Labo-maths - Les enclos

Thierry Dias

HEP Vaud & DDMES

L'objectif de cette rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherches mathématiques à partir d'un contexte (ici celui de l'articulation aire/périmètre) afin qu'ils puissent conduire de véritables explorations avec leurs élèves. Il ne s'agit donc pas de faire « faire des problèmes » au sens où on l'entend habituellement. Ainsi, si le contexte de la recherche est imposé (sous forme d'un jeu avec quelques règles), les questions à poser et les démarches de travail envisagées peuvent être diverses et donc adaptées à plusieurs niveaux de classe. Il n'y a pas systématiquement de consigne imposée qui laisserait entendre qu'il existe une réponse attendue relativement unique. Les situations proposent en effet des recherches qui peuvent conduire à une multiplicité de découvertes et donc de « réponses ».

La formulation d'un ou plusieurs résultats prend également ses distances avec une traditionnelle « phrase réponse ». Nous engageons plutôt les enseignants à faire produire à leurs élèves de petits récits racontant leurs recherches tant dans les moments de découverte que de doutes. Nous préférons l'emploi de la terminologie de résultat ou découverte en lieu et place de celle de réponse.

La rubrique propose des situations d'investigations pour lesquelles il n'est pas non plus fourni d'analyse a priori. Nous entendons cette terminologie d'investigation en référence à la diversité des processus de raisonnement convoqués : inductif, déductif et expérimental. Nous engageons donc les enseignants à faire faire des expériences et des découvertes mathématiques à leurs élèves en parcourant parfois des chemins inattendus, parfois des impasses provisoires. Toute action menée par les élèves est en effet susceptible de révéler leurs connaissances. Il s'agit de privilégier des espaces de recherche dans lesquels les élèves se sentent suffisamment autonomes pour mener de véritables expériences personnelles avec les objets ; qu'il s'agisse d'objets sensibles ou d'objets de pensée. On peut en effet imaginer que des expériences conduites par exemple sur les nombres ne nécessitent pas forcément l'emploi de jetons ou de cubes.

L'enseignant doit privilégier un rôle d'accompagnateur de la résolution, en essayant de ne pas prendre de responsabilité directe dans les choix mis en œuvre par les élèves. Il pourra lui aussi être surpris des découvertes mais sera avant tout un témoin privilégié du potentiel de ses élèves à construire des connaissances mathématiques.

La finalité de la rubrique tient également dans la possibilité d'une communication entre les enseignants. Nous proposons effectivement à celles et ceux qui le souhaitent de témoigner de leurs expériences en racontant leurs découvertes, leurs surprises et les difficultés rencontrées. Ainsi un enseignant peut expliquer comment il a posé le problème, avec quelle(s) consigne(s) et pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres. Il pourra également témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves, analyser le dialogue en classe ou présenter les perspectives qui résultent de ses expériences mathématiques.

Les problèmes de cette rubrique « labomaths » peuvent se résoudre collectivement au sein de véritables petits laboratoires de mathématiques. Ils ne doivent pas donner lieu à une compétition quelle qu'elle soit, ce sont plutôt des occasions de mener des recherches collaboratives.

La recherche

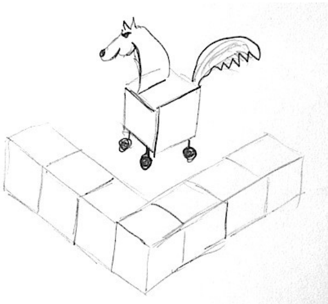

Image 1

A Carré-Land, le sol est quadrillé par des carrés comme dans un damier. Dans ce drôle de village, on a promis à la gardienne du zoo qu'elle pourrait recevoir certains animaux très spéciaux appelés mathanimaux. Il s'agit d'une race très rare qui occupe un seul carré d'espace au sol. La gardienne doit utiliser vingt cubes pour fabriquer une clôture afin de construire un enclos pour les mathanimaux.

Quel type d'enclos peut-elle bâtir pour faire tenir le plus de mathanimaux possible à l'intérieur ?

Elle doit suivre les règles suivantes pour ses projets de construction :

- Elle doit utiliser tous les cubes pour construire l'enclos.
- Tous les cubes formant la clôture de l'enclos doivent se toucher par un côté au moins.
- L'enclos doit être fermé, sans porte ni ouverture, de sorte que les mathanimaux ne puissent pas s'échapper.
- Les mathanimaux ne peuvent pas se tenir les uns sur les autres dans l'enclos.
- Chaque mathanimal utilise l'espace d'un carré dans l'enclos.

Votre premier défi consiste à faire chercher par les élèves toutes les formes d'enclos possible en tenant compte de l'ensemble des contraintes. Ce sera l'occasion pour les élèves d'investiguer les rapports entre la forme d'un périmètre, sa taille et les conséquences sur la mesure de l'aire correspondante au polygone qui la définit.

Vous pouvez ensuite proposer la recherche en supprimant la deuxième contrainte des règles de l'énoncé (selon le niveau scolaire de votre classe vous pouvez même éventuellement supprimer d'emblée cette règle). Cela vous permet de proposer un problème beaucoup plus ouvert car la variété des formes des enclos est alors importante. Ce ne sont en effet plus seulement des combinaisaons de rectangles qui sont possibles ce qui augmente considérablement la taille des aires probables.

En changeant le nombre de cubes à disposition des constructions, il est possible de rendre le problème plus facile ou au contraire plus complexe.

Pour faire des recherches amusantes, vous pouvez également proposer les énigmes suivantes :

- Quelle est le plus petit enclos possible avec 20 cubes ?
- Peut-on fabriquer un enclos qui contienne exactement 12 places, 16 places ?
- Existe-t-il plusieurs formes d'enclos contenant 20 places ?

Il est également possible de rendre le problème encore plus difficile et ouvert en choisissant par exemple deux tailles de mathanimaux : une ou deux cases. Les configurations et arrangements possibles à l'intérieur d'un enclos sont alors diverses et le problème quitte un peu le domaine des grandeurs pour rejoindre plutôt celui des pavages.

Pilotage de la classe

Vous pouvez bien entendu permettre à vos élèves de travailler en petits groupes, mais vous êtes libre de choisir les dispositifs qui vous conviennent le mieux. Dans un premier temps, un travail individuel peut très bien être adapté à cette recherche.

Laisser les élèves s'organiser comme ils le souhaitent, mais conseillez-leur de bien garder les traces (dessins ou photos) de leurs différents essais ainsi que de leurs découvertes. Ces traces de recherche seront en effet essentielles pour partager les résultats entre chercheurs.

Un élément important consiste à fournir aux élèves le matériel nécessaire, c'est à dire des cubes et des feuilles quadrillées adaptées aux dimensions des cubes.

Prenez le temps nécessaire à discuter des consignes de ce problème avec les élèves qui n'entrent dans aucune action susceptible de révéler leurs connaissances. Il n'est en effet jamais souhaitable qu'un élève reste en situation d'échec prolongé quelle que soit l'activité qui est proposée. Cet étayage langagier vous donnera également l'occasion de vous assurer qu'aucune difficulté de compréhension (sémantique ou syntaxique) ne vient nuire inutilement au lancement de la recherche mathématique.

Nous vous rappelons cependant qu'il faut toujours éviter d'induire un résultat et privilégier des étayages laissant une liberté d'expression aux connaissances des élèves.

Quand les élèves commencent le problème, chaque assemblage trouvé nourrit la recherche et leur donne des idées pour trouver d'autres solutions. Laissez-leur un temps d'exploration suffisant pour qu'ils puissent dépasser les configurations les plus évidentes. Ils sauront sans aucun doute trouver de nouveaux assemblages intéressants même s'ils pensent parfois être « bloqués » un certain temps pensant qu'il n'y a plus rien à trouver. Si certains de vos élèves sont en difficulté avec la prise de notes nécessaire à la compilation des essais et des découvertes, vous pouvez fournir une fiche comportant des dessins d'assemblages de cubes en perspective, ou mieux encore permettre la prise de photos.

Pensez à recueillir le travail des élèves, prenez des notes sur les interactions qui ont eu lieu, sur la variété des approches des élèves que vous avez observées dans votre classe. Toutes ces informations peuvent toujours être utiles pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves mais aussi pour évaluer leurs connaissances et leur potentiel à apprendre en mathématiques. Dans votre réflexion sur votre expérience avec ce problème, gardez par exemple à l'esprit les questions suivantes :

- Quelles difficultés ont eu les élèves dans la compréhension du problème?
- Comment les élèves ont-ils abordé cette tâche ?
- Quelles stratégies les élèves ont-ils essayées ?
- Y a-t-il des réponses d'élèves ou des interprétations qui vous ont surpris ?

Où sont les maths ?

Les connaissances mathématiques utiles pour effectuer les recherches proposées dans ce problème sont diverses et concernent essentiellement le domaine du nombre entier et des opérations du champ additif. Nous rappelons cependant à cette occasion en citant le Plan d'Étude Romand que :

> *Les mathématiques sont plus qu'une collection de concepts et de compétences à maitriser. Il s'agit plutôt d'un ensemble complexe d'idées incluant des méthodes d'investigation et de raisonnement, les techniques de communication et les questions de contexte.*

Ainsi cette recherche concerne davantage les objectifs relatifs aux éléments pour la résolution de problèmes tels qu'ils sont énoncés dans le plan d'étude. On peut retenir ici par exemple :

- *La mise en œuvre d'une démarche de résolution en évaluant par exemple les critères suivants: est-elle explicite, adaptée, cohérente ?*
- *L'ajustement d'essais successifs, puisque les recherches consistent à construire des procédures se basant sur la mise en lien de résultats intermédiaires et temporaires.*
- *La vérification puis la communication d'une démarche, car les différentes étapes des recherches peuvent être plus ou moins superposées et que leur communication nécessitera souvent une mise en forme spécifique.*

Quelques enjeux en termes de notions mathématiques sont également sous-jacents dans la résolution des problèmes suscités par l'énigme. Ils sont adaptés même aux premiers niveaux de l'enseignement primaire et concernent principalement le domaine des grandeurs et mesures. La construction des enclos permet d'étudier les relations entre périmètre et aire, deux grandeurs qui varient de façon relativement contre-intuitive pour les élèves qui ont tendance à penser qu'elles augmentent proportionnellement. Les recherches conduiront également les élèves à de nombreuses activités de comparaison et de classement de mesures de longueur et d'aire. De façon plus accessoire, quelques découvertes et remarques pourront concerner la reconnaissance de polygones particuliers dans le dessin des enclos.

Partagez vos expériences

Savoir comment vos élèves répondent à ce problème nous intéresse beaucoup. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves. Si vous le souhaitez, nous serons donc ravis de recevoir vos idées et vos réflexions.

Vous pouvez ajouter à votre envoi toutes les informations concernant la manière (ou les manières) dont vous avez choisi de poser le problème, des travaux d'élèves et même des photos montrant vos petits chercheurs en action. Envoyez vos résultats en indiquant votre nom, le niveau de votre classe, ainsi que les coordonnées de votre établissement à l'adresse suivante : mathecole@ssrdm.ch

Avec votre accord, quelques-uns de vos envois seront publiés dans un numéro ultérieur de la revue Math-Ecole. Vos noms et coordonnées d'établissement seront bien entendu indiqués dans l'article correspondant.