LABO-MATHS[1] : TRAPÉZOÏDONS

Narration d'expérience à propos de l'énigme du numéro 219 de la revue.

Nous rappelons ici que l'objectif de la rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherche assez ouvertes afin qu'ils puissent les expérimenter en classe avec leurs élèves. Si le contexte de la recherche est imposé, les questions à poser, les dispositifs de travail, le matériel et les démarches envisagées peuvent être divers et donc adaptés à plusieurs niveaux de classe. La finalité de la rubrique est également de favoriser la constitution d'un réseau d'échanges et de partage d'expériences entre les enseignants. Nous leur offrons en effet la possibilité de devenir des narrateurs quand ils le souhaitent en témoignant dans la revue de leurs essais, de leurs réussites et de leurs difficultés à mettre en œuvre les problèmes proposés. Ainsi chaque enseignant peut dire comment il a posé le problème, pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres, et aussi témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves.

Voici donc narrée pour vous une toute première expérience de classe conduite à propos de la recherche « Trapezoïdons » du numéro 219 de la revue. Il s'agit d'une énigme dont l'intérêt principal est de faire des liens entre les registres numériques et géométriques. Une recherche permettant également aux élèves d'investiguer dans le domaine du tracé et de la dénomination des figures particulières.

N'hésitez pas à faire comme cet enseignant en nous[2] envoyant vos comptes-rendus d'expériences à propos d'une des énigmes de la rubrique labo-maths. Vous pouvez joindre des photos des recherches, des traces de travaux d'élèves ou tout autre document qui vous paraît pertinent pour raconter vos moments de mathématiques en classe. Toutes les énigmes proposées dans les différents numéros de la revue sont utilisables à tout moment, disponibles en ligne sur notre site : http://www.mathecole.ch.

1 *T. Dias, auteur de la rubrique Labo-Maths.*

2 *mathecole@ssrdm.ch*

JOYEUX ANNIVERSAIRE OLGA !

Michel Brêchet

Enseignant au Collège de Delémont et formateur HEP BEJUNE

La rubrique LABO-MATHS du numéro 219 d'avril 2013 de votre revue préférée présente la situation de recherche « Trapézoïdons ! », dans laquelle interviennent notamment les notions de figures géométriques planes, de périmètre et d'aire ainsi que celle de fonction. Intéressé par ses potentialités, notamment par les multiples domaines mathématiques auxquels elle touche, je l'ai proposée à une classe jurassienne à exigences élevées de 10e HarmoS[1]. Notons au passage qu'une telle situation convient parfaitement à tous les types de classes.

Ne souhaitant pas y consacrer plus de 3 leçons, étendue du programme oblige, je l'ai reformulée de façon à la rendre un peu moins ouverte, à accroître en quelque sorte le balisage de la route à suivre, afin d'éviter que les élèves ne s'égarent sur d'innombrables chemins de traverse. Bien entendu, il ne s'agit pas de remettre en question le bienfondé des activités ouvertes, qui gardent toute leur pertinence dans l'enseignement des mathématiques. L'intention était notamment de renforcer les connaissances des élèves au sujet des figures géométriques usuelles (triangles, quadrilatères, polygones réguliers) par le biais d'une activité plaisante et inédite, et non de travailler prioritairement sur les démarches d'investigation. L'énoncé proposé aux élèves est sur la page suivante.

1 *Élèves de 13-14 ans.*

Joyeux anniversaire Olga !

Olga est une petite fille qui aime faire la fête ! Et c'est bientôt son anniversaire...

Elle organise un goûter dans son jardin, et invite beaucoup de monde : sa famille et ses amis.

Comme il n'y a pas assez de tables dans sa maison, elle décide d'en louer.

Olga est originale, elle choisit des tables identiques en forme de trapèze isocèle. Elle les trouve plutôt jolies.

Les trois petits côtés sont de même longueur et le grand côté mesure le double d'un petit côté.

Autour de ces tables, on peut installer une personne sur chaque petit côté et deux personnes sur le grand côté. Dans son jardin, pour qu'aucun invité ne tourne le dos à un autre, Olga veut assembler ces tables de telle sorte qu'elles forment une figure convexe.

Q1) Quelles figures géométriques particulières peut-elle former en assemblant plusieurs de ces tables ? Et combien de personnes peuvent-elles prendre place autour de chacune d'elles ?

Q2) Olga : Si il y a plus de 5 personnes, alors il est toujours possible d'assembler des tables de telle façon que toutes les places soient occupées.

Hilda :Pas d'accord ! Il y a une seule exception.

L'une des deux filles a-t-elle raison ? Justifie ta réponse.

Q3) Comment Olga devra procéder pour connaître le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes ?

En classe

Avant de laisser les élèves démarrer leur recherche, seuls ou par groupes de deux, nous examinons ensemble les propriétés de la figure qui représente la table, en particulier la manière de procéder pour la construire à la règle et au compas de façon efficace. Les regards se portent tout d'abord sur les longueurs des côtés du trapèze (trois petits isométriques, un grand qui est le double d'un petit), puis sur ses diagonales (isométriques) et enfin sur son axe de symétrie. Malheureusement, ces propriétés-là ne sont pas d'une grande utilité pour la construction de la figure. Les angles montrent ensuite le bout de leur nez. Quelques hésitations et tâtonnements sont alors nécessaires pour mettre en exergue que le trapèze isocèle est formé de trois triangles équilatéraux, ce qui peut sembler immédiat pour l'enseignant. En fait, la décomposition – mentale ou effective – d'une figure en sous-figures juxtaposées particulières (ici les triangles équilatéraux) implique des capacités étendues liées à la reconnaissance des figures. « Voir » une figure non tracée (et donc qui n'existe pas ?)… tout un art !

Question 1 (45 minutes)

Afin d'augmenter la productivité de leur recherche, les élèves travaillent sur des feuilles à trame triangulaire. Ils laissent tout d'abord libre cours à leur imagination pour dessiner à main levée les nombreuses figures géométriques convexes particulières issues de l'assemblage de plusieurs « tables ». La question « Qu'est-ce qu'une figure particulière ? » apparaît rapidement. En guise de réponse, je les renvoie aux rubriques de leur aide-mémoire traitant des triangles et quadrilatères remarquables ainsi que des polygones réguliers[2].

Après un premier temps de recherche durant lequel personne ne reste en panne, des élèves viennent écrire au tableau les noms exacts des figures qu'ils ont représentées. J'invite dans la foulée les autres élèves à dessiner toutes ces figures, dont la liste s'allonge au fil de la leçon. Parallèlement,

2 Il s'agit de l'aide-mémoire qui accompagne les moyens d'enseignement de mathématiques en Suisse romande pour les degrés 9-10-11. Les informations mentionnées figurent aux pages 83 pour le polygone régulier, 85 pour les triangles remarquables et 88 pour les quadrilatères remarquables.

je leur demande de varier la taille de leurs figures remarquables, d'en faire si possible des petites ou des grandes, voire de formes différentes (voir ci-dessous).

La diversité des productions est relativement étendue, ce qui est fort enrichissant. Le but est ici de revoir la dénomination exacte de certaines figures remarquables, leurs propriétés relatives aux isométries d'angles et de côtés, au parallélisme de leurs côtés, à leur(s) symétrie(s) interne(s). A ce propos, je demande encore aux élèves de représenter, le cas échéant, le (les) axe(s) de symétrie et le centre de symétrie de chaque figure.

Pour information, Olga peut former plusieurs figures géométriques remarquables, dont celles-ci :

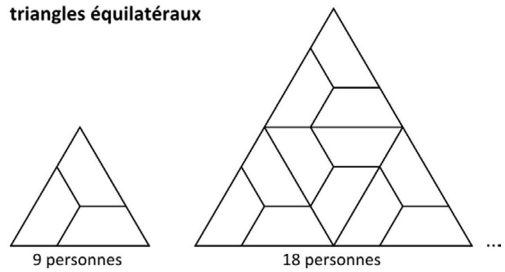


Figure 1

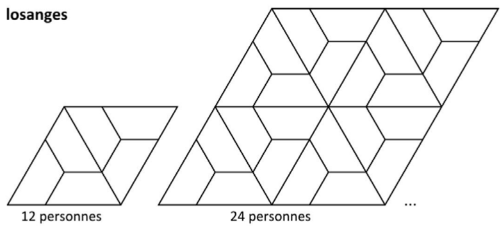


Figure 2

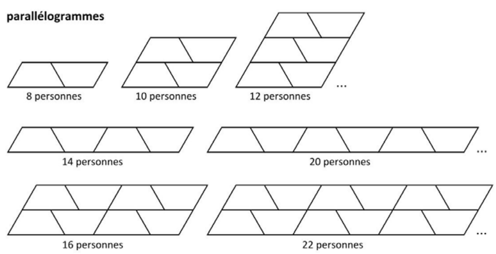


Figure 3

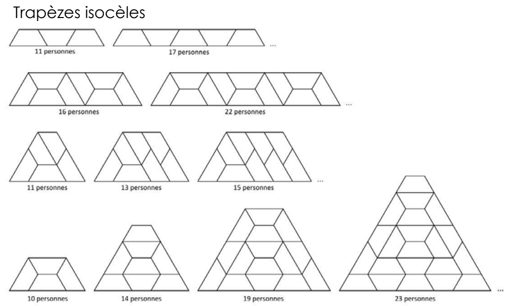


Figure 4

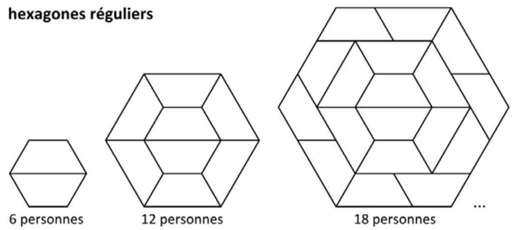


Figure 5

D'autres figures possèdent au moins un axe de symétrie. En plus des triangles équilatéraux, des losanges, des trapèzes isocèles et des hexagones réguliers présentés ci-dessus, on peut former par exemple des hexagones irréguliers :

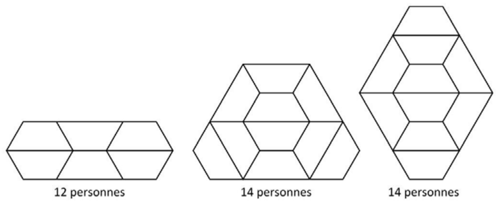


Figure 6

Question 2 (45 minutes)

Les élèves se réfèrent à leurs dessins pour apporter les premiers éléments de réponse à cette question. Ils trouvent assez vite que pour 7 personnes, il est impossible d'assembler des tables de telle sorte que toutes les places disponibles soient occupées. Olga a donc tort ! Mais comment montrer que, pour n'importe quel autre nombre de personnes, on peut toujours trouver une configuration qui convient, et donc qu'Hilda a raison ?

L'idée de trouver un algorithme d'assemblage des tables ne vient pas à l'esprit des élèves. Ils cherchent plutôt de façon désordonnée une configuration pour 8 personnes, puis pour 9 personnes, 10 personnes, et ainsi de suite. Le maître : « Et s'il y avait 47 invités, comment faire ? » Profil bas des élèves ! Quinze minutes de réflexion plus tard, sans qu'aucun résultat significatif n'émerge, je leur donne la solution pour les nombres impairs de convives (voir ci-dessus, sous trapèzes isocèles, 3e ligne), puis leur suggère de chercher du côté des parallélogrammes pour les nombres pairs. La solution est apportée par quelques élèves perspicaces et reproduite par l'ensemble de la classe (voir ci-dessus, sous parallélogrammes, 1ère ligne). C'est donc bel et bien Hilda qui a raison.

Question 3 et prolongement (45 minutes)

Minimiser le nombre de tables revient à chercher des figures convexes d'aire minimale et de périmètre maximal.

On obtient alors la suite de figures ci-contre :

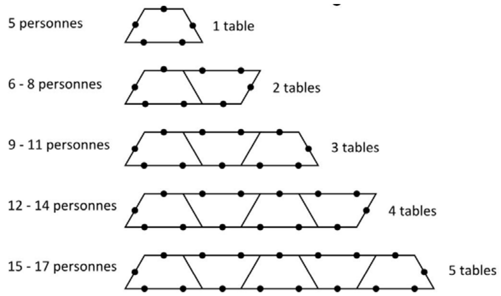


Figure 7

Cette phase ne présente pas trop de difficultés. Elle est réussie par bon nombre d'élèves.

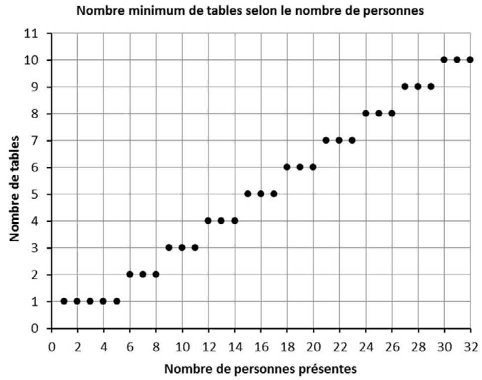
Vient ensuite le calcul à effectuer. Comme les multiples de trois font signe (2 tables → <u>6</u> à 8 personnes, 3 tables → <u>9</u> à 11 personnes, 4 tables → <u>12</u> à 14 personnes…), j'observe à plusieurs reprises la règle suivante (formulée en langage élève) :

> *On fait moins 2 au nombre de personnes, on divise par 3 et on prend le nombre entier qui vient tout de suite après, sauf si on a déjà un nombre entier.*

Et ça marche ! Je leur demande tout de même d'écrire « ma » règle, qui me paraît plus « claire » :

> *Pour connaître le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes, Olga devra prendre le tiers du plus grand multiple de trois inférieur ou égal au nombre de personnes (supposé supérieur à 2).*

En guise de prolongement, sous ma conduite, chaque élève représente par un diagramme cartésien le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes. Une telle représentation - bien différente de celles réalisées habituellement - aide à comprendre la situation (voir ci-dessous).



Et pour terminer on s'intéresse encore à la fonction qui donne le nombre maximum de personnes en fonction du nombre de tables, à savoir la fonction $x \rightarrow 3x + 2$ ($x \in \mathbb{N}^*$), qui est mise en exergue à la suite de la réalisation d'un tableau de valeurs.

En guise de synthèse

Originale et inhabituelle, cette situation a entre autres permis à tous les élèves d'être constamment actifs, d'éprouver puis d'ajuster leurs idées. Elle n'a guère appelé d'incitations au travail de ma part et s'est déroulée quasiment sans temps mort. Elle a débouché sur un large panorama de figures géométriques planes - à propos desquelles les élèves ont pu revoir les propriétés -, sur les notions de minimisation (de l'aire) et de maximisation (du périmètre), sur une belle petite recherche dans le domaine numérique ainsi que sur la bizarrerie de fonction « en escalier ».

Et si vous la proposiez à vos élèves ?