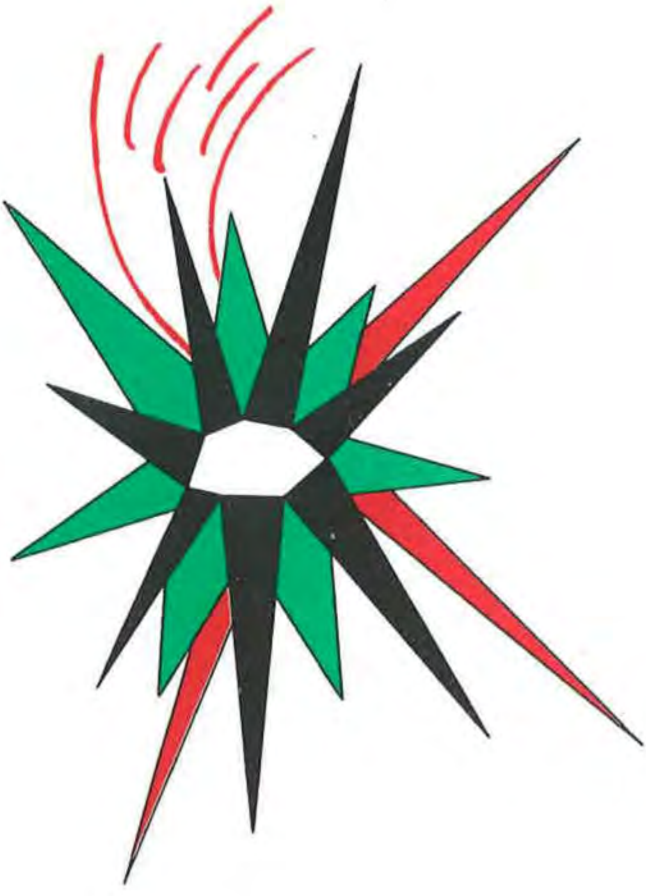
124



MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1986
25e ANNÉE

Une date à retenir...

Le samedi 29 novembre 1986

Pour marquer son **vingt-cinquième anniversaire,** Math-Ecole vous attend à

l'Ecole normale de Fribourg

le samedi 19 novembre dès 15 heures

Des indications plus précises vous parviendront dans le prochain numéro mais vous pouvez déjà noter qu'une **exposition** présentant ateliers et jeux mathématiques sera ouverte dans les locaux de l'Ecole normale du mercredi 26 au samedi 29 novembre.

Elle accueillera aussi bien les adultes que les enfants qui pourront y effectuer diverses activités ludico-mathématiques.

D'ores et déjà, nous remercions nos collègues fribourgeois pour l'aide précieuse qu'ils nous apportent et nous espérons que vous serez nombreux à vous réjouir avec nous en cette occasion.

Le comité de rédaction

MATH-ECOLE 124

25e ANNÉE — Paraît cinq fois par an — SEPTEMBRE 1986

Editorial

Question d'équilibre

Tout le monde s'accorde à dire que l'enseignement mathématique est un enseignement formatif.

A y regarder de plus près, on s'aperçoit que cette belle unanimité n'existe qu'au niveau de l'énoncé du principe. En quoi consiste un enseignement qui soit, pour la plupart des élèves, une véritable formation personnelle? Certains s'imaginent qu'il suffit pour cela de bien les exercer à des techniques. Beaucoup d'autres pensent que c'est largement insuffisant et sont prêts à inclure dans leur enseignement des phases de découverte, de résolution de problèmes (et pas seulement de problèmes déjà exercés), peut-être même de recherche.

A ce propos, je m'en voudrais de ne pas citer le début du rapport final de CIRCE III sur l'enseignement mathématique (septembre 1985).

«Les mathématiques ont donné lieu à une pluralité de définitions dont il convient de dégager deux lignes essentielles préalablement à la formulation des objectifs de l'enseignement de cette discipline:

I. La mathématique est action d'analyse du nouveau, réel ou imaginaire.
II. Elle est un ensemble d'outils créés par et pour cette action.

[...] L'élève apprend les mathématiques lorsque:

I. Le maître donne l'occasion à l'enfant, le plus souvent possible, de développer ses multiples facultés pour vivre toutes les phases d'une recherche et acquérir ainsi le caractère et les aptitudes que cela nécessite.
II. Par cette activité essentiellement, le maître permet à l'enfant d'acquérir de manière solide quelques outils mathématiques reconnus de base.»

Nos collègues de CIRCE III font bien ressortir deux axes dont le premier est essentiel (les mathématiques, c'est ça!) et le second indispensable (car si l'on ne maîtrise pas un minimum de techniques on est souvent bien ennuyé et, surtout, on ne peut même pas s'exercer selon le premier axe).

Entre les deux, il y a un équilibre à réaliser. L'expérience montre cependant que l'apprentissage de techniques prend presque toujours le dessus, pour diverses raisons bien connues: il est plus facile à évaluer, il y a une «mode des objectifs» et il se laisse facilement mettre en objectifs opérationnalisés; la recherche et la découverte prennent beaucoup de temps. En somme, **l'indispensable empêche de faire l'essentiel!**

Pour rendre possible l'équilibre nécessaire, il faut réduire fortement la quantité des techniques à maîtriser. Au lieu d'en exercer beaucoup relativement mal, il vaudrait mieux en **automatiser un minimum,** mais relativement bien. Assez pour donner confiance aux élèves, aux maîtres, aux parents, aux patrons d'apprentissage. Assez peu pour qu'il reste bien le temps de mettre en action l'intelligence des élèves.

Th. Bernet

Périodicité des codes à virgule

par André Calame

1) Périodicité

On sait qu'un nombre rationnel peut être écrit sous différentes formes. D'une part, on peut le représenter par des codes fractionnaires, d'autre part on peut lui faire correspondre un code à virgule. Dans ce cas, le code à virgule est périodique, du moins à partir d'un certain rang et les chiffres réapparaissent alors dans le même ordre. On a par exemple:

$$\frac{3}{4} = 0{,}7500000... \quad = 0{,}75(0)$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666666... \quad = 0{,}(6)$$

$$\frac{70}{101} = 0{,}69306930... \quad = 0{,}(6930)$$

$$\frac{441}{444} = 0{,}99324324... \quad = 0{,}99(324)$$

Tous ces codes à virgule sont *périodiques* et la période est indiquée entre parenthèses.

Nous nous intéressons dans cet article à la *longueur de la période* pour un nombre rationnel donné sous forme de code fractionnaire irréductible. Ce problème peut avoir une certaine importance en rapport avec l'usage des calculatrices de poche dans l'enseignement. D'une part, on constate facilement la périodicité de certains codes dont la période est courte. En revanche, pour d'autres la période est parfois masquée par le jeu du forçage éventuel de la dernière décimale affichée.

En ce qui concerne les codes à virgule des nombres rationnels, trois cas se présentent selon les facteurs premiers du dénominateur:

1. Si le dénominateur ne comprend que des facteurs 2 et/ou 5, le code à virgule est *fini*. (La période est réduite à 0).

$$\frac{27}{40} = \frac{27}{2^3 \cdot 5} = 0{,}675\ (0)$$

2. Si le dénominateur ne comprend ni facteur 2, ni facteur 5, le code à virgule est *périodique simple*. (La période commence immédiatement après la virgule).

$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571)$$

3. Dans tous les autres cas, le code à virgule est *périodique mixte*. (La période est précédée d'une partie irrégulière).

$$\frac{11}{12} = 0,91\ (6)$$

Dans la suite, nous ne nous occuperons que des codes périodiques simples, car le cas périodique mixte s'y ramènerait sans difficulté majeure. C'est dire que le dénominateur n du code fractionnaire irréductible sera toujours premier avec la base de numération dix.

Remarquons d'abord que la longueur de la période dépend du dénominateur seulement et pas du numérateur. Dans ce but, comparons les deux divisions suivantes:

```
1         : 13              7          : 13
0           0,076923 ...    0            0,538461 ...
10                          70
 0                          65
100                           50
 91                           39
   90                          110
   78                          104
   120                           60
   117                           52
     30                           80
     26                           78
      40                           20
      39                           13
       1 ...                        7 ...
```

Dans la première division, les restes successifs sont:

1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, ...

Multiplions-les tous par 7: nous avons la suite:

7, 70, 63, 84, 21, 28, 7, ...

En réduisant tous ces nombres modulo 13, c'est-à-dire en prenant les restes de leur division par 13, nous obtenons la suite des restes de la 2ème division:

7, 5, 11, 6, 8, 2, 7, ...

La longueur de la période, ici 6, ne dépend pas du numérateur 1 ou 7, mais seulement du dénominateur 13. Aussi dans la suite, nous envisagerons toujours des codes fractionnaires de numérateur 1.

Le calcul modulo n que nous avons utilisé un peu abruptement est l'outil efficace pour notre étude. On remarquera que dans la première division, les restes successifs sont les restes modulo 13 des puissances successives de la base dix:

$$\begin{aligned}
1 &= 10^0 = 0 \cdot 13 + 1 \\
10 &= 10^1 = 0 \cdot 13 + 10 \\
100 &= 10^2 = 7 \cdot 13 + 9 \\
1000 &= 10^3 = 76 \cdot 13 + 12 \\
10000 &= 10^4 = 769 \cdot 13 + 3 \\
100000 &= 10^5 = 7692 \cdot 13 + 4
\end{aligned}$$

En fait, pour résoudre le problème de la longueur de la période associée à $\frac{1}{n}$, il faut déterminer *le plus petit exposant* x (supérieur à 0) tel que 10^x soit multiple de n augmenté de 1; en termes de congruence:

$$(1) \qquad \boxed{10^x \equiv 1 \pmod{n}}$$

Comme la liste des restes possibles mod n est finie: 1,2,... , n-1, l'exposant cherché x existe certainement et il est inférieur ou égal à n-1. L'exemple le plus simple d'une longeur égale à n-1 est le cas de

$$\frac{1}{7} = 0,(142857)$$

2) La relation de Bezout

Pour étudier avec profit la relation (1), il est utile de faire un petit détour en théorie des nombres.
Quand deux nombres naturels a et b sont premiers entre eux, on peut trouver deux entiers x et y tels que

$$(2) \qquad \boxed{ax + by = 1}$$

C'est une manière d'écrire que le plus grand diviseur commun de a et b, c'est-à-dire 1, peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de a et de b. Cette relation attribuée à Bezout (1730-1783) était déjà connue de Bachet de Méziriac (1581-1638).

Par exemple, pour a = 49 et b = 72, on a x = 25 et y = 17:

$$49 \cdot 25 + 72 \cdot (-17) = 1225 - 1224 = 1$$

Nous utiliserons cette relation de Bezout dans le cas où $b = n$, n étant le dénominateur d'un code fractionnaire et nous chercherons quels sont les numérateurs m qui sont premiers avec n. On a alors:

$$\begin{aligned} mx + ny &= 1 \\ \text{ou } mx &= -ny + 1 \end{aligned}$$

mx est multiple de n augmenté de 1. En termes de congruence:

$$(3) \quad \boxed{mx \equiv 1 \pmod{n}}$$

La relation (3) signifie que si m est premier avec n, alors m possède un inverse x par rapport à la multiplication modulo n. On dit que m est *inversible*.

L'ensemble des éléments inversibles forme un groupe pour la multiplication modulo n. A titre d'exemple, si $n = 14$, il existe 6 nombres naturels inférieurs à 14 et premiers avec 14. Ce sont:

$$1, 3, 5, 9, 11, 13$$

La table de multiplication de ces 6 éléments inversibles est la suivante:

·	1	3	5	9	11	13
1	1	3	5	9	11	13
3	3	9	1	13	5	11
5	5	1	11	3	13	9
9	9	13	3	11	1	5
11	11	5	13	1	9	3
13	13	11	9	5	3	1

3) L'indicateur d'Euler

Euler a donné une formule qui permet de calculer, pour n donné, l'effectif e(n) des nombres naturels inférieurs à n et premiers avec n.

Pour établir cette formule, on procède en quatre étapes:

1. Si p est un nombre premier, tous les nombres naturels inférieurs à p sont premiers avec p, d'où:

$$e(p) = p-1$$

2. Si $n = p^k$, puissance d'un nombre premier p, parmi les p^k nombres de 1 à p^k, il faut éliminer les multiples de p, à savoir:

$$1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ 3 \cdot p,\ \dots,\ p^{k-1} \cdot p = p^k$$

A part ces p^{k-1} multiples de p, tous les autres nombres sont premiers avec p^k, d'où:

$$e(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \ (1 - \frac{1}{p})$$

3. Si n = ab est le produit de deux nombres premiers entre eux, on peut prouver que

$$e(n) = e(a \cdot b) = e(a) \cdot e(b)$$

4. Enfin, on complète ce qui précède en posant $e(1) = 1$
   On est alors en mesure de calculer e(n) pour tout nombre naturel n dès qu'on connaît sa décomposition en facteurs premiers:

   $$e(12) = e(2^2 \cdot 3) = e(2^2) \cdot e(3) = 2^2 \ (1 - \frac{1}{2}) \cdot 2 = 4$$

   $$e(100) = e(2^2 \cdot 5^2) = e(2^2) \cdot e\ (5^2) = 2^2 \ (1 - \frac{1}{2}) \cdot 5^2 \ (1 - \frac{1}{5}) = 40$$

   D'une manière générale, si $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_r^{r_u}$

   on a $e(n) = p_1^{r_1} \ (1 - \frac{1}{p_1}) \ p_1^{r_2} \ (1 - \frac{1}{p_2}) \ \ldots \ p_u^{r_u} \ (1 - \frac{1}{p_u})$

   $$e(n) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_u^{r_u} \ (1 - \frac{1}{p_1}) \ (1 - \frac{1}{p_2}) \ \ldots \ (1 - \frac{1}{p_u})$$

   $$4) \quad e(n) = n \ (1 - \frac{1}{p_1}) \ (1 - \frac{1}{p_2}) \ \ldots \ (1 - \frac{1}{p_u})$$

4) Théorème d'Euler

En liaison avec ce qui précède, Euler a démontré le théorème suivant:

Si a et n sont premiers entre eux, alors

$$(5) \qquad \boxed{a^{e(n)} \equiv 1 \pmod{n}}$$

On peut prouver ce théorème de plusieurs manières. Par exemple, comme il y a e(n) nombres inversibles inférieurs à n, en considérant la multiplication modulo n, le groupe multiplicatif obtenu est lui-même d'ordre e(n). Or, on sait que dans un groupe chaque élément a possède un ordre k qui est un diviseur de l'ordre du groupe. Ici si

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}$$

alors k est diviseur de e(n) et à plus forte raison

$$a^{e(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Revenons à titre d'exemple aux éléments inversibles (mod 14).

On a $e(14) = e(2 \cdot 7) = e(2) \cdot e\ (7) = 1 \cdot 6 = 6$

L'élément 3 est effectivement d'ordre 6, car:

$3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 3 \cdot 9 \equiv 13$;
$3^4 = 3 \cdot 13 \equiv 11$; $3^5 = 3 \cdot 11 \equiv 5$; $3^6 = 3 \cdot 5 \equiv 1$

En revanche, l'élément 11 est l'ordre 3, car:

$11^1 = 11$; $11^2 = 121 \equiv 9$; $11^3 = 11 \cdot 9 = 99 \equiv 1$

Ainsi $11^3 \equiv 1 \pmod{14}$ d'où aussi $11^6 = (11^3)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{14}$

Nous voici à pied d'œuvre pour revenir à la périodicité des codes à virgule. En effet, la relation (1):

$$10^x \equiv 1 \pmod{n}$$

rappelle dans sa forme le théorème d'Euler:

$$10^{e(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

si n et 10 sont premiers entre eux, ce qui est bien le cas suivant nos hypothèses.
Rechercher la longueur l(n) de la période de $\frac{1}{n}$, c'est chercher le plus petit exposant x tel que

$$10^x \equiv 1 \pmod{n}$$

On sait maintenant que x est au plus égal à e(n) et qu'il est de toutes manières un diviseur de e(n).

5) Etape expérimentale

Grâce à un mini-ordinateur, on peut disposer aisément de la longueur de la période de $\frac{1}{n}$, pour n premier avec 10 et pour toutes les valeurs inférieures à 500 ou à 1000, par exemple. Nous donnons en page suivante un extrait des résultats et le lecteur qui le souhaite peut lui-même tenter de découvrir certaines relations intéressantes.

Voici quelques propriétés trouvées expérimentalement:

1. La longueur de la période est maximale seulement si n est premier:

$$l(n) = n - 1 \Rightarrow n = p \text{ premier}$$

2. La réciproque est fausse. Pour les nombres premiers

   p : 3, 11, 13, 31, etc.

Ce programme donne, pour les nombres naturels N tels que 1/N admet un développement décimal périodique simple:

- la décomposition de N en facteurs premiers
- la valeur de l'indicateur d'Euler pour N
- la longueur de la période de 1/N

Une étoile signale les périodes de longueur maximale

Nombre naturel minimum = 1
Nombre naturel maximum = 500 (cf. p. 10)

N	Décomposition	Indicateur d'Euler	Longueur de la période
3	3	2	1
7	7	6	6 *
9	3^2	6	1
11	11	10	2
13	13	12	6
17	17	16	16 *
19	19	18	18 *
21	3*7	12	6
23	23	22	22 *
27	3^3	18	3
29	29	28	28 *
31	31	30	15
33	3*11	20	2
37	37	36	3
39	3*13	24	6
41	41	40	5
43	43	42	21
47	47	46	46 *
49	7^2	42	42
119	7*17	96	48
121	11^2	110	22
123	3*41	80	5
127	127	126	42
129	3*43	84	21
131	131	130	130 *
133	7*19	108	18
137	137	136	8
139	139	138	46
141	3*47	92	46
143	11*13	120	6
147	3*7^2	84	42
149	149	148	148 *
151	151	150	75
153	3^2*17	96	16
157	157	156	78
159	3*53	104	13
161	7*23	132	66
163	163	162	81
167	167	166	166 *
169	13^2	156	78
171	3^2*19	108	18
173	173	172	43
177	3*59	116	58
179	179	178	178 *

N	Décomposition	Indicateur d'Euler	Longueur de la période
341	11*31	300	30
343	7^3	294	294
347	347	346	173
349	349	348	116
351	3^3*13	216	6
353	353	352	32
357	3*7*17	192	48
359	359	358	179
361	19^2	342	342
363	3*11^2	220	22
367	367	366	366 *
369	3^2*41	240	5
371	7*53	312	78
373	373	372	186
377	13*29	336	84
379	379	378	378 *
381	3*127	252	42
383	383	382	382 *
387	3^2*43	252	21
389	389	388	388 *
391	17*23	352	176
393	3*131	260	130
397	397	396	99
399	3*7*19	216	18
401	401	400	200
403	13*31	360	30
407	11*37	360	6
409	409	408	204
411	3*137	272	8
413	7*59	348	174
417	3*139	276	46
419	419	418	418 *
421	421	420	140
423	3^2*47	276	46
427	7*61	360	60
429	3*11*13	240	6
431	431	430	215
433	433	432	432 *
437	19*23	396	198
439	439	438	219
441	3^2*7^2	252	42
443	443	442	221
447	3*149	296	148

la période est de longueur inférieure à p–1:

$$l(p)\ :\ 1,\ 2,\ 6,\ 15,\ \text{etc.}$$

3. Pour $n = p^k$, on a $l(p^k) = p^{k-1} \cdot l(p)$ avec exception pour $p = 3$

Exemples: $n = 7^2 = 49$ $\quad l(7^2) = 7 \cdot l(7) = 7 \cdot 6 = 42$
$n = 7^3 = 343$ $\quad l(7^3) = 7^2 \cdot l(7) = 49 \cdot 6 = 294$
$n = 11^2 = 121$ $\quad l(11^2) = 11 \cdot l(11) = 11 \cdot 2 = 22$

L'exception pour $p = 3$ tient au fait que

$10^1 \equiv 1 \pmod 3$ et aussi $10^1 \equiv 1 \pmod{3^2}$

On a dès lors: $l(3) =$ et $l(3^k) = 3^{k-2}$ pour $k \geqslant 2$

4. Si $n = a \cdot b$ où a et b sont premiers entre eux on a:

$$l(a \cdot b) = \text{ppmc}\,[l(a), l(b)]$$

où ppmc désigne le plus petit multiple commun.

Exemples:
$n = 21 = 3 \cdot 7$ $\quad l(21) = \text{ppmc}\ [l(3), l(7)] = \text{ppmc}(1, 6) = 6$
$n = 77 = 7 \cdot 11$ $\quad l(77) = \text{ppmc}\ [l(7), l(11)] = \text{ppmc}(6, 2) = 6$
$n = 91 = 7 \cdot 13$ $\quad l(91) = \text{ppmc}\ [l(7), l(13)] = \text{ppmc}(6, 6) = 6$
$n = 133 = 7 \cdot 19$ $\quad l(133) = \text{ppmc}\ [l(7), l(19)] = \text{ppmc}(6, 18) = 18$
$n = 161 = 7 \cdot 23$ $\quad l(161) = \text{ppmc}\ [l(7), l(23)] = \text{ppmc}(6, 22) = 66$

6) Justifications

Nous nous contenterons de prouver la quatrième propriété relative au plus petit multiple commun; puis nous en déduirons la première propriété sur la longueur maximale.

Si $n = a \cdot b$ avec a et b premiers entre eux, on a d'après la relation de Bezout

$$ax + by = 1$$

pour des entiers x et y bien déterminés. En divisant les deux membres par $n = ab$, on obtient:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ est ainsi décomposé en une somme de deux fractions de dénominateurs a et b.

A partir de là, nous suivrons sur un exemple comment intervient le plus petit multiple commun, selon un procédé utilisé par Gauss:

$$707 = 7 \cdot 101 = 29 \cdot 7 - 2 \cdot 101$$

$$\frac{1}{707} = \frac{29}{101} - \frac{2}{7} = \frac{29}{101} + \frac{5}{7} - 1$$

La dernière transformation permet d'avoir une addition de fractions plutôt qu'une soustraction.

$$\frac{1}{101} = 0{,}0099|0099|\ldots \qquad \frac{29}{101} = 0{,}2871|2871|2871|2871|\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857|\ldots \qquad \frac{5}{7} = 0{,}714285|714285|714285|\ldots$$

Tous les 12 chiffres, ppmc de 6 et de 4, les deux périodes coïncident. Ainsi, par addition, nous obtenons un code à virgule de période 12:

$$\frac{29}{101} + \frac{5}{7} = 1{,}001414427157|001414427157|\ldots$$

$$\frac{11}{707} = 0{,}(001414427157)$$

Revenons au cas particulier $l(n) = n - 1 \Rightarrow n$ premier.

Nous procédons par contraposition en prouvant que si n est composé, alors $l(n) < n - 1$.

Soit $n = a \cdot b$ avec a, b premiers entre eux. On peut supposer $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 3$, ce qui entraîne $a + b \geqslant 5$. Alors:

$$l(n) = \text{ppmc}\,[l(a)\,,\,l(b)] \leqslant l(a) \cdot l(b) \leqslant (a-1)\,(b-1) = ab-a-b+1$$

Comme $a + b \geqslant 5$, on a $l(n) \leqslant ab-(a+b)+1 \leqslant ab-4 < n-1$

7) Algèbre et analyse

Dans ce qui précède, nous avons fait un large usage de l'algèbre et de la théorie des nombres. Mais il serait fallacieux de masquer tout un aspect lié à l'analyse, c'est-à-dire aux passages à la limite pour des sommes comportant un nombre infini de termes.

Il y a bien des années, lorsque j'enseignais à des élèves de 12 à 13 ans comment transformer une «fraction décimale périodique» en «fraction ordinaire», je prenais volontiers l'exemple suivant:

$$x = 0{,}666666\ldots$$

De là, on tire: $\begin{array}{r} 10\,x = 6{,}66666\;... \\ x = 0{,}666666\;... \\ \hline \end{array}$

par soustraction: $9\,x = 6$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

A chaque fois, il s'est trouvé des élèves pour mettre en cause la soustraction ci-dessus. Que se passait-il «tout à droite» ou «pour le dernier chiffre»? Le décalage de la virgule dans la multiplication par 10 n'avait-il aucun effet sur la partie décimale? Je dois avouer n'avoir pas toujours trouvé chez de futurs bacheliers le même étonnement, ni un tel besoin de clarification. Tout tient au fait que 0,(6) est la somme d'une série géométrique de raison 10^{-1}:

$$0{,}(6) = 6 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + \ldots + 6 \cdot 10^{-n} + \ldots$$

et les calculs ci-dessus utilisent, sans qu'on le dise expressément, les opérations sur les séries absolument convergentes. Il en est de même pour la propriété principale de cet article:

$$l(a \cdot b) = \text{ppmc}\,[l(a)\,,\,l(b)]$$

comme on peut s'en convaincre en regardant de près le calcul effectué pour $\frac{1}{707}$.

Loin de moi l'idée que l'on devrait jeter le trouble dans l'esprit des élèves confiants. Tout au plus faut-il souhaiter que les maîtres accueillent avec bienveillance les bonnes questions des élèves perplexes.

> Il y a toujours eu pour moi la loi orthographique et la loi mathématique, l'une me paraissant arbitraire, l'autre impérative. Pourquoi mettre deux «m» dans «incommode», un seul suffit! J'en avais la preuve dans le fait que tout le monde me comprenait quand je n'en mettais qu'un. Il n'en allait pas de même en mathématiques: un + à la place d'un –, un seul petit changement de signe rendait mon résultat faux et inacceptable. Les mathématiques ne me passaient rien, il fallait que je m'y soumette. A l'inverse, l'arbitraire apparent de la loi grammaticale m'exaspérait alors que progressivement je trouvais des repères, un sécurité dans cette loi mathématique sur laquelle je pouvais compter, m'appuyer et avec laquelle je n'avais pas de surprise. Elle, au moins, ne me paraissait pas arbitraire puisque j'en pouvais vérifier constamment le bien-fondé.
>
> Jacques Nimier

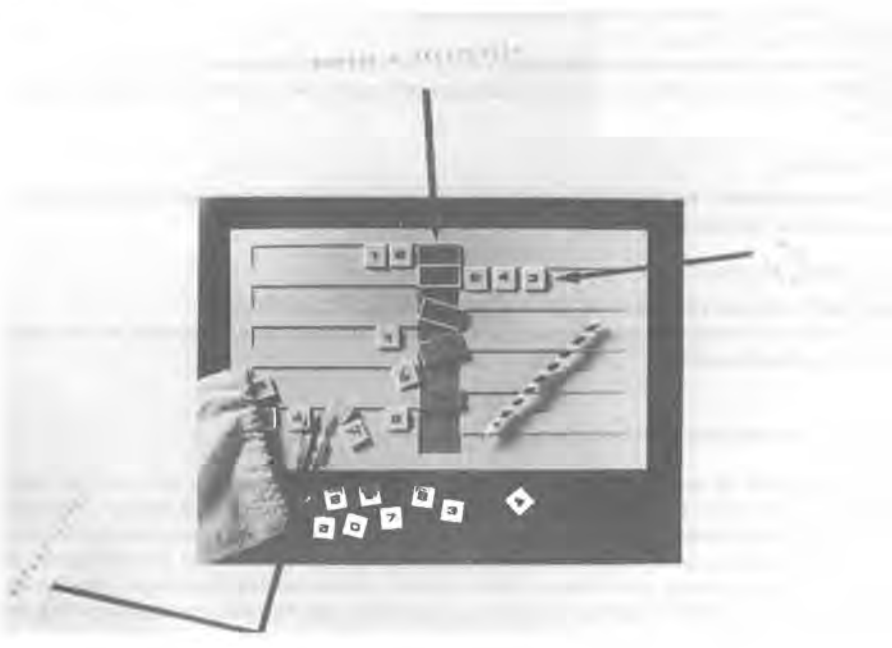
Le jeu dans l'enseignement de la mathématique
(suite)

Une tentative de communication d'une recherche universitaire
par Edith Baeriswyl

Dans le numéro précédent de Matrh-Ecole (123, mai 1986, p. 23) l'auteur a présenté les objectifs visés par une équipe de chercheurs universitaires associés à des praticiens. Il développe ci-après deux exemples de jeux pédagogiques: DECO et ZIGZAG.

A PROPOS DU JEU DECO

4. Calculer en jouant: matériel et son lien avec le programme



Matériel:

1 planche
10 pièces oranges: nombres à décomposer
1 sac contenant des pièces jaunes: nombres à utiliser pour la décomposition et des pièces-joker: pièces sans nombre inscrit
1 crayon pour inscrire des nombres sur les pièces-joker

But du jeu: *Décomposer des nombres en utilisant un maximum de pièces: poser le plus grand nombre de pièces jaunes sur la planche, et en garder le moins possible à la fin de la partie.*

Version compétitive pour deux joueurs:

Règles:

Au début de la partie:

- *Mélanger et poser à l'envers toutes les pièces oranges (le nombre inscrit ne doit pas être visible)*
- *Tirer 10 pièces jaunes du sac pour chaque joueur*
- *Décider quelle partie de la planche sera attribuée à chaque joueur et qui commence*

A chaque tour:

- *Choisir une pièce orange et la poser sur la partie centrale de la planche*
- *Choisir une ou plusieurs pièces jaunes pour faire au total «la même chose» que le nombre inscrit sur la pièce orange*
- *Aligner les pièces choisies à côté de la pièce orange*
- *Si les nombres à disposition ne permettent pas d'effectuer la décomposition:*
  - *Tirer une par une des pièces supplémentaires*
- *Pour utiliser une pièce-joker:*
  - *inscrire n'importe quel nombre entre 0 et 9 (0 et 5 pour les élèves de 1P)*
- *Vérifier à la fin de chaque tour que la combinaison posée par le joueur adverse est correcte.*

Pénalisation:

Si la décomposition est incorrecte redonner les pièces posées au joueur et retourner la pièce orange pour indiquer le tour perdu.

A la fin de la partie:

- *Enlever une pièce posée sur la planche pour chaque pièce inutilisée*
- *Compter pour chaque joueur le nombre de pièces restantes: celui qui obtient le plus grand score gagne la partie.*

Version coopérative pour deux joueurs

Même principe de jeu. Au début de la partie. 10 pièces sont tirées du sac pour les deux joueurs qui forment une équipe. Il n'y a pas de pénalisation comme dans la version compétitive. Les joueurs doivent décider ensemble tout au long de la partie des démarches à effectuer, contrôler que les résultats sont corrects. La partie se joue sur 5 tours. A la fin de la partie, on enlève une pièce posée pour chaque pièce utilisée, puis on calcule le score de l'équipe qui correspond au nombre de pièces restantes. Le but du jeu est d'améliorer le score de l'équipe d'une partie à l'autre.

Champ numérique *(tel que défini dans notre recherche)*

Pour les élèves du degré	*1P*	*2P - 3P*
– Nombres à décomposer (pièces oranges)	*jusqu'à 10*	*jusqu'à 20*
– Nombres utilisés pour les décompositions (pièces jaunes)	*0 à 5*	*0 à 9*

D'autres variations du champ numérique sont possibles, selon le niveau des élèves.

Deco est un jeu centré sur les opérations de décomposition du nombre, qui ont une place centrale dans l'avenue OP. Il offre la possibilité d'essayer, de vérifier par calcul mental, verbal ou comptage sur les doigts, de nombreuses combinaisons qui vont de la décomposition simple en deux termes à des stratégies plus complexes de redécompositions successives mettant en œuvre les propriétés de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre).

En 1P, les fiches de travail du programme romand offrent de nombreuses occasions d'exercer la décomposition (46% des fiches OP), mais il s'agit le plus souvent de décompositions simples en deux termes, qui sont possibles dans le cadre du jeu, mais non optimales selon les règles énoncées. *Deco* permet de compléter les situations d'initiation à la décomposition.

En 2P-3P, il peut être une occasion de consolider la mobilité de décomposition et développer des automatismes de calcul.

L'utilisation du jeu peut être coordonnée avec plusieurs activités proposées dans la méthodologie, par exemple: activités 2, 3 4, (1P), activités 1,3 (2P), et avec des fiches du classeur de l'élève, par exemple: OP 32 à 37 (1P), OP 27 à 30 (2P).

5. Une partie avec Jean-Daniel et Steve:

En regard de photos montrant le déroulement d'une partie entre 2 enfants de 2P assorties de commentaires sur les stratégies, nous avons exposé quelques résultats généraux de la recherche (tiré de l'observation des 8 groupes de 2 enfants de 2P ayant joué la version compétitive) et les implications pédagogiques qui en découlent.

- A propos des erreurs de calcul dans les parties de *Deco:*

Sur l'ensemble des 320 tours joués, le 7% seulement comporte des erreurs de calcul à la fin du tour. La plupart d'entre elles sont repérées par l'adversaire. La structure du jeu qui prévoit de laisser sur la planche les décompositions effectuées permet à l'enseignant de réaliser un rapide contrôle à la fin de la partie. Des erreurs non repérées par l'adversaire pourront être ainsi corrigées.

- A propos des démaches d'évaluation:

Le pourcentage peu élevé d'erreurs est dû en partie aux interactions que le jeu suscite et à l'évaluation mutuelle que les règles impliquent. A 78% des tours, le joueur observateur a vérifié la décomposition de son camarade pendant ou à la fin du tour. A 60% des tours, les enfants observateurs sont intervenus dans le jeu de leur adversaire pendant son élaboration. La fréquence de ces interventions étant fort variable, les différences interindividuelles peuvent se manifester positivement à travers un jeu du type *Deco.*

- A propos de l'expression de la compétition:

Les suggestions offertes à l'adversaire n'empêchent pas des manifestations de compétition relevées à 37% des tours. Mais le plus souvent il s'agit d'une compétition intégrée aux interactions, susceptible de stimuler la réflexion plutôt que liée au but à plus long terme de gagner la partie.

6. Jonglons avec les nombres: évolution des erreurs, signe de progrès

La nature des erreurs relevées à travers les parties de jeu *Deco* peut être révélatrice de progrès et indiquer une maîtrise progressive des contenus mathématiques. Les enfants ayant surmonté les difficultés liées au simple calcul, commencent à rechercher des stratégies qui les amènent à comparer des calculs, à découvrir des procédures personnelles de calcul pour se simplifier le travail, à utiliser l'idée de compensation.

En 1P les erreurs de calcul restent encore fréquentes (marge de variation de 3% à 48%) malgré une attention soutenue et un recours au comptage sur les doigts. La difficulté liée au calcul empêche souvent les élèves de ce degré d'élaborer des stratégies optimales: la plupart de leurs décompositions ne dépassent pas 2 ou 3 termes.

Progressivement, les élèves parviennent à une maîtrise du calcul (seulement 3% des tours avec erreur en version compétitive en 3P). Mais les ressources du jeu ne sont pas épuisées pour autant car les démarches de jeu des élèves de 3P montrent que les erreurs de stratégie sont encore nombreuses (25% des tours). Elles sont liées le plus souvent à:

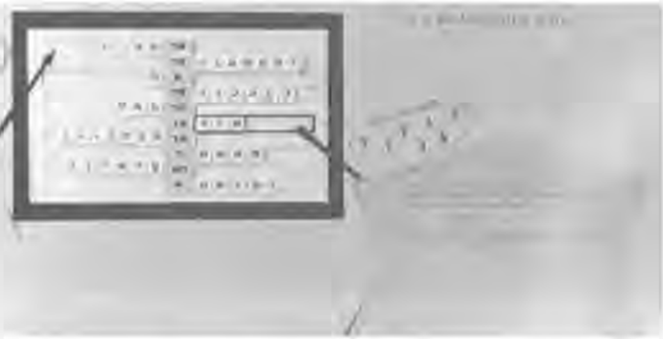
- une décomposition insuffisante d'un ou plusieurs termes de la combinaison posée,
- un manque de mobilité dans les démarches de calcul (tirage supplémentaire mal exploitée ou inutile),
- l'utilisation inadéquate de la pièce-joker,
- la non-exploitation du zéro.

7. Gros-plan sur un tour:

Les protocoles utilisés dans la recherche pour noter les démarches des élèves joueurs relèvent, outre les nombres à décomposer et les nombres à disposition pour effectuer la décomposition:

- les comptages verbaux (comptine) et manuels (sur les doigts),
- les essais, soit concrets en manipulant les pièces, soit oraux («six plus six égalent douze»),
- les poses de nombres et les retraits de la planche,
- les tirages effectués.

La succession de ces démarches traduit les recherches et les contrôles réguliers qui sont favorisés dans le jeu *Deco* par l'énoncé du but «mettre le plus de nombres possible» et par ses règles de pénalisation. Ces deux dimensions, souvent présentes dans un dispositif de jeu, sont un moteur à l'esprit de re-

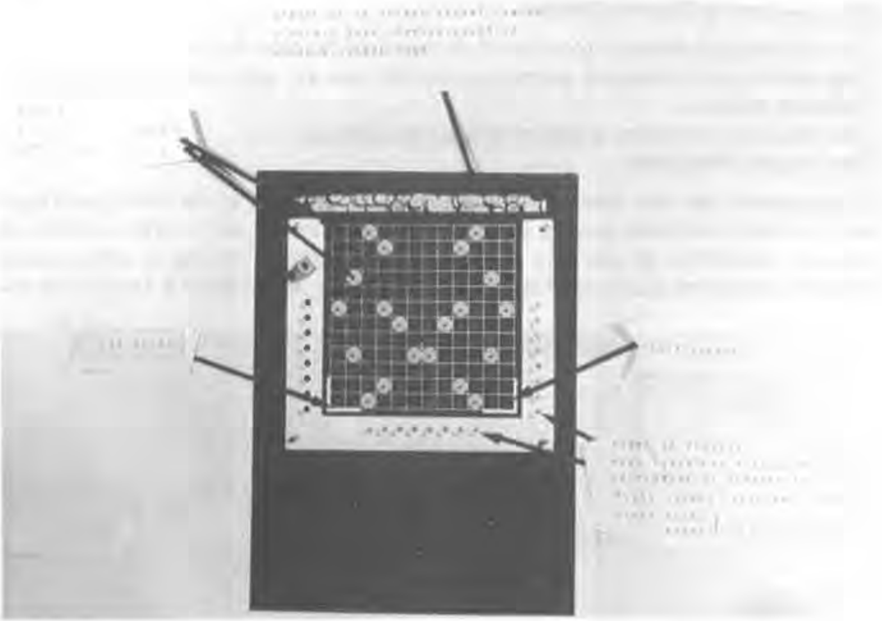


cherche et à l'auto-évaluation que l'enfant ne peut trouver dans des exercices classiques du type «papier-crayon» dans lesquels, pour chaque item, il n'y a qu'une seule réponse correcte. Dans le jeu *Deco* le nombre de ces démarches effectuées à chaque tour dépend à la fois de facteurs externes au sujet (grandeur du nombre à décomposer, choix des nombres à disposition) et de facteurs internes (compétences sur le plan du calcul numérique – rapidité, flexibilité, précision – compréhension du double aspect du but visé dans le jeu, esprit de compétition, persévérance face à des difficultés).

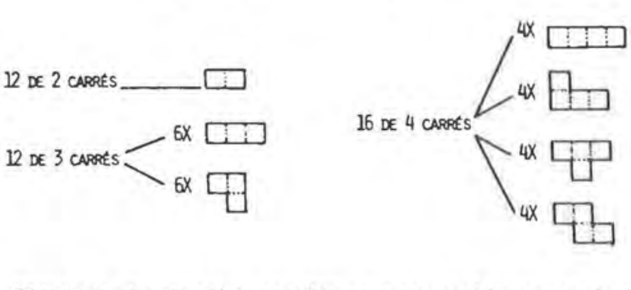
En 2P, pour les élèves observés, le nombre de démarches est très variable: parfois l'élève pose des pièces tout de suite, sans essai ni comptage: cela se produit généralement pour des nombres $\leqslant$ 10. D'autres fois on assiste à une réflexion intense faite de comptages et d'essais: jusqu'à 28 démarches de ce type relevées en un seul tour!

Ces constatations nous montrent à l'évidence que sous certaines conditions (activité valorisée par l'enseignant, règles favorisant un investissement constructif, niveau de difficulté adapté aux possibilités des enfants, présentation du matériel...), les élèves s'investissent fortement dans des situations de jeu.

8. Jouer avec l'espace: matériel de jeu et son lien avec le programme.



Matériel — *1 damier avec des cases vertes valant 5 points*
des cases jaunes valant 10 points
1 banque de 50 jetons valant 5 points chacun
des pions de couleur pour fixer les pièces
1 dé pour déterminer les pièces à utiliser
40 pièces transparentes:



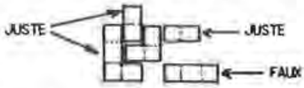
But du jeu: — *Obtenir le plus de points possible en recouvrant les cases du damier à l'aide des pièces transparentes formant une surface continue.*

Version compétitive *pour deux joueurs*

Règles:

1. Au début de la partie:
- *Décider quel coin-départ et quels pions seront utilisés par chaque joueur*
- *Répartir les pièces afin que chaque joueur ait les mêmes (20 chacun)*
- *Décider qui commence*

2. A tour de rôle:
- *Lancer le dé et choisir une pièce correspondant au nombre tiré (2 = pièce de 2 carrés, 3 = pièce de 3 carrés, 4 = pièce de 4 carrés)*
- *Poser la pièce et la fixer avec un pion de couleur*
- *La première pièce de chaque joueur doit toucher le coin-départ par au moins une partie d'un côté*
- *L'ensemble des pièces d'un joueur doit toujours former une surface continue (deux pièces doivent donc se toucher par au moins un côté)*



- *Les pièces d'un joueur ne doivent pas toucher les pièces de l'autre joueur*
- *Si un joueur ne dispose plus de pièce pour le nombre indiqué par le dé, il relance celui-ci.*

3. *Comptage des points à chaque tour: quand un joueur a fixé sa pièce avec le pion, il annonce le score à son camarade: celui-ci lui donne les jetons correspondant à ce score.*

4. *Pénalisation: si un joueur relève une erreur commise par son camarade, celui-ci ne reçoit pas de jeton: il a perdu son tour mais sa pièce reste posée sur le damier.*

   Erreurs possibles:
   - La première pièce ne touche pas le coin-départ
   - La pièce posée ne correspond pas au tirage du dé
   - La pièce posée ne forme pas une surface continue avec les pièces déjà posées
   - La pièce posée touche un côté d'une pièce de l'autre joueur
   - Le score annoncé est faux.

5. A la fin de la partie: quand chaque joueur a posé 8 pièces (fixées avec ses 8 pions), la partie est terminée. Chacun compte les jetons en sa possession. Celui qui a le score le plus élevé a gagné.

Version coopérative *pour deux joueurs*

Mêmes règles de base, mais les deux joueurs jouent ensemble pour former une seule surface.

Il n'y a pas de pénalisation. Les joueurs décident ensemble des stratégies à adopter pour atteindre le score le plus élevé possible, le but étant d'améliorer le score à chaque nouvelle partie.

Cette version peut se jouer avec 8 pions et la moitié des pièces (20) ou 16 pions et toutes les pièces.

Les objectifs à atteindre pour l'avenue «Découverte de l'espace» sont exprimés de façon très large, car «l'expérience que possèdent les enfants de cet âge consiste essentiellement en une perception intuitive de l'espace» (Méthodologie-commentaire 2P - 3P).

Le jeu Zigzag peut contribuer dans le cadre d'activités liées à la découverte de l'espace à:

- développer le sens de l'observation en apprenant à l'élève à examiner avec rigueur des formes géométriques, des configurations,
- aider l'élève à se représenter, mentalement des figures géométriques et leur déplacement sur un quadrillage, à raisonner sur différentes transformations liées à ces déplacements (notions de contiguïté, translation, rotation, symétrie).

Le calcul du score à chaque tour et du nombre de jetons correspondant relève de l'avenue OP et les échanges de l'avenue NU.

9. Hasard et/ou stratégie

Le jeu ZIGZAG, comme le jeu DECO, présente une dimension de hasard et une dimension de sratégie: nous pensons que dans le contexte scolaire elles ont chacune leur importance.

Le hasard (présent par le lancement du dé dans ZIGZAG) confère un aspect ludique au jeu et permet de compenser en partie la différence de compétences éventuelles entre élèves.

La stratégie requise (présente par les nombreuses possibilités de poses dans ZIGZAG) stimule la réflexion et la recherche du joueur et, si elle est optimale, peut neutraliser l'effet du hasard.

Il est d'ailleurs très intéressant et révélateur d'interroger les élèves sur ces deux dimensions et d'évaluer à laquelles des deux ils attribuent leur victoire ou défaite. Souvent, l'enfant peut difficilement distinguer la part de hasard et celle de stratégie.

Pour l'enseignant ces deux dimensions peuvent être un critère de choix de jeu dans l'optique d'une différenciation de son enseignement:

- *les jeux de hasard pur:* pour le plaisir et, dans les degrés inférieurs, pour l'apprentissage des règles de base des jeux de groupe. Exemples: bataille, jeux de l'oie.
- *les jeux de stratégie pure:* recommandés pour des partenaires de niveau équivalent. Exemples: échecs, boomerang, seejeh, mastermind.
- *les jeux de hasard et de stratégie:* utilisés avec profit pour des joueurs de niveaux différents. Exemples: déco, zigzag, jeux de cartes du type yass, continuo, rummy, ascension, tripples.

10. Construisons ensemble une stratégie.

A travers ces exemples nous avons voulu montrer la diversité des démarches dans des groupes coopératifs, à la fois sur le plan des *stratégies* adoptées pour obtenir le plus de points possible et sur celui de la *coopération* effective entre les deux partenaires.

Les stratégies: la disposition des points jaunes (valant chacun dix points) a été planifiée de sorte que la recherche optimale des points soit orientée vers le centre de la planche. Par ailleurs, nous avons essayé de répartir les points de telle sorte que l'on ne puisse recouvrir le maximum de points qu'avec des pièces de formes irrégulières.

L'examen de la configuration générale des pièces posées sur la planche à la fin d'une partie montre que certains élèves manifestent une anticipation globale en cherchant à orienter à chaque coup leurs pièces dans la direction qui leur permettra de gagner un maximum de points, tandis que d'autres élèves se contentent de poser leurs pièces en suivant un cheminement linéaire et en choisissant à chaque tour les formes des pièces les plus simples à poser. Entre ces deux extrêmes, il y a bien entendu, toutes sortes d'intermédiaires, et de stratégies «panachées».

La structure *coopérative* du jeu a pour but d'amener les enfants à réfléchir pour construire ensemble une stratégie visant à obtenir en huit coups successifs le maximum de points possible. La collaboration visée peut intervenir à différents moments et porter sur divers objets. Elle est optimale lorsque les élèves collaborent sur toutes les tâches à exécuter tout au long de la partie en fournissant des suggestions, en explorant et en essayant ensemble les différentes possibilités de poses avec une même pièce ou avec des pièces de formes différentes, en calculant les scores, en se rappelant mutuellement les règles du jeu en cas de pose erronée ou en décidant tacitement ou explicitement de modifier des règles initiales du jeu.

Tout comme en version compétitive où les élèves transforment parfois la structure d'interdépendance en coopération (en aidant l'autre par des suggestions ou des remarques d'encouragement), en version coopérative certains élèves jouent comme s'ils étaient adversaires. Cela se traduit par l'élaboration de deux chemins (chacun construit SON chemin de 4 pièces) avec des remarques compétitives («JE vais gagner»), ou par un seul chemin mais avec alternance stricte des poses de pièces (chacun joue SON tour) sans concertation.

11. Le fil d'Ariane de notre recherche:

Ce dernier volet de l'exposition se voulait explicatif des étapes successives de notre recherche avec une illustration montrant un cheminement possible de la formulation du projet de recherche à la publication en cinq étapes:

a) Formuler un projet de recherche.
b) Définir un plan de recherche et créer une instrumentation.
c) Récolter des données.
d) Interpréter des données.
e) Publier.

C. LA RECHERCHE «S'EXPOSE»: QUELLES CONCLUSIONS?

L'impact réel de cette tentative de présentation d'une recherche universitaire sur le monde des praticiens est difficilement mesurable. En revanche une appréciation globale basée sur les commentaires, directs ou provenant d'un questionnaire mis à disposition des visiteurs, révèle un intérêt certain à la fois pour cette forme de communication par le biais d'une exposition et pour son contenu. Certains ont apprécié la diversité des facettes abordées, d'autres le mode de présentation («aéré», «humoristique parfois», «faisant une large part aux documents visuels»), d'autres encore la concision des messages transmis.

Un regret pourtant s'est manifesté chez beucoup: l'impossibilité de pouvoir se procurer les deux jeux créés. En effet la commercialisation de ceux-ci dépasse largement nos préoccupations et nos compétences et, hormis le prêt de nos six prototypes ou la diffusion du descriptif écrit de chaque jeu, nous n'avons guère pu aider les enseignants dans leur désir de disposer de DECO et de ZIGZAG dans leur classe. Bon nombre de visiteurs ont largement utilisé les possibilités d'emprunt des jeux ou d'envoi des descriptions du matériel, nous faisant ainsi prendre conscience que les quelques conclusions tirées de nos expérimentations incitaient les praticiens à vouloir tenter une introduction de ces jeux dans leur classe. Plusieurs d'entre eux nous ont fait remarquer qu'il n'était pas toujours évident d'introduire un nouveau matériel pédagogique du type «jeu» dans leur enseignement en l'absence d'un encadrement minimal leur indiquant les objectifs visés par son introduction (lien avec le programme) et les difficultés que les élèves pouvaient rencontrer lors de son utilisation.

L'exposition se voulait être avant tout un mode de communication non académique d'une recherche universitaire. La forme attrayante et concise que nous avons essayé de lui donner a été appréciée mais nous avons pu nous rendre compte, lors des moments où nous étions présents, que les panneaux auraient gagné à être utilisés comme des *supports d'une communication orale:* nombreuses en effet ont été les sollicitations pour une explication complémentaire, un prolongement de réflexion suscitée par l'une ou l'autre des facettes de la recherche ou par un désir d'intégrer telle conclusion à son propre contexte (les visiteurs provenant aussi bien du secteur secondaire que primaire, de l'enseignement privé que public, du monde des chercheurs romands que des étudiants en pédagogie). A défaut d'une présence continue sur les lieux de l'exposition, nous aurions pu avec profit multiplier les permanences afin de répondre à ces désirs de discussion et au souhait de pouvoir jouer avec DECO ou ZIGZAG afin de mieux comprendre les compétences que chacun d'eux nécessite chez les élèves des différents degrés scolaires.

La demande d'un document écrit, résumé de l'exposition, nous a également été adressée notamment par ceux qui ne pouvaient consacrer suffisamment de temps à une lecture exhaustive de chacun des panneaux. Puissent ces quelques pages permettre à ceux qui ont survolé l'exposition, ou qui n'ont pu s'y rendre, de trouver matière à réflexion et de réagir aux idées avancées en acceptant d'entrer dans le jeu de l'interaction «chercheurs-praticiens».

Nous ne voulons pas terminer cet article sans remercier les acteurs principaux de la recherche, à savoir les enfants des écoles de Haller et Marcelly et leurs enseignants, ainsi que les personnes qui leur ont prêté leur savoir-faire au montage de l'exposition: Micheline Perrin et Christian Dupont pour les documents photographiques, les Ateliers Dighenis pour leurs apports graphiques et l'Atelier 6 pour la confection des prototypes des jeux

Références

ALLAL, L. 1981 «Jeux pédagogiques dans l'enseignement de la mathématique à l'école primaire», Math-Ecole, 100/101: 33-45.
ALLAL, L. 1986 «A quoi joue-t-on à l'école?», en voie de publication.

Un ouvrage à lire... et à méditer

LES MATHS, LE FRANÇAIS, LES LANGUES... À QUOI ÇA ME SERT?
Jacques Nimier, Ed. Cedic/Nathan, 1985

Un professeur de maths pour qui cette matière est «sérieux», «ordre», «rigueur» et un autre pour qui elle est «jeu de l'esprit», «harmonie», «distraction», n'enseignent pas à leurs élèves les mêmes mathématiques. Un professeur de gymnastique pour qui cette discipline est «maîtrise du corps» et un autre adepte de «l'antigymnastique» pour qui elle est «libération du corps» ne pratiquent pas leur enseignement de la même façon en classe. Ces enseignants n'ont pas la même «représentation» de leur discipline.
Jacques Nimier montre dans ce livre comment ces différences de représentation se répercutent:
- sur les choix pédagogiques et la conception des programmes,
- sur le mode de communication que l'enseignant a avec ses élèves par le «canal» de sa discipline,
- sur cette fameuse «atmosphère» de classe qui amène ou non les élèves à travailler et à s'intéresser à la matière.

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 15.—, Etranger F 17.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion