines, 54 unités de mille et 7 unités. Quel est ce nombre ?

Réponse : ....


Exercice 5

Dans le nuage, combien y a-t-il de tickets au total, y compris ceux dans les carnets, les enveloppes et les boites ?

Réponse : .... **tickets.**

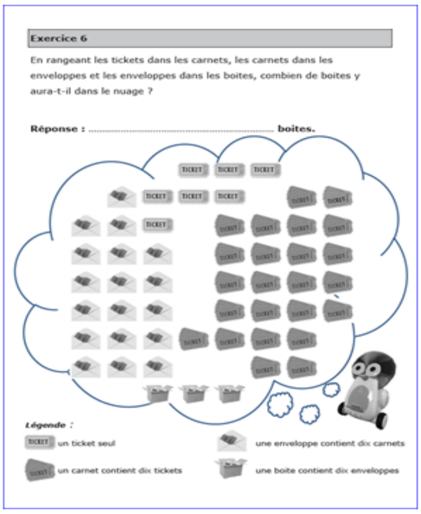
Légende

un ticket seul

une enveloppe contient dix carnets

un carnet contient dix tickets

une boite contient dix enveloppes


Exercice 6

En rangeant les tickets dans les carnets, les carnets dans les enveloppes et les enveloppes dans les boites, combien de boites y aura-t-il dans le nuage ?

Réponse : .... **boites.**

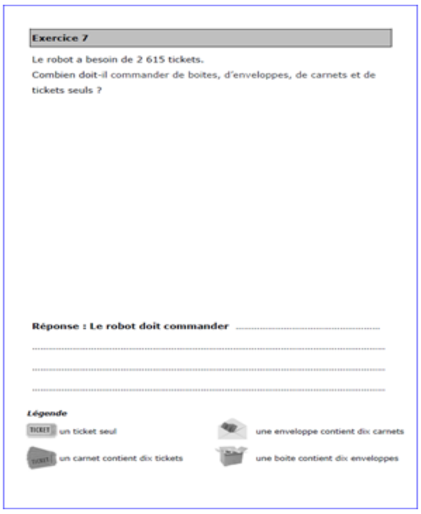
Légende :

un ticket seul

une enveloppe contient dix carnets

un carnet contient dix tickets

une boite contient dix enveloppes


Exercice 7

Le robot a besoin de 2 615 tickets.
Combien doit-il commander de boites, d'enveloppes, de carnets et de tickets seuls ?

Réponse : Le robot doit commander ....

Légende

un ticket seul

une enveloppe contient dix carnets

un carnet contient dix tickets

une boite contient dix enveloppes


Exercice 8

Le robot a besoin de 1 380 tickets mais il n'y a plus que des carnets.
Combien de carnets doit-il commander ?

Réponse : Le robot doit commander ....

Légende :

un ticket seul

une enveloppe contient dix carnets

un carnet contient dix tickets

une boite contient dix enveloppes

Résultats des élèves du LéA

CE1 / CE2

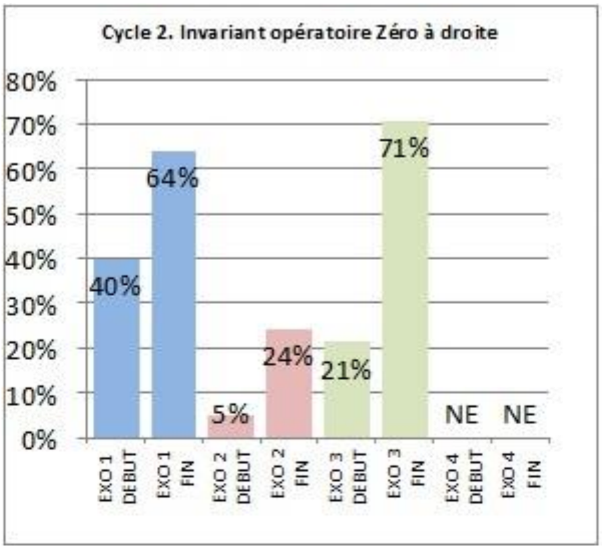
	Réponse Correcte	Ordre	Zéros à Droite	Zéros intercalaires	Retour à l'unité	Conversion entre unités adjacentes	Conversion avec retenue
Exercice 1 AVANT	40%	40%	40%	40%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 1 APRES	64%	65%	64%	64%	1%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 2 AVANT	5%	22%	5%	5%	Non Evalué	5%	Non Evalué
Exercice 2 APRES	22%	57%	24%	22%	Non Evalué	22%	Non Evalué
Exercice 3 AVANT	21%	38%	21%	21%	1%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 3 APRES	71%	80%	71%	71%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 4 AVANT	4%	11%	Non Evalué	4%	0%	4%	Non Evalué
Exercice 4 APRES	16%	19%	Non Evalué	16%	0%	16%	Non Evalué

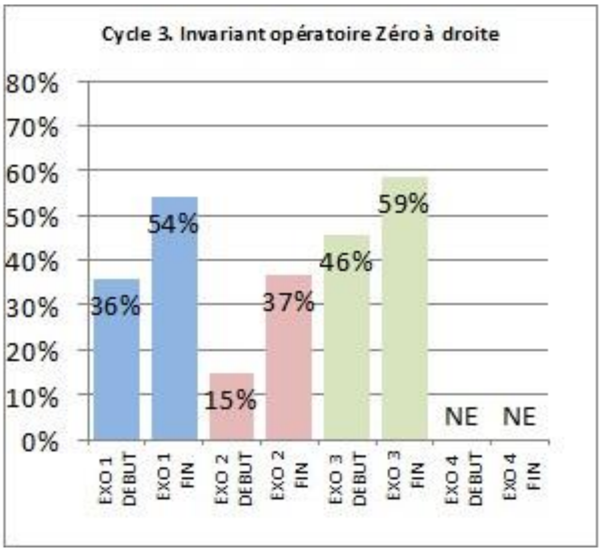
Cycle 3

	Réponse Correcte	Ordre	Zéros à Droite	Zéros intercalaires	Retour à l'unité	Conversion entre unités adjacentes	Conversion avec retenue
Exercice 1 AVANT	23%	54%	36%	23%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 1 APRES	43%	74%	54%	43%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 2 AVANT	9%	59%	15%	11%	2%	17%	Non Evalué
Exercice 2 APRES	30%	58%	37%	32%	2%	45%	Non Evalué
Exercice 3 AVANT	30%	66%	46%	30%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 3 APRES	43%	69%	59%	43%	0%	Non Evalué	Non Evalué
Exercice 4 AVANT	6%	46%	Non Evalué	12%	0%	7%	Non Evalué
Exercice 4 APRES	19%	50%	Non Evalué	26%	0%	23%	Non Evalué

INVARIANT OPÉRATOIRE ZÉRO À DROITE

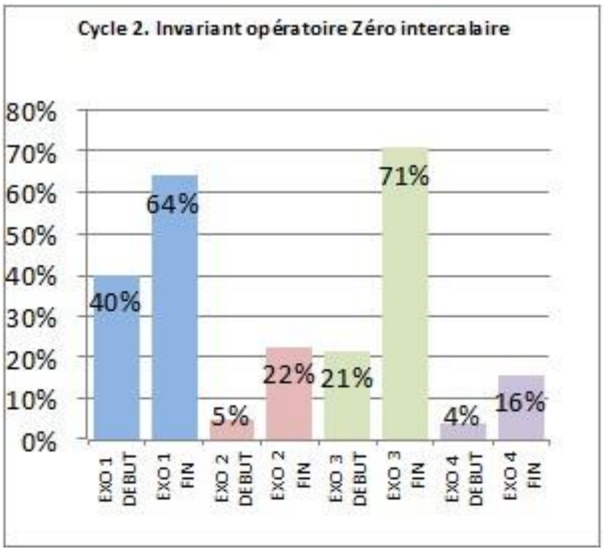
Pourcentage de réponses pouvant résulter de la mobilisation de l'invariant opératoire zéro à droite, exercice par exercice, selon le niveau (cycle 2 ou cycle 3).

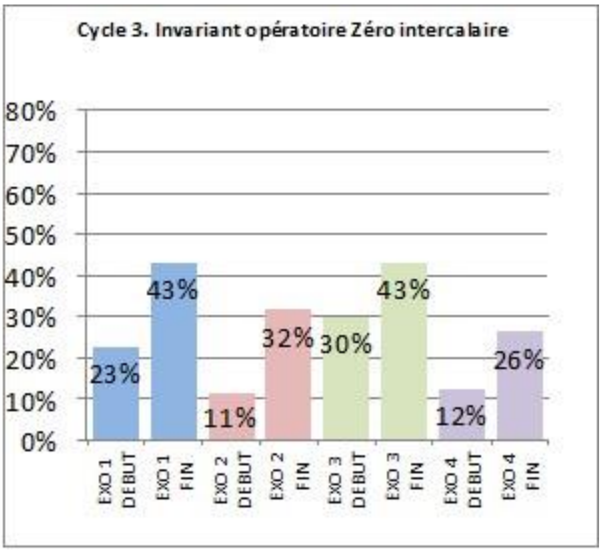




INVARIANT OPÉRATOIRE ZÉRO INTERCALAIRE

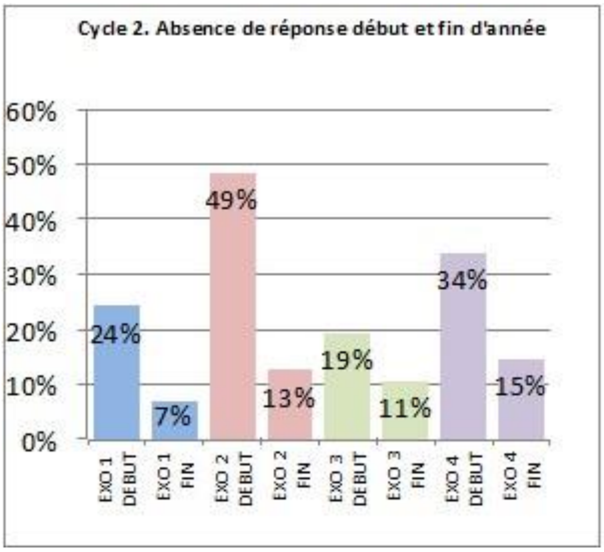
Pourcentage de réponses pouvant résulter de la mobilisation de l'invariant opératoire zéro intercalaire, exercice par exercice, selon le niveau (cycle 2 ou cycle 3).

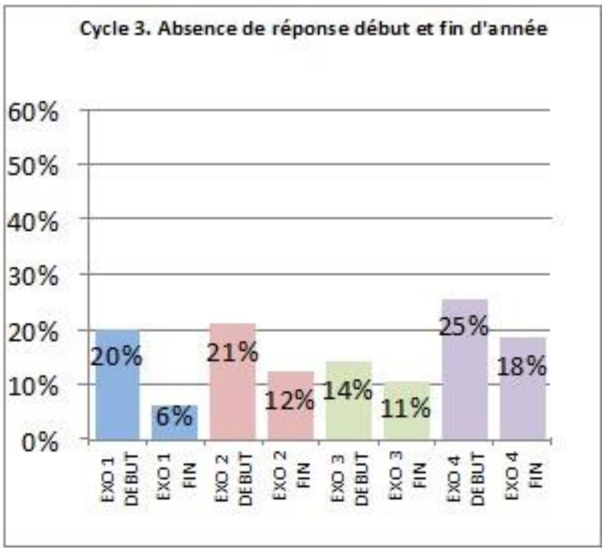




EVOLUTION DU TAUX D'ABSENCE DE RÉPONSE

Pourcentage d'absence de réponses, exercice par exercice, selon le niveau (cycle 2 ou cycle 3).





EVOLUTION DES RÉUSSITES DES ÉLÈVES DE CYCLE 3 ENTRE LE DÉBUT ET LA FIN DE L'ANNÉE

Pourcentage d'élèves de cycle 3 modifiant leur réussite entre le diagnostic de début d'année et celui de fin d'année, exercice par exercice : évolution positive en ligne 1 et évolution négative en ligne 2

Cycle 3	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
NON REUSSI AVANT REUSSI APRES ↗	**30%**	24%	**25%**	17%
REUSSI AVANT NON REUSSI APRES ↘	**10%**	**3%**	**11%**	**4%**