146

MATH ECOLE

JANVIER 1991
30e ANNÉE

MATH-ECOLE 146
30e ANNÉE Paraît cinq fois par an JANVIER 1991

Editorial

Balivernes et billevesées

Ainsi la France a trouvé l'antidote au mouvement de révolte des lycéens. Balayées les écoles vétustes, les classes surchargées et les conditions d'enseignement difficile; liquidés l'illettrisme et le chômage endémique des jeunes, exorcisés les problèmes de l'adaptation de la formation au monde de notre temps! Ce qui importe et ce qui mobilise, c'est de savoir si le ph de nénuphar (et pourquoi pas nénu-phare, tant qu'on y est?) lui permet de mieux flotter, c'est de sentir si le vieillard est plus voûté sous le poids du circonflexe ou si l'abîme affublé du même chapeau en est d'autant plus profond.

Et clament les doctes académiciens! Et les déclarations médiatiques de tel baladin prennent joyeusement le pas sur les patients travaux des linguistes et des grammairiens. Après tout, puisqu'il n'y a plus lieu de discuter du sexe des anges, pourquoi ne pas se déchirer (on ne s'étripe plus, hélas) afin de savoir si le pique-nique est plus savoureux que le piquenique, ou même que le picnic à en croire la publicité qui sert bien souvent de base à la culture de nos bambins?
Nous sommes, direz-vous bien loin des problèmes traités habituellement dans Math-Ecole. Que non point!

Les autorités de Suisse romande ont décidé de remettre à l'étude les moyens d'enseignement de mathématique pour les degrés 1 à 4 de la scolarité obligatoire. Des commissions de travail — et des clans aussi — vont certainement se former. On se remettra à débattre pour savoir si celui qui vit dans la classe (le maître bien sûr, pas l'élève) est plus ou moins compétent que celui qui la regarde de l'extérieur. On se posera doctement la question de savoir si le manuel est meilleur lorsque l'on ne se laisse pas squatteriser (pardon! envahir) par la mathématique du mathématicien.

On ratiocinera certainement sur le nombre des pages, sur l'usage du papier recyclé et sur les économies que l'on pourrait faire en remettant aux enfants des ouvrages dits transmissibles, c'est-à-dire bien vite cornés, salis, abîmés, donnant peu envie de les ouvrir lorsque l'enfant les reçoit.

On opposera aussi, fort probablement, les tenants des robots arithmétiseurs (beau néologisme!) aux adeptes des «situations», les fanatiques des «bases» à ceux des «ensembles», les défenseurs du résultat immédiat à ceux d'une perspective à long terme.

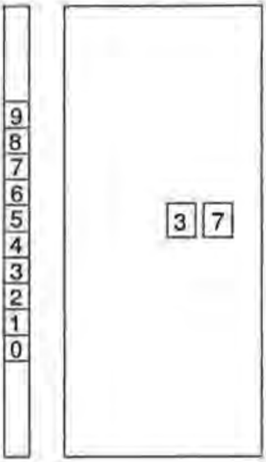
Vous ne me croyez pas! Vous avez bien raison. Tout ce qui précède n'est que l'effet d'un cauchemar lié à la sinistrose ambiante largement véhiculée par les media dans notre pays.

Vous verrez qu'ils seront super, les prochains manuels, parce qu'ils résulteront d'une concertation étroite entre enseignants, chercheurs, didacticiens et mathématiciens, parce qu'ils seront plaisants, pleins de couleurs, et qu'ils donneront envie à chaque enfant de «mathématiser», parce qu'ils intégreront les dernières découvertes en matière d'apprentissage, parce qu'enfin et surtout ils seront exploités par des enseignants prêts à assumer le fait qu'une classe est par nature formée d'éléments hétérogènes, par des maîtres assurés que chaque enfant, quel que soit son rythme propre de développement, a droit à une scolarité harmonieuse, et que le manuel ne constitue que l'un des éléments d'un processus global visant à faire de chaque élève l'artisan conscient de son propre apprentissage.

Raymond Hutin

Compteurs par-ci, compter par-là

par Nadia Guillet, méthodologue, SRP-Genève



Matériel: Compteurs en carton proposés dans la méthodologie de 2P (NU Activité 2 -suggestion 3) et de 4P (NU Activité 3b, 1).

Modèle à tirettes entièrement recouvertes par l'écran à fenêtre (place prévue pour une 3e fenêtre).

Objectif:

Comparer comptage, dénombrement et code écrit en base dix.

Il est important de se rappeler les difficultés que représentent pour l'enfant la construction du nombre et celle du système de numération.

Cela ne peut se faire sans laisser aux enfants le temps de créer leurs propres représentations qu'ils doivent pouvoir confronter régulièrement à la tâche demandée.

Quant à l'exercice conduisant à l'acquisition d'automatismes, il devrait, pour chaque élève, venir à point...

Classe de 2P (fin novembre)

Sauf cas particuliers, les enfants connaissent le comptage jusqu'à 100, lisent les nombres jusqu'à 50 et plus et dénombrent correctement une collection d'objets de cet ordre de grandeur.

Organisation:

— 4 équipes de 2 enfants (les autres élèves de la classe sont occupés à une autre tâche).

— Par équipe: un compteur et une enveloppe contenant entre 30 et 40 jetons (ex: 38, le nombre n'est pas connu des enfants).

Petite entrée en matière sur les compteurs que les enfants connaissent dans la vie quotidienne: compteurs de kilomètres, de litres d'essence, d'argent, etc.

Le compteur en carton qui est ensuite remis à chaque équipe est à zéro. Il ne fait l'objet d'aucune discussion commune, d'aucun commentaire de la part de l'enseignante, d'aucune explication concernant sa facture et son fonctionnement.

Consigne (donnée oralement):

> Vider le contenu de l'enveloppe sur la table.
>
> Un des deux enfants remet 1 à 1 les jetons dans l'enveloppe, l'autre enfant actionne le compteur pour lui faire compter les jetons.
>
> Quand tous les jetons sont dans l'enveloppe, on doit pouvoir lire sur le compteur le nombre de jetons qui s'y trouvent, combien il y en a à l'intérieur de l'enveloppe.

Conduites observées:

D'une manière générale, l'enseignante ne sanctionne pas (par juste ou faux). Elle n'intervient que pour renvoyer l'enfant à la consigne ou le mettre devant une contradiction.

Voici quelques observations de conduites d'élèves:

— Aucun groupe n'hésite sur la tâche à accomplir, tous se mettent au travail immédiatement, avec entrain, sans commentaire: déplacer la bande d'une case chaque fois qu'un jeton est mis dans l'enveloppe est une condute évidente, la correspondance terme à terme est, en l'occurence, respectée.

— Très peu d'élèves commencent par tirer la première bande à gauche (celle qui est destinée aux dizaines) ce que l'enseignante laisse faire sans commentaire. La suite se déroule de la même manière que pour les autres enfants.

Ayant épuisés les chiffres de la première bande tirée, les élèves poursuivent de manières diverses:

a) Certains, s'arrêtant donc à 9, veulent me rendre le restant des jetons: «Vous nous en avez trop donné!

Réponse: Non, je souhaite bien que le compteur compte tous ces jetons.

b) Les enfants pensent alors à recourir à la 2e bande spontanément (ou après a), en l'actionnant pour chaque nouveau jeton mis dans l'enveloppe, ce qui donne:

b1) 19
29
39 Aucune lecture du nombre ne vient remettre en
.. question ce mode de faire.
..
99

Ayant trop de jetons, les enfants veulent les rendre.

Enseignante: Le compteur indique qu'il y a combien de jetons dans l'enveloppe?

Certains sont étonnés de la question, ils ont oublié la deuxième partie de la consigne.

Elle leur est rappelée et ils lisent, en général sans peine, nonante-neuf (99).

Enseignante: Vous êtes bien sûrs qu'il y a 99 jetons dans l'enveloppe?

Très dubitatifs, tiraillés entre le peu de jetons qu'ils voient dans l'enveloppe et le grand nombre que représente pour eux 99, ils décident de recommencer. Certains recommenceront plusieurs fois avant d'envisager une autre conduite. D'autres ont immédiatement recours à la conduite qui consiste à compter, à voix basse ou haute, tout en lisant sur le compteur au fur et à mesure que se déroule l'action.

Le passage de la dizaine amène ce type de discussion entre les deux enfants:

«Dix, ça s'écrit 10, alors on remet la 1ère bande sur 0 et la 2e sur 1».

Que se passe-t-il ensuite?

Soit:

— l'équipe continue à contrôler l'adéquation entre la récitation de la suite de nombres, l'écriture sur le compteur et le dénombrement et parvient au bout de la tâche: tous les jetons sont dans l'enveloppe et le compteur indique 38. La vérification pratiquée par les enfants lorsqu'elle est demandée, consiste à recommencer ou à dénombrer simplement la collection de jetons sans utiliser le compteur.

Soit:

— l'équipe n'effectue pas le contrôle «lecture-écriture» et poursuit avec la même conduite que précédemment en tirant la bande des dizaines de case en case pour chaque jeton remis dans l'enveloppe. Ils obtiennent:

b2) 10
20 Et il reste toujours des jetons hors de l'enveloppe!
30
..
90

La suite est la même qu'après b1): question de l'enseignante, air dubitatif des enfants et décision de recommencer tout en comparant comptage et lecture sur le compteur, jusqu'à ce que la tâche soit terminée et réussie. Cette conduite, qui consiste à s'appuyer sur la récitation connue de la suite des nombres pour actionner correctement le compteur, leur permet de passer sans difficulté la barre de la trentaine, de la quarantaine, etc...

Voici quelques autres activités et observations au cours de plusieurs séances ultérieures avec le compteur et les jetons.

A. Les enfants sont toujours 2 par 2, l'un s'occupant des jetons, l'autre actionnant le compteur et vice-versa. 50 jetons sont à disposition. Toute la classe travaille en même temps.

Consigne (donnée oralement)

Chaque fois que je dirai «HOP», 1 jeton sera mis dans l'enveloppe et comptabilisé sur le compteur. A «STOP», j'appellerai quelques élèves qui énonceront le nombre de jetons contenus dans l'enveloppe en lisant sur le compteur.

Les «STOP» interviennent pour permettre aux enfants:

a) de vérifier la coordination entre le mot HOP, la mise en place du jeton et la comptabilisation sur le compteur: correspondance terme à terme;

b) d'observer, discuter et exercer le passage des dizaines:

... 9, «HOP», 10, «STOP», ...

...19, «HOP», 20, «STOP», ...

...29, «HOP», 30, «STOP», ...

Les enfants racontent ce qui s'est passé.

c) de lire des nombres.

B. Chaque enfant construit son compteur.

Il est également muni d'une feuille de papier et de 30 à 40 jetons à mettre dans une enveloppe.

Consigne (donnée par écrit):

Place 0 (zéro) sur ton compteur. Inscris 0 (zéro) sur ta feuille. Mets toujours 2 jetons à la fois dans l'enveloppe et comptabilise avec le compteur. Note chaque fois le résultat sur ta feuille (l'état du compteur).

Modifier ensuite la consigne en jouant sur les variables:

— Etats de départ différents: entre 0 et 10, entre 10 et 20, etc.

— Opérateurs différents: (+5) , (+10)

— Abandon des jetons.

Observations des élèves:

Certains élèves comptent mentalement et ne font que placer le résultat sur le compteur comme ils le notent sur la feuille.

Enseignante: Le compteur ne calcule pas de tête! Il va toujours de 1 en 1. Comment procède-t-il pour faire (+5) ?

Elève: Il avance d'une case, puis encore d'une case, puis encore d'une case, jusqu'à 5 cases. Puis on voit où il arrive.

<u>Remarque:</u>

La difficulté est la suivante:

Le compteur présente les états successifs que l'enfant voit défiler sous ses yeux (...17, 18, 19, 20, 21, ...). Quant à l'opérateur (+5) , il est présent dans la consigne et devrait l'être et le rester dans la tête de l'enfant tout au long de l'activation du compteur. Or, précisément, l'élève est «tiraillé» entre les nombres qu'il voit et ceux qui sont pensés ou dits! Comment procéder pour ajouter 5 et non pas 4 ou 6, à coup de (+1) , sans se perdre au passage des dizaines?

A l'élève de trouver sa procédure.

A propos du travail avec l'opérateur (+10),

a) quelques élèves actionnent immédiatement la bande des dizaines (connaissances personnelles déjà acquises);

b) une bonne partie des élèves découvre, grâce à l'écriture des états notés sur la feuille:

  — qu'un chiffre revient toujours le même, celui de la 1ère bande à droite;

  — que le chiffre de la 2e bande augmente toujours de 1;

  — que cette augmentation de 1 est, en fait, une augmentation de dix;

  — que pour ajouter dix, on peut économiser de la peine et du temps en tirant uniquement sur la 2e bande.

Lorsque cette dernière assertion survient, la relance de la maîtresse peut être:

«Vérifie ce que tu viens de dire.

Choisis un autre nombre entre zéro et dix et fais +10 :

1° en comptant de 1 en 1.

2° en actionnant directement la 2e bande.

Ecris chaque fois les états et compare.»

c) quelques élèves n'ont pas l'habitude d'observer. La relance de l'enseignante va précisément porter sur cet aspect: engager les enfants à observer ce qu'ils ont écrit, à dégager quelques remarques.

C. Chaque enfant a son compteur.

Consigne (donnée oralement):

> A chaque «HOP», je mets 1 jeton dans mon enveloppe et vous le comptabilisez sur votre compteur. A «STOP», vous m'indiquez, en lisant sur votre compteur, le nombre de jetons qu'il y a dans mon enveloppe.

Les arrêts se font irrégulièrement et l'état du compteur est chaque fois noté au tableau noir.

Exemple: $\boxed{0}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{11}$ $\boxed{16}$ $\boxed{26}$ **etc.**

Ensuite une nouvelle consigne est donnée ayant pour objectif de faire retrouver les opérateurs:

> Essayez de retrouver combien de fois j'ai prononcé «HOP», pour passer du premier nombre au deuxième, puis du 2e au 3e, etc.
>
> Notez chaque fois ce que vous avez trouvé.

Alors que sous A et B le nombre de départ et l'opérateur sont donnés:

$$\boxed{a} \xrightarrow{\quad b \quad} \boxed{?}$$

cette dernière consigne propose un problème où le nombre de départ et celui d'arrivée sont donnés. L'opérateur est à découvrir:

$$\boxed{a} \xrightarrow{\quad ? \quad} \boxed{c}$$

Laisser les enfants trouver leurs procédures, les observer, en discuter, les comparer, laisser le temps de les parfaire. Il en est de même pour les notations.

Conclusion (momentanée et provisoire)!

Ces quelques activités peuvent être enrichies, étendues à des nombres plus grands, envisagées pour la soustraction, etc. Le petit compteur peut représenter, pour certains enfants, un bon modèle physique de la suite des nombres entiers et de leur écriture. Son utilisation en 2P, 3P, 4P (augmenter le nombre de fenêtres et de bandes) est source d'intérêt, de dynamisme et d'efficacité.

Dans les activités proposées ci-dessus, nous l'avons surtout exploité pour mettre en évidence la connexité de la suite des nombres entiers. Son utilisation pour comprendre notre système de numération positionnelle est tout aussi riche en observations. Pour ceux qui veulent creuser le sujet, nous recommandons la lecture d'un excellent mémoire de licence en sciences de l'éducation:

Problèmes liés à la numération: utilisation d'un compteur en 2P-3P. Isabelle Thorel-Cornut - FAPSE - Université de Genève

Pour votre bibliothèque...

Boole, l'oiseau de nuit en plein jour

Dans la collection (un savant, une époque), Souleymane Bachir Diagne, qui enseigne la philosophie à Dakar, présente dans un style alerte et relativement facile à lire la vie et l'oeuvre de George Boole, l'un des pères de la logique mathématique moderne.

En matière de logique, ce qui est remarquable, c'est que, après deux mille ans au cours desquels le monde a vécu sur la base de la logique d'Aristote, le 19e siècle voit soudain exploser le domaine de la logique. Ainsi, dans la partie consacrée à la biographie de G. Boole, nous voyons surgir au détour d'une page Newton, Leibniz, Hamilton de Morgan, et nous apprenons comment les échanges, les rencontres et les oppositions permettent, grâce à une idée somme toute bien simple, celle de la quantification du prédicat, de modifier complètement l'approche de la logique et de déboucher sur un calcul algébrique des propositions.

Tous les enseignants ont probablement quelques connaissances de l'algèbre de Boole et des règles de Morgan dont les aspects les plus élémentaires ont contribué aux belles heures de la mathématique dite moderne. Le sous-titre de l'ouvrage provient d'un avertissement de Willam Hamilton pour qui les mathématiques ne pouvaient que constituer un obstacle à l'étude de la logique et qui écrivait en 1866: *Un mathématicien en matière de logique est comme un oiseau de nuit en plein jour*. Depuis lors, ces oiseaux de nuit se sont révélés des plus clairvoyants et ont tracé la voie non seulement à la logique contemporaine, à l'axiomatique, mais ont permis aussi tout le développement de l'informatique.

Un ouvrage à lire, absolument.

R.H.

DIAGNE Souleymane Bachir, Boole, l'oiseau de nuit en plein jour, Editions Belin, Paris 1989, 262 p., environ 25 F.

A propos de l'erreur en mathématiques. Notion de cartes mentales.

par Jean-Daniel Monod, conseiller pédagogique (VD)

Avant propos

Que n'a-t-on pas écrit sur le sujet de l'erreur en mathématiques et en particulier sur l'erreur dans l'enseignement des mathématiques?

De nombreux livres, revues et publications plus modestes en sont déjà le reflet. Dans ce contexte je me contenterai d'un éclairage limité mais pratique pour l'enseignement de tous les jours: la notion de carte mentale.

Cette idée n'est pas de mon crû, elle figure déjà implicitement dans l'ouvrage d'André Giordan, épistémologue des sciences, professeur à Genève et à Paris, dans son ouvrage: «Les origines du savoir».

En voici une approche liée à l'enseignement de la géométrie à des élèves de quatorze ans.

Contexte

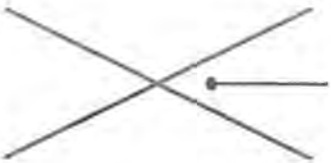
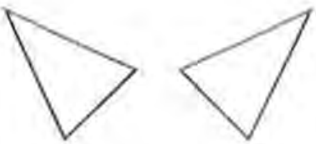
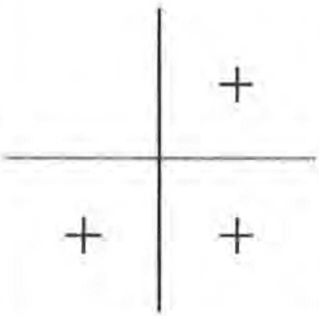
Dans le canton de Vaud, lors des premières leçons de géométrie plane au niveau 8e prégymnasiale, il est prévu la mise en forme d'un catalogue de propriétés géométriques admises par la classe. Celles-ci ont été récoltées tout au long de la 7e année lors de leçons dites de «géométrie expérimentale».

Porté par le souci d'être le plus près possible des élèves, j'ai soumis à leur sagacité les trois figures suivantes avec mission d'en faire la description spontanée. Aucune consigne de «mathématicité» n'a été rappelée, j'ai simplement dit: «Décrivez ces figures comme vous les voyez à cet instant!»

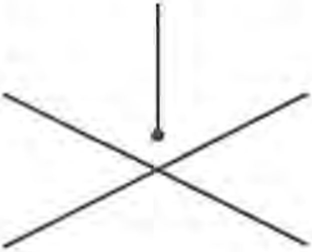
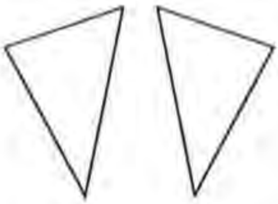
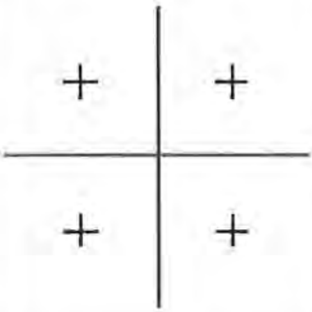
Si l'opération vous tente, en dix minutes le tour est joué et vous pouvez récolter des résultats comme ceux qui vont suivre car je ne crois pas qu'ils soient spécifiques aux élèves qu'on m'a confiés.

Travaux d'élèves

De quarante travaux d'élèves j'extrais un certain nombre d'images, celles qui me paraissent les plus percutantes.

Figures	Description spontanée
	- panneau: "Vous êtes ici." - cible + flèche - une croix + une épingle - une sorte de flèche - défense de mettre le feu - avion survolant un carrefour - baguette de xylophone - pyramide avec colonie de fourmis qui s'y dirigent - sillon d'un tracteur dans un champ - interdit de toucher à une allumette - ...
	- yeux de loup - ailes de papillon - noeud papillon - flipper - deux équerres - un bonnet d'âne - ailes delta vues d'en haut - oreilles de chat, de lapin, d'âne, ... - boutons d'ascenseur - ...
	- croix sur un drapeau - tableau d'additions - cimetière avec mur et croix - cimetière avec chemin au milieu des tombes - cimetière avec encore une place libre (pour vous!) - tombeau familial - vélo dans jardin - fusil avec viseur sur trois hommes - ...

Attention, ce n'est pas tout, un léger changement de position ou d'objets modifie considérablement l'évocation d'images chez les élèves. Il apparaît ceci:

Figures	Description spontanée
	- attention danger - une épingle et un carrefour - une épingle et deux aiguilles à tricoter - tête de clou appuyée sur deux droites - une allumette sur une intersection - clou + carrefour - un croisement avec un feu au milieu - un point d'atterrissage pour parachute - une araignée commençant sa toile - une baguette qui lance un sortilège - ...
	- yeux de monstre - col de chemise - deux pointes de flèche - deux dents de vampire - une pyramide - boutons de jeu électronique - morceaux de verre pour vitraux - un patron de jupe - deux montagnes à l'envers - deux triangles la tête en bas - ...
	- cimetière avec quatre tombes - horloge - jeu de Jaq - système d'axes avec quatre points - gens assis autour d'une table - étoiles dans le ciel - début du jeu d'Othello - signes sur une carte - viseur - une croix + une croix dans chaque quadrant - ...

Conclusion

J'en déduis que spontanément les élèves — là où je ne veux voir que segments, droites, demi-droites et points — ont à l'esprit bien d'autres choses et qu'il faut en avoir conscience avant que de plaquer quelque théorie géométrique que ce soit... Nous savons bien que les mathématiques sont une réduction, une abstraction, qu'elles dépouillent les objets de nature, dont elles s'inspirent souvent, pour n'en garder qu'une ossature idéalisée, mais ce travail profond n'est pas toujours présent à l'esprit des élèves.

C'est là qu'intervient l'outil intellectuel «carte mentale».

Parler à ces élèves de positions relatives de droites, de demi-droites, de segments et de points c'est comme d'expliquer où est Paris dans la France à l'aide d'un plan du métro ou tenter de situer un hôtel de Genève à l'aide d'une carte de la Suisse!

Je crois que l'image est puissante.

En effet, c'est lorsque le maître et les élèves auront trouvé une carte à la même échelle qu'ils pourront communiquer et se comprendre. Encore que, s'ajoute à cela une série de codes, de notations, d'abus de langage plus ou moins explicités qui nécessitent que l'on se mette d'accord pour que les cartes comportent le même index.

Cette mise à l'échelle des cartes mentales est là pour meubler un espace de connivence entre le maître et les élèves et le rendre confortable.

Sans cela, les élèves sont obligés de croire sur parole ce que le maître affirme (leur carte est trop grossière et le maître en a une plus détaillée, il sait!) ou le maître va interpréter les réponses des élèves comme des erreurs alors qu'il s'agit peut-être simplement de la lecture correcte d'une carte à une autre échelle.

Avec en tête la question «ai-je la même carte que mes élèves?», le maître peut espérer se faire comprendre et réduire au maximum les erreurs dont la source est un problème de communication.

Dans l'enseignement des mathématiques on ne peut pas parler un double langage en arguant du fait que les élèves ne comprennent qu'à demi-mot!

Cela ne va pas résoudre tous les problèmes de communication entre maître et élèves, il reste encore beaucoup à exploiter du côté de la question que l'élève se pose. Ne résout-il pas souvent un autre problème que celui auquel pense le maître? On peut l'observer facilement dans des activités de recherche où la donnée n'induit pas immédiatement la solution. Dans ce cas ne répond-il pas souvent juste à la question qu'il se pose?... mais ceci est un autre problème.

Ça ne tombe pas juste!

par Marc Blanchard, Rochefort

20 divisé par 3, «ça ne tombe pas juste». Qui d'entre nous n'a entendu, voire prononcé une phrase analogue?

Et pourtant ou en effet:

— Pour partager 20 dalmatiens entre trois familles adoptives, il est facile d'en donner six à chacune mais que faire des deux qui restent?

— Pour partager 20 mètres de tissu en morceaux de 3 mètres chacun, une couturière peut facilement le faire et gardera peut-être la chute.

— Pour partager 20 mètres de tissu entre trois couturières, parions que cela ne leur poserait pas de grosses difficultés.

— Pour transporter 20 tonnes de marchandises avec un camion de 3 tonnes de charge utile, combien de voyages cela nécessitera-t-il?

— Pour partager 20 gâteaux identiques entre trois enfants, cela peut se faire à l'aide d'un couteau en coupant de façon convenable deux gâteaux.

— Pour partager 20 francs entre 3 enfants, comment faire si on ne dispose que d'un billet de vingt francs? De quatre pièces de cinq francs? D'une pièce de dix francs, une pièce de cinq, deux pièces de deux et une pièce d'un franc?

Alors 20 divisé par 3, cela peut-il tomber juste?

En fait la division relève de problématiques différentes.

— L'une est totalement discrète et relève du comptage, le partage se fait sur des objets insécables (cas des dalmatiens), il s'agit de la division euclidienne définie dans N^*. L'égalité fondamentale est $20 = 6 \times 3 + 2$.

— La seconde relève de la mesure mais on travaille avec une unité conventionnelle (ici 3 mètres) et la mesure totale de la pièce de tissu n'est pas un nombre entier d'unités. L'égalité est la même que la précédente.

— La troisième, continue, relève de la valeur de la mesure de ce qui est à partager (et qui est relative à l'unité choisie). La division est définie par R^{+*} mais la densité de Q dans R le permet dans la pratique. Dans l'exemple correspondant, on considère le rationnel 20/3.

Notons qu'ici, avec une autre unité de mesure, la longueur du tissu pourrait être de trois ou de six (etc.) unités et il n'y aurait apparemment plus de problème.

— La quatrième, problème classique de transport, est une division particulière puisque le reste est négatif ou nul. L'égalité de cette situation est: $20 = 7 \times 3 - 1$ car on veut satisfaire une double inégalité $b (q-1) < a < bq$ différente de celle de la division euclidienne.

— Dans le cas suivant, les objets à partager sont sécables (cas des gâteaux) et la division est à la charnière des cas discrets et continus. L'égalité fondamentale est alors celle-ci 20/3 = 6 2/3 (ce qui conventionnellement signifiait en France autrefois et signifie encore dans certains pays 6 + 2/3 car 2/3 ∈ [0 ; 1].

— Quant au dernier exemple, discret lui aussi, des contraintes de situations empêchent d'user simplement de l'unité de façon indifférenciée. Chacun jugera s'il convient de s'adapter à la situation ou s'en échapper de diverses façons. Nous avons peut-être moins l'habitude de prendre en compte ce genre de problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

En fait la phrase «ça ne tombe pas juste» est employée par les élèves dans un autre sens, purement calculatoire: la division poursuivie après la virgule ne s'arrête pas car le reste n'est jamais nul. Cette division poursuivie aussi loin que l'on veut (on peut) n'a de sens que s'il s'agit d'un partage dans un cas continu (tissu ou gâteaux) pour lequel 20/3 a une signification physique. Ce qui est à mettre en cause ici est la base de numération choisie, pour nous la base 10.

Nous savons que la fraction irréductible a/b a une écriture décimale finie lorsque b n'est pas divisible par d'autres nombres premiers que 2 ou 5. En base 3, on écrirait 202/10 = 20,2; en base 6 : 32/3 = 10,4; en base 12 : 18/3 = 6,8. Tout nombre rationnel peut avoir une écriture à virgule finie dans certaines bases de numération mais aucune base de numération ne permet d'écrire tout rationnel avec une écriture à virgule finie. Alors la base 10 ou une autre...

Pour les élèves jusqu'au premier cycle y compris, il est inutile d'entrer dans des considérations de bases de numération de cet ordre, mais il est sans doute très profitable de distinguer les activités de comptage (phénomènes discrets) de celles de mesure (phénomènes continus). Les rationnels bâtis à partir des entiers (solutions d'équations du type bx = a, (a,b) ∈ (Z x Z') ne sont pas tous entiers. Il n'est pas toujours possible de les écrire sous forme décimale, d'où la nécessité d'une nouvelle écriture (a/b). Quant aux nombres irrationnels, il n'est jamais possible de les écrire sous forme décimale ou rationnelle comme leur nom le laisse deviner, d'où la nécessité d'user de nouveaux symboles (radicaux, noms spécifiques, etc.). Pour mieux situer tous ces nombres sur la droite des réels, il est souvent commode de connaître des valeurs approchées (décimales voire rationnelles pour les irrationnels), de les encadrer si on le veut de plus en plus finement, ce que les calculatrices permettent de faire désormais plus facilement qu'auparavant.

RECTIFICATIF:

Dans le numéro 145, une malheureuse coquille a déformé le nom de l'auteur du dernier article. Il s'agissait bien de Régis **Nivou**, professeur à l'école Jean Piaget de Genève. Avec toutes nos excuses.

Exploration dans le monde de la géométrie plane

par Michel Chastellain, collaborateur au SPES (VD)

Les origines du «bof»

Beaucoup d'enseignants de mathématiques qui ont eu l'occasion de professer dans les différents niveaux de la scolarité obligatoire s'accordent à dire que les problèmes de motivation ne se rencontrent pratiquement jamais chez les plus jeunes élèves, pour lesquels toute nouvelle proposition d'activité est, par essence, enthousiasmante. Cette constatation existe en maints endroits et, entre autre, dans le canton de Vaud si l'on se réfère aux propos tenus par les maîtres concernés par l'enseignement des mathématiques, lors de leurs réunions annuelles intitulées «Rendez-vous d'enseignement mathématique)[1].

D'une manière générale, les remarques formulées durant ces mêmes échanges soulignent également la difficulté que chacun rencontre lorsqu'il s'agit «d'accrocher» l'attention des adolescents. Lors d'activités algébriques c'est l'éternelle interrogation «... à quoi ça sert?» qui se fait entendre, et qui laisse l'enseignant quelque peu démuni, alors que de fréquentes activités géométriques découragent d'emblée les élèves, qui se contentent d'attendre la solution apportée par «celui qui sait»!

Cet état de fait a notamment pour origine les trois éléments suivants:

- La spontanéité naturelle de l'enfant régresse parallèlement à son évolution vers le monde des adultes, par suite des fréquentes remises en cause et réprimandes dont il est l'objet, mais également par suite de son évolution inéluctable vers une plus grande autonomie. Cette évolution passe, durant l'adolescence, par un stade de rejet de toute proposition en provenance de l'adulte, et pourrait être symboliquement qualifiée d'attitude «bof».

- Dans les premières années de la scolarité obligatoire, les programmes de mathématiques étudiés sont attrayants dans la mesure où ils sont présentés sous différents aspects ludiques. Les activités proposées font fréquemment appel à de la manipulation, au découpage, au pliage, à l'utilisation de matériel varié comme un miroir, un dé, un échiquier, des cubes de bois, des jetons, un puzzle, une carte de géographie, du papier calque, une balance, etc. Puis, au fur et à mesure des années, les programmes deviennent «plus techniques» et le niveau exigé ne correspond plus toujours au stade de développement de l'enfant. Les connaissances apportées sont perçues comme inutiles et, de surcroît, les exigences des maîtres deviennent de plus en plus rigoureuses, ce qui fait d'ailleurs dire à J.-C. Pont:

  « J'ai la conviction que c'est là un moyen sûr pour dégoûter à jamais une bonne partie des élèves»[2].

[1] *Les rendez-vous d'enseignement mathématique*, in Math-Ecole N° 140, nov. 1989.
[2] J.-C. Pont, *Propos décousus sur l'enseignement de la géométrie*, in Bulletin des maîtres de mathématique vaudois n° 47, 1990.

- La matière est souvent découpée de telle manière que les mathématiques se présentent comme un ensemble de tranches de saucisson, sans aucun rapport apparent ni les unes avec les autres, ni avec la réalité quotidienne. Ce «cloisonnement» et cette relative «abstraction» ont pour fâcheuse conséquence d'occlure la finalité de l'enseignement aux yeux des élèves (et parfois à ceux du maître!) et de tuer définitivement les derniers soubresauts de leurs intérêts. En fait:

  «l'élève n'acquiert des connaissances que sous la pression des notes, connaissances qu'il ingurgite par bribes. Il les applique de façon schématique, les mémorise pour l'examen et s'empresse de les oublier.»[3]

La lecture de ces propos pourrait faire croire que les pensées actuelles de leurs auteurs sont particulièrement pessimistes et qu'ils sont à l'orée d'un renoncement dans leur mission éducative. Ce serait commettre une grossière erreur. Cependant, quel est l'enseignant qui, face à ses élèves de 13 à 15 ans, n'a jamais été confronté à la problématique de la démotivation? De même, lequel d'entre nous n'est-il pas fréquemment désorienté par la réelle difficulté d'apprentissage rencontrée par les élèves, lorsqu'il s'agit d'élaborer un raisonnement hypothético-déductif dans le domaine de la géométrie plane?

Pour remédier à cette situation, pour éviter le découragement et redonner un peu de punch aux élèves, plus particulièrement à ceux qui sont orientés dans une section autre que la section scientifique - c'est-à-dire la majorité de la population scolaire -, il s'agit de les conduire vers quelque chose d'inattendu, de motivant, d'attiser leur curiosité, de provoquer une réaction d'intérêt, bref de mettre en place un contexte qui favorise leur envie:

«de chercher, d'essayer, de conjecturer, de découvrir et de prouver».[4]

En ce qui concerne l'enseignement de la géométrie plane et afin de satisfaire au programme vaudois de géométrie de la 7e à la 9e, en division prégymnasiale[5], puisque tel est le contexte qui sous-entend cette étude, le «quelque chose d'inattendu» réside dans l'apport de l'informatique par l'intermédiaire de la dernière version du logiciel CABRI-GEOMÈTRE[6].

L'objectif premier de ce didacticiel est celui d'une aide pour toutes les activités qui concourent à la découverte de la géométrie. Pour y parvenir, l'élève dispose d'un certain nombre d'outils qu'il peut utiliser pour construire à l'écran la quasi-totalité des figures de géométrie plane que l'on rencontre au niveau de l'enseignement secondaire et pour explorer ensuite leurs propriétés. CABRI-GEOMETRE permet également de modifier ces figures et de les transformer tout en conservant les relations établies entres les différents objets, de les imprimer et de les enregistrer afin de les réutiliser ultérieurement.

[3] Faculté des Sciences de l'Université de Bâle, *Prise de position et thèses relatives à l'enseignement gymnasial des sciences*, séance du 14 juin 1988.
[4] G. Arsac, *La pratique du problème ouvert*, IREM de Lyon, janvier 1985.
[5] DIPC, Ecole secondaire du canton de Vaud: *Programme de 5e au 9e degré*, 1990.
[6] CABRI-GEOMETRE, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, IMAG Grenoble 1990.

Cet aspect dynamique créé par l'interaction qui s'établit entre l'élève et la machine, tout comme la fascination que l'ordinateur exerce de façon générale sur la jeunesse actuelle, sont à l'origine de cette étude dont l'idée finale consiste non seulement à stimuler les élèves pour qu'ils trouvent ou retrouvent un certain plaisir dans la résolution des problèmes de géométrie plane, mais encore à améliorer leurs compétences tout en favorisant le travail indépendant de chacun dans le sens d'une plus grande autonomie. Par là même l'image de marque des mathématiques, et plus particulièrement celle de l'apprentissage de la géométrie n'en seront que plus attrayantes.

Le cadre institutionnel

A l'origine, cette étude visait à proposer une application pédagogique de CABRI-GEOMÈTRE pour faciliter l'étude du chapitre sur les lieux géométriques. Mais, après réflexion, il s'est avéré que ce didacticiel méritait d'être introduit comme support à l'enseignement du programme de géométrie dès la 7e année déjà. Cette procédure a l'avantage:

- de mettre à disposition des élèves, une année plus tôt, un outil original et attrayant, dans le sens des constatations formulées précédemment;
- de permettre un apprentissage progressif du «maniement» des outils qui sont disponibles. En effet, c'est en découvrant, petit à petit, les multiples possibilités de tracés (points, segments, droites, triangles, hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices, ...), puis en explorant graduellement les propriétés des figures ainsi dessinées, que les élèves perfectionneront leurs connaissances en géométrie et pourront alors s'attaquer à des situations plus complexes comme, par exemple, celles des lieux géométriques.

Dans ces conditions, le cadre institutionnel défini dans cette étude se présente de la manière suivante:

- Les activités proposées appartiennent aux programmes vaudois de géométrie des classes de 7e, 8e, 9e années, ce qui sous-entend que les élèves concernés ont entre 13 et 15 ans.
- En conséquence, la démarche présentée reflète des pratiques épisodiques au sein de plusieurs classes. On ne peut donc parler d'une application pédagogique, dans le sens d'une étude suivie et régulière, mais plutôt d'un témoignage basé sur de multiples expériences ponctuelles qui ont été vécues durant l'année scolaire 89-90.
- Les applications se sont déroulées dans une salle d'informatique comportant vingt postes équipés d'un Macintosh plus et de deux lecteurs de disquettes, connectés à cinq imprimantes. Bien que le nombre de places individuelles soit suffisant, les élèves ont, de manière générale, travaillé par groupe de deux. Cette optique a l'avantage de favoriser l'échange, de créer une véritable interaction entre des points de vue différents, c'est-à-dire de dynamiser les recherches et de faciliter tout ce qui touche aux objectifs comportementaux plutôt que cognitifs.

- Les activités présentées sont à mettre en relation avec les programmes destinés aux élèves des classes prégymnasiales qui appartiennent à une division autre que la division scientifique. Les classes sont donc de type «homogène» et les élèves ont déjà été sélectionnés et orientés en section latine, économique ou italien.

- Les programmes de géométrie étudiés s'inscrivent dans le cadre des programmes-cadres mathématiques de CIRCE III[7], dans lequel il est notamment spécifié:

«L'élève apprend les mathématiques lorsque:

I Le maître donne l'occasion à l'enfant, le plus souvent possible, de développer ses multiples facultés pour vivre toutes les phases d'une recherche et acquérir ainsi le caractère et les aptitudes que cela nécessite.

Le maître enseigne les mathématiques pour:

- développer des aptitudes à la recherche;

- développer des aptitudes à l'analyse;

- développer la logique du raisonnement;

- développer l'objectivité du jugement;

- développer un langage précis.

II Par cette activité essentiellement, le maître permet à l'enfant d'acquérir de manière solide quelques outils mathématiques reconnus de base.»

- Aucune évaluation sommative n'a été faite, durant l'année, à l'aide de l'outil Macintosh, mais dans les contrôles nécessaires à l'élaboration des moyennes semestrielles, on retrouve des démarches de raisonnement parallèles à celles qui ont été utilisées avec CABRI-GEOMÈTRE.

- Dans les programmes vaudois, on désigne par «fundamentum»:
  - ce qui fait l'essentiel d'un chapitre (qui tient à l'essence des mathématiques);
  - ce qui est indispensable sur le plan des techniques (qu'on doit consolider pour progresser).

  Autrement dit, le rôle du «fundamentum» est de montrer sur quels aspects il convient de mettre l'accent, comme nous allons le voir maintenant:

[7] Commission Intercantonale Romande de Coordination de l'Enseignement, années 7, 8, 9. *CIRCE III programmes-cadres mathématiques*, février 1986.

Programme de géométrie de 7e

Sections latine, économique, italien: 2 périodes hebdomadaires.

Expérimentation en vue d'exercer l'imagination, la description et la construction de figures dans l'espace, la définition de figures, la découverte, l'énoncé et la justification de propriétés. On abordera notamment:

- polyèdres;
- angles;
- isométries et homothéties;
- cercles, sécantes et tangentes.

Recensement des propriétés observées et mise au net d'une liste de définitions, de propriétés admises et de constructions (catalogue).

Calcul d'angles (y compris angles inscrits).

Calcul d'aires et de volumes.

Fundamentum

- S'habituer à porter son attention sur une partie de figure et y repérer des figures connues.
- Face à un problème, s'habituer à tracer une ou des lignes supplémentaires.
- Effectuer une construction «donnée» par une marche à suivre.
- Rédiger une marche à suivre.
- Etre «familier» avec des solides.
- Passer de l'espace à une représentation à deux dimensions et réciproquement.
- Savoir distinguer croquis et dessin à l'échelle.
- Savoir comparer des surfaces par découpage, évaluation ou calcul d'aires.
- Connaître et utiliser les propriétés des points milieux des côtés du triangle.
- Savoir effectuer la construction:
  - du milieu et de la médiatrice d'un segment;
  - de la perpendiculaire à une droite par un point;
  - de la parallèle à une droite par un point;
  - de l'image d'un point par une symétrie axiale;
  - de la bissectrice d'un angle;
  - du report d'un angle;
  - de quelques polygones réguliers convexes ou étoilés;
  - des médiatrices, médianes, hauteurs et bissectrices d'un triangle.
- Savoir utiliser le fait que dans un triangle, la somme des mesures des angles égale 180^0.
- Savoir tracer l'image d'un polygone et d'un cercle par une homothétie.
- Savoir inscrire une figure dans une autre.
- Savoir calculer la diagonale d'un rectangle de côtés donnés.
- Savoir calculer l'aire des trapèzes et des disques.

Moyens d'enseignement:
V. Arnoldy et all., *Géométrie 7 DP*, Editions LEP, 1988

Programme de géométrie de 8^e

Sections latine, économique, italien: 1 période hebdomadaire

Recensement des propriétés observées et mise au net d'une liste de définitions, de propriétés admises et de constructions (catalogue).

Reprise des concepts de définition, de propriété caractéristique, de définitions équivalentes, de démonstration, lors de l'étude plus détaillée des triangles et des quadrilatères.

Ensembles des points possédant une propriété commune.

Exemples pris dans le plan et dans l'espace.

Mise au net du calcul d'angles (y compris angles inscrits).

Fundamentum

- Rédiger la marche à suivre d'une construction à la règle et au compas et, au besoin, l'améliorer.
- Calculer, lorsque c'est possible, les angles d'une figure.
- Admettre une figure comme support de la réflexion mais la rejeter comme élément de preuve.
- Exhiber un contre-exemple à une conjecture fausse
- Au besoin définir une figure selon des points de vue différents.
- Savoir démontrer à l'aide des cas d'isométrie des triangles.
- A partir d'une figure d'étude, être capable d'utiliser à bon escient les propriétés mises au net dans le catalogue.
- Etre conscient des notions de:
  - preuve;
  - définition;
  - ensemble des points soumis à une condition.

Moyens d'enseignement: O. Burlet, *Géométrie*, Editions LEP, 1989

Programme de géométrie de 9e

Sections latine, économique, italien: 2 périodes hebdomadaires

Mise au net des définitions et des propriétés des isométries et des homothéties.

Composition de transformations.

Cas de similitude des triangles et théorèmes métriques dans le cercle et le triangle rectangle (applications prises dans le plan et dans l'espace).

Rapports trigonométriques usuels: sinus, cosinus et tangente.

Quelques lieux géométriques dans le plan et dans l'espace.

Thèmes à tendance culturelle; par exemple, géométries non euclidiennes.

Fundamentum

- Saisir le sens et maîtriser le formalisme d'une démonstration.

- Etre capable de tracer un lieu géométrique, d'identifier la figure obtenue et ses points limites, de donner des arguments pour sa justification.

- Essayer plusieurs angles d'attaque d'un problème, en particulier:
  - réunir les propriétés données dans une figure d'étude;
  - tracer au besoin des lignes supplémentaires pour faire apparaître des figures connues;
  - penser certaines lignes comme lieu géométrique;
  - utiliser les applications du plan dans lui-même;
  - calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes en utilisant judicieusement les théorèmes métriques ou la trigonométrie;
  - puiser habilement dans les propriétés du catalogue.

- Résoudre des problèmes sans l'aide d'un tiers.

Moyens d'enseignement: O. Burlet, *Géométrie,* Editions LEP, 1989

Cabri-géomètre

Dans l'état actuel de cette étude, la réflexion menée a permis:

- de mettre en évidence les origines d'un désintérêt, voire d'un certain découragement, que passablement d'élèves rencontrent en géométrie plane;
- de dégager quelques procédures de remédiation vis-à-vis de cette démotivation;
- de présenter rapidement en outil (CABRI-GEOMÈTRE) dont l'utilisation se révèle comme stimulante;
- de définir le contexte institutionnel dans lequel s'inscrit cette démarche et, notamment, de préciser les contenus des programmes concernés.

Dès lors, et avant de pousser plus avant la recherche afin de décrire la procédure d'utilisation envisagée, il convient de s'arrêter un instant sur l'outil CABRI-GEOMÈTRE pour décrire brièvement ses concepts de base et ses principales fonctions.

CABRI-GEOMÈTRE permet de traiter des figures dans lesquelles interviennent essentiellement des points, droites ou cercles, ainsi que les objets ou notions qui leur sont habituellement associés: segments, triangles «quelconques» ou «particuliers», parallélisme, orthogonalité, symétries axiales ou centrales, etc. CABRI-GEOMÈTRE permet également de visualiser à l'écran (sans les traiter) des ensembles de points de nature quelconque, comme des courbes diverses par exemple, qui peuvent se présenter dans les recherches classiques de «lieux géométriques». Il offre également la possibilité de mesurer des longueurs, des angles ou des aires et d'en observer l'évolution en temps réel au cours des modifications de la figure. De plus, l'utilisateur peut, en tout temps, retrouver l'ordre chronologique dans lequel il a tracé les différents éléments de sa figure d'étude, grâce à la fonction **Historique.**

L'intérêt de ce didacticiel se situe à plusieurs niveaux:

- L'élève utilise les outils mis à sa disposition comme aides à la résolution de problèmes afin d'explorer les propriétés des figures qu'envisagent les énoncés de problèmes qui lui sont proposés.
- L'enseignant bénéficie d'une certaine souplesse vis-à-vis des situations didactiques qu'il met en oeuvre, puisque le logiciel lui permet d'ajouter ou de supprimer certaines possibilités de construction ou de tracé, en modifiant «la barre de menu». Ce choix l'autorise à ne proposer aux élèves que ce dont ils ont besoin pour résoudre un problème donné. Par exemple, il «camouflera» les fonctions de tracé d'une médiatrice de deux points ou d'une bissectrice d'un angle, dans la mesure où il souhaitera réutiliser, pour les constructions correspondantes, les définitions dont l'élève dispose.
- Le maître, ou l'élève, élabore sa propre bibliothèque de constructions prédéfinies, qu'il pourra employer en toute occasion. Par exemple, si l'utilisateur désire représenter à l'écran le cercle circonscrit de différents triangles, il lui suffira de construire le cercle circonscrit d'un triangle, puis de l'enregistrer en tant que «macro-construction». Par la suite et pour autant qu'il le souhaite, il

verra se tracer quasi instantanément à l'écran le cercle circonscrit du triangle formé par trois points quelconques, qu'il aura désignés comme arguments d'entrée de la macro-construction correspondante.

- A n'importe quelle étape du travail, il est possible de modifier les caractéristiques d'un des éléments de base d'une figure (par exemple en le déplaçant à l'écran) et de voir celle-ci se redessiner alors en temps réel. Cette fonction permet de multiplier très rapidement les cas de figure et d'envisager, ou au contraire d'éliminer, certains cas particuliers. C'est ainsi que l'élève pourra visualiser les propriétés communes que possède un ensemble de figures et qu'il aura ainsi l'occasion de suivre les déplacements d'un ou de plusieurs éléments, en fonction du déplacement parfaitement contrôlable d'un objet de base de la figure.

CABRI-GEOMÈTRE a été développé sur micro-ordinateur Macintosh (512, plus, SE, ...) et respecte les normes classiques d'interface et de communication des applications conçues sur cette gamme de micros. L'environnement de travail est donc celui du «Mac», c'est-à-dire qu'il fait appel à une «philosophie traditionnelle» comme celle des menus déroulants, des fenêtres mobiles et multiples, de la souris, du «copier-coller», etc. La barre de menu propose cinq rubriques principales:

- Le menu **FICHIER**, dont la plupart des articles sont communs à toutes les applications du Macintosh et qui permettent d'accéder à une feuille de travail ou de dialoguer avec un périphérique.

Fichier
Nouveau Ouvrir ...
Fermer Enregistrer Enregistrer sous ... Revenir à la version enregistrée
Format d'impression ... Imprimer ...
Quitter Cabri-géomètre

Edition
Annuler
Couper Coller Effacer tout
Aspect des objets Agrandir la figure Nommer Commentaires ... Montrer la feuille ...
Préférences

- Le menu **EDITION** offre principalement d'améliorer la présentation de la figure en cours d'élaboration.

- Le menu **CREATION** contient des articles permettant de dessiner des objets géométriques qui ne nécessitent pas la présence préalable d'autre objets.

Création

Point de base Droite de base Cercle de base
Segment Droite passant par deux points Triangle Cercle déf. par centre et point

Construction

Lieu des points
Point sur objet Intersection de deux objets
Milieu Médiatrice Droite parallèle Droite perpendiculaire Centre d'un cercle
Symétrique d'un point Bissectrice

- Le menu **CONSTRUCTION** demande au préalable la sélection d'un ensemble d'objets déjà présents. Un nouvel objet sera alors construit, en relation avec les objets sélectionnés.

Divers

Supprimer un objet Redéfinir un objet
Macro-construction ... Journal de session Editer les menus ...
Calculer Afficher l'énoncé Historique Vérifier une propriété
Marquer un angle Mesurer Quadrillage

- Le menu **DIVERS** regroupe des outils de modification et d'exploration de la figure définie à l'écran.

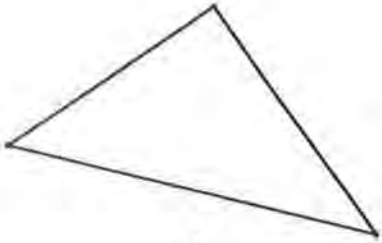
A titre d'illustration, voici une figure dont la réalisation fait appel à un article de chacun des cinq menus. Il s'agit de dessiner un triangle abc, de donner un nom à chacun de ses sommets, de tracer la bissectrice de l'angle de sommet a, de mesurer la longueur du segment ac, de déplacer le sommet c pour voir apparaître un autre triangle et sa bissectrice puis, enfin, d'enregistrer la figure ainsi formée.

- Choisir, en premier lieu, la figure que l'on souhaite dessiner.

  Le triangle se dessine dès que les trois sommets ont été définis à l'écran.

menu
CREATION

article
Triangle

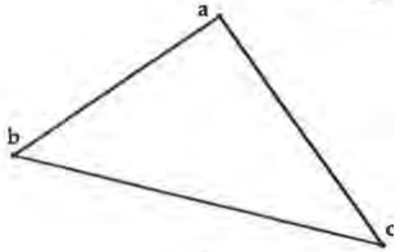


- Donner un nom à chaque objet.

  Désigner chaque objet successivement puis taper son nom.

menu
EDITION

article
Nommer

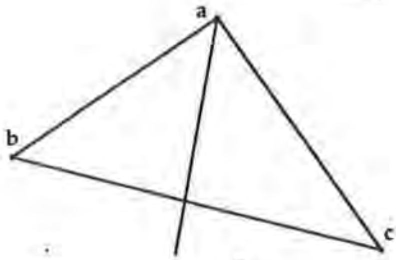


- Construire la bissectrice de l'angle de sommet a .

  Désigner alternativement les sommets a, b et c.

menu
CONSTRUCTION

article
Bissectrice

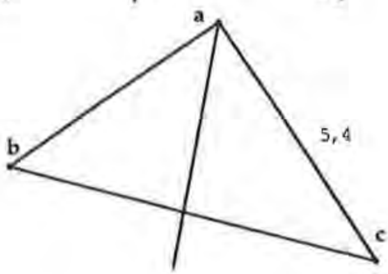


- Mesurer la longueur du segment [ac].

  Désigner le segment dont on souhaite déterminer la longueur

menu
DIVERS

article
Mesurer

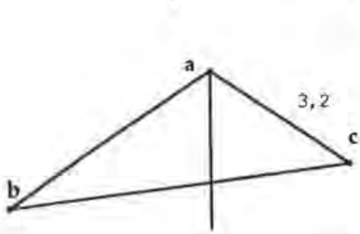


- Pour transformer la figure, tout en conservant ses propriétés, il s'agit de la "saisir" par l'un des points de base (ici c) puis de le déplacer.

- Pour conserver un dessin, la démarche est "traditionnelle".

menu
FICHIER

article
Enregistrer sous



(à suivre)

Une suite beaucoup plus mathématique à...

La Sorcière de l'Ouest (voir Math-Ecole n° 141)

par Johannes Läng et Roger Délez, EPEP, Genève

1 2 3 4 5 6 7

REMARQUE 1:

Admettons que nous ayons extrait une carte avec un chapeau **blanc** (la question); nous remarquons qu'il reste dans le plot trois chapeaux blancs et trois chapeaux noirs (3B+3N). Nous pouvons dès lors émettre les observations suivantes:

On tire soit	**2B**	1B + 3N	**2N**	1B + 1N	1B + 1N	2 paires
			1B + 1N	2N	**2N**	2 paires
	2N	3B + 1N	**2B**	1B + 1N	1B + 1N	2 paires
			1B + 1N	2B	**2B**	2 paires
	1B + 1N	2B + 2N	**2B**	2N	**2N**	2 paires
			2N	2B	**2B**	2 paires
			1B + 1N	1B + 1N	1B + 1N	0 paire

Légende: a) En caractères gras: possibilités de tirages aléatoires

b) En caractères clairs: ce qui reste en fonction du ou des tirages(s) précédent(s).

Dans ce cas, on peut tirer soit 2 paires, soit 0 paire.

REMARQUE 2:

Admettons maintenant que nous ayons extrait une carte avec un chapeau **noir** (la question); nous remarquons qu'il reste dans le plot quatre chapeaux blancs et deux chapeaux noirs (4B+2N). Nous pouvons dès lors émettre les observations suivantes:

On tire soit	**2B**	2B + 2N →	**2B**	2N →	**2N** →	3 paires
		→	**2N**	2B →	**2N** →	3 paires
		→	1B + 1N	1B + 1N →	1B + 1N →	1 paire
	2N	4B →	**2B**	2B →	**2B** →	3 paires
	1B + 1N	3B + 1N →	**2B**	1B + 1N →	1B + 1N →	1 paire
		→	1B + 1N	2B →	**2B** →	1 paire

Dans ce cas, on peut tirer soit 3 paires, soit 1 paire.

On rebrasse les cartes, on recommence avec les yeux.

Même constat! (0 ou 2) ou (1 ou 3)

On rebrasse les cartes, on recommence avec le sourire.

Même constat! (0 ou 2) ou (1 ou 3)

On peut dès maintenant «arranger» les codes ainsi trouvés: nous constatons que:

— ceux-ci se répartissent sur une échelle allant de 000 à 333, ce qui nous fait immédiatement penser à un système de numération en **base quatre;**

— il y a bien 64 réponses puisque l'on compte de 0 à 63.

Base quatre:

G_3	G_2	G_1	U
0	0	0	0

code le plus petit

→

G_3	G_2	G_1	U
3	3	3	3

code le plus grand

Construisons une grille

puissances de 4	4^3	4^2	4^1	4^0	
nombres représentatifs	64	16	4	1	
codes (multiplicateur)		3	3	3	total
quotients		48 +	12 +	3	= 63 en base dix

REMARQUE 3: Emettons nos **premières hypothèses.**

On pourrait se hasarder maintenant dans l'énoncé suivant tout en étant conscients que les affirmations qui en font le contenu restent à vérifier.

1. Nombre de codes possibles = nombre de cartes réel /2 (8) (à vérifier)

Ici donc, cela donnerait 4 codes, 0 — 1 — 2 — 3
Nombre de codes par carte = nombre de cartes réel /2 - 1 (à vérifier)

Ici donc, cela donnerait 3 codes (ex.: 000, 123, 332, etc.)

Base dans laquelle on travaille = nombre de critères + 1 (à vérifier).

Ici donc, cela donnerait 3 + 1 = BASE QUATRE.

L'ensemble des codes se répartit donc de 000 à 333 en base quatre, ce qui donne effectivement 64 solutions.

REMARQUE 4: Essayons de voir ce qui se passe avec le jeu suivant:

Risquons-nous maintenant dans un ensemble de 16(15) cartes avec simplement un critère de plus (nez/non nez).

En énumérant les cas possibles, on remarque que si l'on tire une carte avec chapeau blanc, on peut former 0, 2, 4, 6 paires; si l'on tire une carte avec chapeau noir, on peut former 1, 3, 5, 7 paires.

On formera donc un arbre à quatre branches sur quatre étages soit un arbre à 256 solutions par carte, donc à 4096 solutions en tout! Ces solutions auront les codes de 0000 à 7777 base huit puisque 7777 en base huit = 4095.

Construisons une grille:

puissances de 8	8^3	8^2	8^1	8^0	
nombres représentatifs	512	64	8	1	
codes (multiplicateur)	7	7	7	7	total
quotients	3584 +	448 +	56 +	7 =	4095 en base dix

REMARQUE 5: Certaines hypothèses s'évaporent...
d'autres s'enracinent un peu plus fort!

Raisonnons de la même manière que ci-dessus:

1. Nombre de codes possibles = nombre de cartes réel /2 (16)

Ici donc, cela donnerait 8 codes, 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7.

Nombre de chiffres par carte = nombre de cartes réel /2 = 1

Ici donc, cela donnerait 7 codes: *on voit bien dans l'exemple donné ci-dessus, que cela est faux!* (ex.: 0000, 1273, 3432, etc.)

Base dans laquelle on travaille = nombre de critères + 1

Ici donc, cela donnerait 4 + 1 = BASE CINQ *cela est rigoureusement faux!!! il faut donc un autre module...*

Nous pensons que la nouvelle formulation serait:

BASE DE TRAVAIL: **Nombre de cartes/2**; ici, on aurait 16/2 = 8

Vérifications: pour 8 cartes, 8/2 = 4; cela semble convenir.

L'ensemble des codes se répartit donc de 0000 à 7777 en base huit ce qui donne effectivement 4096 solutions...

REMARQUE 6: Arrivons gentiment dans le domaine des généralisations.

Généralisations:

Pour un jeu de (N) cartes N étant > une puissance de deux > que 2, les règles du jeu sont les suivantes:

1. Le nombre de cartes est une puissance de deux moins 1 (ex. a = { 7; 15; 31; 63; ... } cartes.)

2. Le nombre de codes différents possibles = nombre de cartes réel divisé par deux; si x = ce nombre, on aura la succession des codes allant de 0 à (x - 1).

3. La base considérée = nombre de cartes réel /2.

4. Le nombre de "chiffres" par nombre ainsi formé sera égal au nombre de critères considérés.

5. La succession des "nombres" se fera de 0 jusqu'au plus grand "nombre" possible dans la base et dans le nombre de colonnes.

REMARQUE 7: En...fin ou Enfin, pour se convaincre!

EXEMPLE: Construisons un jeu de 32 (31) cartes.

1. Nous construisons un jeu de 32 - 1 cartes ayant 5 critères du type oui/non (ex. chapeaux blancs/noirs, yeux clairs/foncés, sourire/grimace, nez/ou non nez, grandes/petites oreilles.

2. Nombre de codes différents (paires possibles) = 32/2 = 16.

x = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F }

3. Base considérée: 32/2 = 16.

4. Le nombre de "chiffres" par nombre ainsi formé sera égal au nombre de critères considérés. Donc il y en aura 5!

5. La succession sera donc de 00000 à FFFFF.

Construisons une grille;

16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
65536	4096	256	16	1
F	F	F	F	F
(15)	(15)	(15)	(15)	(15)
983040	61440	3840	240	15

Le total des réponses possibles = 1048575 + 1 = 16^5 = 1048576

Pour votre bibliothèque...

L'apprentissage de l'abstraction

Peut-on apprendre l'abstraction? En 1976, traitant de ce problème, Nicole Picard avait intitulé son ouvrage sur l'apprentissage de la mathématique: «Agir pour abstraire». Britt-Mari Barth, suédoise d'origine, qui a travaillé longtemps aux USA et qui est actuellement professeur de pédagogie en France, aborde le problème sous un autre angle et en fait le pari dans un volume qui demande un certain effort de lecture mais qui pose bien le problème de l'accès à l'abstraction.

Disciple de Jerome Bruner, pour qui «*Knowing is a process, not a product*», l'auteur s'insurge contre les déperditions du système scolaire français qui lui apparaissent comme un *gâchis humain et intellectuel regrettable*. Dans la présentation de son ouvrage, elle cite Jean Piaget: «*Ce ne sont pas les matières qu'on leur enseigne que les élèves ne comprennent pas, mais les leçons qu'on leur donne*» et considère que l'abstraction, qui est à la base de la majorité des programmes scolaires, ne trouve pas un terrain de développement suffisant dans le système éducatif.

Selon Britt-Mari Barth, un grand nombre d'élèves ne possèdent pas les notions et les règles générales nécessaires pour suivre l'enseignement dispensé d'une manière profitable. «*Quand on doit s'approprier une connaissance nouvelle deux choses interviennent: la structure de cette connaissance et la démarche intellectuelle qu'il faudrait déployer pour l'acquérir. C'est comme un problème à résoudre: il faut séparer la nature du problème des stratégies qui permettent de le résoudre.* **La représentation initiale qu'on se fait d'un problème à résoudre est primordiale pour sa résolution.**»

L'auteur formule l'hypothèse selon laquelle l'enseignant peut aider l'élève à mobiliser ses capacités intellectuelles «*à condition qu'il sache les repérer, qu'il y ajuste sa pédagogie et qu'il rende les élèves conscients des stratégies d'apprentissage qui leur permettront de construire leur savoir*».

Le deuxième chapitre traite du savoir et de son élaboration. A l'aide d'exemples, Britt Barth définit la notion de concept et précise ce que sont les stratégies de conceptualisation. Plus loin, toujours par l'exemple, est traitée la question «*Comment aider les élèves à construire leur savoir?*» Différents aspects, le rôle de la perception, des comparaisons, l'inférence, l'hypothèse et leur vérification, font l'objet de pages intéressantes.

L'analyse théorique du problème de l'apprentissage conduit l'auteur à affirmer que «*pour assurer un apprentissage conceptuel, la méthode d'enseignement choisie doit nécessairement impliquer, chez l'apprenant, les deux modes de traitement de l'information dont il dispose (le mode analytique, linéaire, et le mode global, instantané) en même temps, par un processus quasi d'alternance simultanée, c'est-à-dire où les deux phases se succèdent de façon très rapprochée dans le temps*», ce qui permet, selon elle, de tirer le meilleur profit des deux hémisphères du cerveau. L'ouvrage s'achève sur des pages relatives aux moyens d'amener les élèves à réfléchir sur leur propre méthode de pensée, et ceci dès la scolarité primaire.

En résumé, un ouvrage solidement charpenté, assorti d'exemples qui, même s'ils paraissent parfois un peu simplificateurs, ne manqueront pas de faire réfléchir tous ceux qui cherchent à faire en sorte que leurs élèves deviennent les agents actifs de leur propre formation.

BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, méthodes pour une meilleure réussite de l'école. Editions RETZ, actualité des sciences humaines, Paris 1987, 192 p.

R.H.

JAB
1200 GENÈVE 2

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 17.— Etranger: F 19.—
CCP 12-4983 - 8 Paraît 5 fois par an.

Service de la Recherche Pédagogique
20 bis, rue du Stand
CH - 1211 Genève 11 — CP 119
Tél. (022) 27 42 95

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion