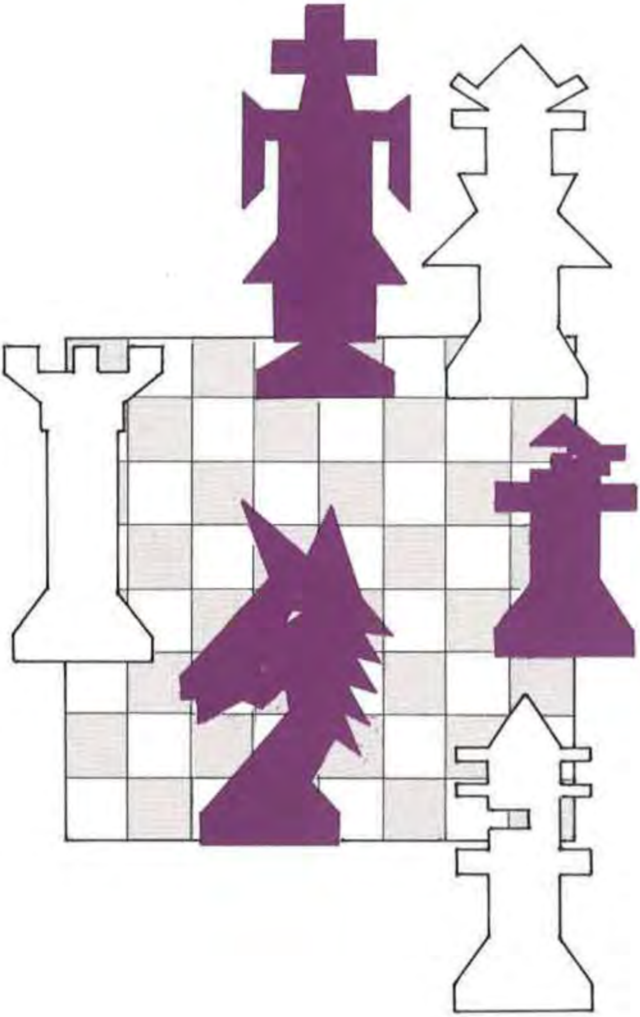
133



MATH ECOLE

MAI 1988
27e ANNÉE

MATH-ECOLE 133

27e ANNÉE Paraît cinq fois par an MAI 1988

Editorial

Différenciation pédagogique en mathématique

Comment différencier l'enseignement des mathématiques? C'était le thème du XIe forum suisse de novembre dernier.

Se poser la question sous cette forme et accepter d'entrer en matière signifie déjà qu'on souhaite une différenciation; parce qu'on s'est rendu compte qu'au sein d'une même classe, aussi homogène soit-elle, évoluent des élèves qui ont tous besoin de construire leurs connaissances selon des démarches personnelles.

Se poser la question, c'est aussi envisager la différenciation d'un point de vue opérationnel en examinant les stratégies à disposition du maître et de l'élève pour la gestion de la classe et des apprentissages mathématiques.

Se poser la question c'est encore, et surout, courir le risque d'ébranler ses propres conceptions pédagogiques, de devoir reviser ses choix, d'être amené à modifier ses pratiques d'enseignant.

Parmi les méthodes proposées pour une différenciation, l'enseignement programmé et ses variantes réapparaissent actuellement avec force, sous l'influence des recherches pour l'utilisation de l'ordinateur en classe de mathématiques. Ce type d'enseignement permet des rythmes de travail individuels; bien conçu, il envisage quelques ramifications dans la progression; il améliore la motivation de l'élève par des renforcements positifs; il contourne les obstacles conceptuels par une maïeutique astucieuse. Mais chacun sait combien les apprentissages «programmés» sont superficiels, voire illusoires. L'efficacité de la méthode se limite aux domaines de l'entraînement, du drill et de la répétition.

Et on arrive ainsi à une première remise en cause: la différenciation pourrait nous amener à renoncer à la conception linéaire des apprentissages, à admettre que la rigueur et l'élégance des démonstrations du mathématicien n'ont rien de commun avec les errances, les régressions passagères, les conflits et les sauts qui caractérisent la construction des notions par l'élève.

Une autre proposition repose sur la variété et la souplesse des moyens d'enseignement: fiches pour un travail indépendant, large éventail d'exercices avec dispositif d'auto-correction, listes d'objectifs et épreuves correspondantes accessibles à l'élève. La différenciation atteint ici un degré plus élevé. L'élève est autonome non seulement dans le rythme, mais aussi dans le choix de certaines activités. On conçoit des voies différentes pour atteindre les mêmes objectifs. Mais de quel type sont ces objectifs qu'on arrive à définir avec tant de précision et à mesurer? Sont-ils significatifs de la véritable aptitude à résoudre un problème réel ou ne recouvreraient-ils pas seulement quelques connaissances élémentaires ou techniques éphémères?

Une deuxième révision apparaît: la différenciation pourrait bien nous faire élargir le champ d'activités que nous proposons à nos élèves, nous faire admettre que les objectifs importants se situent au-delà de ceux qu'on peut mesurer, nous faire accepter que, dans ce nouveau champ, tous nos élèves n'atteindront pas les mêmes objectifs!

Les «situations» ou le «coin mathématique» proposent encore un élargissement de la différenciation: lorsque l'élève a rempli son contrat minimum par l'acquisition des quelques techniques et connaissances vraiment nécessaires à la suite du programme, on lui demande simplement de «faire» des mathématiques, par des recherches, jeux ou autres activités où c'est à lui de se poser les problèmes, induits par la situation. Chacun acquiert alors des connaissances et compétences dans le domaine où il a concentré ses efforts: l'un saura beaucoup de choses sur les polyèdres qu'il aura construits, un autre maîtrisera la stratégie d'un jeu, un troisième saura établir le triangle de Pascal rencontré au cours d'un dénombrement, etc. Mais que va-t-il se passer au moment de l'évaluation du travail et des connaissances de l'élève? Va-t-on tenir compte, explicitement, de ce type d'activité dans la note de mathématiques attribuée en fin d'année scolaire? Comment?

C'est une troisième remise en question: la différenciation pourrait nous faire imaginer de nouvelles perspectives dans l'évaluation et, par exemple, envisager de juger nos élèves sur les résultats d'un travail effectif, sans souci de barèmes ni de classement.

Il n'est pas interdit de rêver... un peu!

François Jaquet

La formule de Pick

par André Calame

Deux aspects de l'arithmétique

L'arithmétique élémentaire comporte essentiellement deux activités: **dénombrer, mesurer.** Pour dénombrer, on utilise les nombres naturels et leurs propriétés; pour mesurer, on procède par comparaison, après avoir fait choix d'une unité, et les mesures sont généralement des nombres décimaux, des nombres rationnels, voire des nombres irrationnels. Il y a là deux procédures bien distinctes, apparemment incompatibles puisque l'une appréhende le discret, le discontinu, tandis que l'autre porte sur le continu.

Toutefois, il existe des situations inattendues où l'une des procédures peut remplacer l'autre. C'est le cas du calcul des aires des polygones dessinés sur un réseau à mailles carrées.

Quelques précisions

Nous nous proposons d'étudier des polygones simples dont les sommets sont les points d'un réseau tel que celui de la figure 1.

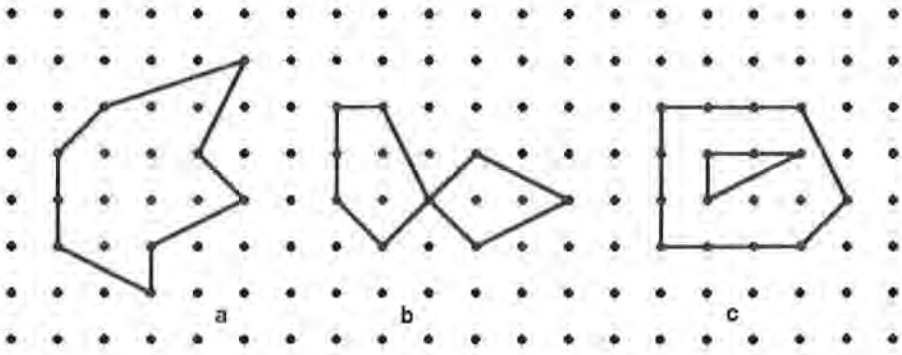


Figure 1

On peut imaginer une origine placée au point le plus bas, à gauche et des unités qui correspondent à la largeur d'une maille du réseau.

Chaque point est alors caractérisé par des coordonnées entières.

Par **polygone simple,** nous entendons un polygone dont la frontière est formée d'une seule ligne polygonale fermée qui ne se recoupe pas elle-même. Sur la figure 1, le polygone **a** est simple. En revanche, le polygone **b** n'est pas simple puisque la frontière a un point double. Le polygone **c** n'est pas simple non plus, car sa frontière comprend deux lignes polygonales; le polygone a un «trou».

Pour mesurer l'aire des polygones simples, nous choisissons comme unité l'aire du carré de côté 1.

Dans la suite, le terme **polygone** se rapporte toujours à un polygone simple et le mot **point** à un point du réseau, donc à coordonnées entières.

Le résultat de Pick

Notre objectif est de montrer que pour **mesurer** l'aire d'un polygone, il suffit de **dénombrer** les points situés sur le bord du polygone et les points situés à l'intérieur du polygone. Ce résultat a été établi en 1900 par G. Pick [2].

Il paraît possible de découvrir la formule de Pick dans l'enseignement élémentaire dès que les élèves ont abordé la notion d'aire et savent calculer l'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle. Il serait intéressant d'observer comment procèdent des élèves à qui l'on donnerait la consigne suivante: «Il est possible de calculer l'aire d'un polygone si l'on connaît le nombre b des points sur le bord et le nombre i des points intérieurs. Allez-y!»

Pour avoir proposé cette activité à des élèves de première année de gymnase (15-16 ans), j'ai été très surpris de constater que les essais des élèves, à quelques exceptions près, tenaient plus de la devinette que d'une démarche scientifique.

Pour procéder un peu systématiquement et en ne faisant varier qu'un paramètre, on peut commencer par l'étude des rectangles de largeur 1. Ces rectangles n'ont pas de points intérieurs ($i = 0$).

Figure 2

La figure 2 donne les résultats suivants:

$b = 4$	$b = 6$	$b = 8$	$b = 10$	etc.
$A = 1$	$A = 2$	$A = 3$	$A = 4$	

L'aire A est une fonction affine du nombre b des points situés sur le bord. On rouve aisément:

$$A = \frac{b}{2} - 1$$

L'étape suivante consiste assez naturellement à envisager les rectangles de largeur 2 (figure 3):

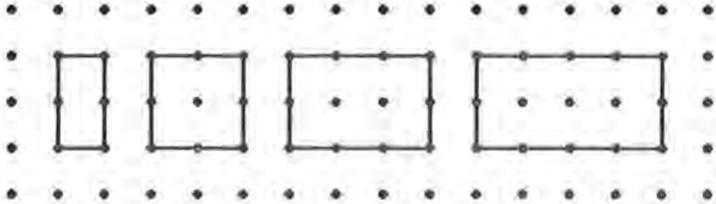


Figure 3

$b=6$	$b=8$	$b=10$	$b=12$	etc.
$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	
$A=2$	$A=4$	$A=6$	$A=8$	

$\frac{b}{2}-1$	i	A
2	0	2
3	1	4
4	2	6
5	3	8

On en déduit: $$A=\frac{b}{2}+i-1$$

Telle est la **formule de Pick.**

Une fois établie cette formule pour des rectangles dont les côtés sont parallèles aux mailles du réseau, on pourra s'assurer que la formule est encore vraie pour toutes sortes de polygones. Pour le polygone de la fiture 4, on a:

$b=6 \qquad i=11 \qquad \frac{b}{2}+i-1=13$

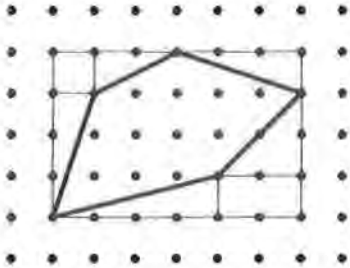


Figure 4

Pour le calcul de l'aire, on peut commencer par calculer l'aire du rectangle circonscrit (24), puis soustraire les aires d'un carré, d'un rectangle et de 5 triangles:

$$A=24-1-2-1{,}5-2-2-1{,}5-1=13$$

Dans la suite de cet article, nous quittons le terrain de la classe pour nous adresser aux maîtres. Le but est de démontrer la formule de Pick pour un polygone quelconque. Un des fondements de la démonstration réside dans le principe d'additivité.

Principe d'additivité

Soit P_1 et P_2 deux polygones pour lesquels la formule de Pick est vraie et soit P le polygone obtenu en rendant P_1 et P_2 adjacents extérieurement. Si P est un polygone simple, alors la formule de Pick est vraie pour P.

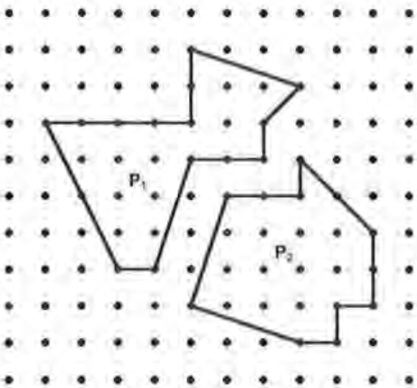


Figure 5a

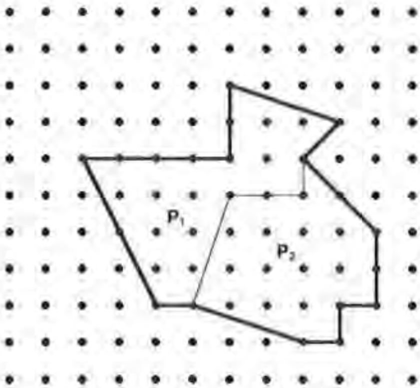


Figure 5b

Démonstration:

Par hypothèse, la formule de Pick est vraie pour P_1 et pour P_2:

(1) $A_1 = \frac{b_1}{2} + i_1 - 1$ (2) $A_2 = \frac{b_2}{2} + i_2 - 1$

(Les indices 1 se rapportent au polygone P_1, les indices 2 au polygone P_2.)

Quand on accole les deux polygones extérieurement, on obtient un nouveau polygone P d'aire A, avec b points sur sa frontière et i points intérieurs. Désignons par f le nombre des points communs à P_1 et P_2 rendus adjacents. Sur la figure 5, on a:

$b_1 = 15$	$b_2 = 12$	
$i_1 = 10$	$i_2 = 11$	$f = 5$
$A_1 = 16{,}5$	$A_2 = 16$	

Il faut prouver que $A = \frac{b}{2} + i - 1$

On a tout naturellement (3) $A = A_1 + A_2$

Parmi les b_1 points de P_1, $b_1 - f$ sont aussi points du bord de P. Parmi les b_2 points de P_2, $b_2 - f$ sont aussi points du bord P. Pour obtenir b, il faut encore ajouter les deux extrémités de la ligne polygonale à f points:

$$(4)\ b = (b_1 - f) + (b_2 - f) + 2$$

Les points intérieurs à P sont les points intérieurs à P_1, à P_2 et les points de la frontière commune à l'exclusion des deux extrémités:

$$(5)\ i = i_1 + i_2 + f - 2$$

Calculons l'expression $\frac{b}{2} + i - 1$:

$$\frac{b}{2} + i - 1 = \left(\frac{b_1 - f}{2} + \frac{b_2 - f}{2} + 1\right) + (i_1 + i_2 + f - 2) - 1$$

$$= \left(\frac{b_1}{2} + i_1 - 1\right) + \left(\frac{b_2}{2} + i_2 - 1\right)$$

$$= A_1 + A_2 = A$$

On utilise successivement les relations (4), (5), (1), (2) et (3). On remarquera que dans cette démonstration, on suppose que $f \geqslant 2$: la ligne polygonale frontière entre P_1 et P_2 a au moins deux points. Avec $f = 1$, comme c'est le cas sur la figure 1**b**, la démonstration n'est plus valable et le principe d'additivité est faux.

Démonstration par triangulation

En général, une fois démontré le principe d'additivité, les auteurs procèdent en deux étapes:

a) On prouve que la formule de Pick est vraie pour les triangles de base 1 et de hauteur 1 (voir figure 6), appelés triangles élémentaires:

Figure 6

$b = 3 \qquad i = 0 \qquad A = 0{,}5 \qquad \frac{b}{2} + i - 1 = 0{,}5$

d'où: $\quad A = \frac{b}{2} + i - 1$

b) On considère un polygone quelconque comme la réunion au sens de la géométrie élémentaire de triangles élémentaires et on applique le principe d'additivité.

L'idée des angles de vision

Récemment [3], une autre démonstration de la formule de Pick a été proposée. On pourrait la décrire grossièrement en disant que chaque point du polygone apparaît dans la formule de Pick avec un certain poids: les points intérieurs ont le poids 1 puisqu'ils sont entièrement dans le polygone tandis que les points sur les bords ne sont «qu'à moitié» dans le polygone et ont un poids égal à $\frac{1}{2}$. C'est bien entendu une manière très approximative de s'exprimer: elle rend compte du i, du $\frac{b}{2}$, mais pas du -1 de la formule. Reprenons plus sérieusement:

A chaque point du réseau, nous attachons un **angle de vision** par rapport au polygone (voir figure 7):

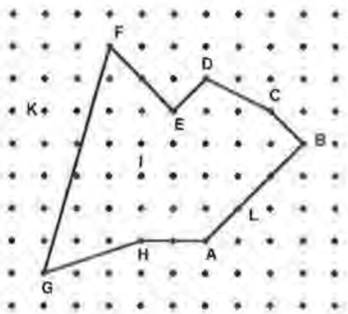


Figure 7

- Si un point I est intérieur au polygone, l'angle de vision est un tour complet, car dans chaque direction, on vise des points intérieurs au polygone. Un tel point aura le poids 1; c'est la mesure de l'angle de vision en prenant pour unité le tour complet.
- Si un point K est extérieur au polygone, l'angle de vision est nul, car on ne peut viser aucun point intérieur au polygone; au mieux, la frontière nous en empêche.
- Si un point L est sur le bord du polygone, sans être un sommet, l'angle de vision est d'un demi-tour. On attribuera donc à un tel point le poids $\frac{1}{2}$.
- En un sommet du polygone, la situation est plus délicate. En A, l'angle de vision est de 135°, soit $\frac{3}{8}$ de tour; le poids est de $\frac{3}{8}$. En B, à cause de l'angle droit, le poids est $\frac{1}{4}$, alors qu'il est de $\frac{3}{4}$ en E. L'évaluation aux autres sommets ne donnerait pas forcément des résultats aussi simples, mais nous allons voir que cette difficulté sera aisément surmontée.

Proposition de Varberg (1985)

Aves les notations utilisées jusqu'ici, on peut énoncer la proposition suivante:

Pour un polygone P, la somme des poids étendue à tous les points du réseau est égale à

$$s=\frac{b}{2}+1-1$$

Démonstration:

Désignons par n le nombre des sommets du polygone P. Il y a alors b – n points qui sont sur le bord sans être des sommets.

La somme des poids des points extérieurs à P est nulle. C'est ce qui permet d'étendre la somme à l'infinité des points du réseau tout en gardant un nombre fini de termes non nuls dans la somme.
- La somme des poids des points intérieurs à P est i.
- La somme des poids des points sur le bord de P qui ne sont pas des sommets est $(b-n)/2$.
- Considérons ensemble tous les sommets du polygone. La somme des angles intérieurs d'un polygone à n sommets est donnée par la formule bien connue de géométrie élémentaire: $(n-2)\cdot 180^\circ$. Cette somme représente n – 2 demi-tours et correspond à la somme des poids de tous les sommets. On a donc pour ces n sommets le poids total $\frac{n}{2}-1$.
- Comme tous les points du réseau ont été recensés, il suffit, pour obtenir s, d'additionner les résultats des quatre étapes ci-dessus:

$$s=0+i+\frac{b-n}{2}+\frac{n}{2}-1=\frac{b}{2}+i-1$$

Retour à la formule de Pick

Pour démontrer la formule de Pick dans la perspective qui vient d'être décrite, il reste à montrer que l'aire A du polygone est égale à la somme s des poids. Vaberg commence par le rectangle (voir figure 8). On y découvre facilement le lien entre poids et aires. Chaque point intérieur est le centre d'un carré-unité. Chaque point du bord qui n'est pas sommet est associé à un petit rectangle d'aire $\frac{1}{2}$. Enfin à chacun des quatre sommets correspond un quart de carré.

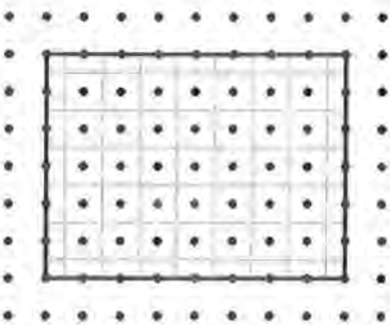


Figure 8

Une fois admis cet important résultat, on passe par principe d'additivité au cas d'un triangle rectangle, puis au cas d'un tirangle quelconque. Comme tout polygone est réunion de triangles, on obtient la validité de la formule de Pick dans le cas général.

Terminons sur une remarque digne d'intérêt. Pour les deux polygones non simples 1**b** et 1**c**, la formule de Pick n'est pas valable. En revanche, la méthode des poids reste vraie et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que s = A. Cela tient au fait que le principe d'additivité pour les poids s'applique même à des polygones non simples.

Notes bibliographiques:

[1] M. Jeger Einführung in die Kombinatorik

[2] G. Pick Geometrisches zur Zahlenlehre, Sitzungsber. Lotos. Prag, 19 (1900) p. 311-319.

[3] D. E. Varberg-Pick's Therem Revisited, Amer. Math. Monthly, 92 (1985) p. 584-587.

Nouvelles lectures

La société neuchâteloise des maîtres de mathématiques, de physique et de chimie (SNMMPC) a le plaisir d'annoncer la naissance de son bulletin «?» dont le numéro 0 est paru en janvier 1988, le numéro 1 en mai 1988 et le numéro 2 est prévu pour l'automne.

On y trouve des articles sur l'enseignement des mathématiques du secondaire inférieur à l'Université, des réflexions axées sur la didactique, des échanges d'expériences, des informations, etc. En bref, une revue faite par des enseignants pour des enseignants, qui peut constituer un complément à Math-Ecole pour les degrés secondaires.

Pour recevoir les premiers numéros, s'adresser à Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts-Geneveys.

Les cubes peints

par Nadia Guillet

> Avec des petits cubes-unités (plots), construisez un cube de la grandeur de votre choix.
>
> Imaginez que vous le peignez d'une seule couleur sur ces six faces.
>
> Si, ensuite, ce cube se défaisait complètement, que pourriez-vous observer?
>
> Notez toutes vos remarques puis changez plusieurs fois la grandeur du cube et reprenez vos observations.
>
> Peut-être découvrirez-vous des lois intéressantes!

La consigne est simple, point de jargon mathématique. Munis du matériel, des enfants dès 10 ans peuvent se mettre au travail sans que l'enseignant entende la phrase rituelle: «Je n'y comprends rien! Qu'est-ce que je dois faire?»

S'il leur est possible de se lancer immédiatement dans l'action (ce qui débloque les appréhensions), ils ne peuvent pas d'emblée savoir où ils aboutiront: ils sont face à une petite recherche qu'ils doivent structurer eux-mêmes. Pour ce faire, il leur faut développer certaines attitudes indispensables à ce genre d'activité mathématique mais utiles également dans d'autres disciplines, voire dans la vie courante:

- observer;
- préciser son champ d'investigation;
- formuler ses questions;
- puiser dans son réservoir les connaissances et moyens adéquats;
- prendre note de ce qui peut être pertinent;

etc.

Cela ne coule pas de source mais s'apprend par la pratique avec l'intervention de l'enseignant au moment opportun.

Ce type de travail admet les tâtonnements pour trouver une piste intéressante ou des démarches adéquates; il accepte les détours, les erreurs et les ratures; il engage à la vérification des résultats trouvés; il autorise une certaine liberté d'action, pousse à plus d'autonomie et d'originalité; il suppose (sans quoi une bonne partie de ce qui est dit précédemment serait caduque) le respect du rythme de l'enfant et la prise en compte du facteur temps inhérent à toute recherche.

Il faut ajouter une composante majeure: le plaisir que les enfants peuvent ressentir à mathématiser, aussi modestement cela soit-il.

La place manque ici pour présenter le déroulement in extenso de recherches faites par les enfants. Voici, toutefois, quelques extraits de travaux dévoilant des démarches diverses.

Signalons encore que l'intérêt de cette petite situation mathématique est de pouvoir être donnée telle quelle à des enfants de degrés divers: école primaire, C.O., collège. Chacun peut y engager ses connaissances et progresser.

Samuel

Lui, ne s'intéresse pas au nombre de cubes, mais au nombre de **faces** peintes (mouillées) ou non peintes (sèches). Il a trouvé, au fil de son travail, une démarches très claire et généralisable qui pourrait, s'il était dans un degré plus élevé, le conduire à une petite formule.

Samuel (4eP)

Alors j'ai un cube de 125 plots et avec ça je vais faire un calcul pour savoir combien il y a de mouillés et de secs dans ce cube de 125 plots. il y a 150 qui sont mouillés

faces peintes

(5 X 5) + (5 X 5) + (5 X 5) + (5 X 5) + (5 X 5) + (5 X 5)

150

(6 X 25 = 150)

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 6 \\ \hline 750 \end{array}$$ en tout

$$\begin{array}{r} 750 \\ -\ 150 \\ \hline 600 \end{array}$$ sèches

Gina

Systématique dès le début, elle sait sur quoi faire porter son observation. Elle finira, après quelques séances, par dégager des lois généralisables à n'importe quelle taille de cube.

Gina (4°P)

Les cubes

Cube 3 sur 3 — (1) Si on trempe le cube dans la peinture et qu'on le casse, les plot qui sont à l'intérieur ne seront pas colorés Que ceux qui sont à l'extérieur:

Cube 2 sur 2 — il y aura toujours trois ~~coté~~ faces peints et trois blanches.

Cube 3 sur 3 — sur les sommets il y aura toujours trois faces peintes et trois blanches.

Cube 3 sur 3 — Le plot qui est au milieu de chaque face n'a qu'une face colorée* Tandis que ceux qui sont à l'~~arret~~ arête en ont que deux. - il y en a 24. * il y en a 6 qui n'ont qu'une face peinte

Cube 4 sur 4 — plus le cube grandira plus il y aura des cubes à ~~?~~ une ~~sur~~face colorée et plus il y aura des cubes à deux ~~sur~~faces colorées.

Nicolas

Il synthétise sa recherche dans un tableau. Il est capable de tout généraliser à n'importe quelle taille de cube, même si on lui interdit «d'aller en suivant». Il a découvert la notion de fonction et l'enseignante lui montre comment on peut l'exprimer littéralement.

Nicolas (6e P)

	6 faces peintes	3 faces peintes	2 faces peintes	1 face peinte	0 faces peintes
le cube de 1^3	1				
le cube de 2^3		8 $8 \times 1 = 8$			
le cube de 3^3		8 $8 \times 1 = 8$	12 $12 \times 1 = 12$	6 $6 \times 1 = 6$	1
le cube de 4^3		$8 \times 1 = 8$ 8	$12 \times 2 = 24$	$(2 \times 2) \times 6 =$ 24	8
le cube de 5^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 3 =$ 36	$(3 \times 3) \times 6 =$ 36 !	27
le cube de 6^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 4 =$ 48	$(4 \times 4) \times 6 =$ 96	64
le cube de 7^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 5 =$ 60	$(5 \times 5) \times 6 =$ 150	125
le cube de 8^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 6 =$ 72	$(6 \times 6) \times 6 =$ 216	216
le cube de 9^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 7 =$ 84	$(7 \times 7) \times 6 =$ 294	343
le cube de 10^3		$8 \times 1 =$ 8	$12 \times 8 =$ 96	$(8 \times 8) \times 6 =$ 384	512
cube n^3		8	$12 \cdot (n-2)$	$6 \cdot \cancel{(n \times 2)}$ $6 \cdot (n-2)^2$	$(n-2)^3$

Solution élégante

par T. Bettosini

Drôle de cible

L'archer qui a mis ces trois flèches dans la cible a obtenu un total de 79 points.

Un autre archer est arrivé exactement à 100 points.

En combien de flèches?

Dans quelle(s) zone(s) de la cible? Y a-t-il plusieurs solutions?

Exercice de mathématique tiré de l'ouvrage neuchâtelois *Mathématique, septième année,* thème *Jeux et stratégies.*

La résolution présentée ci-dessous est le résultat d'une recherche collective qui a eu lieu en décembre 1987 au collège des Forges à La Chaux-de-Fonds avec la classe de $2S_{12}$ (professeur: T. Bettosini).

La classe de 23 élèves est organisée en groupes de travail de 3 à 4 membres. Chaque groupe travaille de manière indépendante et mène sa recherche dans la direction qu'il désire. Lorsqu'un groupe découvre une information qu'il juge intéressante, il vient la présenter par écrit au maître qui la communique au reste de la classe. C'est un moment important car une discussion s'en suit durant laquelle la classe décide si l'information nouvelle va être retenue, ou si elle peut être améliorée.

Voici les propositions qui se sont succédées au cours de la recherche:

Proposition No 1 Etablir l'ensemble des combinaisons des 7 valeurs inscrites sur la cible à l'aide d'un tableau cartésien de 7 sur 7 cases.

Discussion: Il peut y avoir plusieurs flèches dans une même zone de la cible, donc un tableau cartésien de 7 sur 7 cases est trop petit.

Proposition No 2 Etablir la liste des multiples (plus petits que 100) des 7 valeurs inscrites sur la cible, afin de connaître toutes les valeurs qu'il s'agira de combiner.

$M_{11} = \{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$
$M_{13} = \{13; 26; 39; 52; 65; 78; 91\}$
$M_{31} = \{31; 62; 93\}$
$M_{33} = \{33; 66; 99\}$
$M_{42} = \{42; 84\}$
$M_{44} = \{44; 88\}$
$M_{46} = \{46; 92\}$

Discussion Proposition acceptée.

Proposition No 3 Mettre ces 28 nombres dans un tableau cartésien de 28 sur 28 cases, afin d'avoir l'ensemble des combinaisons possibles.

Discussion Pour compléter ce tableau il faut effectuer 784 additions. Ce travail est long et fastidieux, il faut trouver un moyen de le simplifier.

Proposition No 4 Supprimer les multiples qui se répètent, et classer les multiples dans l'ordre croissant.

{11; 13; 22; 26; 31; 33; 39; 42; 44; 46; 52; 55; 62; 65; 66; 77; 78; 84; 88; 9ß; 92; 83; 99}

Mettre ces 23 nombres dans un tableau cartésien de 23 sur 23 cases.

Discussion Pour compléter ce tableau il faut effectuer 529 additions. C'est déjà mieux qu'avant mais il reste trop de travail.

Proposition No 5 «Viser» en quelque sorte comme l'archer, les totaux proches de 100 qui apparaissent sur la diagonale du tableau cartésien. De plus, tenir compte de la symétrie du tableau cartésien.

Discussion Cela réduit généreusement le nombre d'additions à effectuer, puisqu'il n'en reste plus que 21 (à condition de bien «viser»).

+	11	13	22	26	31	33	39	42	44	46	52	55	62	65	66	77	78	84	88	91	92	93	99
11	·																		99	102			
13		·																97	101				
22			·														**100**	106					
26				·											92	103							
31					·										97	108							
33						·									99	110							
39							·					94	101										
42								·				97	104										
44									·			99	106										
46										·	98	101											
52											104												
55												·											
62													·										
65														·									
66															·								
77																·							
78																	·						
84																		·					
88																			·				
91																				·			
92																					·		
93																						·	
99																							·

Conclusion Puisque 78 + 22 = 100 (ainsi que 22 + 78 = 100) et comme 78 est un multiple de 13 et 22 un multiple de 11, la solution du problème est: «8 flèches au total, six flèches dans le 13 et deux flèches dans le 11, et le tableau cartésien démontre en plus que la solution est unique».

La classe est parvenue à cette conclusion avec l'impression d'avoir terminé la démonstration, mais doit-on s'en contenter?

Le maître apporte à la leçon suivante une question pertinente qui va permettre de terminer la recherche: «Dans l'étude que vous avez réalisée avez-vous vérifié une fois la situation suivante: 11 + 13 + 46 = 70?»

Discussion L'analyse qui précède ne fait que contrôler les situations où l'archer tire une ou plusieurs flèches dans une ou deux zone(s) de la cible.

Reste donc à voir les cas où l'archer tire une ou plusieurs flèches dans 3, 4, 5, 6 et 7 zones de la cible.

Proposition No 6 Tirer une flèche dans chacune des 7 zones de la cible. 11 + 13 + 31 + 33 + 42 + 44 + 46 + = 220.

Discussion La plus petite somme obtenue en tirant dans 7 zones est plus grande que 100, donc il n'y a pas de solution avec 7 zones.

Proposition № 7

Calculer la somme minimale que l'on peut obtenir avec 6 zones, 5 zones, 4 zones, 3 zones de la cible.

6 zones: $11 + 13 + 31 + 33 + 42 + 44 = 174$
5 zones: $11 + 13 + 31 + 33 + 42 = 130$
4 zones: $11 + 13 + 31 + 33 = 88$
3 zones: $11 + 13 + 31 = 55$

Discussion

La plus petits somme obtenue en tirant dans 6 zones est plus grande que 100. La plus petite somme obtenue en tirant dans 5 zones est plus grande que 100. Il n'y a donc pas de solution avec 6 zones et 5 zones.

Proposition № 8

Reste à examiner les deux cas avec 4 zones et 3 zones.

Discussion

Avec 4 zones il y a seulement trois possibilités qui donnent une somme plus petite que 100, et aucune ne donne exactement 100.

$11 + 13 + 31 + 33 = 88$
$11 + 13 + 31 + 42 = 97$
$11 + 13 + 31 + 44 = 99$

Donc il n'y a pas de solution avec 4 zones.

Proposition № 9

Reste à examiner le cas avec 3 zones de la cible.

Observation: $(11 + 13) + 31 = 24 + 31$
$(11 + 13) + 33 = 24 + 33$
etc.

Nous pouvons ajouter, au tableau cartésien de la proposition № 5, la liste des nombres manquants tel que 24.

Pour obtenir cette liste, il faut envisager toutes les combinaisons possibles des 7 zones et éliminer celles que l'on a déjà utilisées.

+	11	13	31	33	42	44	46
11	22	24	42	44	53	55	57
13		26	44	46	55	57	59
31			62	64	73	75	77
33				66	75	77	79
42					84	86	88
44						88	90
46							92

{24; 53; 57; 59; 64; 73; 75; 79; 86; 90}

Discussion	Reste à chercher, comme précédemment, les cas où il y aurait plusieurs flèches dans ces zones. Il faut donc trouver encore tous les multiples de ces nombres pour autant qu'ils soient plus petits que 100.

Constatation: Il n'y a que quelques multiples de 24.

$$M_{24} = \{24; 48; 72; 96\}$$

Proposition No 10 Ajouter ces 13 nombres au tableau cartésien de la proposition No 5. Puis, viser comme précédemment les sommes proches de 100.

+	11	13	22	24	26	31	33	39	42	44	46	48	52	53	55	57	59	62	64	65	66	72	73	75	77	78	79	84	86	88	90	91	92	93	96	99
11	·																													99	101					
13		·																											99	101						
22			·																							100										
24				·																				99	101											
26					·																		99	101												
31						·															97	103														
33							·														99	105														
39								·									98	101																		
42									·							99	101																			
44										·					99	101																				
46											·			99	101																					
48												·	100																							
52													·																							
53														·																						

Conclusion:	Le tableau cartésien met en évidence une possibilité différente d'obtenir la somme de 100. Puisque 52 + 48 = 100 (ainsi que 48 + 52 = 100) et comme 52 est un multiple de 13 et 48 un multiple de 24, lui-même obtenu en additionnant 11 et 13, la solution du problème est: «8 flèches au total, quatre flèches dans le 13 ainsi que deux flèches dans le 11 et deux flèches dans le 13. Cette nouvelle combinaison est en fait la même que précédemment, puisqu'elle est composée de six flèches dans le 13 et de deux flèches dans le 11. Le tableau cartésien de la proposition No 10 démontre que cette solution est unique».

Nous soulignons à la fin de cet aricle le fait que, durant cette recherche collective, le maître a respecté la direction de la recherche de chaque groupe de travail, tout en jouant le rôle de médiateur entre les groupes, puisqu'il communique, durant la recherche, les informations nouvelles découvertes par chaque groupe. Cette formule est très dynamique et porte souvent ses fruits, pour preuve l'élégante solution qui vient de vous être présentée.

Numérisation de la suite des nombres et faits numériques

par François Conne, Genève
Quatrième épisode

3. Qu'entendre par l'expression: faits numériques?

3.1. Pourquoi cette expression?

a. A cause d'une connotation réaliste, objective. Mais pas pour autant empiriste. Les «faits numériques» ne sont pas dans le milieu, mais, à partir d'un certain moment dans l'élaboration de la connaissance, **ils font réalité.** Dit autrement. Si les symboles sont susceptibles d'être réalité – du moment où par l'entremise des représentations ils acquièrent une signification, s'associent à des signifiés – on comprendra qu'on puisse parler d'exploration, par le sujet, de l'univers symbolique. Mais rappelons que ce qui nous intéresse ici, ce sont des symboles numérisés; l'expression d'**univers numérique** paraît donc bien convenir.

b. Avant de parler mathématique plus précisément, une parenthèse concernant le sujet. Situons-le dans cette affaire. Le sujet explore donc cet univers, il y décèle des relations, des propriétés, des règles, ..., des faits numériques. Je ne considérerais pas pour autant tout ce qui tombe sous l'attention du sujet comme un fait numérique. Je ne retiendrai que ceux qui ont une stabilité suffisante (pour le sujet) et sont susceptibles d'être attendus (de l'ordre du prévisible) ou d'être utilisables. Ceci écarte de la catégorie des erreurs ou des relations fausses. Mais à l'avantage de ne pas toutes les écarter, on doit considérer certaines fausses inférences, certaines relations qui ne sont que redondances à d'autres faits plus occultes, comme des *faits numériques* (subjectifs).

Mais refermons la parenthèse. Car à moins de faire une esquive du genre *sujet épistémique* contre *sujet réel,* on ne peut pas non plus s'en tenir seulement à cette attribution des faits numériques au sujet.

c. J'en reviens donc aux mathématiques et aux systèmes symboliques. Et c'est le moment de se demander qu'est-ce qui fait un *fait numérique,* c' est-à-dire de se rappeler l'aspect producteur des systèmes formels. Ici, il est possible d'aborder cette question sur un exemple simple.

3.2. **Exemple:** J'ai évoqué comment la relation de successeur venait à être isolée du contexte de la suite numérique. C'est un fait numérique. L'exemple que je vais prendre est analogue mais se situe à un autre niveau de réalité. Prenons la régularité qui veut que les sommes suivantes *se terminent* toujours par 9.

2+7=9 12+7=19 2+17=19 12+17=29 ... 4642+5837=????9.

J'aurais pu écrire à peu près la même chose ainsi: «un nombre se terminant par *deux* additionné à un nombre se terminant par *sept* donne un nombre se terminant par *neuf.*» Cette phrase n'est cependant pas tout à fait identique. D'abord elle n'indique qu'évasivement le cadre où on se place, et laisse planer par exemple l'ambiguïté de savoir si on parle d'un nombre tel qu'écrit ou tel que prononcé. Heureusement ici peu importe, la même relation est vraie pour nos deux systèmes de numération (Ouf!). Ah mais c'est dire que ma reformulation est plus générale que ce que j'ai écrit ci-dessus? Oui, et non. Rien n'empêche pour mon lecteur de prononcer, ou de ne pas prononcer les signes qu'il voit sur le papier... Enfin la formulation *française* garde un caractère de généralité qui n'est que suggérée par la suite d'égalité, et possède en plus une connotation de règle.

Demandons-nous maintenant ceci: **cette relation numérique à quoi l'attribuer?**

Première approche: Exprimons les quantités en jeu dans un autre symbolisme, par exemple celui-ci: un nombre sera représenté par autant de traits verticaux: 2→ // 7 → /////// et gardons les signes + et =:

2 + 7 II + IIIIIII = IIIIIIIII
12 + 7 IIIIIIIIIIII + IIIIIII = IIIIIIIIIIIIIIIIIII
2 + 17 II + IIIIIIIIIIIIIIIII = IIIIIIIIIIIIIIIIIII

Donc même en utilisant les signes + et = pour bien distinguer les signes numériques en présence, on n'arrive pas à maintenir la relation, le fait s'estompe. Ceci tient à la numération qui procède à une décomposition des nombres en partie. ce qui n'a pas cours dans une représentation par une collection. Ah mais c'est bien sûr! En termes de collections, cela ne veut rien dire de parler *d'un nombre se terminant par deux (sept ou neuf).* Bien. Et cela tient-il à la position ou à la base de numération? Cela ne tient pas à la base. Si la base est inférieure alors ce *fait* va se ramener à un *fait correspondant,* (car $(a+b) \equiv (a)+(b)$ modulo n). Si la base est supérieure, on retrouve la même figure. Par exemple en base douze:

$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{9}$, $\boxed{1|2} + \boxed{7} = \boxed{1|9}$, etc.

Mais alors, ce sont d'autres *collections* qui sont ainsi liées.

$\boxed{1|2} + \boxed{7} = \boxed{1|9}$ en base douze donne en collections de barres:
IIIIIIIIIIIIII + IIIIIII = IIIIIIIIIIIIIIIIIIIII (14 + 7 = 21 puis 2 + 19 = 21, 26 + 7 = 33, etc.). On retrouve donc la relation (le fait) considéré ne concerne pas le niveau des collections d'objets. Je dirai que le fait numérique considéré se situe à un certain niveau symbolique (en deçà duquel il n'existe pas).

Deuxième approche: Regardons alors au-delà du niveau de l'écriture des nombres en base dix. On aura par exemple l'égalité générale suivante: $(n+2) + (m+7) = [(n+m) + 9)]$. Donc on retrouve 2, 7, 9. Mais ceci pourra tout aussi bien conserver nos nombres que *n'importe quoi:*
$18 + 15 = 33$ c'est bien aussi $(16 + 2) = (8 + 7) = (24 + 9)$, de même que $33 = (14 + 19) = (12 + 2) + (12 + 7) = (24 + 9)$ où j'ai pris $n = m$. Bref, en passant au niveau d'une écriture algébrique (des lettres et des coefficients), j'ai considérablement élargi le champ de validité de mon *fait numérique* jusqu'à ce que ne subsiste que de simples (et anodines) égalités additives. Que reste-t-il donc de mon fait? Que l'expression combinée de l'associativité et de la commutativité de l'addition.

$$(n+2) + (m+7) = n+2+m+7 = n+m+2+7 = (n+m) + (2+7) = (n+m) + 9.$$

J'avais pourtant autre chose dans ma relation. Ah oui, une fois encore que signifie, au vu d'une notation algébrique, *un nombre qui se termine par deux?* Ah oui, il y avait dans mon fait un ingrédient de plus, la décomposition de la numération est en dizaines et unités (ou puissances de dix successives). C'est donc par l'expression algébrique: $10\,n+2$ qu'on arrive à isoler le chiffre qui va terminer l'écriture du nombre (n est un nombre, pas forcément un chiffre).

$(10\,n+2) + (10\,m+7) = 10\,(n+m) +9$. Voilà une meilleure expression. Et que met-elle donc en jeu? La distributivité de la multiplication sur l'addition. Tiens une nouvelle propriété fondamentale qui s'adjoint à l'associativité et la commutativité.

Troisième approche: Bref, le fait numérique considéré tient donc aux propriétés structurelles de l'addition et de la multiplication. Elle repose aussi sur un fait numérique élémentaire – du niveau des collections et des noms de nombres celui-là – à savoir que $2 + 7$ fait 9.

Mais une question, est-ce la seule somme qu'il fallait savoir faire? Oui puisque toutes les autres sommes des chiffres présents dans les nombres considérés s'avèrent superflues pour notre relation. Oui mais pour cela faut-il encore le savoir? C'est-à-dire connaître le fait numérique considéré, ou alors pouvoir le prévoir à partir de ce que l'on connaît du système de numérations de positions en base dix. Ainsi, si on veut que l'élève porte attention à ce fait, on lui demandera d'effectuer des sommes: 2+7, 12+7, 22+7, 432+17, etc. et on lui fera faire *des sommes superflues* pour qu'il se rende compte des régularités *au-delà* de ce qui varie de cas en cas. Nous pouvons donc répondre: 2+7=9, la seule somme qu'il est nécessaire de savoir, mais peut-être pas la seule somme qu'il est utile de savoir! Et nous voilà plongés en pleine didactique.

Récapitulation:

Mais revenons-en au fait. Ainsi donc notre relation est un fait numérique attribuable à la numération de position en base dix écrite (mais aussi en l'occurence à la numération parlée), **«c'est elle qui, exploitant les propriétés structurelles numériques, produit le fait, ceci se manifeste par toutes les relations (faits) que cette propriété renvoie** (toutes les sommes autres que 2+7=9, toutes les sommes autres que celle des chiffres des unités), **ou, si vous le voulez, rend impertinentes.** Nous retrouvons ici une fameuse phrase de Guy Brousseau: «La compréhension se manifeste par un rejet (de la part du sujet) de ses modèles antérieurs». On peut exprimer ceci de multiples autres façons, dire par exemple que le fait numérique est une relation codifiée; dire que le système symbolique (la numération) en est le creuset; etc. Je retiens pour ma part une idée à laquelle je tiens, le fait numérique est une teinte conférée par un outil formel et conventionnel (donc particulier) aux propriétés structurelles générales du nombre (générales mais *amorphes*).

3.3. Conclusions

Je ne dirai donc qu'un fait:

a. **se manifeste** à un certain niveau de symbolisme (marque d'un niveau de réalité);
b. **s'explique** à un niveau supérieur par la mise en œuvre des propriétés structurelles numériques dans le système symbolique considéré;
c. **repose** aux niveaux inférieurs sur des faits numériques plus élémentaires disponibles (et que l'on peut considérer vus ainsi d'en haut comme ponctuels).

Il convient alors pour l'enseignement d'avoir le souci de la constitution des faits numériques avant de s'engager à les expliquer on a en retracer les fondements élémentaires. Au lieu de chercher tant à affiner les procédures d'évaluation des élèves la pédagogie (aidée de la didactique des mathématiques) devrait sérieusement s'atteler à la question suivante: **comment s'assurer que l'enseignement se place au niveau approprié?**

Bonne feuille...
Un autre aspect de la coordination...

«Un aspect me déroutait dans l'enseignement du lycée. C'était le cloisonnement des disciplines, l'isolement de chaque matière. Les élèves allaient de classe en classe comme s'ils exploraient un archipel. Comme s'ils visitaient une suite de pays dirigés chacun par un maître qui se désintéressait totalement de ce qui se passait ailleurs. Pendant une heure, on traduisait Sénèque. L'heure suivante, on détaillait les beautés de la machine à vapeur. Après quoi, on se penchait sur la structure physique du continent américain. A peine le déjeuner avalé, on se précipitait sur la fonction chlorophyllienne chez les plantes vertes, avant de terminer la journée de lycée parmi les sorcières de *Macbeth*. Rien ne se rattachait à rien. Pas question d'envisager la possibilité même de quelque relation entre histoire et mathématiques, l'éventualité d'un rapport entre sciences naturelles et géographie. Si compétent que fût chaque professeur, si intéressé à son métier, si bon enseignant fût-il, il ne lui venait jamais à l'idée de déborder ses frontières, de nous montrer que le monde est un tout, que la vie est un ensemble. Chaque domaine demeurait un vase clos. Chaque discipline fonctionnait en circuit fermé, en ignorant les autres. Aux élèves de se débrouiller pour construire leur petit univers et lui trouver de la cohérence. A chacun sa synthèse s'il en éprouvait le besoin. Longtemps, mon grand-père Franck m'avait montré les chemins de la cohérence et de la synthèse. Avec lui, les Grecs s'intéressaient aux mathématiques et les héros de Shakespeare à la géographie. Avec lui, j'avais appris à replacer les personnages de roman dans leur milieu historique. A rechercher les ressemblances et les différences entre ce qu'étudiait la physique et ce à quoi s'intéressait l'histoire naturelle. Derrière la variété des matières et la diversité des goûts se profilait une possibilité d'unité, un début de cohérence. Mon grand-père disparu, c'était à moi de me fabriquer ma cohérence et mes synthèses.»

Ce texte est tiré de l'ouvrage «La statue intérieure» écrit par François Jacob, prix Nobel de médecine 1965. Le souvenir narré ici se situe vers 1930. Peut-on dire que, depuis lors, les choses ont bien changé? Qui, aujourd'hui, aide les adolescents à «fabriquer leur cohérence»?

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion