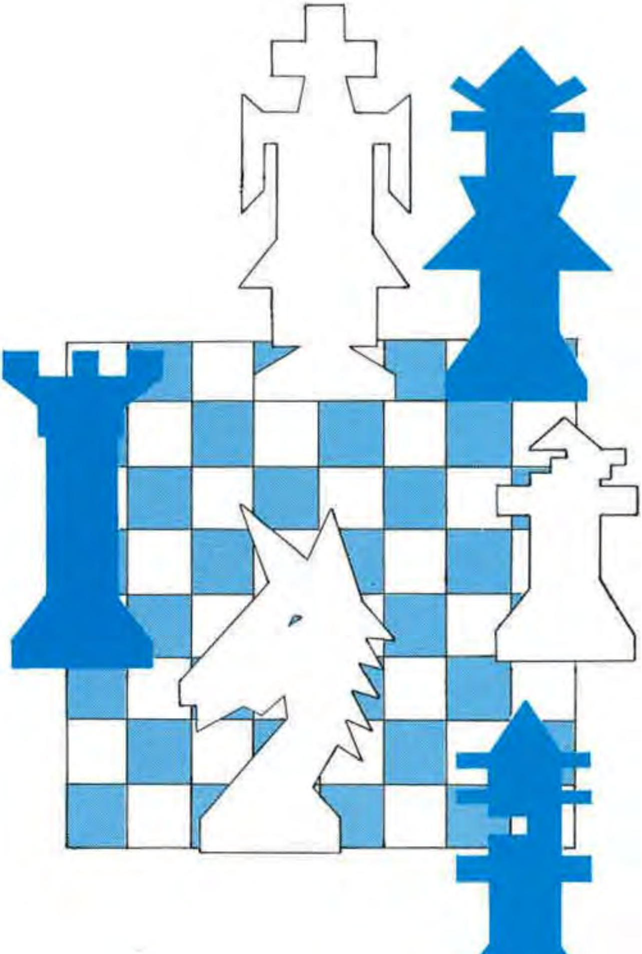
137



MATH ECOLE

MARS 1989
28e ANNÉE

MATH-ECOLE 137

28e ANNÉE Paraît cinq fois par an MARS 1989

Editorial

Travailler les réseaux... à quoi cela sert-il?

Le thème des réseaux [1], dans l'avenue DE, s'étend de la 1re à la 4e. Bizarrement, il n'en est plus question en 5e. Que déduire de là? Que l'étude des réseaux est peu importante?... ou même inutile?

Devant la tendance à négliger ce sujet, tendance que l'on peut observer ici et là, je voudrais montrer son intérêt: il s'agit des premiers pas des élèves dans l'étude des figures géométriques, et de l'exercice d'une véritable activité mathématique sur ces figures.

L'idée de travailler sur des réseaux vient de constatations faites en psychologie génétique: à savoir que les enfants sont sensibles à certaines propriétés topologiques des figures bien avant de l'être à des propriétés métriques [2]. Si, par exemple, on leur demande de copier un carré, un triangle... il y a d'abord une phase où les enfants n'en restituent que la propriété d'être une ligne fermée; il arrivera qu'ils dessinent tout bonnement un cercle, ou une figure «carrébossue» fermée. Ce n'est que plus tard qu'on les verra discerner et dessiner des côtés droits, des côtés de même longueur, des angles corrects...

Tout cela est à mettre en relation avec une autre idée, pédagogique celle-là: si l'on désire que les enfants aient une activité de découverte féconde, sans que la maîtresse ait à intervenir trop, il faut que la réflexion porte sur des faits déjà bien assimilés, donc depuis suffisamment de temps.

Si l'on associe ces deux idées, il devient naturel de commencer par faire travailler et réfléchir les enfants sur les propriétés topologiques des réseaux. Ils seront bien plus «productifs» qu'avec des carrés, des triangles... où les propriétés métriques sont prédominantes.

Il faut dire, qu'en matière de réseaux, les connaissances que les enfants peuvent acquérir ont peu d'importance; en revanche les démarches qu'ils sont amenés à exercer sont de celles dont ils auront toujours besoin lors d'activités géométriques:

- examiner, observer des figures;
- attacher son attention à un aspect d'une figure, à une caractéristique;
- décrire une propriété (premiers pas vers une définition);
- classer selon divers critères;
- avoir conscience que, pour classer des figures, on s'intéresse à différents de leurs aspects;
- se tenir à une propriété donnée, et non pas à une autre (ne pas mélanger les propriétés);
- découvrir une loi (comme à propos des réseaux eulériens);
- imaginer ce qu'on obtiendra lorsqu'on aura tracé un trait;
- vérifier que le résultat obtenu est bien celui qu'on attendait.

C'est là qu'il faut chercher les véritables objectifs des activités sur les réseaux. Comme on le voit, ils concernent des activités intellectuelles importantes: voilà de bonnes raisons pour y consacrer du temps.

Théo Bernet

[1] Il ne s'agit pas ici des quadrillages dans lesquels on se déplace, mais de ces réseaux qui peuvent être simples ou non simples, ouverts ou fermés, connexes ou non, qui parfois délimitent des domaines.

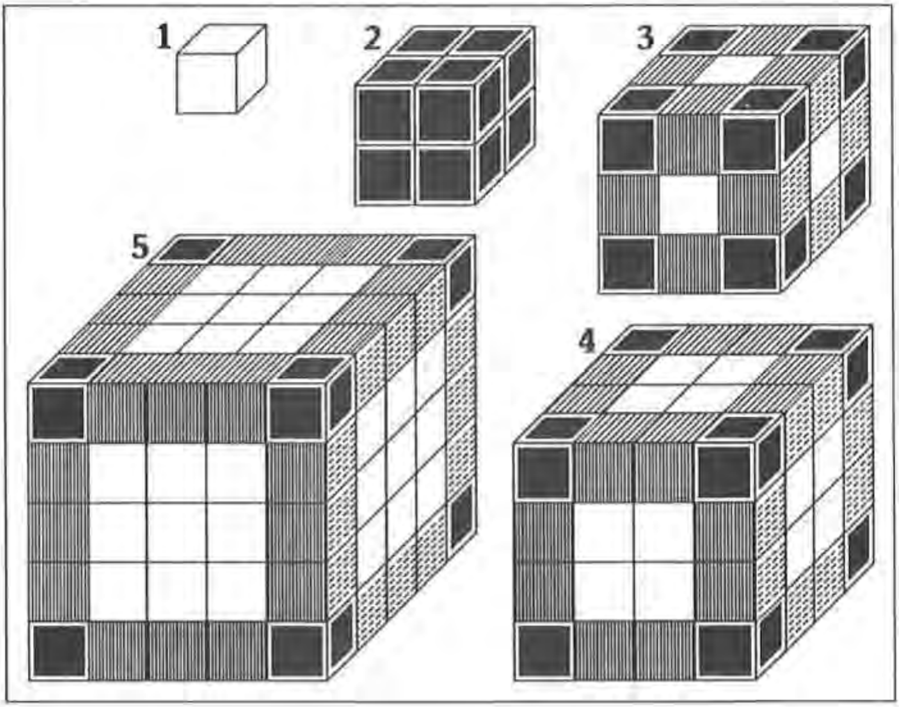
[2] Voir par exemple dans Piaget, Inhelder: «La représentation de l'espace chez l'enfant», chap. I et II.

Angles de vision, graphismes nouveaux et prolongements...

par Roger Délez,
EPEP, Etudes Pédagogiques de l'Enseignement Primaire (Genève)

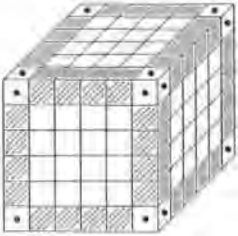
Dans un *Math-Ecole* de l'an dernier, mon attention a été captée par un article sur «LES CUBES PEINTS». Cette recherche, à laquelle j'ai participé, m'a conduit sur des pistes nouvelles que je tiens à partager avec les fidèles lecteurs de notre revue. Un merci tout particulier est adressé, en filigrane, à la classe de Madame Jaeggle à Versoix, volée de 5P en 1987-1988.

Dans un premier temps, voici une représentation graphique utilisée par plusieurs élèves:

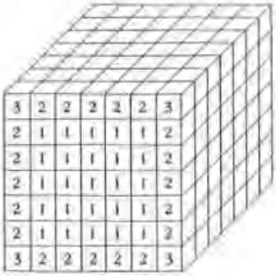


Cette illustration permet le coloriage différencié des cubes ayant **une, deux** ou **trois** faces peintes.

Ce coloriage peut aussi aboutir à un codage par face.



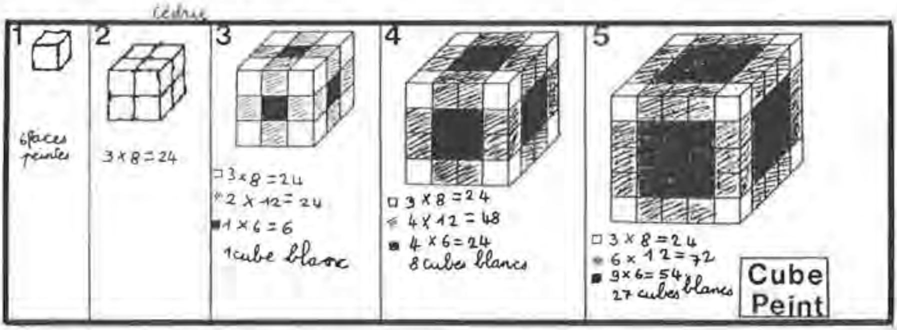
codage graphique



codage numérique

Les élèves, au fur et à mesure de l'avancement de leur recherche, peuvent élaborer une ébauche de généralisation.

Dans ce travail de Cédric, nous pouvons aisément constater qu'il existe une relation entre:
- les SOMMETS
- les FACES
- les ARÊTES



Dans cette première phase d'activité, il est évident que Cédric a utilisé les informations suivantes:

Chaque cube est composé de: → 8 SOMMETS
→ 12 ARÊTES
→ 6 FACES

Il est intéressant aussi de constater que le renseignement concernant les «cubes» blancs est en relation avec la notion et le calcul de l'**aire** et du **volume** (l'aire **se voit** sur la face).

En effet: longueur · largeur = aire
longueur · largeur · profondeur = volume

Exemples: 1 · 1 · 1 → 1 cube blanc au centre
2 · 2 · 2 → 8 cubes blancs au centre
3 · 3 · 3 → 27 cubes blancs au centre etc.

Pour Isabelle, la démarche utilisée est un codage particulier sur une face du cube formé. Après quelques démarches systématiques, elle «trouve un truc pour aller plus vite», d'où début de généralisation intéressante.

faces peintes

cube de 2 :

touts les petits cubes du grand cube sont peints sur trois faces des 8 cubes.

cube de 3 :

3	2	3
2	1	2
3	2	3

il y a 6 cubes peints sur une face, il y a 8 cubes peints sur trois faces, il y a 12 cubes sur 2 faces peintes

dans un cube il y a 8 sommets
12 arêtes
6 faces

3	2	2	3
2	1	1	2
2	1	1	2
3	2	2	3

il y a 8 faces peintes sur trois faces, il y a 24 faces peintes sur 1 faces, il y a 24 faces peintes sur 2 faces.

j'ai trouvé le truc pour aller plus vite !!!

cube de 45 :

3	2	2	2	3
2	1	1	1	2
2	1	1	1	2
2	1	1	1	2
3	2	2	2	3

Remarques:

- Au niveau du langage, il y a confusion entre FACES et CUBES.
- Lors de l'écriture d'un protocole de recherche, il est parfois difficile d'être clair, précis et ordonné.

Au niveau des puissances, on peut constater des ébauches de généralisation qui pourraient aboutir à:

- un tableau bien organisé,
- une recherche de formules algébriques (niveau secondaire),
- une transposition graphique (niveau secondaire également).

Voici par exemple un tableau nous donnant:

RÉCAPITULATION DES FACES PEINTES:

	TOTAL		■		▨		□	
1	1 × 1 × 6	**6**	—	—	—	—	—	—
2	2 × 2 × 6	**24**	3 × 8	24	—	—	—	—
3	3 × 3 × 6	**54**	3 × 8	24	2 × (1 × 12)	24	1 × 1 × 6	6
4	4 × 4 × 6	**96**	3 × 8	24	2 × (2 × 12)	48	2 × 2 × 6	24
5	5 × 5 × 6	**150**	3 × 8	24	2 × (3 × 12)	72	3 × 3 × 6	54
6	6 × 6 × 6	**216**	3 × 8	24	2 × (4 × 12)	96	4 × 4 × 6	96
7	7 × 7 × 6	**294**	3 × 8	24	2 × (5 × 12)	120	5 × 5 × 6	150
8	8 × 8 × 6	**384**	3 × 8	24	2 × (6 × 12)	144	6 × 6 × 6	216
9	9 × 9 × 6	**486**	3 × 8	24	2 × (7 × 12)	168	7 × 7 × 6	294
10	10×10×6	**600**	3 × 8	24	2 × (8 × 12)	192	8 × 8 × 6	384
n	n × n × 6 $\boxed{6n^2}$		3 × 8 $\boxed{24 = \text{cte.}}$		2 × (n−2) × 12 $\boxed{24\cdot(n-2)}$		(n−2)(n−2)6 $\boxed{6\cdot(n-2)^2}$	
Remarques:			3 faces par sommet 8 sommets		4 faces par face de cube 6 faces (pour "3") **2** faces par arête **12** arêtes (pour "3")		1 face par face de cube 6 faces (pour "3")	

Une «situation mathématique» telle que celle présentée ici prouve, si besoin est, que de nombreuses activités mathématiques et algébriques pourraient découler tout naturellement de:

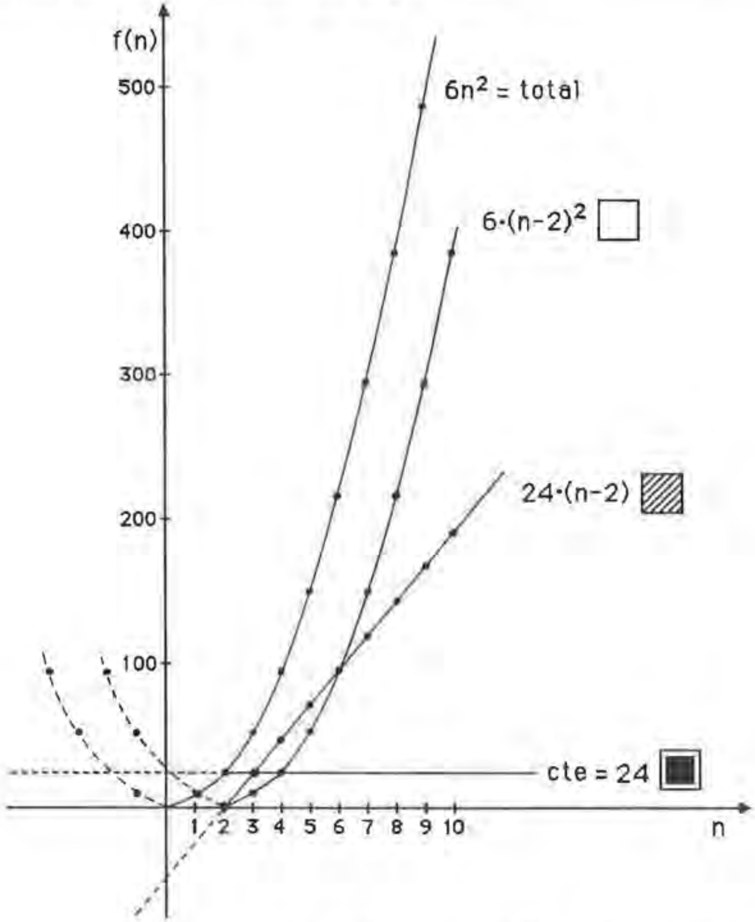
- MANIPULATIONS,
- OBSERVATIONS,
- DÉDUCTIONS,
- GÉNÉRALISATIONS,

...

Un clin d'œil maintenant à nos collègues du secondaire avec ces formules trouvées:

n	n × n × 6 $\boxed{6n^2}$	3 × 8 $\boxed{24 = \text{cte.}}$	2 × (n−2) × 12 $\boxed{24 \cdot (n-2)}$	(n−2)(n−2)6 $\boxed{6 \cdot (n-2)^2}$

Ces formules ont été «TROUVÉES» à l'issue d'une longue recherche concrète. Nous pouvons aussi les «illustrer» par un graphique:



Extension du modèle concret à l'équation abstraite.
(Quelle que soit la valeur de n!)

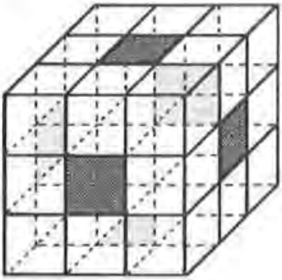
La notion de puissance est sous-jacente à ce genre d'activité. En effet, les enfants font rapidement le lien entre 8 et $2 \times 2 \times 2$
27 et $3 \times 3 \times 3$.

Ils le font effectivement en relation avec le matériel utilisé.

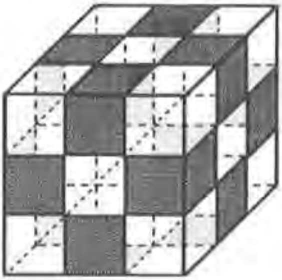
Dans le domaine topologique, on peut prendre ce nouveau modèle «difficile» pour représenter les cubes ayant 1, 2 ou 3 faces peintes.

LE CUBE

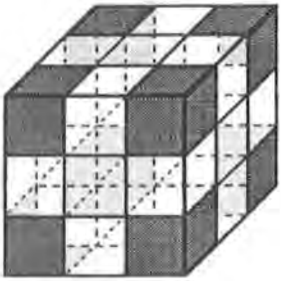
Où sont-elles ces faces peintes ?



1 face peinte

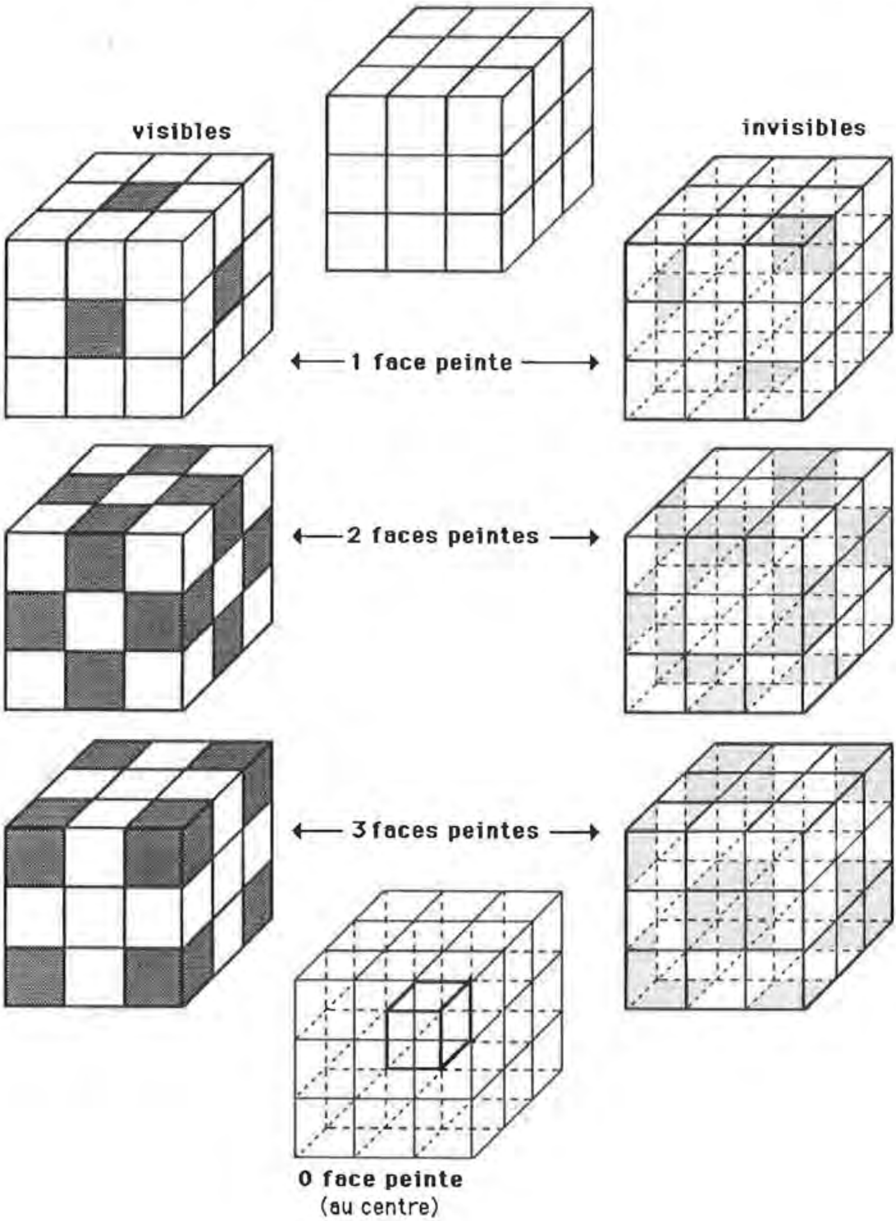


2 faces peintes



3 faces peintes

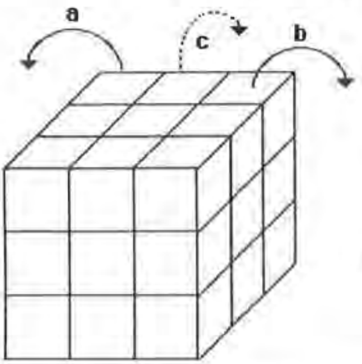
Voici aussi un autre angle de vision concernant les faces peintes, **visibles** ou **invisibles,** sur le schéma:



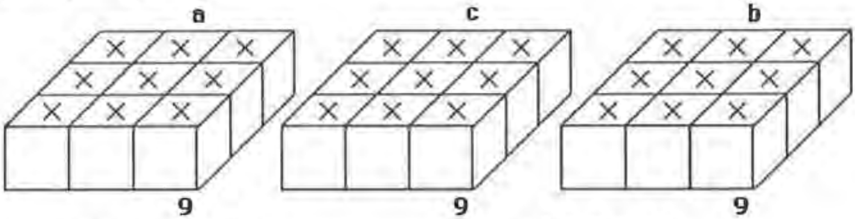
La démarche de Philippe est très intéressante et pour mieux le comprendre, je vous suggère de la «pratiquer» avec de petits cubes afin de mieux «voir» ce qui est développé ci-dessous:

RAISONNEMENT AUTOUR DU CUBE 3 (faces non peintes)

Philippe 5P: Essai de transcription de sa démarche expliquée en classe verbalement avec manipulation à l'appui.



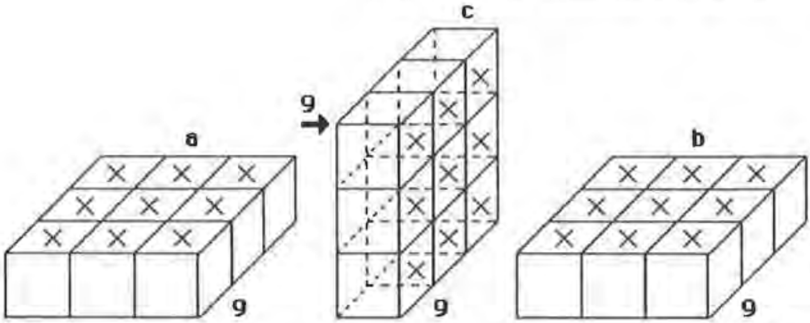
Phase 1: Par rabattement total



× = ce qui est peint, ou interprété comme tel

3 x 9 = 27

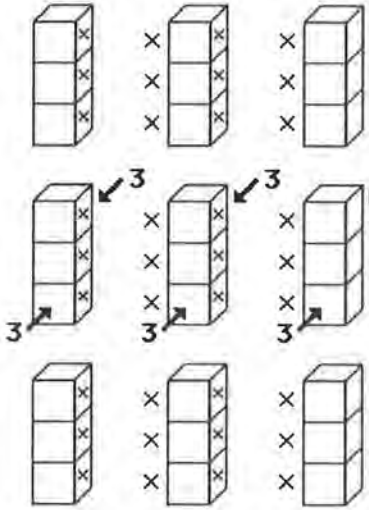
Phase 2: Par rabattement partiel



4 x 9 = 36

"Comme ça, c'est impossible de compter car il faut tout séparer les cubes !"

Phase 3: Par dissociation des "tours" de 3 cubes



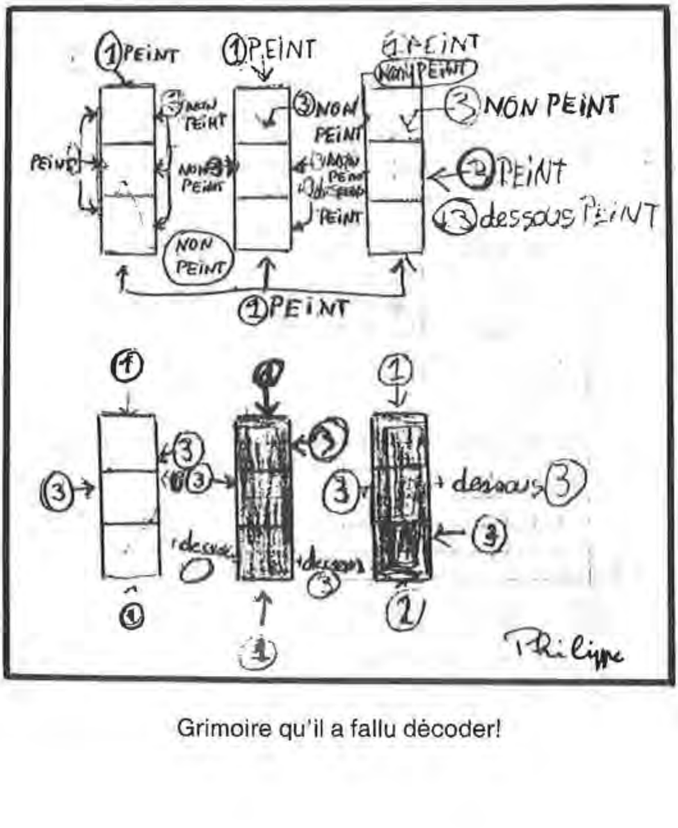
12

18 + 18 = 36

12 + 36 + 12 = 60

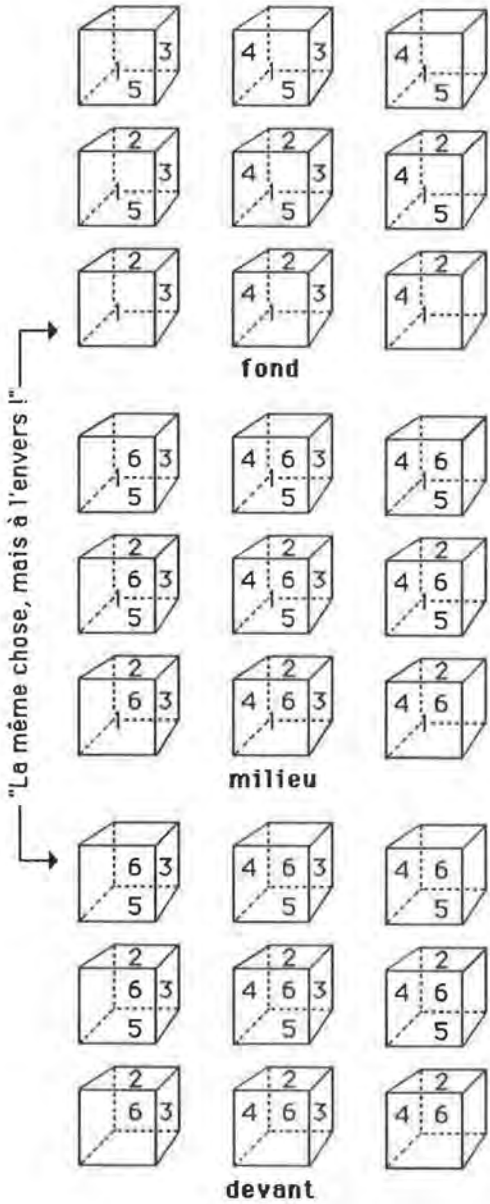
12

"C'est comme avant, il y a encore des faces qui se touchent et qui ne sont pas peintes. Il en manque encore !"

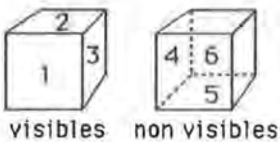


Grimoire qu'il a fallu décoder!

Phase 4: Par dissociation totale



Les numéros inscrits correspondent aux faces non peintes selon le code suivant:



Voici maintenant la transcription codée de la représentation précédente:

CODAGE									
faces non peintes					faces peintes				
3	4	3	=10		3	2	3	=8	
4	5	4	=13	33	2	1	2	=5	21
3	4	3	=10		3	2	3	=8	
4	5	4	=13		2	1	2	=5	
5	6	5	=16	42	1	0	1	=2	12
4	5	4	=13		2	1	2	=5	
3	4	3	=10		3	2	3	=8	
4	5	4	=13	33	2	1	2	=5	21
3	4	3	=10		3	2	3	=8	
				$\boxed{108}$					$\boxed{54}$

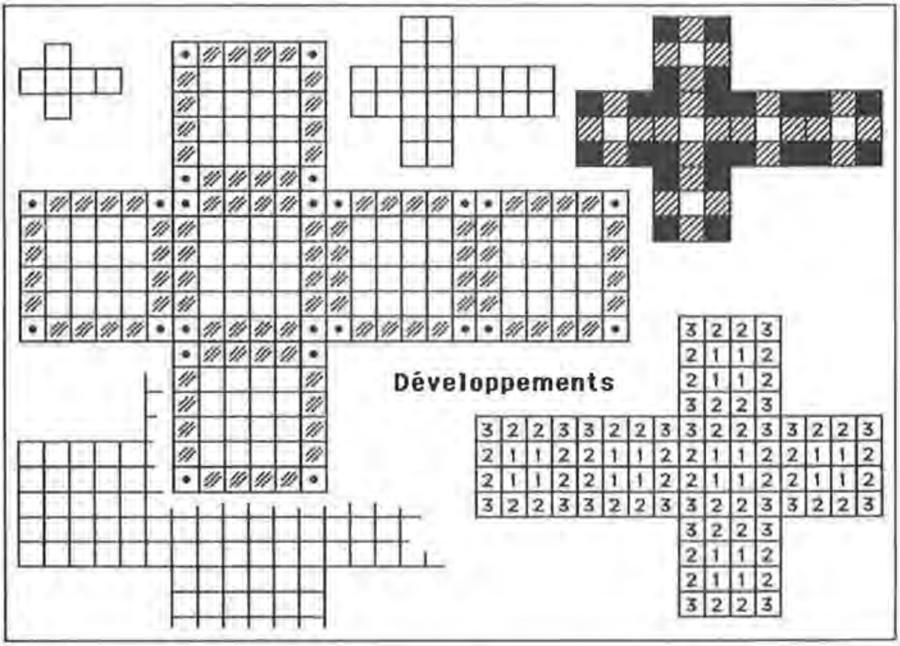
Vérification: Cube de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cubes

Faces peintes: 1 grande face cube $\rightarrow$ 9 petites
1 cube $=>$ 6 faces $\rightarrow$ $\mathbf{6 \cdot 9 = 54}$ f. p.

Faces non peintes: 27 cubes à 6 faces $\rightarrow$ 162 faces
$162 - 54 = 108$ soit **108 faces non peintes**

Bravo Philippe, ton système est valable!...

Certains enfants ont voulu se pencher sur le problème posé par les **développements** de ces cubes et sont arrivés à ces représentations:



Ces réalisations reprennent les 3 modes de représentation illustrés au début de cet article, c'est-à-dire:

- le coloriage différencié,
- le codage graphique,
- le codage numérique.

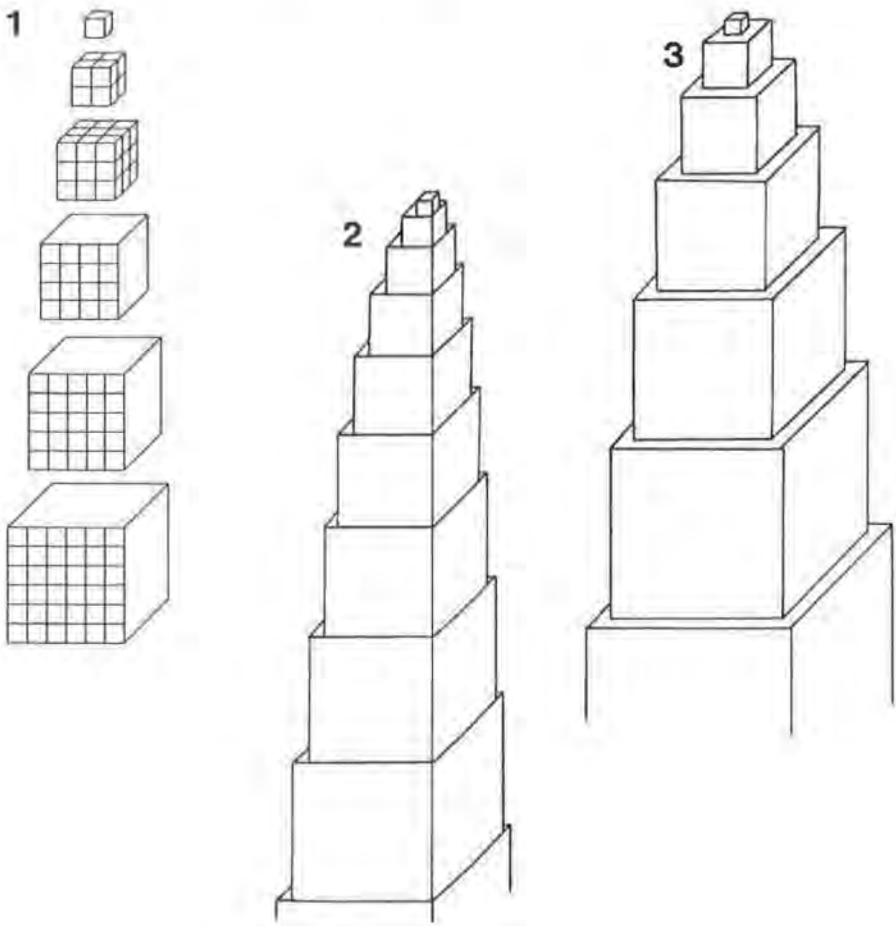
Remarques:
- Ce développement est **un des onze** développements possibles du cube.
- Les généralisations amènent également la possibilité de travailler les graphiques.
- Vous êtes intéressés par la publication du SPR sur les «CUBES PEINTS» (référence 88.01)? Elle est à votre disposition.

Mon propos de ce jour voudrait jeter les bases d'un pont, d'une passerelle avec nos collègues de l'enseignement secondaire. Oui!... par expérience, je peux vous certifier que de nombreuses recherches, formules, théorèmes, axiomes... peuvent être DÉCOUVERTS par MANIPULATIONS, par OBSERVATION en trois mots:

par la MAIN.

Je vous la tends avec les prolongements suivants qui m'ont été proposés en 5e primaire à Versoix:

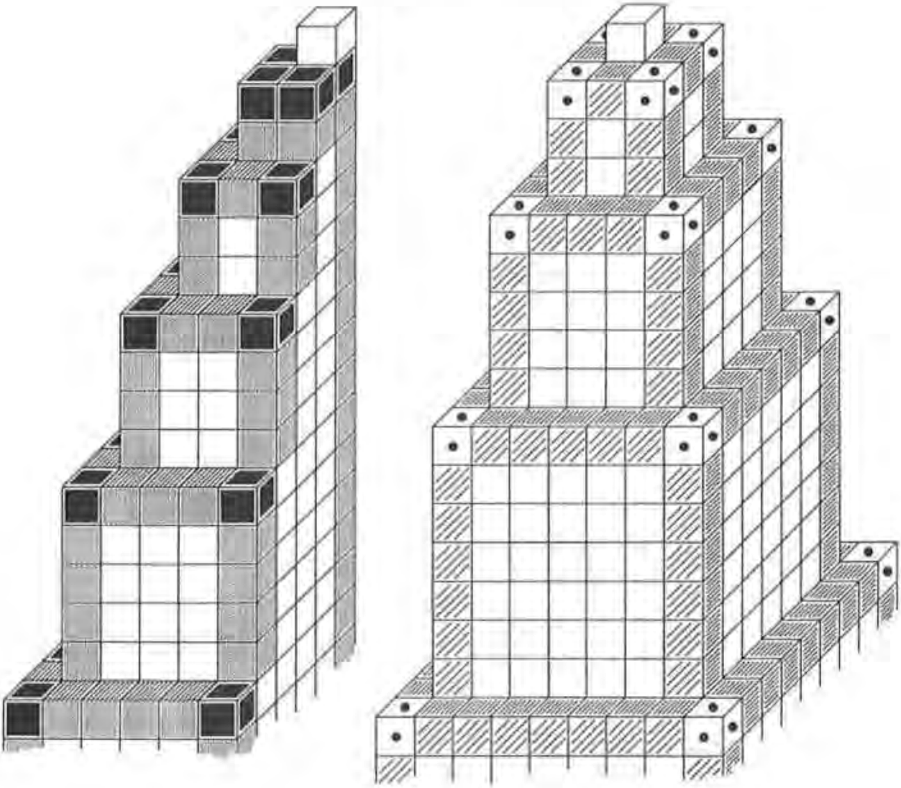
LE CUBE PEINT et ses relances!



Bien sûr, les difficultés sont plus importantes mais il est possible de réaliser de telles recherches avec les élèves qui ont l'intention de «CONCRÉTISER» et de «MATÉRIALISER» un modèle, une démarche mathématique en vue de la «GÉNÉRALISER» et de la «FORMALISER». Si la suite de cette démarche vous intéresse, l'auteur de cet article se tient prêt à la publier ou à vous la faire parvenir.

En voici tout de même en conclusion ou en introduction à une suite, une illustration analogue au début de cet article:

Que se passe-t-il donc ici?

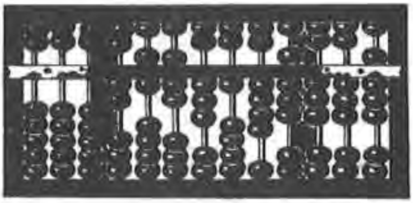


A vous de jouer et d'y trouver autant de plaisir que tous ceux avec qui j'ai eu la joie de travailler...

Le boulier chinois

par Danielle Berney

Une première approche



Nous ne sommes pas en Chine, mais bien dans une classe genevoise de 3P.

Cette machine à calcul qu'est le boulier chinois est intéressante à plusieurs titres pour travailler les domaines de la numération et des opérations des degrés de la division moyenne (3P à 6P).

Si l'on trouve dans les *Math-Ecole* nº 79 et 80 deux articles de François Jaquet, si l'on peut acheter, en même temps qu'un boulier, une notice explicative, quelques livres ou brochures traitant de la technique d'utilisation du boulier chinois, de son maniement en général, très rares sont les écrits [1] sur le boulier soulevant les problèmes rencontrés par les élèves face à des notions d'équivalence, d'échange, de décomposition et recomposition d'un nombre, de compensation, de numération de position, d'algorithme.

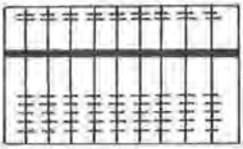
[1] Revue IN nº 25 et 28.

C'est donc en faisant l'hypothèse que le boulier chinois peut être un matériel favorisant la construction de ces notions, leur approfondissement, voire leur utilisation que je l'introduis dans quelques classes de 3P et 4P.

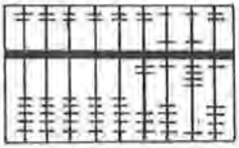
Cet article ne traitera que de la première approche de cette drôle de machine à calculer, des idées que les élèves ont pour la faire fonctionner.

Chaque enfant a devant lui un boulier chinois, une feuille, un crayon gris.

Après avoir indiqué la position **zéro**



et la manière d'«écrire» des nombres en rapprochant les boules de la barre transversale,



je donne la consigne suivante:

> *Imaginez des lois de fonctionnement du boulier, écrivez-les et trouvez, en utilisant ces lois, jusqu'à quel nombre vous pouvez compter.*

La classe est alors envahie par un bruit de boules qui glissent, plus ou moins intempestivement, tant l'attrait pour l'objet boulier est fort.

En début de 3P, les propositions sont pauvres, peut-être parce que les élèves n'ont pas encore réalisé que le système de numération, ou les opérations, sont régis par des lois conventionnelles. Ils ont «appris» des systèmes, mais n'ont pas compris que ces systèmes peuvent être modifiés. Peut-être aussi n'ont-ils pas assez l'occasion d'«imaginer» des possibles, n'osent-ils pas «inventer» en mathématique: l'évaluation sanctionne souvent l'invention au profit de l'utilisation de **la** loi!

Laurent imagine: *«En bas on a les unités, en haut les grands nombres».*

Seule référence à un savoir scolaire, «les unités», ... et encore ... que sont «les unités» dans la proposition de Laurent? Sûrement pas les éléments non groupés de notre numération de position; tout au plus un nombre de boules valant chacune 1 unité et occupant une position particulière, sous la barre transversale.

«En bas, chaque boule vaut 1 unité. En haut, les grands nombres»

Dans la tête de Laurent, «Les grands nombres», c'est probablement «tout le reste que je ne domine pas bien».

Idée de position certes: il n'attribue pas la même valeur aux boules du bas et à celles du haut, leur position dans un espace est prise en compte.

Cette loi, encore pas définie pour le haut parce qu'elle dépasse la connaissance de Laurent, peut tout de même fonctionner partiellement.

Je questionne les élèves à ce propos:

- *Quel est le plus grand nombre qui peut être inscrit sur le boulier avec les boules du bas?*
- *Pouvezvous écrire 24, 36, 41, ... avec cette loi?*
- *Etes-vous certains qu'on peut écrire tous les nombres de 0 à 65?*

Aucun problème, aucune hésitation. Les élèves utilisent indifféremment les boules de gauche, de droite ou du centre, la loi choisie ne les en empêche pas.

La limite de 65 en utilisant toutes les boules du bas (5 × 13 sur le boulier à 13 tiges) ne leur permet pas d'«inventer un système d'échange» pour utiliser aussi celles du haut!

En novembre, 4P, d'autres propositions:

Letizia, ainsi que beaucoup de ses camarades, en restent à la loi la plus simple, qui ne prend en compte ni des possibilités de valeurs différentes selon la position des boules, ni des équivalences ou des échanges possibles.

«On peut compter de 7 en 7 avec les boules d'en haut et d'en bas».

Cette manière de s'exprimer, que je retrouve plusieurs fois, («compter de 2 en 2, de 5 en 5»), me laisse supposer que, en classe, on exerce parfois le comptage de n en n, ou que les élèves utilisent ce procédé pour retrouver le résultat d'une multiplication simple: $4 \times 3 \rightarrow 3, 6, 9,$ **12**.

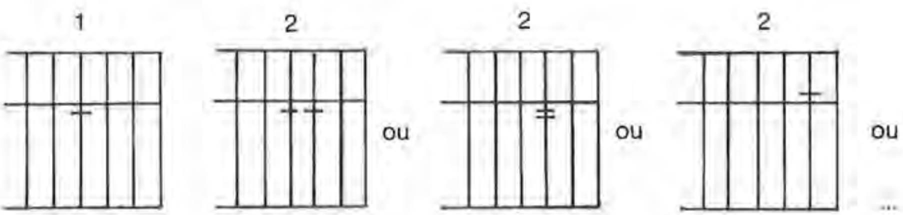
Pour ces élèves, la recherche d'une loi de fonctionnement du boulier revient à compter de différentes manières, étant sous-entendu que chaque boule, où qu'elle se trouve, vaut 1. On peut compter de 1 en 1, effectuer des additions, des soustractions. Fonctionnement facile, mais il faut chaque fois recompter toutes les boules en jeu et la machine n'est pas très performante, elle ne va que jusqu'à 91.

Nadine va plus loin:

«Les boules du bas valent 1, les boules du haut valent 2»

- *Le plus grand nombre possible que l'on peut inscrire?*   *117*
- *Passe-t-on par <u>tous</u> les nombres jusqu'à 117?*

Flottement dans la classe! Essais!



Cette question n'est pas aussi anodine qu'on pourrait le croire: en effet, pour répondre avec assurance, il faut prendre conscience que l'opérateur (+1) suppose l'utilisation de la technique d'échange de 2 boules du bas contre 1 boule du haut (au plus tard quand toutes les boules de valeur 1 sont mobilisées).

Raisonnement plus élaboré, qui réclame d'abord des essais, des actions, l'acceptation de l'équivalence avant de s'affirmer.

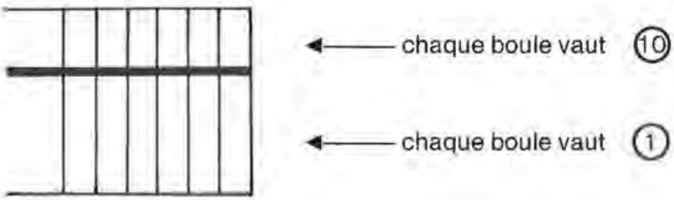
Si les échanges sont travaillés depuis la 2P dans les algorithmes d'addition, puis en 3P de soustraction, ils ne sont pas pour autant réutilisés spontanément. Ils sont «notions scolaires», ils ne sont pas encore «outils de pensée».

Pour Didier, le problème est une ardoise:

«Celles du haut, on les déplace et la barre est le signe + – × et celles du bas nous donnent ...»

– *Quoi? Le deuxième nombre? Mystère!*
  Et le résultat? Comment le trouve-t-on?

Dès que l'idée de changement de valeur selon la position est lancée, elle est améliorée:



– *Le plus grand nombre? 325*

C'est mieux, ce n'est pas encore beaucoup! Mais nous pouvons déjà nous exercer aux échanges, aux additions, et nous ne nous en privons pas.

A aucun moment et dans aucune classe (même en 6P) les élèves ne proposent de combiner les positions «en haut et en bas» avec les positions «droite et gauche», ces dernières étant justement le principe de la numération de position dans l'écriture des nombres.

Ce matériel, le boulier, est trop différent de l'écriture d'un nombre pour que cette idée germe dans l'esprit des enfants, pour qu'ils puissent faire un lien entre des «objets» apparemment si éloignés l'un de l'autre.

Même chez nous, adultes, cette idée ne naît pas spontanément.

Est-ce donc que le principe de la numération de position est sophistiqué, pas naturel, et qu'il faut oser lui consacrer du temps (toute la division moyenne) pour le construire, le dominer, l'utiliser?

Que penser de la géométrie de Vincenot?

par Frédéric Oberson

Dans sa thèse de troisième cycle «HENRI VINCENOT, ENTRE LE RETOUR A LA TRADITION ET UNE NOUVELLE MODERNITE», Françoise Thinlot écrit: «C'est dans la perspective de Chrétien de Troyes et plus encore peut-être des sources celtiques du roman arthurien que l'œuvre romanesque d'Henri Vincenot dévoile sa véritable cohérence et une gravité qui passent souvent inaperçues auprès de contemporains peu exercés à ce genre de lecture... Refusant l'élitisme puisqu'elle peut s'adresser à toutes les catégories de lecteurs, cette œuvre est néanmoins profondément *initiatique.*»

«Les étoiles de Compostelle»

Au XIII^e siècle, Jehan le Tonnerre, issu d'une communauté d'«essarteurs» [1], se voit enrôlé par les Compagnons Constructeurs, «Enfants de Maître Jacques» [2]. Au terme d'une longue initiation vécue tout au long d'un pèlerinage à St-Jacques de Compostelle, ce Jehan le Tonnerre devient «Pédauque» [3] à son tour.

Plusieurs pages du roman décrivent Maître le Gallo initiant Jehan le Tonnerre à la géométrie des Compagnons Constructeurs, des pages qui devraient intéresser le lecteur de *Math-Ecole.*

En hommage à l'écrivain bourguignon, auteur de la *Billebaude,* du *Pape des escargots,* du *Maître des abeilles,* nous publions l'une de ces pages portant sur la construction du pentagone et la règle d'or, «pentagramme et sublime proportion».

Lorsqu'ils eurent terminé l'aire d'argile plane qui devait leur servir de planche à dessin, les tracés commencèrent. Il s'agissait d'y dessiner, grandeur nature, à plat, les «fermes», ces triangles générateurs du prisme que constitue la toiture. Prismes irréguliers, je l'ai dit, se pénétrant le plus souvent de biais, en raison des rentrants et des saillants des bâtiments. Avec une prestesse qui étonna Jehan, cela fut fait en quelques jours. Vingt-deux «fermes» dont pas trois n'étaient semblables. La vingt-deuxième n'était pas encore tracée que les charpentiers taillaient déjà les fiches, les

[1] **Essartage:** Défrichage de la forêt par dessouchage et brûlis.

[2] **Jacques:** Nom donné aux Compagnons Constructeurs, Enfants de Maître Jacques. Ce maître Jacques serait un constructeur celte ayant participé à la construction du Temple de Salomon. L'un des rites du Compagnonage (Compagnons du Devoïr ou Dévorants) le désigne comme son fondateur.

[3] **Pédauques:** Confrérie de Compagnons Constructeurs qui portaient une figure géométrique ésotérique ressemblant à l'empreinte d'une patte d'oie – d'où leur nom de Pédauques: Pedauca.

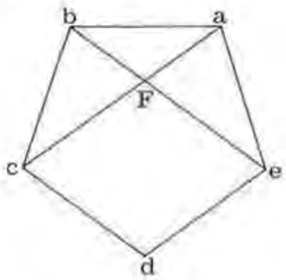
contre-fiches, les poinçons, arrêtiers, chevrons d'arrêtiers, entraits, arbalétriers et échantignolles, et que les sablières dormantes étaient posées au bon endroit sur les murs, juste en retrait de la corniche, toutes entaillées où il fallait loger les têtes de chevrons. Les tirants aussi, les crochets noyés dans la maçonnerie des pignons et des murs de refend.

Jeu d'enfant pour ces géomètres, habitués à bien d'autres acrobaties du compas. Et voyez comme l'enseignement de ces maîtres était souple, opportun et pragmatique: ce fut à l'occasion du tracé de ces triangles que le Maître enseigna le Nombre d'Or à son élève.

Oui, car la pente du toit formait, avec l'horizontale, un angle que le patron décrivit de la façon suivante: il construisit un carré ABCD, piqua le point fixe de son compas en C et traça une courbe BO. L'oblique OA était la pente cherchée. C'était celle qui convenait à la couverture en lauze du pays. Plus pentue, les lauzes risquaient de glisser, moins pentue, les lauzes étaient trop à plat et l'eau menaçait alors de ne pas s'écouler et même, par grand vent, de rentrer dans la toiture. C'était la pente OA qu'il fallait utiliser.

Mais ce que le Maître ajouta c'est que le triangle ACO était son triangle d'or. Ce qui prouvait, disait le Gallo, que le pentagone régulier contenait le nombre d'or. Et là-dessus le Gallo, ne quittant pas son compas, se mit à parler pour lui seul en traçant des droites et des courbes et en jasant comme un théologien:

– Soit le pentagone équilatère ABCDE, disait-il, des angles A et B, on trace les cordes AC et BE sous-tendant les angles B et C. Elles se coupent entre elles au point F et je dis que ce point F les divise en moyenne et extrême raison!...



Et de la pointe de son compas il écrivait $\frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}$

– Et c'est cela, lapin, ce que nous nommons: la «sublime proposition», que les gens d'Eglise appellent, bien entendu, «la divine proportion», mais je n'y vois pas d'inconvénient.

Jehan hocha la tête et, selon le penchant natuel de sa race, ironisa:

– Tout ça à l'occasion d'un toit! Un vulgaire toit, d'un vulgaire château du sire de Chaudenay!

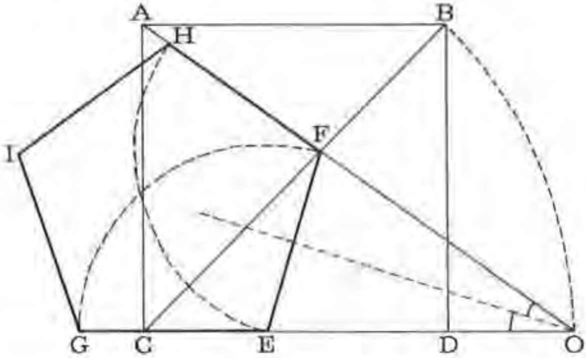
Et il riait.

– C'est la divine proportion qui commande toute la construction de nos édifices. Souviens-toi bien de cela, lapin! Voilà pourquoi je t'ai chanté l'autre jour: «Cinq engendre le Nombre d'Or, il ouvre la Divine Proportion.»

Et le grand Gallo, oubliant de remonter ses braies, qui glissaient dangereusement sur ses cuisses menaçant de libérer son énorme bas-ventre, continuait, l'œil allumé d'un feu intérieur très curieux:

– Et bien mieux: si le pentagramme équilatère contient le Nombre d'Or, réciproquement il est aussi engendré par lui.

Et il reconstruit le triangle d'or AOC, traça en pointillé la médiane de l'angle O, construisit sa perpendiculaire EF, plaça la pointe de son compas en E et traça l'arc FG. Piquant ensuite la pointe de son compas en F, il traça l'arc EH et s'écria comme s'il avait vaincu Lucifer en personne:



– ... Et je dis que GEFH donne les trois côtés du pentagramme! Et c'est un jeu de construire ensuite le point I, un lapin de dix-huit ans doit comprendre cela.

Jehan béait d'étonnement devant l'aisance de la démonstration. Il eût voulu qu'il continuât indifiniment, car cela lui donnait un vertige.

Le grand Gallo s'élevait, comme d'un coup d'aile, et, baignant dans une sorte d'aura, d'une voix que Jehan ne lui avait jamais entendue, disait:

– Notre Nombre d'Or est privilégié et prééminent autant que dire se peut, en raison de son pouvoir infini. De même que la sublime proportion qu'il te faut bien caser dans le bon coin de ta cervelle. Parce qu'en vérité un très grand nombre de choses dignes d'admiration au plus haut ploint, tant en philosophie qu'en tout autre science, ne pourra jamais sans eux parvenir à la lumière...

Jehan cessait de mordre son poing pour demander:

– Hé, Maître, comment voyez-vous que ces choses-là soient possibles?

– Ce don leur est certainement concédé par la nature immuable des principes supérieurs, parce qu'elle accorde entre eux, en une irrationnelle symphonie, tant de solide si divers par la taille, par le nombre de leur base, par leur figure, par leur forme. Et cela ressortira de mon développement lorsque je te décrirai les merveilleux effets d'une ligne divisée selon cette fameuse proportion et en fonction de ce nombre...

Puis s'interrompant:

– Mais patience, tout ça viendra à point. Travaille!

Et là-dessus on se remit à creuser les mortaises, à dégager les tenons là où le maître les avait tracés. Pendant qu'il jouait du bédane, le Maître éprouva le besoin d'ajouter:

– On te dira que ce sont là les leçons d'Euclide ou de quelques Campanus (toujours un grec ou un latin!). C'est encore un exemple de l'état d'oubli dans lequel on tient l'enseignement des Druides, car c'est chez eux qu'Euclide et les autres sont venus chercher ces connaissances, et non le contraire:

– Mais pourquoi tenir tout ça dans le secret? demanda Jehan.

– Ce qui est confié à tous indifféremment servira tôt ou tard au mal. La Connaissance est pour ceux seuls qui en sont dignes! Ne donnons jamais de confiture aux cochons!

Extrait de «Les étoiles de Compostelle», Editions Denoël, collection FOLIO n° 1878, page 160.

D'autres pages portent sur

- la corde à treize nœuds,
- la croix druidique et le nombre pi,
- le cube inscrit dans une sphère,
- le tétraèdre inscrit,
- l'icosaèdre inscrit, etc.

Mais Vincenot avoue quelque part dans son livre: «Moi, Vincenot qui raconte, je n'ai pas vérifié ce que je récite là, car j'en suis bien incapable. je me borne à transmettre, c'est mon métier, ce que Jehan le Tonnerre, comme moi-même, considérait tout de go comme une révélation prodigieuse.»

Alors les vérifications restent à faire! A nos... crayons, règles et compas!

L'appréciation du travail des élèves en situation ouverte

par Raymond Hutin

Que ce soit pour déterminer la progression de son enseignement ou pour informer les élèves et leurs parents, l'enseignant a besoin, plusieurs fois dans l'année scolaire, de porter un jugement sur le niveau de compétences atteint et la nature des connaissances assimilées par les élèves qui lui sont confiés. Cette évaluation fait appel à deux démarches différentes: l'évaluation quantitative et l'évaluation qualitative.

L'évaluation est quantitative quand, par exemple, on compte les erreurs commises dans une dictée; elle est qualitative, tout au moins en partie, lorsqu'il s'agit d'apprécier les idées contenues dans une dissertation. Ainsi, en lecture au début de la scolarité, en composition, en dessin, dans le domaine des activités créatrices, l'évaluation sera le plus souvent qualitative tandis que l'orthographe, la grammaire, la mathématique, la physique ou la géographie, pour ne citer qu'elles, se prêtent bien à une évaluation de type quantitatif.

La question qui vient immédiatement à l'esprit consiste à se demander si la différence entre ces deux types d'évaluation tient simplement à la nature des disciplines soumises à l'appréciation du maître ou si, dans tous les cas où cette démarche est possible, on a privilégié l'approche quantitative afin d'éviter autant que faire se peut l'arbitraire de l'évaluation et de limiter les risques de contestation de la notation. L'histoire de l'éducation montre que le recours à une évaluation quantitative systématique a souvent influencé la nature même de l'enseignement dispensé. On n'évalue pas ce qui est le plus important, mais ce qui est le plus facile à évaluer. Et comme l'évaluation demande préparation, la tentation de n'enseigner que ce qui est facilement évaluable est grande. Ainsi, jusque dans un passé récent, les plans d'études ont accordé la priorité à la nécessité d'apprendre à s'exprimer par écrit mais l'orthographe, à cause de la dictée, a bien souvent supplanté l'objectif principal.

Evolution des buts de l'éducation

Depuis quelques années, dans de nombreuses disciplines scolaires, une réflexion se poursuit pour donner leur juste place aux éléments les plus porteurs de la formation. Par exemple, en histoire, on accorde moins de place à l'énumération des dates et au récit des batailles pour accorder davantage d'importance à l'analyse des documents et à la compréhension des faits historiques et de leurs interrelations. En géographie, l'apprentissage des listes a laissé partiellement place à l'analyse globale d'un milieu donné. L'expression écrite est valorisée par rapport aux connaissances traditionnelles en matière de grammaire, d'orthographe ou de conjugaison. C'est la raison pour laquelle, dans la plupart des branches, la problématique d'une évaluation de type qualitatif portant sur les éléments essentiels de la formation se pose avec une grande acuité.

Cette évolution correspond à celle des besoins de formation qui se manifeste dans la plupart des pays industrialisés. Prenons-en pour témoin le dernier bulletin de l'OCDE (L'innovation dans l'enseignement, No 51, décembre 1988) qui signale le vingtième anniversaire du Centre pour la recherche et l'innovation dans l'enseignement (CERI). On y trouve le texte suivant:

Une grande partie des connaissances acquises à l'école semble encore être parcellaire ou sans véritable utilité ni intérêt pour les élèves. Les méthodes pédagogiques manquent de dynamisme et malgré les tentatives de réforme des années 60 et 70 – système de l'équipe éducative, apprentissage en groupe d'aptitudes hétérogènes, enseignement personnalisé, interdisciplinarité – le programme de l'école s'articule encore dans une large mesure autour de matières précises.

On a de bonnes raisons de penser que la révolution des technologies de l'information modifie considérablement les compétences requises par la productivité sociale et économique. Ces compétences, souvent appelées «aptitudes à une réflexion de haut niveau», à savoir le raisonnement, l'aptitude à résoudre des problèmes, l'esprit d'analyse et la capacité de communiquer et d'exercer un jugement critique, l'aptitude générale à l'apprentissage, étaient autrefois implicitement développées par l'enseignement mais n'ont pourtant pas été traitées prioritairement comme elles doivent l'être aujourd'hui. Dans notre monde technologique, il faut non seulement assimiler les faits et les informations, mais aussi être plus que jamais capable de les chercher soi-même, de les traiter, de les interpréter et de les évaluer.

Le développement des aptitudes de haut niveau est très difficile à estimer, quel que soit le mode d'évaluation que l'on emploie. Il semble néanmoins qu'une évaluation de type qualitatif, qui tente d'observer le comportement global de l'élève aux prises avec une tâche relativement complexe, offre la possibilité d'exploiter des indicateurs intéressants.

Les buts de l'enseignement de la mathématique

La mathématique, dès le début de la scolarité, n'échappe pas à cette préoccupation. A un enseignement dogmatique qui voulait que l'enfant acquière les mécanismes de certains algorithmes sans les comprendre (qu'il apprenne, il comprendra plus tard!), s'est progressivement substitué un enseignement qui utilise la compréhension des faits mathématiques comme levier principal du développement des compétences d'analyse, de déduction et de synthèse. Le plan d'études romand pour les écoles primaires émanant du Groupe Romand pour l'Aménagement des Programmes (GRAP) offre une illustration pertinente des buts que l'on assigne aujourd'hui à l'enseignement de la mathématique:

- *éveiller l'intérêt pour les activités mathématiques*
- *participer au développement de diverses capacités intellectuelles: raisonnement logique, capacité de situer, de classer, d'ordonner, capacité de se représenter une situation*

- *permettre l'exploration de notions, de propriétés, de relations et de structures dans le domaine des nombres, de la géométrie et de la mesure*
- *développer la curiosité, l'envie de comprendre et de penser par soi-même, la confiance en ses possibilités, c'est-à-dire les attitudes nécessaires pour aborder, comprendre et résoudre des situations problématiques les plus diverses*
- *favoriser la communication par l'utilisation raisonnée d'éléments du langage mathématique (graphique, schéma, symbole)*
- *développer et entretenir quelques techniques relevant du domaine mathématique*

Cette liste mériterait d'être relue chaque lundi matin par tous les enseignants de mathématique, quel que soit le type de classe dans lequel ils enseignent et l'âge de leurs élèves. Elle devrait également être méditée par tout évaluateur en train de préparer un instrument d'évaluation, car le risque est grand, en raison même des nécessités et des limites de l'évaluation, que l'on se cantonne dans une très large mesure à l'appréciation du dernier point seulement, celui qui touche à l'acquisition des techniques, ou que l'on dénature l'objet véritable d'autres aspects en n'inscrivant pas, par exemple, le travail sur les schémas ou les diagrammes dans une perspective de communication mais qu'on se borne à évaluer une technique de remplissage de diagrammes préétablis.

L'évaluation quantitative: une fausse sécurité

En mathématique, le modèle prédominant d'évaluation consiste à soumettre aux élèves un certain nombre de questions et de problèmes, d'attribuer à chacune de ces questions un certain nombre de points et de comptabiliser les réussites et les échecs sur la base des réponses fournies. Cette manière de faire est utile, elle permet d'obtenir dans un temps relativement bref un ensemble d'informations favorisant le pilotage de l'enseignement ultérieur et renseignant approximativement l'élève et le maître sur les domaines dans lesquels un effort supplémentaire doit être consenti. Il ne faut cependant pas lui demander plus que ce qu'elle peut donner. L'identité entre la réponse donnée par l'élève et celle que l'on attend de lui ne prouve pas toujours qu'il a compris ce qu'on lui demandait de comprendre. Le hasard parfois ou des processus de raisonnement non pertinents peuvent dans certains cas faire illusion.

Lorsqu'un élève fournit une bonne réponse dans un problème un peu complexe, nous pouvons dire qu'il a produit la réponse attendue,nous pouvons lui attribuer les points prévus pour la question, mais nous ne faisons le plus souvent que supposer qu'il maîtrise la notion sous-jacente. Il faudrait multiplier les questions et les approches, chose que le temps imparti ne permet en général pas, pour accroître le degré de certitude. De même, lorsque la réponse attendue n'est pas apportée par l'élève, nous constatons l'échec mais, bien souvent, nous ne savons pas en déterminer les causes, nous ne parvenons pas à retrouver le cheminement de pensée du sujet et nous risquons en permanence de mettre de nouvelles embûches sur son chemin vers la connaissance en intervenant en fonction de notre propre système de représentation sans pouvoir nous situer correctement par rapport à la démarche de l'élève. De ce fait, le sujet qui s'engage dans une approche différente de celle attendue par le maître est souvent doublement pénalisé: il n'a pas compris ce que l'on attendait de lui, il s'engage dans une voie divergente, mais l'enseignant qui constate son erreur et cherche à le remettre dans ce qu'il considère comme la bonne voie lui oppose des remarques et lui fait des suggestions qui, n'entrant pas dans son cadre de pensée, contribuent à l'égarer davantage. Pour utiliser valablement l'évaluation, il ne s'agit pas tant de comptabiliser des erreurs et de répéter des enseignements, mais bien davantage, comme le savent les rééducateurs, d'être à l'écoute de l'élève et de tenter de comprendre pourquoi et comment il en est arrivé à la réponse qu'il fournit.

Il ne s'agissait pas ici de peindre le diable sur la muraille et de dénier toute valeur aux travaux de contrôle dont l'école fait un large usage. Plus simplement, nous souhaitions attirer l'attention sur le fait que le comptage des points obtenus lors d'une épreuve n'a de loin pas la fiabilité du mètre pliant ou de la balance du marché. Or, il arrive parfois que le test de contrôle échappe à celui ou ceux qui l'ont construit pour devenir une mesure-étalon qui, croit-on, représente le summum de l'équité pédagogique. Demeurons donc lucide et méfions-nous de la trop grande sécurité que pourraient susciter en nous les épreuves de type quantitatif dans le jugement que nous portons sur nos élèves.

L'évaluation qualitative dans une situation ouverte

De la même manière que la production d'un texte écrit permet une estimation globale de la compétence de l'élève en français, l'observation de sa démarche dans le cadre d'une situation mathématique offre une possibilité de se faire une idée de ses compétences dans cette discipline, idée qui sera parfois différente de celle que permet la résolution d'une suite de problèmes dont on n'observe que le résultat.

Reprenons, à titre d'exemple, le problème des triangles présenté dans le numéro 134 (p. 24-26) de septembre 1988. Il s'agissait, à partir d'un triangle initial, de construire des figures en accolant d'autres triangles équilatéraux au côté du premier, puis des suivants, et à tenter d'anticiper le nombre des triangles nécessaires pour les couches successives.

Présenté de manière volontairement succinte, le problème peut donner lieu à plusieurs pistes d'investigation. La plupart des élèves commenceront par dessiner. Certains d'entre eux entreprendront un très grand dessin; d'autres, au contraire, s'efforceront de limiter le dessin au strict minimum pour tenter tout de suite une réflexion plus abstraite. Cette réflexion portera peut-être sur le nombre des triangles observés, mais elle pourra aussi mettre en action la notion de périmètre. D'autres élèves encore, se laissant entraîner par le matériel, auront envie de procéder à des pavages à partir de figures comprenant 10, 19 ou 31 triangles, ce qui suscitera d'autres réflexions intéressantes. L'observation des conduites dans un groupe permet de dresser une liste des éléments entrant en jeu. Essayons de les classer en quatre rubriques: les opérations intellectuelles, le fonctionnement de la pensée, les notions mathématiques, les apprentissages.

Opérations intellectuelles

sérier, ordonner;
mettre en relation;
composer, décomposer, recomposer;
procéder par compensation;
tâtonner, intérioriser;
se faire une image mentale;
quantifier, numériser;
formuler, représenter;
etc.

Fonctionnement de la pensée

lire une consigne;
appliquer une règle;
y revenir en cours de travail;
choisir une tâche;
se tenir dans la tâche choisie;
se détacher du matériel;
changer de piste (par exemple essayer avec des carrés);
trouver des analogies;
adopter une méthode de proche en proche;
induire (trouver une loi);
vérifier;
généraliser, formaliser;
etc.

Notions mathématiques

Elles s'appliquent, bien entendu, à la situation de recherche choisie comme exemple. la liste serait différente dans une autre situation.

Espace: alternance (dedans, dehors), topologie;
propriétés du triangle équilatéral, sommets, côtés;
pavage du plan;
périmètre;
homothétie.

Logique: relations;
fonction;
sériation;
emboîtement;
Numération: parité;
décomposition du nombre.
Opérations: Addition, soustraction, multiplication;
Opérateurs;
Mise en évidence.

Cette énumération n'est pas exhaustive. Elle variera aussi en fonction des pistes privilégiées par les élèves.

Les apprentissages

Relevons, parmi d'autres:
se poser une question;
préciser une question;
choisir une démarche;
mobiliser des connaissances antérieures;
oser tâtonner;
observer des données, des séries de données;
adopter un système de notation, symboliser;
ordonner des informations pour faire apparaître des régularités;
observer des différences, utiliser la dérivation;
émettre des hypothèses, les vérifier;
formuler et rédiger un compte-rendu, une synthèse;
etc.

L'énumération ci-dessus ne constitue pas une taxonomie. Elle n'a d'autre prétention que d'attirer l'attention sur la quantité des variables qui entrent en jeu et des compétences que l'enfant doit mobiliser pour réussir à dominer la tâche qui lui est proposée. Lorsqu'un élève est en échec face à un problème, la première réaction qui nous guette consiste à penser que le sujet ne maîtrise pas la notion mathématique sous-jacente à l'énoncé de ce problème. En fait, dès que la question s'éloigne de la simple restitution d'un algorithme, les causes d'échec peuvent être multiples et sont souvent très difficiles à déceler.

Observer une situation ouverte

L'observation des élèves en train d'explorer une situation ouverte offre à l'enseignant des clés qui lui permettent de mieux comprendre comment l'enfant fait fonctionner son raisonnement, où se situent les pierre d'achoppement, quels sont les éléments de formation qui lui manquent. Elle permet aussi de porter sur le travail de l'élève un jugement aussi pertinent que celui qui découle d'un test papier-crayon traditionnel. Elle constitue également une source d'information particulièrement éclairante pour déterminer les directions dans lesquelles des progrès doivent intervenir.

Cette observation n'est cependant pas toujours facile à effectuer, le premier obstacle résidant à la fois dans le nombre des éléments susceptibles d'être observés et dans le nombre des élèves de la classe. La chose est cependant possible si l'on admet que, d'une part l'enseignant peut sélectionner, parmi tous ceux qui ont été énumérés ci-dessus, les trois ou quatre éléments qu'il souhaite privilégier à un moment donné de l'année scolaire, d'autre part il n'est pas nécessaire de procéder à cette observation pour tous les élèves en même temps mais elle peut être répartie sur plusieurs semaines, le maître centrant son observation successivement sur des groupes d'élèves différents. Notons encore qu'un certain nombre de ces éléments d'observation ne sont pas spécifiques à la mathématique et qu'on peut les retrouver dans d'autres disciplines.

En conséquence, si nous avions un conseil à donner à l'enseignant qui se lance dans une telle observation, nous lui suggérerions de:

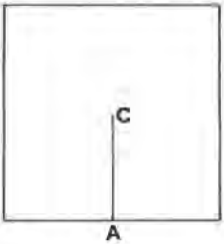
- choisir la situation ouverte et déterminer ce qu'il en attend;
- retenir deux ou trois rubriques relatives aux opérations intellectuelles et au fonctionnement de la pensée sur lesquelles il fera porter son attention;
- décider du domaine dans lequel il souhaite qu'il y ait un apprentissage durant le déroulement de l'activité;
- déterminer le sous-groupe de ses élèves auquel il accordera une attention particulière;
- chasser de son esprit toute idée préconçue pour observer le plus exactement possible ce qui se passe;
- lancer l'activité et être le plus disponible possible aux remarques et aux questions de ses élèves...

Nombre et création artistique

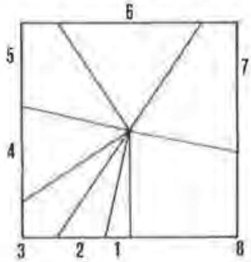
par Raymond Hutin

Voici une idée empruntée au peintre Norman Dilworth, né en 1931 et qui vit à Amsterdam.

Prenez un carré de 9 cm de côté.
Déterminez le centre C de ce carré.
Tracez une ligne allant du centre au milieu de la base.



A partir du point A, divisez le périmètre du carré en segments. Le premier segment mesure 1 cm, le deuxième 2 cm, le troisième 3 cm, ...



Découpez les morceaux obtenus. Disposez les de manière à obtenir une figure intéressante.

Voici, par exemple, celle qu'a retenue Dilworth en 1985.

Problème plus difficile à résoudre, faites de même à partir d'un disque.
Quel rayon choisissez-vous?
Comment procédez-vous pour que les différents segments du cercle respectent la progression de 1 à 8?

Si l'idée vous plaît, construisez des dessins plus complexes en utilisant plusieurs fois les formes obtenues.

Bonne feuille

Né en 1949, docteur ès Lettres et sciences humaines, Philippe Meirieu a enseigné dans tous les ordres d'enseignement avant de devenir formateur d'enseignants. Dans son ouvrage: Apprendre oui... mais comment, paru aux éditions ESF en 1987, il s'attache à l'acte d'apprentissage, cherche à en débusquer les représentations trompeuses, dénonce les illusions qui traînent à son sujet et tente d'établir des repères à partir desquels l'enseignant puisse construire et conduire son projet éducatif. Nous en extrayons le texte (p. 64-65) ci-dessous, dans lequel il analyse une situation-problème:

«Cette situation-problème n'est pas tout l'apprentissage et il faut se garder d'un certain spontanéisme qui supposerait que les connaissances vont en émerger, en quelque sorte naturellement. *La situation problème met simplement le sujet en route, l'engage dans une interaction active entre la réalité et ses projets, interaction déstabilisant et restabilisant, grâce aux décalages introduits par le formateur, ses représentations successives; et c'est dans cette interaction que se construit, souvent irrationnellement, la rationalité.* Nous savons d'ailleurs tout cela, car nous l'éprouvons nous-même quoditiennement dans nos moindres activités, et pourtant, nous autres enseignants, ne cessons de croire, dans notre pratique professionnelle, aux vertus du recommencement par «les bases», de la progression rigoureuse et linéaire, de la répétition inlassable, en cas d'échec, des mêmes opérations.

Nous touchons là, certainement, au noyau le plus dur des représentations dominantes de l'apprentissage et, en particulier, à cette représentation si tenace et partagée, selon laquelle il suffit de faire plus pour faire mieux. Certes, il arrive qu'il en soit ainsi et qu'un élève ait effectivement besoin d'«un peu plus de travail», il arrive qu'une difficulté scolaire soit due à un manque de temps, d'entraînement, d'imprégnation... C'est même cela qui caractérise précisément la notion de difficulté: c'est «difficile» quand j'ai besoin d'aller plus lentement ou de refaire plusieurs fois, quand il me manque des explications. Mais, quand je peux dire «c'est difficile», c'est que, d'une certaine manière, je sais déjà le faire ou que j'entrevois la solution. En revanche, il est des cas où les choses sont d'un autre ordre, où je ne suis pas seulement «en difficulté», mais où je suis «en échec»: augmenter, multiplier, ce qui m'a amené à cet échec, ce n'est pas m'aider à le surmonter, c'est malheureusement lui ajouter parfois un caractère dramatique. Or telle est bien la dérive «naturelle» de l'institution scolaire: quand cela ne marche pas, on reprend les explications, plus longuement, de manière insistante, souvent en plus petits groupes, en augmentant le «travail personnel», bref on grossit démesurément un dispositif qui a pourtant fait la preuve de son inefficacité. On fait «plus de la même chose», alors que c'est autre chose qu'il faudrait faire; on se fixe sur le combien pour éviter de s'interroger sur le comment.»

R.H.

J. A. 1211 GENÈVE 11

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion