143

MATH ECOLE

MAI 1990
29e ANNÉE

MATH-ECOLE 143

29e ANNÉE Paraît cinq fois par an MAI 1990

Editorial

Infor MAT *HIC*

Depuis quelques saisons, le vent qui souffle nous parvient en droite ligne de l'univers magique de l'informatique. Du pays des tortues aux montagnes qui accouchent d'une souris, de l'océan aux douze «ports de sortie» jusqu'au micro-monde des macros, du territoire sans mémoire à l'empire des icônes, les particules soufflées par les rafales prennent successivement la forme de puces, de «bits», de «go to» ou de «screen».

Quel que soit le canton, la ville, l'école ou la salle de classe, le virus nous atteint, tôt ou tard! Face à cette véritable tourmente qui déferle jusque dans les vallées les plus reculées, faut-il parler de mode, de phénomène de société ou d'un réel besoin?

Pour nos autorités scolaires, l'interrogation ne se pose plus puisque, de Genève à Romanshorn, chaque département de l'Instruction publique investit des sommes considérables en jouant «l'interface informatique»? Loin de moi l'idée de critiquer ce choix parce que d'abord je suis un convaincu de la première heure et ensuite parce que les didacticiels récents deviennent de plus en plus «softistiqués» Si l'un d'entre vous en désire la preuve, qu'il s'amuse un instant avec CABRI-GÉOMÈTRE: il découvrira comment «prendre son pied» dans un lieu géométrique!

Mais la question que je souhaite poser ici est la suivante:

> **«Eole serait-il capable de déchaîner un ouragan de même intensité sur la planète de la formation?»**

Car si l'information appartient à un univers magique, dont le moins que l'on puisse dire est qu'il regorge de moyens financiers, la formation elle, et plus particulièrement la formation continue, fait souvent office de parent pauvre et se situe quelque part dans un autre monde, proche de celui des rêves.

Certes, dans chaque canton il existe des structures dont le but consiste à proposer aux enseignants un certain nombre de cours afin d'élargir leurs compétences pédagogiques. Mais face à une école en crise, dont beaucoup s'accordent à dire qu'elle n'a pas suivi l'évolution de notre société, on pourrait faire bien plus et il serait souhaitable qu'un coup de fouet, aussi dévastateur que celui qui claque en informatique, vienne stimuler l'enseignant, son engagement personnel et sa formation. C'est à cette seule condition que l'acte éducatif portera de nouveaux fruits pour les prochaines générations.

> *«Un homme cultivé (et a fortiori l'enseignant chargé de «cultiver») ne devrait jamais se considérer comme un modèle achevé.* **A cet égard, la formation continue est un devoir fondamental pour tous les pédagogues»** [1]

Michel Chastellain

[1] La formation des enseignants du degré secondaire II - CDIP - 1989.

Apprendre à communiquer

par Ninon Guignard, SRP-Genève

Découvrir une activité pratiquée à l'école enfantine et la reproduire au Cycle d'Orientation, voliä qui n'est pas banal mais plein d'instructions!

Le jeu est simple, riche, courant dans les petits degrés. Un élève décrit une collection d'objets placés devant lui et transmet les informations nécessaires pour qu'un autre élève puisse, sans la voir, reproduire le même arrangement.

Tous les participants sont actifs: l'«émetteur» qui traduit dans un langage compréhensible pour autrui la disposition des objets et leur position relative; et le «récepteur» qui décode les informations reçues et agit en conséquence pour obtenir un assemblage identique à celui qui est décrit. Le «récepteur» peut poser des questions ou demander des précisions.

Communiquer, c'est...
se transmettre de l'information

a) à l'école enfantine

«Approcher la mathématique à cinq ans» propose cette activité en deuxième enfantine.

«Un élève arrange librement cinq à six moules à biscuit sur une feuille de papier et en décrit la disposition à un camarade placé à côté de lui derrière un écran.

L'élève qui dicte son arrangement peut vérifier par dessus l'écran ce que fait son camarade».

Ou encore: «un enfant placé derrière un écran compose un paysage. Il le décrit à un ou plusieurs camarades qui le réalisent».[1]

L'activité qui a servi de modèle [2] à Madame Weber-Berthoud, enseignante au CO se déroule comme suit:

«Les enfants ont joué, assis à une table, deux par deux, en face l'un de l'autre. Trois formes étaient à leur disposition en deuxième enfantine: deux triangles de grandeurs différentes et un carré. Il y en avait six en première primaire: deux carrés, deux triangles et deux disques, respectivement de tailles différentes.[3].

[1] «Approcher la mathématique à cinq ans, Genève, SRP, 1983, p. 137 et 149.

[2] M. Sans, décrire des assemblages d'objets, mise au point d'une situation-problème avec des enfants de cinq à huit ans, 2e partie, FPSE, 1987.

[3] J. Weber-Berthoud, approches des conditions d'un travail ludique, des connaissances et des savoir-faire, 1988, p. 5.

«L'un des partenaires assemble les formes à sa guise – côté contre côté, deux à deux dans le plan. Il en transmet la disposition, verbalement à l'autre. Celui-ci, sans contact visuel, reproduit ce qui lui a été communiqué en posant les questions qui lui sont utiles. Le succès de l'entreprise dépend uniquement de la qualité du dialogue entre les enfants».[4]

b) au CO

Madame Weber-Berthoud a adapté l'activité en classe de septième, de niveau prégymnasial, général et pratique. Les mêmes éléments du jeu ont été conservés: les élèves se font face, séparés par un écran. Les règles du jeu sont les mêmes. En revanche, les formes géométriques se sont enrichies en fonction du programme des manuels de septième du CO.

A leur demande, les élèves ont rempli, chacun, le rôle d'émetteur et celui de récepteur.

Communiquer, c'est...
se décentrer

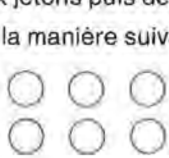
Un des intérêts certains de telles activités réside dans le va-et-vient entre un langage spontané et un langage plus conventionnel où l'un et l'autre s'enrichissent réciproquement. Le langage personnel permet de donner du sens à l'arbitraire, l'arbitraire est souvent plus précis et plus objectif. L'enseignant va donc favoriser l'expression spontanée des enfants pour décrire les arrangements. Progressivement, il les amène à utiliser un langage conventionnel, plus commode. L'absence d'un vocabulaire adéquat au profit de la spontanéité des expressions enfantines défavorise les élèves dont le langage est pauvre.

Cependant, il serait illusoire de croire que seule la convention permet de communiquer. A cinq ans comme à treize, communiquer c'est entrer dans le point de vue de l'autre, c'est ajuster son langage au savoir-faire de l'autre. Quitte à ce que le correct, l'arbitraire, et la précision soient loin d'y trouver leur compte!

Ecoutons un élève de 3P, essayant de faire construire trois rangées de deux jetons.

– Tu mets deux jetons puis deux jetons puis deux jetons.

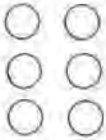
L'autre arrange sa collection de la manière suivante:



– Non, ils doivent regarder par terre.

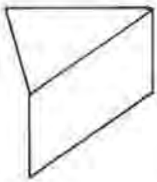
[4] Ibidem p. 6.

Quoi de plus évident, l'enfant récepteur comprend. Il place verticalement ses jetons. Il n'y avait qu'à le dire!



Parfois c'est l'émetteur qui manque de précision et l'autre saisit quand même ce qu'il doit faire. D'autre fois c'est le récepteur qui ne comprend pas ce qui est pourtant clairement exprimé et réclame de l'émetteur des termes tout à fait incorrects mais propres à l'aider dans sa tâche.

René, élève de septième du CO transmet la position de deux figures en ces termes:

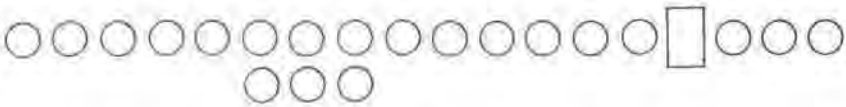


– Tu mets le parallélogramme contre le rectangle isocèle.

Et son partenaire place correctement parallélogramme et triangle, le premier au-dessus du second!

En 1981, au SRP, nous avions mené une recherche similaire à celles que nous venons de citer. Avec une différence toutefois: récepteur et émetteur étaient éloignés l'un de l'autre et l'enfant qui donnait les consignes pouvait suivre sur écran de télévision (en circuit interne) les tâtonnements de l'autre élève et ajuster ses propos au fur et à mesure que l'autre avançait dans la tâche, sans pour autant être tenté d'intervenir en plaçant lui-même les objets.

Pour comprendre comment des élèves de deuxième primaire se débrouillaient avec le nombre – sous ses aspects ordinal et cardinal – nous arrangions nous-même devant l'enfant émetteur une collection de jetons avec un objet insolite.



(Le rectangle représente l'objet insolite, une allumette, un petit jouet, etc.).

Très vite nous fûmes surpris par l'aptitude de certains enfants à s'accommoder au niveau de compréhension d'un pair.

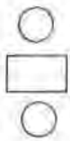
Un des élèves, qui avait rapidement réussi à composer sa ligne de jetons, se trouva pris au dépourvu lorsqu'il dut placer, verticalement, un petit bateau.

L'émetteur essaya tout son répertoire de termes spatiaux ou autres. Rien n'y fit. A bout de ressources il s'écria: «Tu le mets horizontal!». Et le bateau trouva aussitôt la position adéquate.

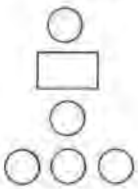
Un autre élève, qui avait lui-même décidé d'un arrangement, dictait ses ordres.

- Tu mets un jeton.
- Tu mets l'allumettes couchée en bas du rond.
- Tu mets un autre jeton mais en bas.

Jusque-là, pas de problème.



- Tu mets trois jetons en bas.



- Non pas comme ça, alignés comme les autres.

Et l'autre de rectifier.

- Attends, je veux voir.

Il se met à compter, un, deux, trois, quatre.

- Je t'ai dit trois. Aligne comme l'autre mais pas quatre.

Et l'autre dut enlever un jeton avant de pouvoir continuer.

Pour le clin d'œil, un troisième enfant.

– Non, comme un pistolet... comme un pistolet, j'ai dit, pas comme une mitraillette.

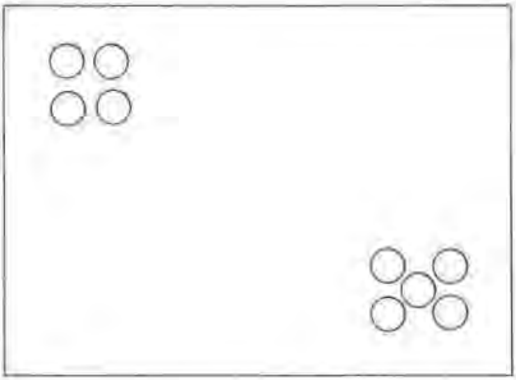
Comprenne qui pourra.

Communiquer, c'est...
prendre conscience de l'implicite

Ces exemples sont remarquables du point de vue de la communication car ils mettent en évidence la capacité de l'humain à entrer et à adopter le point de vue de l'autre. Même à huit ans.

Il faut toutefois reconnaître que cette aptitude est favorisée par l'intériorisation de bonnes formes ou de modèles appris qui, tout en devenant parfaitement implicites, servent parfois le dialogue.

Un élève de troisième primaire qui avait placé des jetons de la manière suivante donna pour consigne:



– quatre jetons à gauche, cinq en bas à droite.

L'enfant récepteur aligna quatre jetons sur la gauche de la feuille mais plaça très exactement ses cinq jetons selon la configuration prévue par l'émetteur.

Qu'en est-il du bon usage de ces modèles?

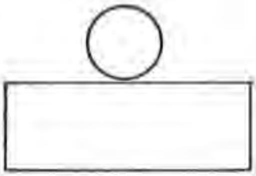
Ils empêchent aussi de poser les bonnes questions.

Au CO:

«Il y a des emplacements qui vont de soi.

– Tu mets le disque sur le rectangle.

Le rectangle étant déjà posé, tous ont fait ceci:



Un seul a demandé «où? à gauche, à droite, au milieu?»[5]

L'enseignante a demandé aux récepteurs pourquoi ils plaçaient automatiquement le disque au centre. Elle obtint cette réponse:

– Parce que c'est logique!
C.Q.F.D.

**Communiquer c'est...
en relation avec l'action**

Que des élèves de première ou deuxième primaire manipulent est relativement admis par tous. Mais passé ces degrés, on entend encore souvent dire que le temps manque pour cela. Le temps manque pour comprendre. Le temps manque pour se représenter. Pourtant, la manipulation ne sert pas seulement ces deux aspects de l'apprentissage, elle favorise aussi le recours à un vocabulaire précis.

«J'ai remarqué que plusieurs enfants retrouvaient le nom de leur forme en la décrivant...» (septième CO niveau pratique) [6]

Qu'est-ce qu'un «angle aigu»? Les élèves peuvent reconnaître ce mot mais il fait rarement partie de leur vocabulaire.

Parce qu'ils sont en situation de communiquer, les élèves l'adoptent facilement lorsque l'enseignante le leur suggère.

Les enfants qui transmettent les informations emploient, tous, le langage de l'action.

A l'école enfantine comme au CO. «Tu mets...»; «le grand côté touche la base du bas du carré»; «ça doit descendre ou monter, la pointe?»; «tu prends le parallélogramme, le petit côté appuie sur le rectangle en bas»...

Comment verbaliser, comment transmettre de l'information, comment poser des questions si l'on ne se représente pas? Et comment se représente-t-on une figure si on ne l'a jamais eue en main? Et comment imagine-t-on ses déplacements et les positions qu'elle prend si on ne l'a jamais expérimenté?

«Il m'a semblé que l'enfant qui ne questionne pas ne visualise pas encore les différentes positions d'une forme.»[7].

[5] Ibidem p. 63.
[6] Ibidem p. 61.
[7] Ibidem p. 62.

Communiquer, c'est...
un casse-tête «chinois»

A l'école enfantine, nous l'avions remarqué: le niveau de communication entre pairs est très différent suivant les enfants qui se parlent mais il y a de grands écarts entre les classes. A cause des effectifs? à cause de la provenance des élèves? à cause d'activités qui aident à «libérer» l'expression?

Au CO, le vocabulaire apparaît très différent lorsqu'il est employé par des élèves de niveau pratique ou de niveau scientifique. Ceux-ci donnent leur préférence au langage géométrique alors que ceux-là utilisent un langage très imagé, voire métaphorique. Que fait l'enseignement d'une différence qui n'attend sûrement pas le CO pour se manifester?

En fin d'exercice, Madame Weber-Berthoud demandait aux élèves:

«Qu'est-ce qui vous a plu, le plus, dans ce jeu?».

Ecoutons-la nous rapporter son étonnement.

– «Qu'on ait pu s'expliquer jusqu'au bout».

– «Qu'on ait pu demander ce qu'on voulait».

«Toutes les réponses ressemblaient à celles-ci, avec quelques variantes pour la forme. (...)

Ainsi les enfants souffrent-ils de ne jamais avoir l'occasion de s'exprimer jusqu'au bout, qu'ils soient vingt-quatre, vingt, seize, dix ou huit en classe! Ainsi ressentent-ils, comme nous, le manque de temps de vivre!...»[8]

Autre remarque non négligeable sur ce sujet: «Plusieurs enfants ne sont pas de langue maternelle française. Ce ne sont, pourtant, pas eux qui ont besoin de support pour se faire comprendre, mais bien plutôt leurs camarades francophones.»[9]

Encore un alibi qui s'effondre!

Communiquer, c'est...
jouer ou travailler?

Madame Weber-Berthoud s'interroge sur la relation entre le plaisir et l'effort. Nous aussi!

«C'est l'élève le plus «faible» de ma classe de cinquième (scientifique), la plus déroutée (...) c'est elle qui a été la plus expansive: – «L'effort me plaît. Pourquoi ne fait-on jamais ça en classe? Je recommence quand vous voulez!»[10]

Madame Weber-Berthoud nous communique son enthousiasme pour le jeu. Elle propose même de réinventer le jeu.

Pouquoi pas?

Il reste des questions.

Pourquoi l'effort n'est-il plaisant que dans le jeu?

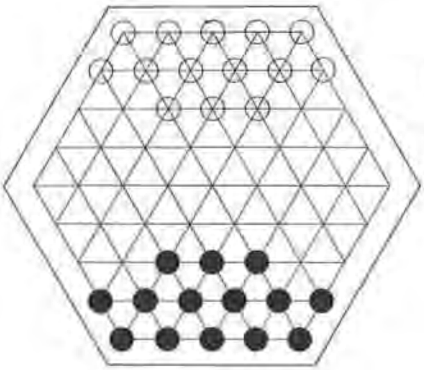
Pourquoi n'éprouve-t-on du plaisir que dans le jeu?

Au fait, pourquoi appelle-t-on «jeu» une activité de communication?

[8] Ibidem p. 65. [9] Ibidem p. 65. [10] Ibidem p. 65.

Le jeu d'Abalone

Quelques remarques pour attiser l'intérêt pour ce jeu par Marcelle Goerg.



L'Abalone, vous connaissez?

... un plateau hexagonal de 61 trous,
14 boules blanches, 14 boules noires,
agréables à voir et à toucher.

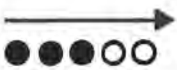
Chaque joueur joue à tour de rôle.

Un coup joué ne peut être repris.

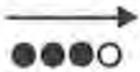
Le gagnant est celui des deux joueurs qui a éjecté, hors de l'hexagone, 6 boules adverses.

Rappel des règles et des mouvements

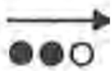
- Déplacer dans un même mouvement 1, 2, 3 boules vers un trou libre, voisin, dans toutes les directions possibles.
- Ne pas déplacer plus de 3 boules d'une même couleur dans un même mouvement.
- Pour pousser l'adversaire, créer un SUMITO, une position numérique supérieure.



3 contre 2



3 contre 1



2 contre 1

La poussée n'est jamais obligatoire, mais la boule ne peut avancer que d'un trou.

La STRATEGIE pour gagner est à trouver, mais l'intervention des positions d'égalité de force, «PAC», favorise des situations de défense et les rend intéressantes.

«PAC»

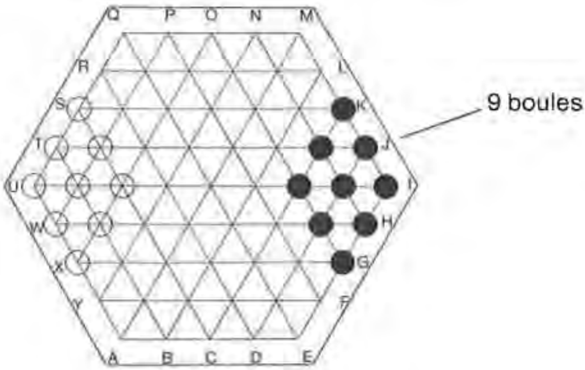
1. ●○

2. ●●○○

3. ●●●○○○

Dans ces 3 positions, les joueurs ne peuvent pas pousser les boules, ils devront briser le «PAC» par une action sur un autre axe.

Très rapidement, le joueur se rend compte de l'efficacité d'organiser ses boules en GROUPES.



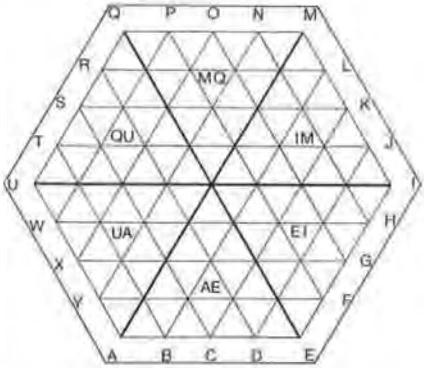
Cette configuration en «losange» offre des lignes stables et redoutables. Si aucune des 14 boules n'a encore été éjectée, les 5 boules qui restent seront disponibles pour attaquer les camps adverses.

Comme pour tout jeu de stratégie, le plaisir du jeu ne se limite pas à gagner une fois ou deux, mais réside dans le prolongement de ce temps avec des adversaires de qualités différentes.

Il faut apprendre à gagner à coup sûr, provoquer des situations favorables, mémoriser des attaques, retrouver un itinéraire gagnant pour le réutiliser, en quelque sorte, étudier le champ d'action du jeu.

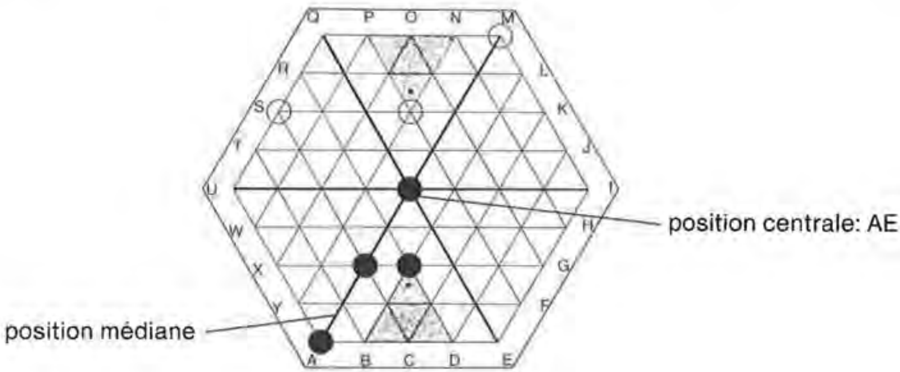
Pour cela une notation de coups, au cours d'une partie, permettant d'essayer, de trouver des solutions différentes, améliore certainement la représentation que l'on se fait du jeu et l'enchaînement des coups possibles, en tenant compte des réactions de l'adversaire.

Dans le journal *JEU et STRATEGIE* Nº 1 – novembre 1989, nous trouvons un exemple de notation.



- Placer les 24 lettres dans un ordre alphabétique strict.
- Relier l'extrémité de chaque base au centre du plateau pour définir les 6 quartiers triangulaires.
- Noter une position sur une ligne médiane en la rattachant à la base dont les lettres sont les plus proches du début de l'alphabet.

A l'aide de ce système, nous pouvons fixer la **position** d'une boule et en signaler le **mouvement.**

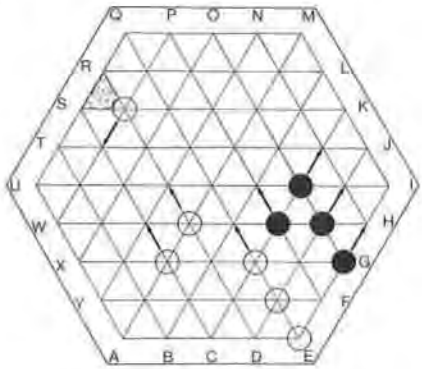


Blanc se note: M; NP*; S

Noir se note: A; AC; AE; BD*

Déplacement d'une boule et de plusieurs boules

Le déplacement d'une boule, de plusieurs boules, est noté en nommant en premier la position de la boule qui est en contact avec les doigts, puis la lettre vers laquelle elle se dirige.



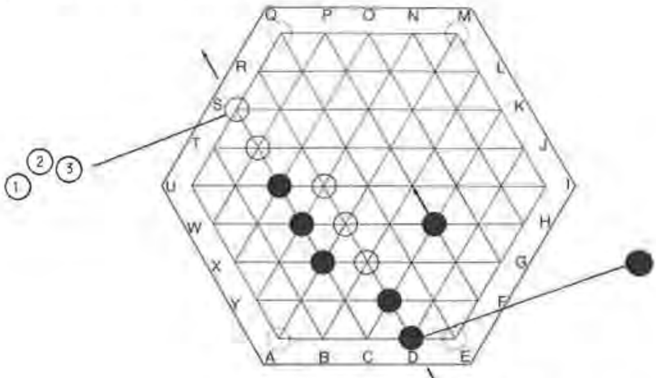
Les coups Blancs RS – W
E – Q
AC – SR

Les coups Noirs FH – P
G – IJK

Eject

L'éject se note «e» suivi du chiffre de rang de la boule éjectée, en chiffre arabe pour les Blancs, en chiffre romain pour les Noirs.

La 1re boule Noire éjectée est codée: eI.
La 3e boule Blanche éjectée est codée: e3.

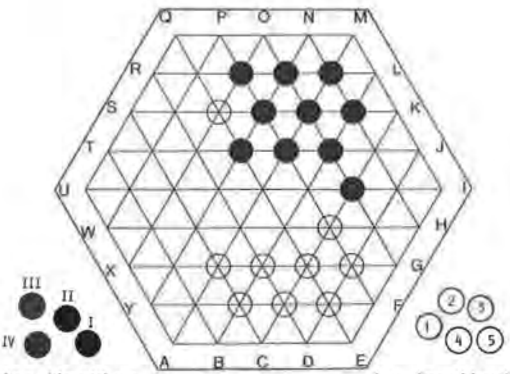


Le coup Blanc se note UY – D (eI)
Le coup Noir se note AC – S (e3)

Ce jeu est proposé au corps enseignant genevois au «matériel subventionné».

Si vous l'avez déjà dans votre armoire, sortez-le et répondez à cette question.

- Quel premier mouvement assure à Noir la victoire?

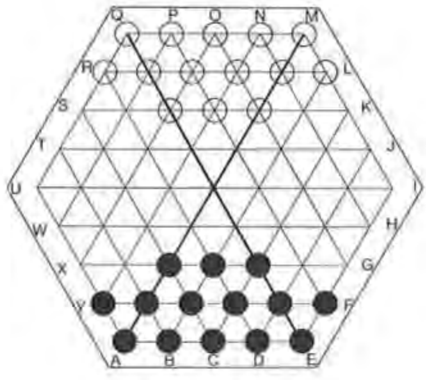


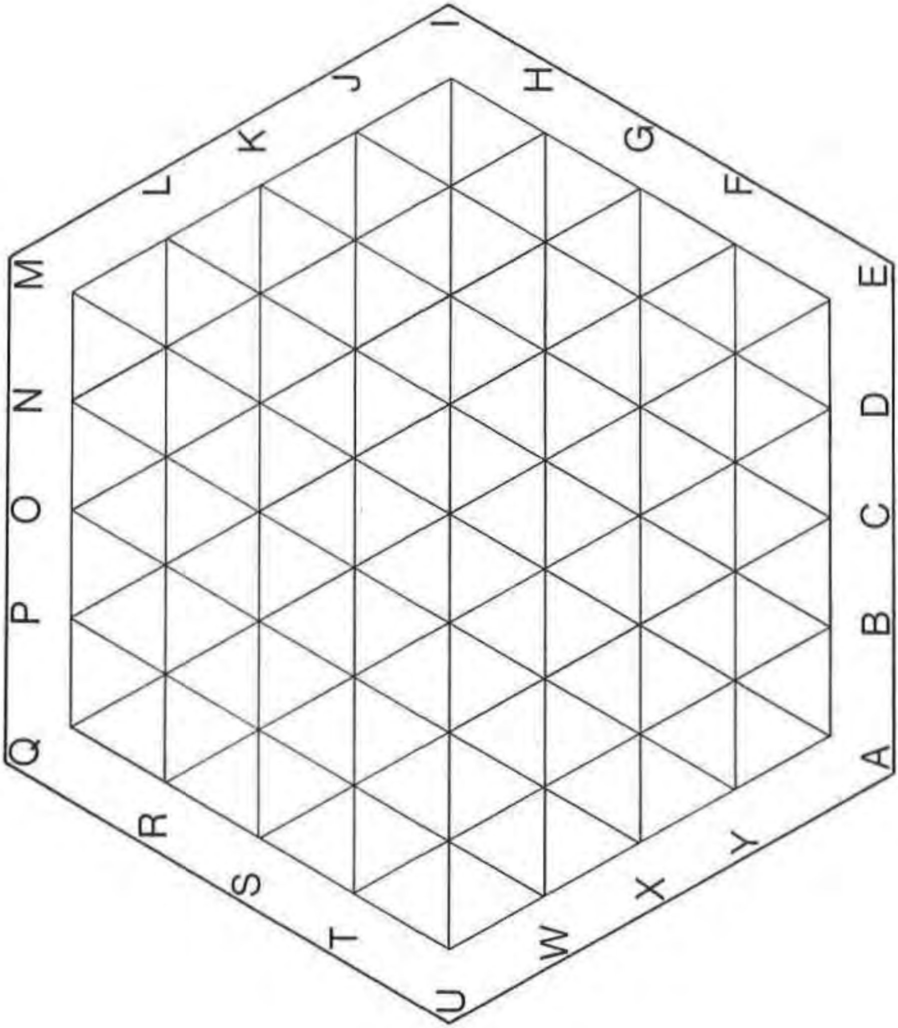
boules éjectées boules éjectées

Une seule solution pour que la prise (éjecter une boule blanche) ne soit pas aléatoire.

Pour votre prochaine partie, n'oubliez pas: les boules noires sont installées sur le quartier AE, les boules blanches sont placées en face sur le quartier MQ.

Après tirage au sort, les noirs commencent.




A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
W
X
Y

Composition des applications

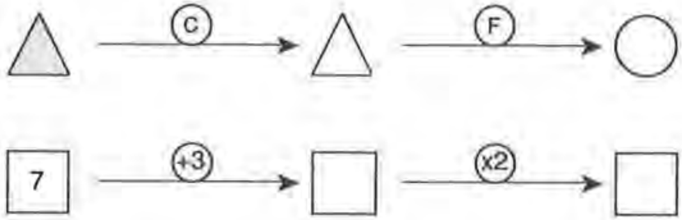
par André Calame, Neuchâtel

La notion abstraite d'application s'est lentement dégagée au cours de notre XXe siècle à partir de deux courants:

- un courant **algébrique** ou **analytique** par l'étude des fonctions qui sont des applications d'un ensemble de nombres dans un ensemble de nombres;
- un courant **géométrique** par l'étude des transformations dans le plan ou dans l'espace. Il s'agit alors d'applications d'un ensemble de points dans lui-même.

On peut dire qu'actuellement les applications forment un fil conducteur dans tout enseignement des mathématiques, mêmes élémentaires. Il n'est dès lors pas surprenant qu'on cherche dès les premières années de l'enseignement obligatoire à promouvoir des activités qui préparent à l'idée de fonction ou de transformation.

Sans entrer dans des détails qui n'ont pas leur place dans cet article, on rappellera tout de même les «machines» introduites en son temps par Nicole Picard: la machine C qui change la couleur des blocs, la machine F qui en change la forme; les machines à additionner, à multiplier, etc.



Au niveau secondaire inférieur, on sait tout le parti que l'on peut tirer des applications de la forme

$$f: x \longmapsto y = ax$$

pour les problèmes linéaires. Qu'il s'agisse de densités, de vitesses, de pentes, d'intérêts, etc., les applications linéaires sont un outil qui remplace avantageusement la sacro-sainte «règle de trois». Enfin, depuis qu'on ne considère plus la géométrie comme l'étude de figures isolées et statiques, le langage des applications intervient naturellement dans l'étude des isométries, des homothéties, des similitudes. On ajoutera encore l'étude des fonctions dites simples avec leurs graphes et qui mène à la résolution d'équations ou de systèmes d'équations.

Depuis plusieurs années, il me paraît utile de proposer aux élèves qui entrent au gymnase de revenir sur la notion d'application. C'est l'occasion d'harmoniser les connaissances acquises antérieurement par les élèves issus de classes différentes. J'en suis donc venu à demander aux élèves de mettre par écrit, en un quart d'heure, tout ce qu'ils peuvent dire des applications. D'une année à l'autre, d'une section à l'autre (littéraire ou scientifique), les résultats sont assez stables:

- très rares sont les définitions de ce qu'est une application; et s'il y a définition, elle est en général peu précise ou même incorrecte;
- aucune allusion aux transformations géométriques;
- beaucoup de détails sur les graphes des fonctions élémentaires: fonctions linéaires, affines, rationnelles; droites, paraboles, hyperboles.

Si aucun exemple géométrique n'est cité, c'est sans doute que les isométries et les similitudes sont envisagées à partir de figures particulières et que les élèves ne les ressentent pas comme des transformations du plan tout entier.

En résumé, pour le jeune gymnasien, une application, c'est avant tout un graphe. C'est pratiquement sous ce seul aspect que la notion est opérationnelle.

Voici donc planté le décor dans lequel le professeur va enseigner la composition des applications, en particulier la composition des fonctions élémentaires: un sujet qui a sa place légitime au début des études gymnasiales. Il convient, en effet, de généraliser les quelques compositions entrevues à la fin de l'enseignement obligatoire et de préparer l'étude de nouvelles fonctions, trigonométriques ou transcendantes. Pour qui veut comprendre le sens d'expressions telles que

$y = \sin^2 (3x + \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $y = \sin(2x)$ $\qquad$ $y = \ln \cos x$

il est indispensable de savoir composer des fonctions et dans le bon ordre.

En général, on procède selon le schéma suivant que nous illustrons sur l'exemple simple de la composition de deux applications affines:

$$f: x \longmapsto \frac{1}{2}x - 2$$

$$g: x \longmapsto \frac{-2}{3}x + 5$$

$$h = g \circ f : x \xrightarrow{\ f\ } \underbrace{\frac{1}{2}x - 2 = t \xrightarrow{\ g\ }}_{h = g \circ f} -\frac{2}{3}t + 5 = y$$

$$x \longmapsto -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x - 2\right) + 5 = y$$

$$h: x \longmapsto y = -\frac{1}{3}x + \frac{19}{3}$$

On a l'habitude de désigner par x l'élément de départ et par y son image, ce que nous avons fait pour l'application h. Dans la composition, on notera le rôle particulier de t. Ce nombre t représente d'une part l'image de x dans l'application f, d'autre part l'élément de départ ou la préimage de y dans l'application g. Ce double rôle n'est pas sans troubler les élèves, au moins au début.

Nous voici au point central avec deux difficultés du point de vue didactique. Comment surmonter cette gêne créée par l'usage de la «variable intermédiaire» notée t? Plus profondément, comment tirer parti des graphes en vue d'une meilleure motivation des élèves puisque c'est le seul aspect des applications qu'ils dominent bien?

On ne songera pas à travailler dans l'espace à 3 dimensions. Il faudrait représenter $t = f(x)$ dans le sol (plan Oxt), puis $y = g(t)$ dans le mur (plan Oty) et enfin voir apparaître le graphe $y = g\,[f(x)] = h(x)$ dans la paroi (plan Oxy). Une telle représentation serait artificielle et n'apporterait guère de clarté à des élèves peu rompus à la vision dans l'espace.

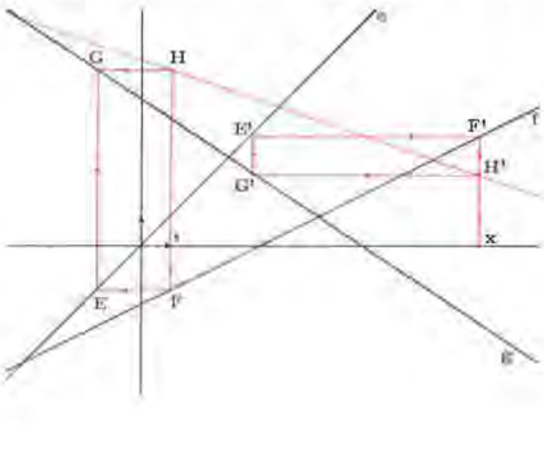
On procédera autrement, en restant dans le plan, mais en introduisant dans la composition une nouvelle fonction intermédiaire: la fonction identité e

$$x \xmapsto{f} \frac{1}{2}x - 2 = t \xmapsto{e} t \xmapsto{g} -\frac{2}{3}t + 5$$

L'introduction de e a l'avantage de dissocier le double rôle de t à la fois image et préimage.

C'est surtout graphiquement que se révèle cet avantage si l'on dessine dans un même repère les graphes de f, e et g. Nous avons choisi des axes rectangulaires et la même unité sur les deux axes, ce qui est commode pour l'exposé et plus aisé pour le dessin. Mais tout ce qui suit resterait vrai dans un système d'axes obliques.

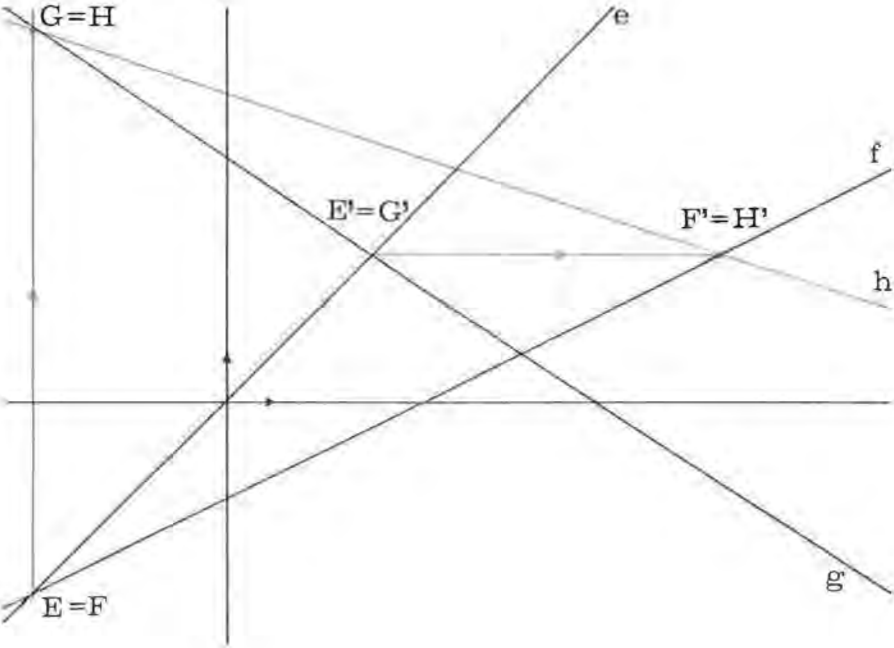
A partir de ces graphes, construisons le graphe de $h = g \ast f$. Comme il s'agit d'une composition d'applications affines, on sait d'avance que le graphe de h est aussi une droite; il suffit donc d'en construire deux points, ce qu'on verra sur la figure 1.



Cherchons, par exemple, l'image de x = 1. Sur le graphe de f se trouve le point F(1 ; –1,5). On mène par F la parallèle à l'axe des x qui coupe en E le graphe de e. On a E(–1,5 ; –1,5) et c'est en ce point que –1,5 image par f devient préimage pour g. On continue en menant par E la parallèle à l'axe des y jusqu'à son intersection G avec le graphe de g. On a G(–1,5 ; 6). Il suffit alorsde fermer le rectangle et le quatrième sommet H(1 ; 6) appartient au graphe de h.

Reprenons la même construction pour une autre abscisse x. Cette fois, nous garderons les notations générales. On part de F'(x ; f(x)) où f(x) = t. On a F'(x ; t), puis E'(t ; t). On passe à G'(t ; g(t)), puis à H'(x ; g(t)). Comme g(t) = g[f(x)] h(x) = y, H' est bien un point du graphe de h.

Après un certain entraînement, on peut même abréger le procédé en jouant habilement avec les points d'intersection de e avec f d'une part, avec g d'autre part. Dans ce cas (voir fig. 2), les rectangles sont «aplatis» et il ne reste que deux segments à tracer pour obtenir le graphe de h.

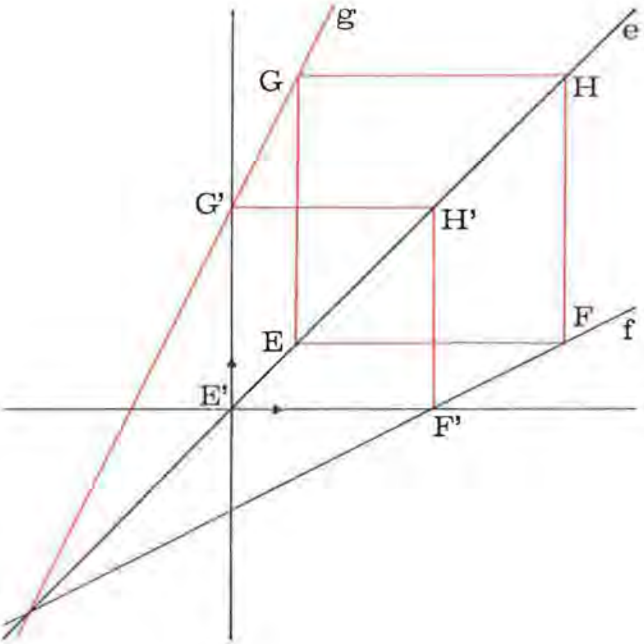


La méthode graphique précédente s'applique aussi pour la recherche d'une application affine inconnue g telle que

$$h = g * f$$

quand f et h sont données. Il suffit de construire les sommets F, E, H du rectangle et d'en déduire la position de G. Dans la figure 3, nous appliquons cette manière de faire au cas où

$$h = e$$



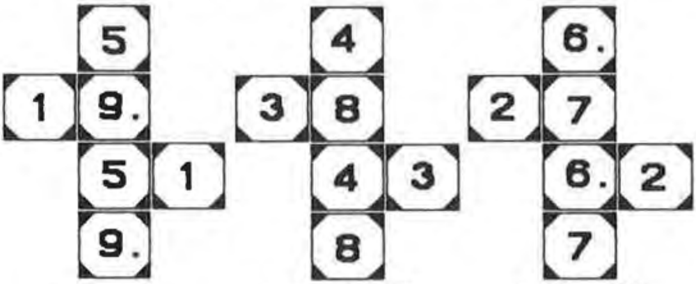
On cherche la fonction g telle que g * f = e, c'est-à-dire l'application réciproque de f. Dans ce cas, le point H est lui-même sur la droite e. Les points F, E, H sont trois sommets d'un carré dont G est le quatrième sommet. Ainsi F et G sont symétriques par rapport à la droite e. On retrouve par une voie géométrique une propriété bien connue: les graphes d'une application et de l'application réciproque sont symétrique par rapport à la bissectrice du premier et du troisième quadrant.

Trois dés troublants ou...
... les dés non transitifs

par Frédéric Oberson

Activité réalisée dans une classe de 7e année (prégymnasiale / effectif: 20) de l'école du Cycle d'Orientation de Pérolles, à Fribourg.
Activité portant sur deux leçon (durée: 50minutes chacune).

Matériel: Par couple d'élèves:
- un jeu de trois dés dont voici les développements:



Le dé BLEU　　Le dé ROUGE　　le dé VERT

– 4 fiches-résultats comme celle ci-dessous:

Fiche-résultats

Une partie: 65 jets des deux dés choisis

Vos prénoms et noms: ....

Dés choisis:
Pour la classe,
le dé ....
Pour le professeur,
le dé ....

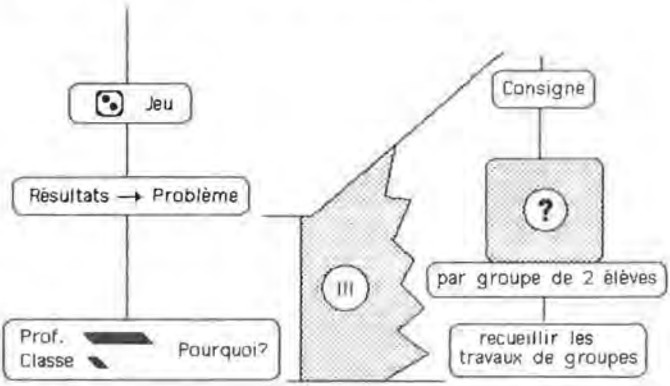
Le dé de la classe a gagné ...... fois. Celui du professeur a gagné ...... fois.

Vainqueur: (souligner) **la classe** **le professeur**

– une grande feuille (format A3) et un feutre noir.

Déroulement de la 1re leçon: (durée: 50 minutes)

I) Première période (durée: environ 20 minutes)



Déroulement projeté: Le maître présente les trois dés aux élèves. Il leur propose de participer à une expérience où le hasard entrera en jeu. Cette expérience devrait aider à clarifier le terme «probabilité».

On joue professeur contre élèves, de la manière suivante:

1) La classe est répartie par groupes de deux élèves: l'un des élèves joue pour la classe, l'autre joue pour le professeur. Chaque groupe possède les trois dés (1 rouge, 1 bleu, 1 vert) et 4 fiches-résultats.

2) Dans chaque groupe, les choses se passent de la manière suivante:
   a) L'élève qui représente la classe choisit l'un des trois dés.
   b) Le maître donne alors à l'élève jouant pour lui l'un des deux dés restant.
   c) On indique, sur la fiche-résultats: – les noms et prénoms,
      – quel dé est celui de la classe,
      – quel dé est celui du professeur.

3) Le groupe joue ensuite une première partie:
   Supposons que le dé-élève soit le ROUGE et que le dé-professeur soit le BLEU.
   a) L'un des élèves lance les deux dés. Si le ROUGE donne 4 et le BLEU 9, le BLEU gagne. L'autre élève note alors, dans une des 65 cases de la fiche-résultats, un B pour indiquer une victoire du dé BLEU.
      Ainsi de suite, 65 fois.
   b) On compte combien de B et combien de R figurent sur la fiche et on complète:
      Le dé de la classe a gagner ... fois. Celui du professeur a gagné ... fois.
      On indique, en soulignant, qui est le vainqueur de la partie.

4) On enchaîne avec une deuxième, une troisième, voire une quatrième partie.

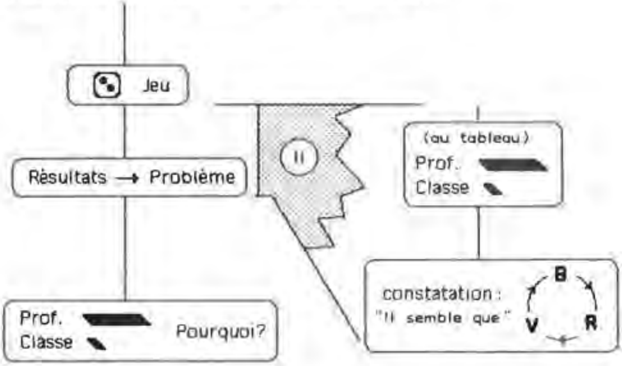
En écho de l'activité vécue: l'entrée en matière

Le maître: Qui invente une phrase qui soit une phrase vraie et dans laquelle on trouve le mot «PROBABILITÉ»?

Corinne: La probabilité de ... euh! ... La probabilité de cette phrase est ... euh!... Ce serait plus facile avec l'adjectif «PROBABLE» ... C'est probable qu'il pleuve aujourd'hui.

Personne ne veut se risquer avec le terme «PROBABILITÉ».

II) Deuxième période (durée: environ 10 minutes)



Déroulement projeté: On s'intéresse aux résultats obtenus.

1) a) Chaque groupe indique qui fut vainqueur et combien de fois.
   b) On note au tableau, par des coches, les résultats respectifs de la classe et du professeur.
2) A moins de jouer de malchance (ou peut-être de chance, c'est selon les points de vue), les résultats sont tels qu'ils mettent nettement en évidence la supériorité du maître sur la classe. Là, l'interrogation se lit sur les visages. «Y a un truc!» Tous les élèves sont pris au jeu. L'intérêt est là. Profitons-en!
3) Lorsque l'un des trois dés est choisi par l'adversaire, quel est le «bon dé» parmi les deux restant?

En écho de l'activité vécue: les résultats

Le maître: Nous allons noter au tableau les résultats obtenus. Dans votre groupe, François, qui a été vainqueur?
François: Une fois la classe; deux fois le professeur.
Le maître: Je note: une coche pour la classe, deux pour le professeur. Chez vous, Anne?
Anne: Trois fois le professeur.
...
Bertrand: 2 fois le professeur.
...
Natacha: 2 fois la classe.
... etc.
Au total, 18 coches pour le professeur et 3 seulement pour la classe.

En écho de l'activité vécue: la réaction des élèves face aux résultats

Remarque: J'avais prévu de demander à quelques élèves, un des trois dés étant retiré, de choisir parmi les deux dés restant (dans le but de faire apparaître la «supériorité» du dé BLEU sur le ROUGE, celle du ROUGE sur le VERT et celle du VERT sur le BLEU).

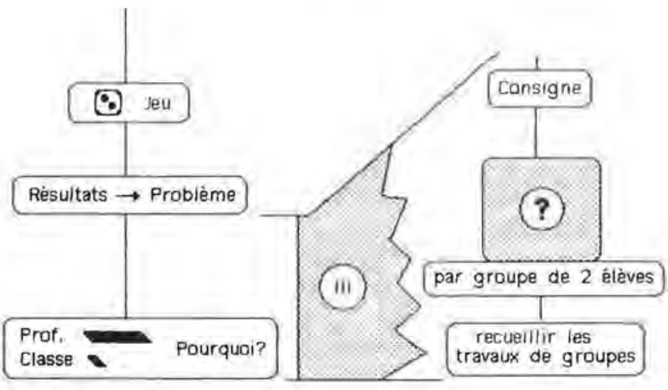
Ceci s'est avéré inutile compte tenu de la première constatation faite par Juliana.

Juliana: Le rouge bat le vert; le bleu bat le rouge et le vert bat le bleu.
Le maître: Bon, je vais noter cela schématiquement. Voilà le schéma de Juliana: «BLEU *bat* ROUGE, ROUGE *bat* ...» Pour le moment, je met «bat» entre guillements. Nous verrons plus tard pourquoi.
Valérie: Vous avez toujours regardé les dés quand vous avez choisi. Je crois que vous avez triché!
Le maître: J'ai toujours laissé au représentant de la classe le soin de choisir le premier dé! Mais tu te méfies de quelque chose?
Valérie: Oui! Oui! (grand sourire).
Natacha: Mais moi, c'était plutôt le contraire. C'était tout le temps le vert qui battait le rouge!
Le maître: Donc toi, tu n'es pas d'accord avec le schéma de Juliana?
...

Christophe: Chez nous, le vert a perdu contre le bleu!
Le maître: Toi non plus, tu n'es pas d'accord avec ce schéma?
Aude: D'après Christophe, quand la classe a gagné, c'est là que ça n'a pas joué avec le graphique de Juliana et chez Natacha aussi. Donc ce sont ceux chez qui la classe a gagné une fois qui ne sont pas d'accord avec ce que Juliana a fait!
...
Le maître: Pour résumer, on voit bien qu'il y a un petit mystère là-dessous! Je vous propose d'élucider tout cela en travaillant par groupe de 2.

Au terme de cette période, le schéma de Juliana figure au tableau, complété ainsi:

III) Troisième période (durée: environ 20 minutes)



Déroulement projeté: On distribue à chaque groupe une grande feuille et un feutre.

La consigne: Le schéma de Juliana est-il correct? Pourquoi?

Chaque groupe indique, sur sa feuille, les constatations qui l'ont amené à être d'accord avec le schéma ou à le rejeter comme incorrect.

Durant cette période, on ne sait trop ce qui va se produire. Certains groupes, manifestement n'ont besoin d'aucune aide.D'autres démarrent avec plus de difficultés. Des «coups de pouce» sont nécessaires qui consistent le plus souvent en des encouragements du genre: «Choisissez deux dés. Jouez et notez ce qui se passe.», «Qu'est-ce-que vous avez noté?», «Etes-vous sûrs d'avoir là toutes les possibilités de résultats avec ces deux dés?», etc.

En écho de l'activité vécue: la recherche, comment «voir clair» dans tout cela?

Roula: 7 et 7, 14, ... 6 + 6, 12, ... 26 et deux fois 2 ... 30. On a toujours 30.

Aude: On essaie de voir «Le vert bat le bleu». Les deux côtés des faces des dés ont le même nombre. Donc on peut retenir 3 nombres seulement. Par exemple, pour le bleu 9, 5 et 1.

Sylviane: Ici c'est pour le bleu; là pour le vert et là pour le rouge. Le vert bat le bleu parce qu'il y a deux nombres qui sont «plus forts» sur le vert et il n'y en a qu'un sur le bleu.

Isabelle: Si, avec le rouge, on tombe sur 3, ça fait 2 chances de gagner pour le bleu. Si on tombe sur le 4, ça fait encore 2 chances de gagner...

Au terme de cette première leçon, le maître demande combien de groupes sont pour le schéma de Juliana, combien sont contre, combien n'ont pas encore d'idées à son sujet. On récolte les feuilles en précisant que le lendemain, on utilisera ces travaux de groupes pour éclaicir totalement les choses.

Déroulement de la 2e leçon: (durée: 50 minutes)

IV) quatrième période (durée: environ 20 minutes)

Déroulement projeté: Les travaux de groupe (Feuilles A3) sont collés au tableau. Les élèves prennent leur chaise et s'installent devant le tableau de manière à pouvoir lire les documents affichés.

En écho de l'activité vécue: la situation clarifiée

Le maître: Alors Christophe et Valérie vous avez réflécchi depuis hier? Vous vous êtes fait une idée?

Christophe: Non! On a peut-être les éléments pour répondre, mais on n'est pas sûr!

Christophe, Séverine

Tous les dés ont 30 points, et 6 faces

B - R

R	V	
3	2	R 1
3	6	V 1
3	7	V 2
4	2	R 2
4	6	V 3
4	7	V 4
8	2	R 3
8	6	R 4
8	7	R 5
45	45	

B	R	Vainqueurs
1	8	R: 1
1	4	R: 2
1	3	R: 3
5	8	R: 4
5	4	B: 1
5	3	B: 2
9	8	B: 3
9	4	B: 4
9	3	B: 5
45	45	

B : 5 | 4
R : 4 | 5
V : 4 | 5

B-V

B	V	
1	2	V
1	6	V
1	7	V
5	2	B
5	6	V
5	7	V
9	2	B
9	6	B
9	7	B
45	45	

Bleu : 1-5-9

Vert : 2-6-7

Rouge : 3-4-8

Xavier: On a fait des comparaisons entre les dés. On a pris ici le dé bleu et le dé vert. On a mis chaque fois toutes les faces par rapport aux autres faces et on a remarqué que le vert peut gagner une fois de plus si on compare toutes les faces. Alors sur un très grand nombre de coups, quand on tire assez souvent les dés, normalement, c'est toujours le vert qui gagne, sauf exception comme on l'a vu avec Titou et Natacha.

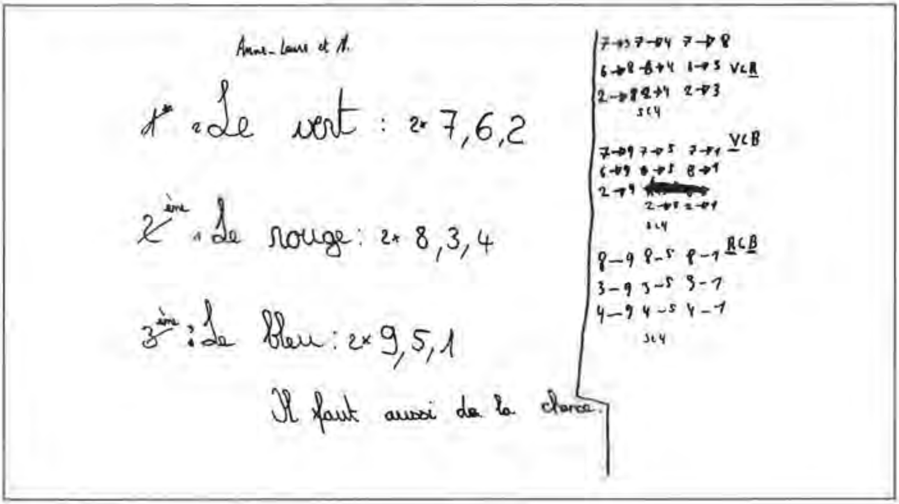
Laurent: On a fait tous les résultats qui puissent exister avec le dé vert et le dé rouge. Le dé rouge gagne 5 fois donc une fois de plus que le dé vert et sur une moyenne de 60 coups jetés, et bien, ça se remarque! ... Normalement!

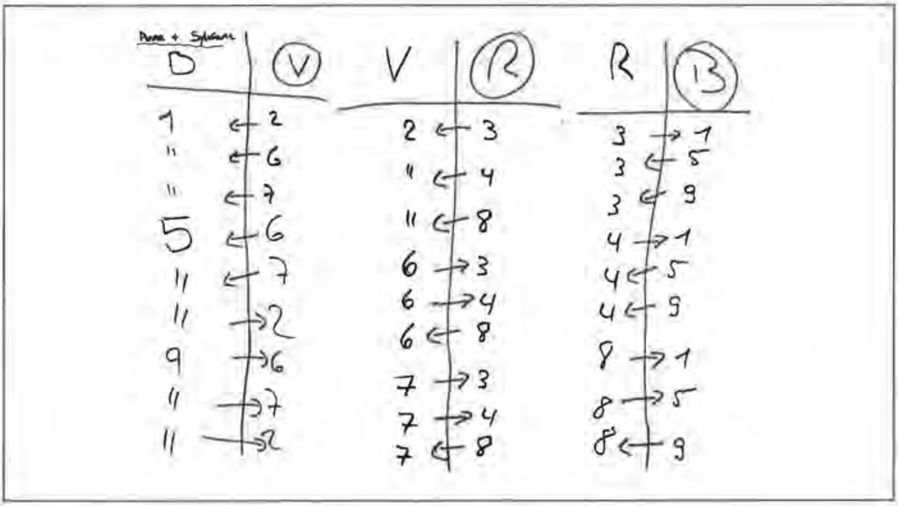
(4) B	V (5)		(4) V	R (5)		(4) R	B (5)	
9	7	B	7	4	V	3	5	B
9	2	B	7	8	R	3	1	R
9	6	B	7	3	V	3	9	B
5	2	B	2	4	R	8	5	R
5	7	V	2	8	R	8	1	R
5	6	V	2	3	R	8	9	B
1	7	V	6	4	V	4	5	B
1	6	V	6	8	R	4	1	R
1	2	V	6	3	V	4	9	B

Crittin Xavier
Kaiser Laurent

Manifestement, après les explications de Xavier et Laurent, la plupart des élèves de la classe semblent comprendre le pourquoi des résultats obtenus après l'expérience de la première leçon. On poursuit cependant avec des représentants d'autres groupes dans le but de voir si, malgré les différences dans l'organisation des informations présentes sur la feuille, il y a accord ou non avec Xavier et Laurent.

Voici les feuilles de quelques-uns des autres groupes:





Bleu : 1 - 5 - 9
vert : 2 - 6 - 7
rouge : 3 - 4 - 8

V contre B : 5 sur 9
R " V : 5 sur 9
B " r : 5 sur 9

AUDE et [illegible]

V	B	R	V	B	R
2	1	8	2	1	3
2	5	8	6	1	4
2	9	8	7	1	8
6	1	4	2	5	3
6	5	4	6	5	4
6	9	4	7	5	8
7	1	3	2	9	3
7	5	3	6	9	4
7	9	3	7	9	8

(Maria, Valérie)

Dé vert : 7 ; 7 ; 6 ; 6 ; 2 ; 2 le vert gagne
Dé bleu : 9 ; 9 ; 5 ; 5 ; 1 ; 1

Dé vert : 7 ; 7 ; 6 ; 6 ; 2 ; 2
Dé rouge : 8 ; 8 ; 4 ; 4 ; 3 ; 3 le rouge gagne

Dé bleu : 9 ; 9 ; 5 ; 5 ; 1 ; 1 le bleu gagne
Dé rouge : 8 ; 8 ; 4 ; 4 ; 3 ; 3

$$\begin{array}{ccc} & \text{vert} & \\ \text{bat} \nearrow & & \searrow \text{bat} \\ \text{rouge} & \xleftarrow[\text{bat}]{} & \text{bleu} \end{array}$$

sauf exeptions !

V) Cinquième leçon (durée: 30 minutes)

Déroulement projeté: Une constatation qui ne m'étonne pas outre mesure: aucun groupe n'a eu recours au tableau à double entrées pour exprimer les résultats de sa recherche. Je propose au rétroprojecteur les trois tableaux ci-dessous et j'invite trois élèves à s'exprimer à leur sujet.

		ROUGE		
	↗	3	4	8
BLEU	1			
	5			
	9			

		ROUGE		
	↗	3	4	8
VERT	2			
	6			
	7			

		BLEU		
	↗	1	5	9
VERT	2			
	6			
	7			

?

On s'intéresse ensuite à préciser le sens de ... «bat» ... utilisé tout au long de la leçon.

En Echo de l'activité vécue: préciser le langage

...

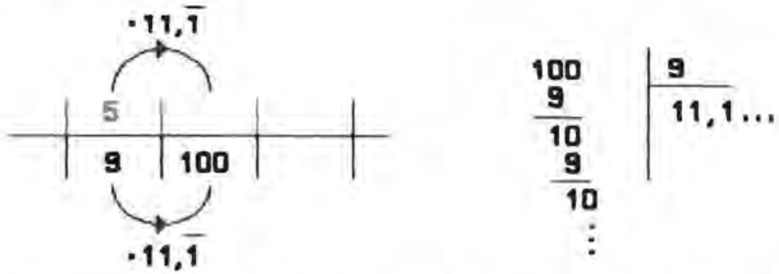
Le maître:	Est-ce tout à fait correct de dire: «Si je joue une partie avec le dé BLEU et le dé VERT, le dé VERT bat le BLEU»?
Valérie:	On sait que ça se fera en gros comme ça. Mais il y aura toujours des exceptions.
Xavier:	Il y a toujours les exceptions qui confirment la régle!
Le maître:	Comment devrait-on traduire le verbe «bat» pour être plus précis?
Corinne:	C'est probable que le BLEU batte le ROUGE.

...

Le maître:	Y aurait-il d'autres manières de dire?
Aude:	Le VERT a 5 chances sur 9 de battre le dé BLEU.
Le maître:	Ce qui nous ferait combien de chances sur 100?
Aude:	1/9 en code à virgule c'est 0,1111... Donc 5/9 c'est 0,5555... Alors, sur 100, on aura 55,5555...
Le maître:	(en l'occurence, assez «soufflé» par l'explication de Aude) Donc environ 56 %. Si on veut employer le terme «probabilité», on dit: «La probabilité (d'avoir le dé VERT qui batte le dé BLEU) est d'environ 0,56 pour 1 ou de 56 pour 100).

...

Quelques élèves n'ayant pas bien suivi le raisonnement de Aude, on entreprend, au tableau, d'obtenir les mêmes résultats en recourant à un tableau de correspondance.



Je propose ensuite aux élèves de regagner leurs places et, par groupes de deux, de compléter les phrases suivantes:

Expérience: On jette un dé normal.

Quelle est la probabilité d'obtenir

	en «pour six»	en «pour un»	en «pour cent»
– un nombre plus petit que 5	....	....	....
– un nombre plus grand que 6	....	....	....
– un nombre plus petit que 7	....	....	....
– un multiple de 2	....	....	....

J'avais prévu d'en rester là dans ma tentative de clarification du terme «probabilité». Toutefois, quelques jours plus tard, j'ai proposé à chaque élève de compléter le questionnaire suivant (temps accordé: 30 minutes).

Les dés non transitifs – Quelques questions (Bleu – Rouge – Vert)

Bleu 1 5 9 **Rouge** 3 4 8 **Vert** 2 6 7

No 1 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Complète par V ou F.)

Lorsqu'on joue une partie avec un dé ROUGE et un dé VERT, c'est le dé ROUGE qui gagne. |......|

Lorsqu'on joue avec le dé BLEU et le dé ROUGE, le joueur qui possède le dé ROUGE est défavorisé. |......|

Si je lance 9 fois le couple de dés VERT-ROUGE, le ROUGE gagne 5 fois. |......|

Lorsqu'on joue avec le dé VERT et le dé BLEU, le joueur qui possède le dé VERT a environ 56 chances sur 100 de gagner. |......|

Vendredi dernier, 10 jeux ont été effectués avec les dés BLEU et VERT. Sur les 650 jets de dés réalisés, le nombre de fois où le dé VERT a gagné peut être calculé ainsi :
On prend les 5 neuvièmes de 650; ce qui donne $361,\overline{1}$.
Il y a donc eu, vendredi, 361 jets gagnés par le dé VERT jouant contre le BLEU. |......|

Lorsque je jette, ensemble, un dé ROUGE et un dé BLEU, la probabilité que BLEU gagne est supérieure à un demi . |......|

No 2 Indique chaque fois la probabilité par un code fractionnaire / un pourcentage / un nombre décimal arrondi au centième

A) Lorsque je jette un dé normal (comportant les nombres de 1 à 6),

a) la probabilité d'obtenir un nombre pair est ______ ______ ______

b) la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à trois est ______ ______ ______

c) la probabilité d'obtenir un nombre premier est ______ ______ ______

B) Lorsque je jette deux dés normaux, et que j'additionne les deux résultats obtenus,

d) la probabilité d'obtenir 2 est ______ ______ ______

e) la probabilité d'obtenir 3 est ______ ______ ______

f) la probabilité d'obtenir 4 est ______ ______ ______

Cette petite évaluation me révéla:

pour le nº 1,	chez presque tous les élèves, une réelle sûreté de jugement,
pour le nº 2 A)	chez la majorité des élèves, une détermination correcte de la probabilité dans les trois cas demandés, et pratiquement aucune difficulté à l'exprimer de trois manières différentes,
pour le nº 2 B)	une réelle débrouillardise chez un bon tiers des élèves,
à la restitution des travaux,	un intérêt marqué chez les élèves pour la clarification de situations de ce type.

Voilà qui m'incitait certes à poursuivre en leur proposant, par exemple, une partie de Yatsé, avec l'ambition, lorsqu'un choix s'offre au joueur, de faire un peu confiance aux calculs, mais ... je m'entendis dire «Prenez maintenant votre livre à la page ...» ... et le programme reprit ses droits.

En conclusion

Incontestablement ces dés non transitifs intéressent les élèves et leur permettent d'attacher une certaine signification aux termes «probable», «probabilité».

Mais l'essentiel n'est pas l'approche de cette notion qui, en 7e année, ne fait pas partie du programme. Ce qui compte plutôt, c'est tout d'abord de donner aux élèves l'occasion d'une recherche vraie, à partir d'une réalité simple: trois dés portant toute l'information nécessaire pour élucider le mystère du «Prof favorisé par le sort». C'est aussi d'entraîner un certain nombre de savoir-faire relevant du programme (codage de rationnels, pourcentages, ...) dans un contexte nouveau, mobilisant facilement l'intérêt des élèves.

Donc, en fait, une activité incluant développement d'aptitudes et acquisition de connaissances, c'est-à-dire s'appuyant sur les deux piliers du programme-cadre de mathématique CIRCE III, adoptés – faut-il encore le souligner? – en 1986 par les cantons de BERNE, FRIBOURG, GENÈVE, JURA, NEUCHÂTEL, VALAIS et VAUD, pour les degrés 7, 8 et 9.

J. A. 1200 GENÈVE 2

TABLE DES MATIÈRES

Editorial: *M. Chastellain,* 1
Apprendre à communiquer, *N. Guignard* 2
Le jeu d'Abalone, *M. Goerg* 9
Composition des applications, *A. Calame* 15
Trois dés troublants, *F. Oberson* 20

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Florina, 1950 Sion