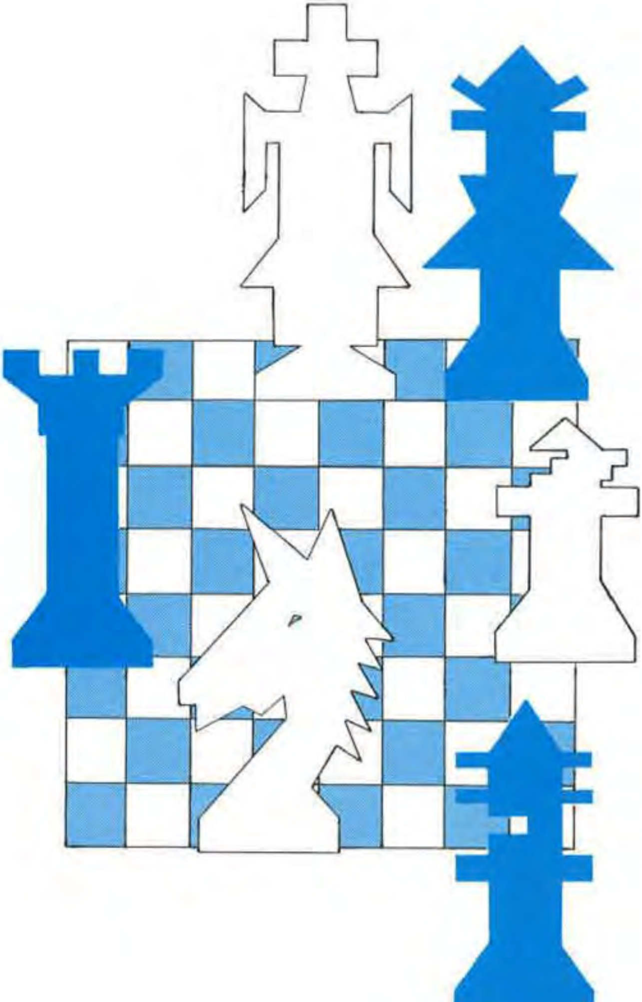
138



MATH ECOLE

MAI 1989
28e ANNÉE

MATH-ECOLE 138

28e ANNÉE Paraît cinq fois par an MAI 1989

Editorial

Dans un domaine qui nous est cher
Celui de la formation
Sans cesse nous mettons aux enchères
Les généralisations.

Il est souvent hasardeux
Je dirais même périlleux
De trouver des suites, des lois de formation
Qui engendrent parfois la contestation.

Au gré de mes lectures
En mathématique
Ou en logique
Je laisserai aux sceptiques
Le soin de la critique
En nous livrant pour sûre
Une analyse infaillible
Une généralisation perfectible!...

Le corbeau intelligent

Au Moyen Age, plus qu'aujourd'hui, l'homme vivait en contact étroit avec les animaux. Il chassait avec des instruments et selon des critères qui ne mettaient pas en péril la survie des espèces. Même les châteaux, véritables forteresses élevées par les feudataires, abritaient des espèces variées d'animaux. Les étages inférieurs étaient souvent infestés de rats, tandis que sur les tours les plus hautes venaient nidifier les corbeaux et autres volatiles.

Un jour, un châtelain résolut de se débarrasser d'un corbeau, particulièrement bruyant, qui s'en était allé bâtir son nid sur la tour de guet du château. S'armant d'une sainte patience, notre châtelain avait essayé à plusieurs reprises de le surprendre, en pénétrant à pas de loup dans la tour. Mais, dès que le corbeau entendait sa voix avec son ouïe très fine ou l'apercevait, il s'envolait et allait se percher sur un arbre à proximité, d'où il pouvait tranquillement contrôler la situation. Il attendait et, aussitôt qu'il voyait le châtelain s'éloigner, il regagnait sa place. Le châtelain avait compris qu'il n'arriverait pas à se défaire ainsi de l'insupportable oiseau. Mais c'était devenu pour lui un véritable défi. Il imagina alors un stratagème destiné à éprouver les aptitudes à compter du corbeau. Il fit ainsi entrer deux de ses amis dans la tour. Mais leur présence n'échappa pas au corbeau attentif et sur ses gardes, qui vola en toute sécurité vers son arbre. L'un des deux hommes sortit alors, sans se cacher, de la tour. Mais le corbeau ne se laissa pas berner et attendit que le deuxième homme fût sorti également pour regagner son nid. Le châtelain essaya à nouveau, cette fois avec trois hommes: deux d'entre eux, une fois entrés dans la tour, en ressortirent. Mais le rusé corbeau, cette fois non plus, ne se laissa pas abuser. Curieux de voir jusqu'où l'oiseau savait compter, le châtelain fit une nouvelle tentative, avec quatre hommes, cette fois encore sans succès. C'est seulement lorsque cinq individus pénétrèrent dans la tour, dont quatre ressortirent ensuite, que le stratagème réussit: le malheureux corbeau fut capturé.

L'expédient du châtelain avait démontré un fait intéressant: les corbeaux sont des oiseaux particulièrement intelligents, mais qui savent compter seulement jusqu'à quatre.

Jeux-Tests de l'Intelligence, SOLAR, F. Agostini/N.A. de Carlo

Rogez Délez, EPEP Genève

On reparle de la calculatrice de poche

par Paul Schori, Ecole primaire, Colombier
et Luc-Olivier Pochon, IRDP, Neuchâtel

Le premier article de Math-Ecole consacré à la calculatrice date de 1976 (sauf erreur!). Messieurs S. Guinchard et A. Blaser y présentent la calculatrice comme un instrument qui accélère la phase de calcul dans des problèmes préalablement «mis en équation». En 1978, Math-Ecole rend compte du Forum suisse de mathématique consacré à la calculatrice. Cette occasion sert à mettre en évidence que la calculatrice peut aussi être utilisée comme un moyen d'enseignement. Elle permet de faire ressortir clairement (par la rapidité, la clarté de l'affichage, etc.) des propriétés des nombres et des opérations. N. Guillet, en 1980, propose une utilisation de la calculatrice en situation-problème. La fonction de la calculatrice est ici de favoriser la réflexion, la «mathématisation».

Aujourd'hui, à l'heure de la micro-informatique, l'étude de l'utilisation de la calculatrice de poche (CP) à l'école, semble être passée de mode. Mais l'évolution des outils de calcul, la miniaturisation toujours plus poussée des ordinateurs, donnent à cet auxiliaire de calcul une nouvelle actualité. En effet, les performances des calculatrices de poche actuelles rejoignent, dans certains domaines, celles des micro-ordinateurs. Dans l'éventail des outils informatiques, la CP gardera vraisemblablement une place non négligeable. Par ailleurs, les enfants ont de plus en plus l'occasion de l'utiliser. On est alors conduit à s'interroger sur l'impact des nouvelles pratiques de calcul qu'elle permet ou induit. Le contact plus fréquent avec cet instrument de calcul a certainement une influence sur la manière dont les enfants se représentent les phénomènes arithmétiques et, par là même, pourrait avoir une répercussion sur les modèles et les méthodes d'apprentissage. Ce type d'impact est examiné par Pea (1985) à propos de l'ordinateur, mais ce type d'interrogation s'applique certainement à la CP.

L'IRDP a souhaité clarifier cette problématique. En collaboration avec le Service de l'enseignement primaire du canton de Neuchâtel, et l'ONDP, une observation a pu être menée, dont quelques résultats sont présentés ici (le rapport complet est à disposition à l'IRDP). La recherche se poursuit toujours dans la classe du premier signataire de cet article, cela durant deux ans encore.

Le cadre

Le printemps, une grande salle de classe, des haricots sur le point d'éclore dans la ouate. Des élèves de cinquième année, chaleureux, habitués à travailler en groupe, attentifs aux réactions des camarades. Douze séances de deux périodes, avec chaque fois une demi-classe de douze élèves; une calculatrice par élève. Des calculatrices «sophistiquées», mises à disposition par Texas Instrument (voir la fiche ci-contre), des fiches de travail ad hoc et quelques fiches et situations des moyens d'enseignement de cinquième année.

Voici, rapidement brossé, le cadre de cet essai dont nous allons faire un compte rendu très fragmentaire, en passant en revue quelques situations ou réactions d'élèves, qui nous ont paru les plus typiques, mais aussi les plus faciles à interpréter et à expliquer.

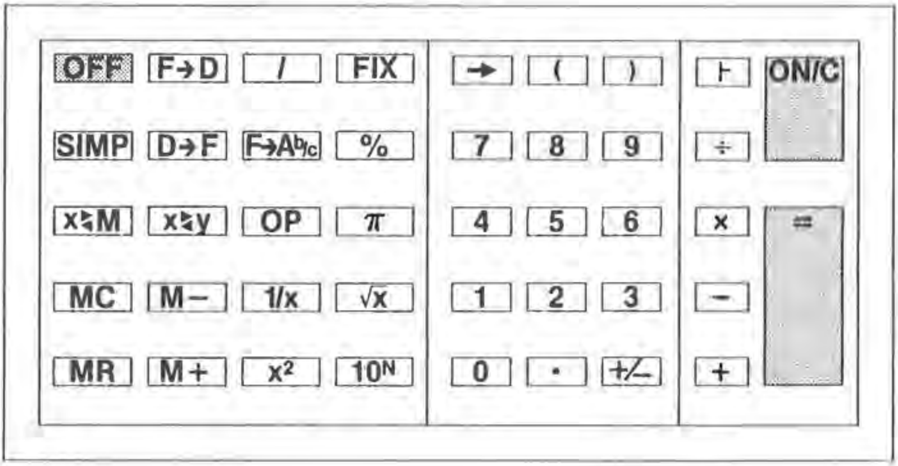
Un attrait certain

La prise de connaissance s'effectue en trois temps. Tout d'abord, en suivant la proposition de N. Guillet (1980), un temps de découverte libre est laissé aux élèves; puis, une mise en commun des essais de chacun est animée par l'enseignant. Finalement, les élèves reproduisent des exemples qui se trouvent dans le mode d'emploi abrégé. Les élèves mènent une activité intense, qui peut être entrecoupée, momentanément, de «délassements» divers, à l'exemple d'un groupe qui constate que certains nombres écrits sur l'écran de la calculatrice forment des mots si on les lit à l'envers (exemple: 713705).

La machine est adoptée avec un enthousiasme manifeste par les élèves. Mais il est difficile de préciser ce qui fait son attrait:

M: «Pourquoi trouves-tu que c'est super?»
E: «On peut faire des calculs qu'on ne peut pas faire.»
M: «Tu peux donner un exemple?»
E: «Euh... 5 – 3 = 2.» !!!

Clavier de la TI-10 Galaxy



Quelques caractéristiques

[⊢]   [Q 11 R 3]

division entière, affichant quotient et reste.

[OP]   [OP+ 5   20]

opérateur + − × ÷ ⊢, avec compteur

[/] affichage de fractions

[SIMP] touche d'interrogation avec réponse par indicateur N D → n/d

[SIMP N/D→n/d   18/24]

Choix entre simplification autonome ou automatique.

[F → D]
[D → F] conversion fractions-décimaux

[F → A b/c] extraction de la partie entière

[10ᴺ] puissance de 10

[x⇕y] échange des registres

[FIX | n] limiteur d'affichage avec arrondi

Cinq touches MÉMOIRE

[MC] [M+] [M−] [MR] [x⇕M]

sans oublier [( ] [ )] [%]

ni [1/x] [x^2] [$\sqrt{x}$]

INDICATEURS à l'affichage renseignant sur le calcul en cours

MESSAGES D'ERREURS

Quelques exemples

Division euclidienne

La touche [⊢] permet le calcul du quotient et du reste dans la division de 2 entiers.

157 [⊢] 14 [=]   [Q 11 R 3]

Opérateur constant

La touche [OP] permet de programmer la répétition d'une opération (+, −, ×, ÷, ⊢)

Mémorisation de l'opérateur

[+] 5 [OP]   [OP +   5]

Application successive de l'opérateur à 0

0 [OP]	[OP + 5]
[OP]	[OP + 2 10]
[OP]	[OP + 3 15]

Traitement des fractions

Addition	2 [/] 6 [+] 19 [/] 15 [=]	[N/D→n/d 48/30]
Simplification automatique	[SIMP] [=]	[N/D→n/d 24/15]
Simplification par 3	[SIMP] 3 [=]	[8/5]
Transformation décimale	[F→D]	[1.6]
Fraction décimale équivalente	[D→F]	[N/D→n/d 16/10]
Partie entière/fractionnaire	[F→A b/c]	[N/D→n/d 1⌞6/10]
Simplification de la partie fractionnaire	[SIMP] [=]	[1⌞3/5]

Tout est exploré:

«... quand on fait des choses fausses, elle écrit error; mais je savais pas ce que cela voulait dire, je me suis dit que c'est comme á l'ordinateur, on dirait que c'est comme un ordinateur, il y a des flèches, ... il y a des erreurs O et des F, il y a une touche qui sert à enlever un chiffre ... un seul chiffre.»

Mais le but des élèves n'est pas tellement de réaliser des calculs, que de reproduire des séquences «intéressantes», qui mènent, par exemple, à ERROR O ou ERROR F, ou à un clignotement de l'affichage.

Les fausses parentés

Une opération, ou un symbole mathématique, est toujours liée à des situations particulières. Un seuil est à franchir pour chaque nouvelle situation qui se présente. C'est aussi valable pour la calculatrice, et ce petit paragraphe est là pour le rappeler. le cas concret qui s'est présenté, concerne les parenthèses. En effet, nous pensions qu'un calcul du genre $(53 \times 8) + (7 \times 59)$ serait réalisé aisément, alors que pour les enfants, les parenthèses servent à codifier une opération de calcul mental du type $(9 \times 2) + (9 \times 8) = 9 \times 10$.

Que fait la machine?

Cette question a souvent été posée aux élèves. Elle donne l'occasion au maître et aux élèves de discuter sur le fonctionnement d'une opération. Voici un début de dialogue concernant le travail sur des réductions de prix:

E: «J'ai mis $\boxed{160}$ $\boxed{-}$ $\boxed{30}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$.»

M: «Que fait le $\boxed{=}$?»

E: «Cela donne la réponse de tout le calcul.»

E: «La machine va chercher dans la mémoire.»

M: «C'est assez juste; elle va chercher quelque chose, mais quoi?»

E: «Elle va chercher le moins (–).»
(Des élèves sont surpris: il n'y a pas besoin d'aller chercher le moins (–); c'est l'opération qu'on effectue!)

M: «La machine fait une ou plusieurs opérations?»

E: «Plusieurs ...»

M: «Lesquelles?»

E: «Le $\boxed{\times}$ puis le $\boxed{\%}$.»

M: «Elle calcule le $\boxed{\%}$ avec quelles opérations?»

E: ???

Voici une belle entrée en matière pour une leçon qui sera consacrée à chercher des pourcents de différents nombres, pour asseoir la compréhension des opérations en jeu dans le calcul des pourcents.

Les touches magiques

Certaines manipulations «abstraites» ont été proposées aux élèves, qui mènent à certains résultats par ailleurs connus. Par exemple, la recherche du pgdc à l'aide de la séquence suivante:

Tape	Tu verras s'afficher	
27 / 63	27 / 63	
SIMP	SIMP N/D→n/d 27 / 63	
=	9 / 27	
x⇆y	3	
x⇆y	9 / 21	
SIMP	SIMP N/D→n/d 9 / 21	3 · 3 = 9
=	3 / 7	
x⇆y	3	
x⇆y	3 / 7	
SIMP	N/D → n/d n'apparaît plus, c'est fini.	

Cela introduit des fonctions qui sont propres à la machine, telles que x⇆y. Mais, x⇆y (manipulation informatique) et / (correspondant à la barre de fraction, notion en principe inconnue des enfants) ont le même statut pour les élèves, pour le moins dans un premier temps. Il pourrait être intéressant d'observer sur un plus long terme comment les opérations de la calculatrice sont perçues par les élèves.

Cette question, qui n'a peut-être pas de retombée pédagogique directe, constitue toutefois un début de réflexion sur la façon dont les techniques sont comprises par chacun et, par là, influencent l'image des phénomènes arithmétiques.

Mathématique, fiches et calculatrice

La machine est restée étrangère au programme de mathématique. Dans leurs réactions et commentaires, les élèves distinguent trois types d'objets ou champs d'activités.

Il y a tout d'abord le cours de mathématique correspondant au programme de l'année. Dans ce champ-là, les élèves estiment qu'ils apprennent mieux avec les fiches, sans recours à la machine: «si on faisait tout à la machine, on n'apprendrait plus à faire les calculs!».

Les fiches distribuées au cours des six séances, pour travailler spécifiquement avec la calculatrice, constituent le deuxième champ de référence. En général, elles ont été jugées difficiles: «... non, mais je dis que dans les exercices que vous nous avez donnés, on pourrait pas les faire maintenant, sans cette calculatrice; mais tandis que si c'est dans notre programme, on a appris pour les faire».

Finalement, la machine est le troisième objet, considéré à part, qui présente un attrait, un intérêt intrinsèque, et dont on ne voudrait se séparer pour rien au monde.

La mise en relation de ces trois objets (les fiches du programme, les fiches pour la calculatrice, et la calculatrice elle-même) n'a manifestement rien d'évident pour beaucoup d'élèves. Pour eux, ces objets semblent relever de champs disjoints.

Illusion et évidence: retour à la problématique

Il est vain de vouloir évaluer l'aide réelle apportée par la calculatrice; ce n'est pas une panacée pédagogique. C'est par contre un truisme que de dire que la calculatrice aide à résoudre des problèmes en utilisant une calculatrice. Truisme peut-être pas assez pris en compte!

Ainsi, un objectif déclaré du calcul par approximation, est de vérifier rapidement l'exactitude d'un calcul effectué par une machine. On sait que les approximations posent problème ... et si on introduisait des calculatrices?

En conclusion, l'intérêt de la CP serait d'introduire une certaine culture à propos de l'usage de méthodes automatiques pour la résolution de problèmes.

Mais, cette expérience nous a montré l'intérêt et la richesse des situations didactiques susceptibles de prendre forme à propos, autour, à côté d'une CP. Mais il est vrai aussi que l'exploitation en classe des occasions d'échanges et de réflexion, requiert une animation «à la hauteur».

Bibliographie sommaire

Guillet, N. Calculatrices de poche. *Math-Ecole* no 93 (1980), p.14-28.

Guinchard, S., Blaser, A. Les calculateurs électroniques à l'école? *Math-Ecole*, no 74 (1976), p. 26-35.

Hutin, R. Calculatrices de poche - Le Forum mathématique de Coire. *Math-Ecole*, no 81 (1978), p. 2-4.

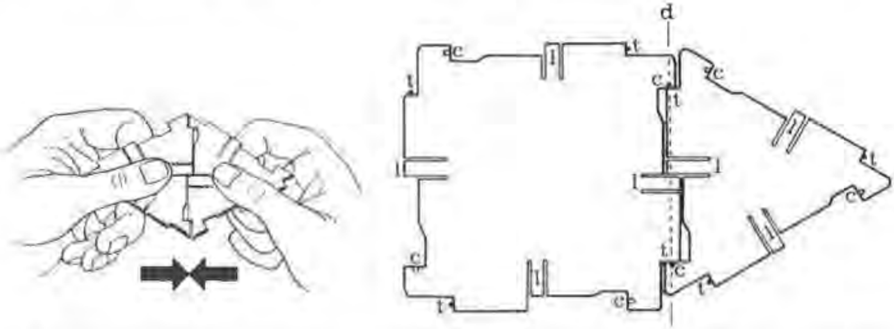
Pea, R.D. Integrating Human and Computer Intelligence. In: *Children and Computers*. E.L. Klein (Ed.). Jossey-Bass Inc, Publishers, 1985.

Expérience avec les polydrons

par François Jaquet

Toute explication est superflue lorsque vous vous trouvez devant une boîte de matériel «Polydron». En quelques secondes, vous avez compris que ses pièces se combinent entre elles en assemblages articulés. Il y a des carrés, des triangles équilatéraux – et même des pentagones dans certaines boîtes – aux côtés isométriques de 7 cm. Les pièces sont en plastique, il y en a des jaunes, des rouges, des vertes et des bleues; elles sont de même épaisseur, 2 mm environ.

Le profil, tourmenté, de chacun de leurs côtés peut surprendre, mais c'est là que réside l'ingéniosité de ce matériel «Made in England»: emboîtement précis et languettes de serrage:



La petite aspérité ou «tête» (t) d'une pièce s'enfonce dans la cavité (c) correspondante de l'autre pièce. Les languettes (l) assurent le serrage par leur élasticité. Les deux pièces sont articulées autour de l'axe (d).

Et le plaisir, la créativité, l'habileté dans les assemblages n'ont rien à voir avec l'âge du constructeur. Un enfant de six ans peut construire un icosaèdre (polyèdre régulier de 20 faces triangulaires) aussi rapidement que vous.

Jusqu'ici, l'usage de «Polydron» ne se distingue d'un autre matériel structuré que par ses caractéristiques physiques et techniques. Les montages sont aisés et rapides, les articulations fonctionnent bien, les solides construits sont stables et rigides. «Polydron» est un beau jeu de construction.

Mais que peut-on en faire en classe? Ce matériel peut-il constituer un support valable d'activité mathématique? Trouve-t-il une unité au sein de nos programmes? Permet-il une évaluation du travail de l'élève?

Pour répondre à ces questions, essayez, librement ou en vous inspirant d'expériences déjà faites comme celles qui sont décrites dans les pages suivantes ou encore en suivant les suggestions qui les accompagnent.

A. Construction libre

Lorsque vous découvrez un nouveau jeu de construction, vous avez envie de l'essayer vous-mêmes, de jugez ses potentialités, de rechercher ses limites. C'est bien naturel et légitime. Ça l'est aussi pour vos élèves, même au-delà des 30 secondes à 5 minutes «permises» sans craindre de «perdre du temps».

Dans ma classe, de degré 6, je m'étais proposé de laisser les élèves faire connaissance avec le matériel pendant 10 à 15 minutes, librement, sans consignes. Il en a fallu plus.

Le matériel n'est pas distribué que l'activité spontanée démarre sur les chapeaux de roues: les caractéristiques des pièces passent de l'œil à la main puis s'élaborent sous forme de connaissance. Le hasard dans l'assemblage des pièces cède rapidement le pas à des stratégies de plus en plus élaborées, à des plans de construction. Les premières questions se posent. *«Est-ce que j'arriverais à faire cela?»*, les échanges, comparaisons, collaborations stimulent la création: *«Tu vois j'ai fait une soucoupe volante!»* Des groupes se forment, on met ensemble ses pièces pour réaliser des objets plus ambitieux: une tour, un serpent qui se mord la queue, un pavage avec des carrés et des triangles, etc.

B. Objets à décrire

Après 30 minutes j'interromps les constructions libres par la consigne suivante qui va me permettre de récupérer les pièces et d'enchaîner sur la prochaine leçon:

«Avant la fin de la leçon, vous allez noter sur une feuille tout ce qui est nécessaire pour pouvoir reconstruire votre objet la prochaine fois, car il va falloir le démonter».

Les questions fusent aussitôt. «Est-ce qu'on peut faire des schémas?» «Quel est le nom de cette forme?» «J'ai construit plusieurs objets, est-ce que je dois tous les noter?» etc.

On convient de s'en tenir aux objets «assez simples», vu le temps limité.

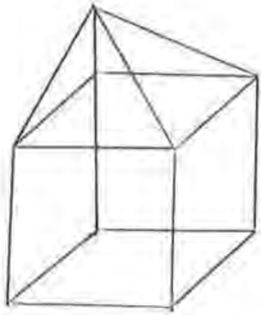
Ces premières descriptions sont encore bien maladroites mais elles se révéleront en général suffisantes pour la reconstruction, trois jours plus tard. On y trouve des textes, des développements, des schémas en perspective.

il a 9 faces dont 5 triangls et 4 carrés, il a la forme d'une maison

Baptiste

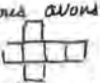
il a 16 triangles et il est convexe et concave Laurent

boîte cubique + 4 triangles
pour faire le toit.



elle a 9 faces et
16 arêtes

Sébastien

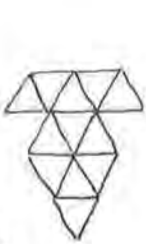
Ce que nous avons fait Magali et Catherine
un cube 
une pyramide avec un socle carré  (à plat)
une pyramide avec un socle triangle  (à plat)
une forme inconnue (avec des triangles)  (à plat)

La notion de «face» d'un polyèdre n'est pas évidente. Avec ce matériel, il ne faut pas la confondre avec celle de «pièce». Dans l'exemple suivant, la distinction entre les triangles (pièces) et les faces est faite, mais la forme et la composition des faces n'est pas précisée.

Pourriez-vous le faire et imaginer la forme de ce solide? (Question 1)*.

Il est composé de 12 triangles et de
6 faces; nous avons construit un hexagone
avec sur un côté un autre triangle et en
parallèle de l'hexagone une rangée de
5 triangles.

développement



* Solution en fin d'article.

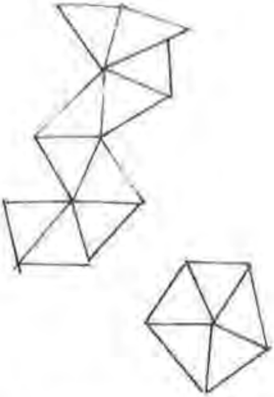
C. Le jeu du portrait

Dans les premières descriptions, la rigueur fait souvent défaut et la terminologie est personnelle. Les mots, sommet, arête, angle, parallèle, face, extrémité, fond, côté, développement, droite, etc. n'ont pas toujours le même sens d'un élève à l'autre ou d'un moment à l'autre chez le même élève.

La toupie   Anne-Lore

Elle a 10 pièces. Et 2 angles de 5 arêtes ; 5 angles de 4 arêtes et en tout 15 arêtes

Quand on le déplie ça donne ça:



une fois prêt, ça doit donner 2 fois ceci mis l'un sur l'autre.

Dans les reconstructions de la deuxième leçon, c'est la mémoire qui pallie les défauts ou insuffisances des descriptions.

Il faudra s'entendre pour fixer le vocabulaire au sein de la classe. Une activité d'échanges et de communication s'impose:

Chaque groupe de deux élèves invente un objet puis en établit une fiche descriptive permettant à un autre groupe de le reconstruire. On échange ces «portraits». Les «constructeurs» ne voient évidemment pas l'objet que les «inventeurs» conservent précieusement pour vérification à l'abri des regards indiscrets.

La confrontation donne lieu à quelques explications fort animées en fin de leçon. Le «portrait» suivant, par exemple, se révèle insuffisant. S'agit-il de la «toupie» (décrite précédemment)? A propos, combien existe-t-il de polyèdres de dix faces triangulaires équilatérales? (Question 2)*

Description de l'objet

l'objet se construit seulement avec des triangles
l'objet se construit avec 10 triangles
l'objet a une arrête droite qui se forme de 6 triangles

* Solution en fin d'article.

Le maître de mathématiques doit ici apprendre à faire quelques concessions et reconnaître l'efficacité de descriptions non conformes à ses règles de rigueur et de concision:

Inventeurs: Sylvain et Béatriz
Description de l'objet: il ressemble à une émeraude ou une soucoupe volante. Il faut 10 pieces triangles, les assembler et faire 2 ronds
Constructeurs: Nathalie et O:
(réussi au premier coup)

L'objet suivant est un prisme à base hexagonale, dont la construction s'est faite en moins de deux minutes sans aucune difficulté de montage, contrairement à la mise en garde:

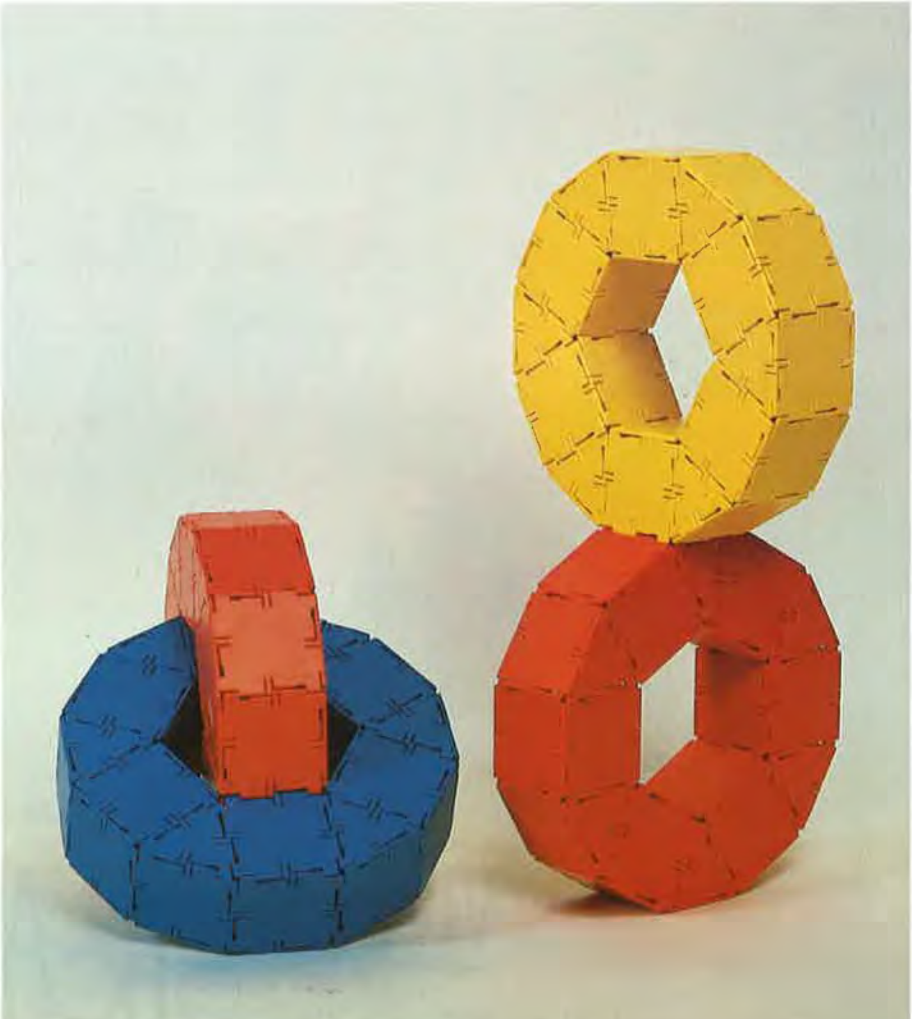
l'objet

Il est formé de 18 pièces dont 12 triangles et 6 carrés. Nous avons fait 2 hexagones avec les triangles (attention ce n'est pas des volumes!) Ensuite, nous avons fixé les carrés sur chaque côté des hexagones. Nous avons monté le tout pour en faire un volume (attention c'est difficile à monter!)

Inventeurs et constructeurs perçoivent rapidement l'efficacité du développement du solide dans les portraits qu'ils doivent établir ou déchiffrer. On voit aussi apparaître des projections différentes d'un même objet.

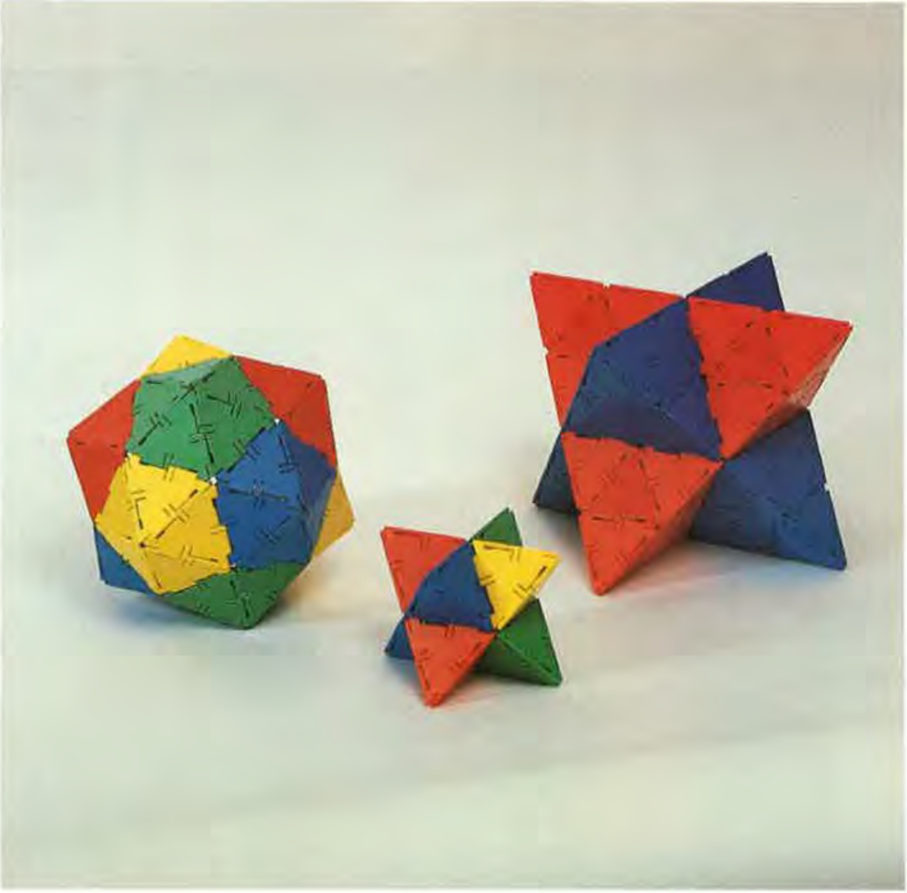
POLYDRON

La perfection mathématique est une source d'étonnement toujours renouvelé.



Le dodécaèdre étoilé correspond à 12 pyramides à base pentagonale assemblées. 60 faces (12 x 5 f3).

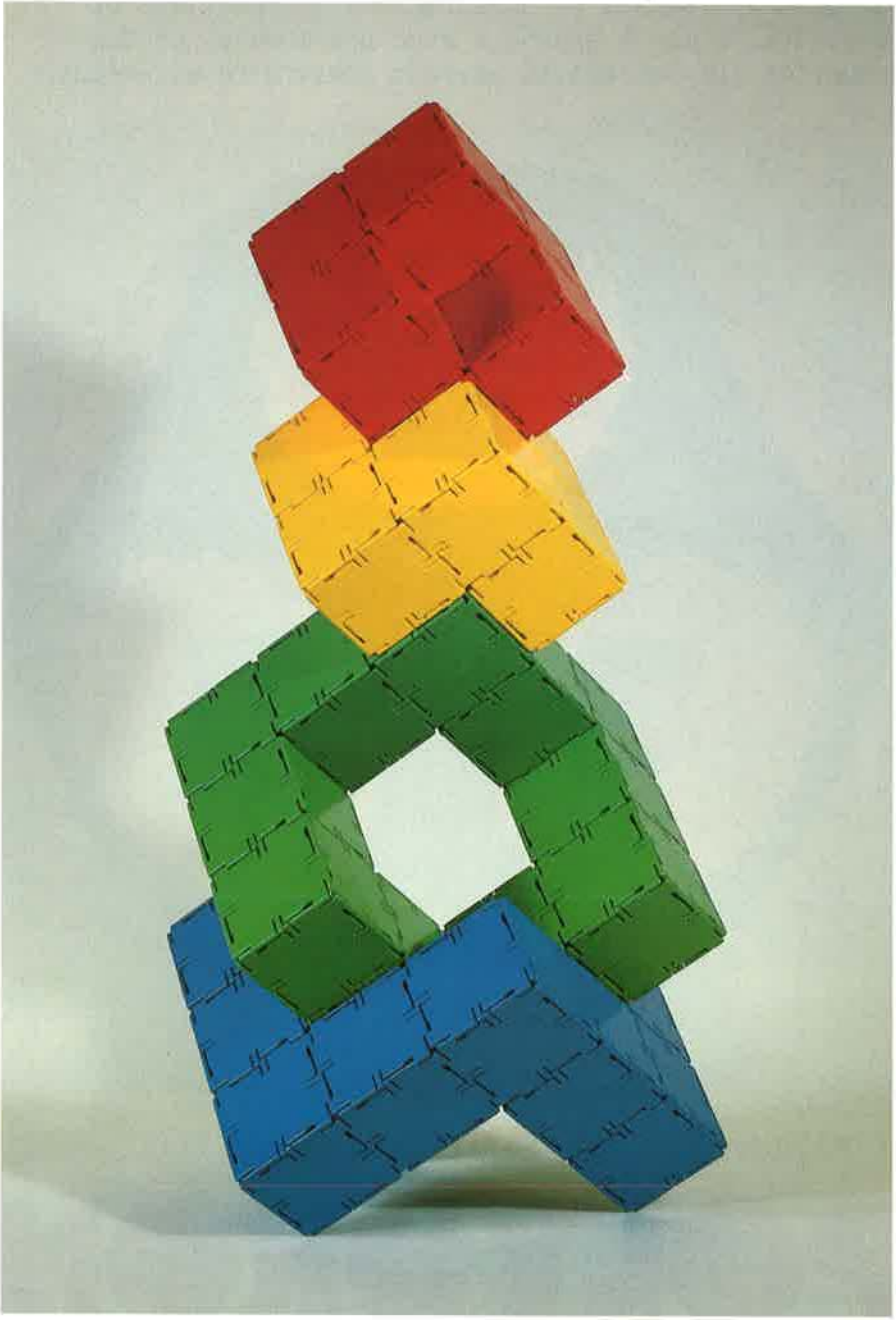
L'octaèdre étoilé correspond à 8 tétraèdres assemblés ou à 2 tétraèdres imbriqués. 24 faces (8 x 3 f3).
A droite: aire multipliée par 4.



POLYDRON est un jeu de construction mathématique et modulaire. L'école enseigne avec des modèles et des maquettes que les élèves peuvent construire eux-mêmes.

LE RAYONNEMENT UNIVERSEL DE LA GÉOMÉTRIE

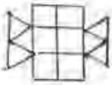
POLYDRON



Inventeur: Magali, Catherine

Description de l'objet

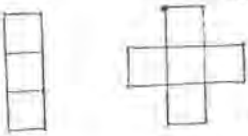
forme inconnue. Il comporte 6 carrés et 6 triangles.
Quand on l'ouvre ça fait ce dessin:



Constructeurs: Nathalie et Anne-Lore
Réussi du 1er coup.

Description de l'objet: C'est une croix; elle est formée de 4 cubes avec une face ouverte et 2 carrés pour soutenir le tout.

Schéma:



P.S= il vous faudra emprunter à un autre groupe 2 carrés.
Constructeurs: Laurent et Baptiste, construction réussie du premier coup.

D. Recherche systématique

Après deux leçons passées en construction libre et en description d'objets, le moment est venu de proposer une démarche systématique et des activités de structuration. Il y a une terminologie à définir et acquérir, une utilisation des développements à généraliser, la précision des dessins à améliorer, le dénombrement des arêtes, faces et sommets à maîtriser.

Une synthèse collective permet de définir l'activité et la façon de présenter les résultats:

Rechercher tous les polyèdres
- *de dix faces au maximum*
- *dont chaque face est formée d'une seule pièce, triangle ou carré.*

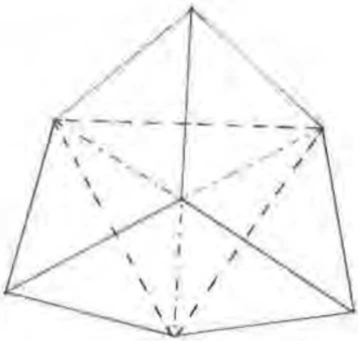
Trouver un nom pour chacun d'eux, le décrire par ses faces, sommets et arêtes, en dessiner un développement et essayer de le représenter par un croquis.

La recherche commence par groupes de deux ou trois élèves puis chacun présente, individuellement, quelques-uns des polyèdres découverts.

La qualité des productions écrites s'améliore rapidement:

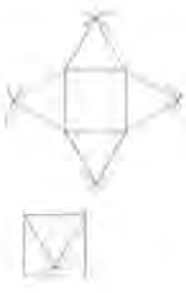
Triple tétraèdre

15 arêtes (3 rentrantes)
7 sommets (1 de 6 triangles)
(3 de 5 triangles)
(3 de 3 triangles)
10 faces (toutes des triangles)

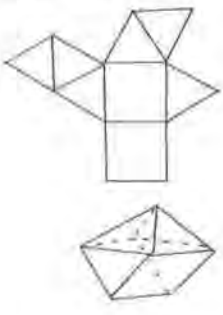


La construction de ces développements revêt ici une signification bien précise pour l'élève. L'utilisation du compas de la règle et de l'équerre vient naturellement. Ce type d'activité vaut bien une dizaine de problèmes de construction tirés d'un manuel, impersonnels, où l'élève ne fait qu'exécuter des consignes du genre: «Construis à la règle et au compas un carré et un triangle équilatéral adjacents...»

Pyramide à base carrée



«Prisme-pyramide»



Deux élèves ont réduit leur recherche à celle de tous les polyèdres de 10 faces au maximum qui sont toutes des triangles équilatéraux.

Elles ont trouvé le tétraèdre (4), le «double tétraèdre (6) l'octaèdre et le «petit bateau» (8) la «toupie» et le «triple tétraèdre» (10).

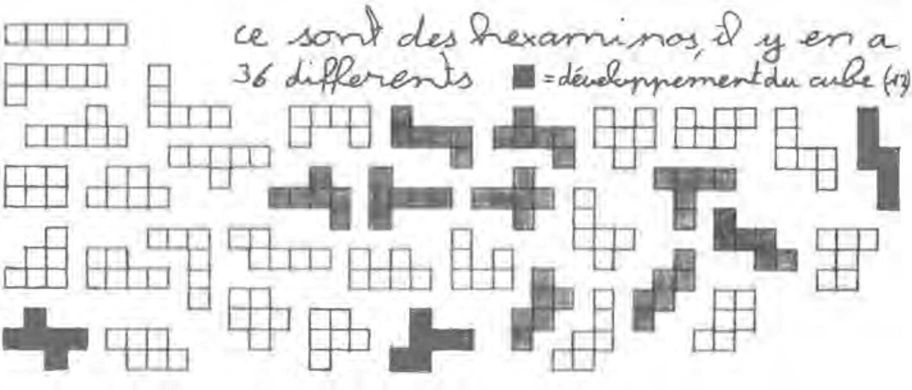
Elles ont aussi pu m'expliquer pourquoi il n'existe pas de polyèdre de ce type avec un nombre impair de faces. Leur démonstration est simple. En connaissez-vous une? (Question 3)*

E. Polyominos

Un mois plus tard, à propos d'une activité avec les pentominos on en vient à rechercher des hexominos. Le record de la classe se situe aux environs de 25. La leçon suivante j'apporte les carrés du matériel «Polydron», 6 par élève. Certains ont vite compris qu'une méthode infaillible consiste à placer un sixième carré sur le pourtour d'un pentomino et à relever chaque nouvelle configuration des 6 carrés. L'activité ne peut être plus opportune: nous sommes en plein dans le thème «Isométries».

Le record est pulvérisé, on passe à 31, 32, 33, en moins de 30 minutes. L'activité se termine sous forme de devoirs; le lendemain 13 élèves sur 20 ont trouvé plus de 30 hexominos. Il y en a même deux qui en ont découvert 36, ce qui me pose un sérieux problème de correction car, dans «Math-Ecole» nº 87 on assure qu'il en existe 35 exactement!

Trouvez l'intrus!



* Réponse en fin d'article

Parmi les hexominos, la recherche des 11 développements du cube n'offre aucune difficulté, avec le matériel. Cette solution est correcte et complète:

Recherche

Tlia

Il n'existe qu'un domino

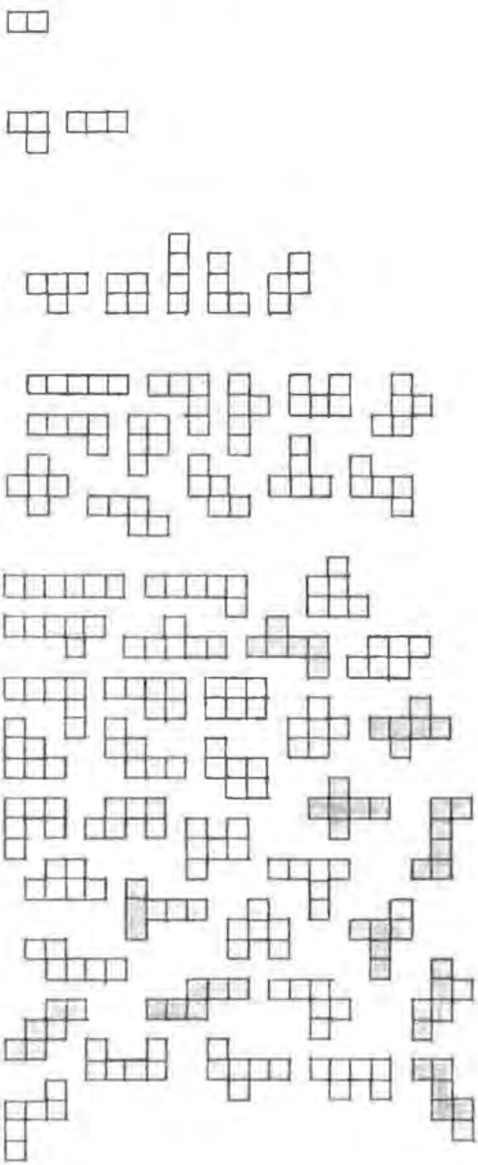
Il n'y a que deux triminos différents (non isométriques)

Il y a cinq tétraminos différents

Il existe douze pentaminos différents

Il y a 35 hexaminos différents

Il existe 11 développements de cube



En guise de conclusion

Les activités décrites ont occupé ma classe de degré 6 (année d'orientation dans le canton de Neuchâtel, avant que les élèves ne soient dirigés vers les différentes sections de l'école secondaire) durant cinq périodes de 45 mn. C'est l'équivalent d'une semaine de mathématique. C'est suffisant pour esquisser quelques éléments de réponse aux questions posées en début d'article.

Oui, on peut faire beaucoup de choses en classe à partir du matériel Polydron. Les activités décrites ne sont qu'un maigre échantillon de tout ce que nous aurions eu envie de faire, mes élèves et moi, dans les domaines de la mesure, de la géométrie et même des nombres. Les caractéristiques des pièces, la rapidité et la solidité des montages sont sans doute le facteur déterminant dans l'étendue de cette gamme d'activités.

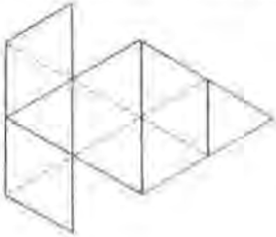
En relisant le programme de mathématique, je constate que la liste des objectifs atteints au travers de ces activités est impressionnante, dans les domaines des transformations géométriques et de l'étude des solides en particulier: de l'observation à la construction de figures, en passant par la reconnaissance de formes isométriques, etc. Les objectifs généraux ne sont pas en reste: exploration, développement de la curiosité, communication, organisation d'une démarche, etc.

L'évaluation du travail de l'élève y trouve son compte également: les descriptions recueillies permettent de voir clairement l'évolution de chaque élève, la précision de ses constructions, ses capacités à représenter un solide, sa rigueur dans la recherche des hexominos, etc.

Mais par-dessus tout, c'est l'autonomie de l'élève qui est favorisée par l'utilisation d'un matériel bien conçu. Je n'ai jamais été appelé à l'aide au cours de ces activités; j'ai commenté des travaux, précisé des termes, participé à certaines découvertes mais ce sont les élèves qui ont **fait** de la géométrie et des mathématiques.

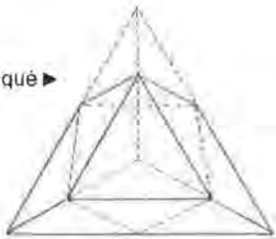
Réponses aux questions posées dans l'article

1. Les 6 faces du polyèdre sont 2 trapèzes isocèles (formés de 3 triangles chacun) 2 losanges (formés de 2 triangles) et 2 triangles.
   Le polyèdre a 2 plans et 1 axe de symétrie, il ressemble à un tétraèdre dont on aurait tronqué 2 sommets.



◀ développement

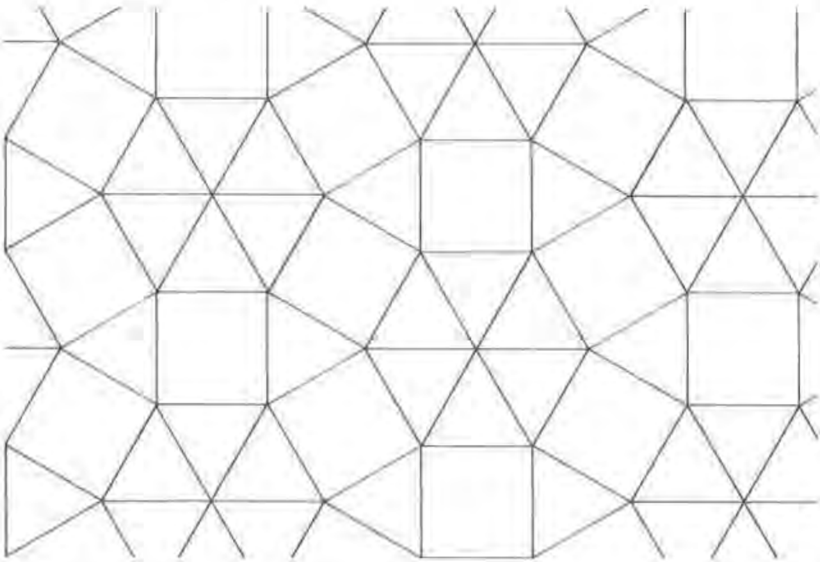
le trétraèdre tronqué ▶



2. Les élèves ont trouvé trois polyèdres de 10 faces triangulaires équilatérales et de 15 arêtes:
   - la «toupie»: 7 sommets (2 à 5 arêtes, 5 à 4 arêtes), convexe,
   - la «toupie dont il manque un cinquième» 7 sommets
     (2 × 6, 3 × 4, 2 × 3 arêtes) non convexe,
   - le «tricorne»: 7 sommets (1 × 6, 3 × 5, 3 × 3 arêtes) non convexe.

3. La démonstration proposée, oralement, par les deux élèves: «Chaque triangle a 3 côtés. Dans les polyèdres les côtés s'assemblent toujours par 2 pour former une arête. Il faut donc un nombre pair de côtés sinon il en reste un tout seul.
   S'il y a un nombre impair de faces, le nombre de côtés est impair aussi (3 fois un nombre impair) donc ça ne va pas.»

L'entreprise de carrelage «Poytricard S.A.» a beaucoup de succès avec son motif «Rose As».



Pour paver une pièce, ses carreleurs viennent d'utiliser 1200 carrés, à quelques-uns près.

De combien de triangles ont-ils eu besoin?

(Adapté d'un problème de «Mathématique 8e», DIP, NE 1987, thème «activités géométriques»)

Polydron: un matériel performant

par Michel Landenbergue, conseiller pédagogique

Description

La boîte standard distribuée dans les classes de 5e et de 6e du canton de Vaud contient 80 triangles, 40 carrés et 12 pentagones. Pour les enseignants vaudois, elle est disponible auprès de l'Office des Fournitures et Editions scolaires (art. OFES 20 699.00) et coûte 58 francs (prix catalogue). Il faut compter une boîte pour six élèves si on veut réaliser les principales constructions.

> **Chacun dispose de 10 triangles, 6 carrés et 2 pentagones.**

> Expérience faite, on se simplifie considérablement la vie en distribuant et en récoltant des *tapis* de triangles et de carrés.

Avant de passer à des activités plus ou moins dirigées, il y a plus de temps à gagner qu'à perdre en mettant le matériel à disposition de la classe, sans autres consignes que celles du rangement. Les élèves peuvent ainsi, dans un premier temps, apprivoiser le matériel et donner libre cours à leur créativité, même la plus débridée.

> Lorsqu'on découvre un nouveau jeu de construction, il est légitime d'avoir plus envie de monter un garage ou un robot qu'un tétraèdre ou un prisme.

Domaine d'utilisation

Il y a des pistes à explorer dans des domaines aussi variés que le pavage du plan, le dessin technique, l'optimisation de volumes, l'architecture, ...

En liaison avec les programmes romands de géométrie, deux activités ont été testées avec succès dans des classes vaudoises des années 5 à 7:

- le cube et ses développements;
- le dénombrement de faces, sommets et arêtes de divers polyèdres.

S'agissant des développements du cube, on connaît la question classique:

> **«Parmi les développements dessinés ci-dessous, lesquels permettent de former un cube, lesquels ne le permettent pas?»**

Suivent en général une demi-douzaine d'assemblages de six carrés dont certains appartiennent à la famille des onze développements, et d'autres pas.

> On peut discuter du niveau d'abstraction que requiert ce genre de *colle* mais comment, jusqu'ici, faire autrement?

Avec POLYDRON, on peut (enfin) inverser le problème:

«Soit un cube fermé: de combien de façons puis-je l'écarteler?»

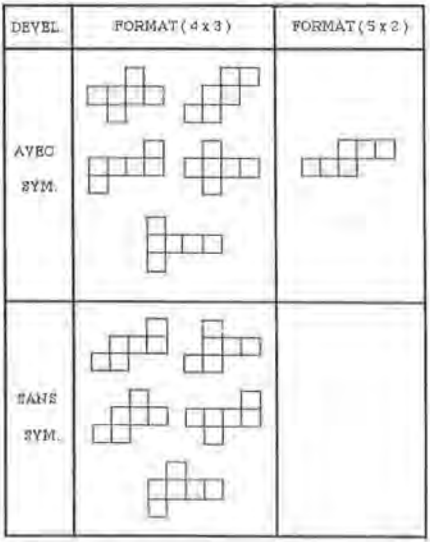
Il faut moins de 45 minutes à une classe de 5e pour inventorier tous les développements, sans savoir a priori qu'il y en a onze. On convient,par exemple, que l'auteur d'une nouvelle solution la dessine au tableau noir et que, dès lors, elle est *brûlée* pour les autres. A ce jeu, on prend conscience que certaines figures ne sont pas nouvelles mais symétriques, et qu'il faut les écarter.

> Je puis témoigner que les élèves les plus productifs ne sont pas toujours ceux qu'on attendait: pour réaliser leur *tableau de chasse*, il n'a pas fallu plus de temps aux 8 élèves d'une classe R (à effectif réduit) qu'aux 15 (dont un tiers de futurs pré-gymnasiaux) d'une classe hétérogène.

Un jour, un élève ayant inscrit chacun des développements dans un rectangle, l'activité de manipulation a (presque par hasard) débouché sur un problème:

«Un fabricant de matériel scolaire doit fournir à chaque élève de 5e du canton un cube à découper dans un rectangle de carton. Existe-t-il un développement qui produit un minimum de déchets?»

> Si on observe le format des rectangles dans lesquels s'inscrivent les différents développements, on constate:
> - que dix sont au format (4 × 3);
> - qu'un seul est au format (5 × 2);
> - qu'il ne produit par conséquent que quatre déchets, contre six pour les autres.



Exemple de classement des onze développements du cube:

Premier critère: ils s'inscrivent dans un rectangle au format (4 × 3) ou (5 × 2).
Second critère: ils présentent ou non une symétrie (axiale ou centrale).

L'activité qui permet de dénombrer les faces, sommets et arêtes de polyèdres est plus riche que la précédente dans le sens où elle suscite la production d'une collection de solides, tous différents. Elle demande cependant quelques précautions, notamment de langage:

- recommander aux élèves de commencer par des constructions élémentaires;

    La tentation est grande de vouloir utiliser dès le départ la totalité des pièces à disposition.

- être au clair avec les termes «faces», «sommets», «arêtes»;

    Penser à une photo de montagne et au vocabulaire des alpinistes, c'est efficace.

- éviter, en principe, les constructions non convexes;

    Le dénombrement y est souvent plus difficile à réaliser.

- éviter les constructions qui nécessitent plusieurs pièces pour une même face.

    Outre leur relative fragilité signalée plus haut, il peut y avoir ambiguïté à propos de telle ou telle jointure: «Est-ce une arête, ou pas?»

Selon le tempérament du maître, on peut donner (ou s'abstenir de donner) d'autres consignes:

«Peux-tu réaliser un solide avec une, deux, trois, quatre, ... pièces?»
«Existe-t-il une construction dont la *recette* est trois carrés et deux triangles?»
«Combien de solides différents nécessitent six pièces?»

Le tableau ci-après fait la synthèse des renseignements obtenus par le biais de la manipulation. Il est construit dans l'ordre croissant du nombre de faces (qui, en règle générale, est égal au nombre de pièces utilisées), mais il pourrait être agencé selon d'autres critères:

- d'abord les pyramides, puis les prismes, puis...
- les constructions à base de triangles, de carrés, «mixtes»;
- les polyèdres réguliers (il y en a cinq selon Platon), les autres...
- ...

    La comparaison des nombres de faces, de sommets et d'arêtes de tout polyèdre convexe met en évidence la relation dite d'Euler: **(n. faces + n. sommets) – 2 = n. arêtes.** La colonne «modules» signale quelques possibilités d'assemblages de deux ou trois solides élémentaires en vue d'obtenir des formes plus complexes.

Polyèdres: activité de dénombrement

PIECES	TRIANG.	CARRES	PENTAG.	FACES	SOMM.	ARETES	MODULES	POLYEDRES
1,2,3							irréalis.	
4	4	–	–	4	4	6	a	tétraèdre rég.
5	4	1	–	5	5	8	b	pyr. à b. carrée
5	2	3	–	5	6	9	c	pri. à b. triang.
6	6	–	–	6	5	9	a+a	hexaèdre
6	–	6	–	6	8	12	d	cube = hexa. rég.
6	5	–	1	6	6	10	e	pyr. à b. pentag.
7	–	5	2	7	10	15	f	pri. à b. pentag.
7	4	3	–	7	7	12	c+a	
12	1 HEX.+6	–	–	7	7	12	irréalis.	pyr. à b. hexag.
8	8	–	–	8	6	12	b+b	octaèdre rég.
18	2 HEX.	6	–	8	12	18	fragile	pri. à b. hexag.
9	6	3	–	9	8	15	a+c+a	
9	4	5	–	9	9	16	b+d	
10	10	–	–	10	7	15	e+e	décaèdre
11	5	5	1	11	11	20	e+f	
12	8	4	–	12	10	20	b+d+b	
12	–	–	(6 x 2)	12	20	30		dodécaèdre rég.
18	1 HEX.+6	6	–	13	13	24	irréalis.	
14	8	6	–	14	12	24		cuboctaèdre
15	10	5	–	15	12	25	e+f+e	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Bonne feuille...

Y a-t-il un rapport entre l'intelligence et la réussite scolaire? Cette question stupide ne mériterait pas d'être posée s'il ne fallait protester avec la dernière véhémence contre une idée terrible qui équivaut, en limitant le droit à l'intelligence, à refuser le droit de vivre au reste de l'humanité. L'inégalité existe, mais nous avons tous un même cerveau composé de 15 milliards de cellules. Aucun bébé n'arrive au monde doté de «mauvaises cellules».

Devant la vie, il n'y a pas ni premier ni dernier. Mais, cette liberté permet à chacun d'utiliser ses capacités à sa manière. L'intelligence n'est pas non plus synonyme de compétitivité. Au nom d'un égalitarisme «supérieur», les enfants se voient obligés d'obtenir les meilleurs résultats au même moment. Ce diktat a rayé d'un trait les inévitables temps de latence, les retards naturels, et... les précocités. Un enfant peut démarrer très vite, s'éteindre vers onze ans et se réveiller quelques années plus tard. Certains partent au ralenti, freinent et se reprennent sur le tard. Les pires cancres à l'école peuvent se récupérer dans la vie et en dehors de tout système éducatif. Qui peut planifier la chance et la refuser à certains?

L'intelligence est, par définition, «la chose du monde la mieux partagée», puisqu'elle nous sert à rentrer en relation avec l'autre, à communiquer avec lui. Ce mot vient du latin *inter-legere* qui signifie «partager», «distribuer»... Ce n'est donc pas un trésor de guerre disputé jaloulement, ni une médaille qui s'acquerrait au prix d'efforts surhumains. L'intelligence est la faculté qui nous fait rentrer au cœur de la relation humaine et qui nous aide à la décrypter. Pour tous les enfants, elle fonctionne de la même manière. La véritable norme, c'est elle. Rendre un enfant intelligent, l'éduquer, c'est l'accompagner dans un mouvement naturel, celui qui le pousse à communiquer et à découvrir le monde...

Alfred Tomatis, Les troubles scolaires Ergo Press 1988

La potion magique

... sur les traces d'Astérix...

Recette proposée par le chef et recueillie par Marcelle Goerg

Avant de commencer, sachez que le temps le plus court pour obtenir cette potion ne vous assurera par un pouvoir extraordinaire, mais nécessitera un effort d'organisation de votre part.

Nombreuses sont les situations de notre vie quotidienne où il est nécessaire de savoir s'organiser.

Même si nous n'en avons pas toujours conscience, nous faisons tout pour rendre rationnelle la réalisation des tâches domestiques. Nous les effectuons dans l'ordre qui fait perdre le moins de temps ou le moins d'argent, ou dans celui qui nous procure le plus grand plaisir.

Préparer:

1 chaudron 

1 serpe d'or

de l'eau de source 

Rassembler les ingrédients suivants:

 2 améthystes

6 betteraves 

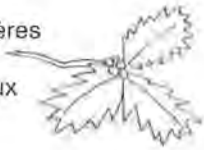
 4 cœurs d'abeilles ouvrières

7 dattes d'Egypte 

 9 épines d'acacia

15 fraises des bois 

 3 gueules de vipères

1 branche de houx 

Remplir le chaudron d'eau de source, puis faire macérer * les ingrédients en respectant des règles.

1.  Il faut que les **améthystes** aient macéré au moins 3 jours avant de mettre à macérer:

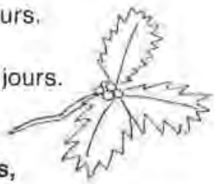
7 dattes d'Egypte 

 **9 épines d'acacia**

15 fraises des bois 

2.  Les **gueules de vipères** doivent macérer au moins 4 jours.

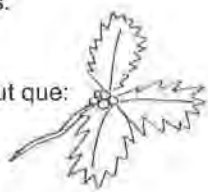
 Les **fraises des bois** doivent macérer au moins 7 jours.

Les **branches de houx** doivent macérer au moins 3 jours. 

3.  Avant de mettre à macérer les **3 gueules de vipères,** il faut que:

les **6 betteraves** aient macéré au moins 6 jours, 

 les **7 dattes d'Egypte** aient macéré au moins 4 jours.

4. Avant de mettre à macérer **la branche de houx,** il faut que: 

 les **4 cœurs d'abeilles ouvrières** et

les **9 épines d'acacia** aient macéré au moins 2 jours. 

QUAND LA POTION est-elle PRÊTE AU PLUS TÔT?

* laisser séjourner, faire tremper.

J. A. 1211 GENÈVE 11

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion