50 / 51

MATH ECOLE

JANVIER 1972
11e ANNÉE

MATH - ÉCOLE

Index analytique

Numéros 41 à 51 (janvier 1970 à janvier 1972)

Les titres des articles sont en caractère gras. Les titres des ouvrages cités sont en caractères gras et entre guillemets. Les noms propres sont en capitales. Les mots-clés sont en minuscules.

Les nombres en chiffres gras indiquent le numéro du bulletin ; ils sont suivis de l'indication de la page (chiffres maigres).

Les matériels dans l'enseignement de la mathématique

De l'importance du matériel en mathématique

par Berthold Beauverd

Dans son livre «Science et méthode» H. Poincaré insiste sur l'importance des manipulations d'objets qui font saisir à l'enfant les notions de ligne, de surface, de volume et il conclut ainsi:

«Peut-être vous étonnerez-vous de cet incessant emploi d'instruments mobiles (règle - compas - planche à dessin - cylindre - cône - sphère); ce n'est pas là un grossier artifice, et c'est beaucoup plus philosophique qu'on ne le croit d'abord. Qu'est-ce que la géométrie pour le philosophe? C'est l'étude d'un groupe, et de quel groupe? de celui des mouvements des corps solides. Comment alors définir ce groupe sans faire mouvoir quelques corps solides?»

H. Poincaré a toujours été curieux d'établir d'étroites relations entre le réel et la pensée philosophico-mathématique; il était persuadé que les manipulations sont les grandes pourvoyeuses du cerveau. Sans cesse, dans ses œuvres, nous trouvons des exemples de cet ordre qui attirent l'attention sur notre corps; par ses sens, il est en prise directe sur le concret, celui-ci demeurant l'animateur essentiel de la pensée. C'est dans cette optique que «Math-Ecole», dans son numéro jubilaire 50/51, met l'accent sur l'importance du matériel.

Si, avec Henri Wallon, nous pensons que «la pensée remonte de la main au cerveau», nous comprenons pourquoi les pédagogues se sont laissé fasciner par l'emploi de tel ou tel matériel, espérant, par ces médiums, atteindre une fonction essentielle, celle qui consiste à comprendre et à faire comprendre.

D'où les exigences du pédagogue qui veut un matériel «nourrissant». Madeleine Goutard définit ainsi un bon matériel: «C'est celui qui permet la plus grande quantité d'expériences acquises à l'occasion de la moindre manipulation.»

Encore faudrait-il tenir compte de chaque élève, qui ne ressemble que fort peu à son voisin, et se demander si le meilleur matériel ne serait pas celui que l'enfant invente, tout comme l'homme, placé devant les nécessités de notre civilisation, invente les machines merveilleuses que nous connaissons...

«Math-Ecole» est heureux d'accueillir, dans ce numéro 50/51, les textes d'éminentes personnalités qui partagent ainsi ses soucis et ses espérances; il leur dit sa très vive reconnaissance.

Matériels fabriqués par les enfants Matériels fournis par l'environnement

par Nicole Picard, Paris

Deux types de matériels me semblent particulièrement intéressants dans la perspective d'apprentissage des mathématiques par de jeunes enfants. Ce sont les matériels fabriqués par les enfants d'une part, ceux fournis par l'environnement d'autre part.

Je vais en donner quelques exemples.

I. Matériels fabriqués par les enfants

La prise de conscience de la structure d'un matériel structuré construit par les enfants se fait par l'intermédiaire même de la construction: «comment faire pour savoir si j'ai toutes les pièces correspondant à la commande qui m'est faite?» La réponse à cette question conduira souvent à faire des schémas, à symboliser, ce qui constitue le départ d'une mathématisation. Je vais donner quelques exemples pris à différents niveaux de l'école élémentaire montrant, en particulier, les avantages de tâtonnements dans la fabrication du matériel en vue d'en dégager la structure.

1. Fabrication d'un jeu en deuxième année

L'idée de la fabrication de ce jeu est de munir les enfants d'un matériel structuré pour lequel certaines pièces manquent et certaines pièces sont en double. Il me semble, en effet, que des matériels par ailleurs intéressants sous certains points de vue, comme le matériel des blocs logiques, ont l'inconvénient de conduire les enfants à désigner une pièce par la proposition permettant d'identifier la classe à laquelle cette pièce appartient dans la partition la plus fine «le bloc bleu, petit, rond, épais» par exemple. Ceci conduit, en particulier, à confondre une classe à un élément avec cet élément lui-même puisque l'on *désigne* classe et élément de la même façon. De plus, toute proposition de la forme «*c* et *t* et *f* et *e*» ou *c* désigne une des couleurs utilisées pour ce matériel, *t* une taille, *f* une forme, *e* une épaisseur est une proposition vraie pour un (et un seul) élément du jeu.

Dans la présente situation, on demande aux enfants de construire un jeu en utilisant un arbre permettant de colorier de façon adéquate des cartes marquées d'une lettre. Sur chaque carte est dessinée un oiseau. La lettre est le nom de l'oiseau. Voici l'arbre permettant de fabriquer ce jeu:

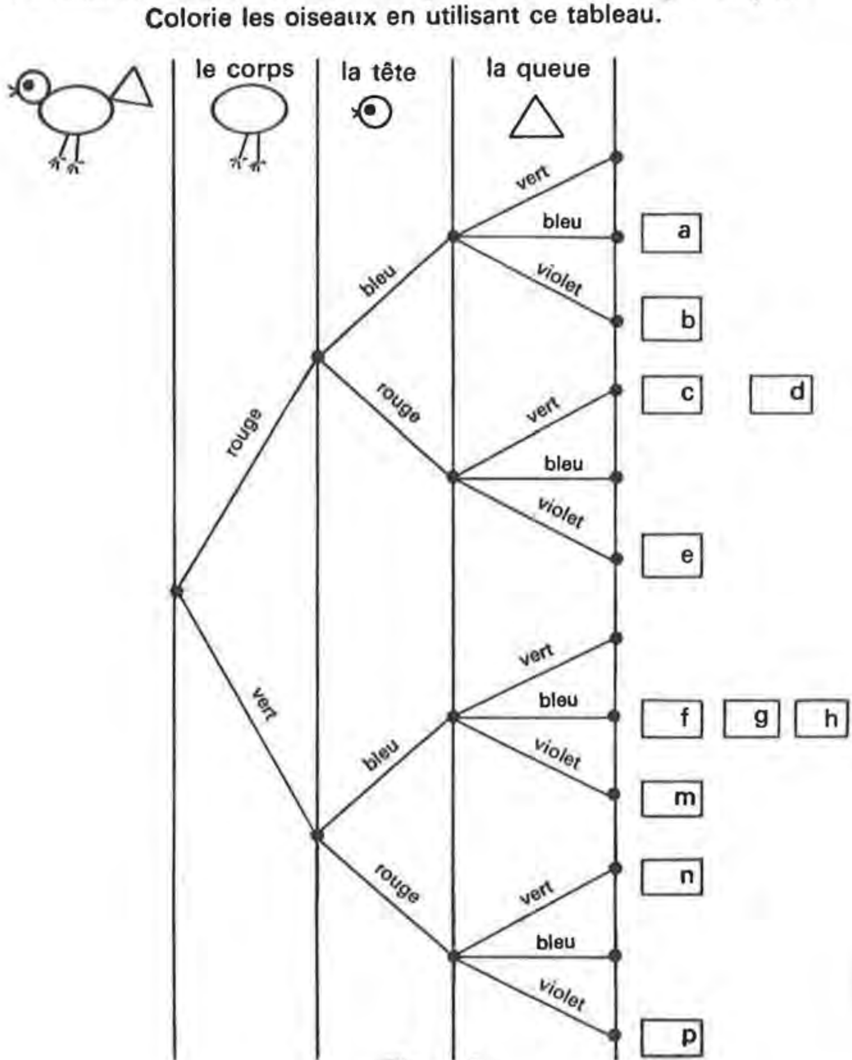


Figure 1

Tous les enfants de deuxième année auxquels cet exercice a été proposé ont été capables d'interpréter l'arbre de la figure 1 et de répondre ensuite aux questions qui leur ont été posées (cf. fiches pp. 39 à 49, *A la conquête du nombre II* *).

Il serait intéressant de savoir si des enfants de ce niveau sont capables de concevoir un matériel «du même genre» sans aucune directive, c'est-à-dire si les exercices sont faits par simple «lecture» du matériel ou si la structure est globalement perçue. Voici le compte rendu d'une expérience qui nous éclairera quelque peu sur ce sujet: Dans une classe, lors de la fabrication du matériel, un enfant était absent. Lorsqu'il revient en classe, ses camarades veulent lui expliquer ce qui a été fait. Tous pensent spontanément à l'arbre mais, alors que *tous* les enfants ont utilisé l'arbre correctement, *un seul* sur 28 est capable de reconstituer l'arbre, tous les autres représentent des *cheminements* sur l'arbre.

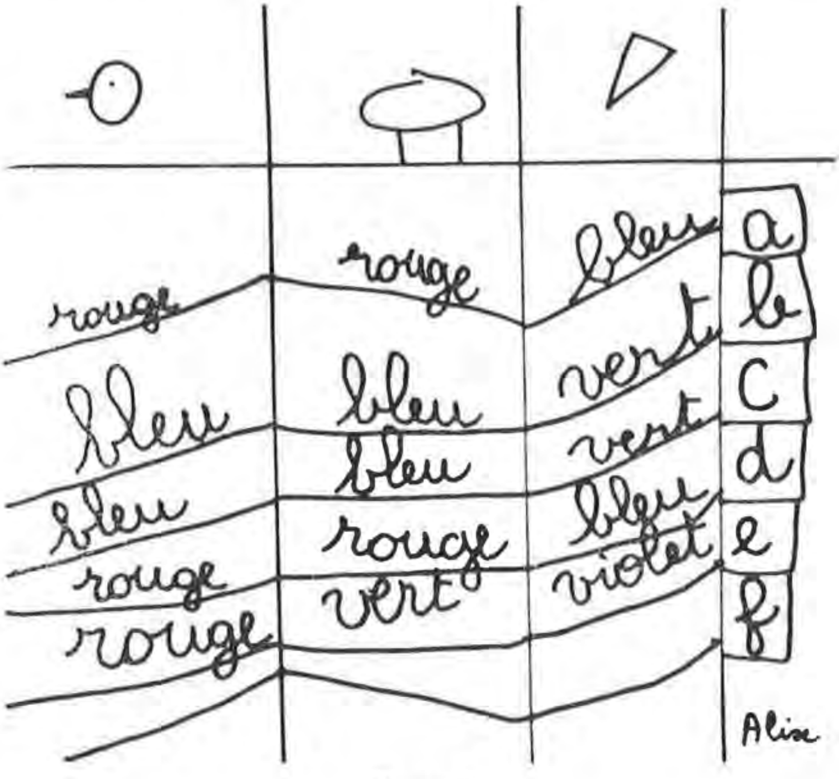


Figure 2

* Nicole Picard, A la conquête du nombre II, O.C.D.L., 1970.

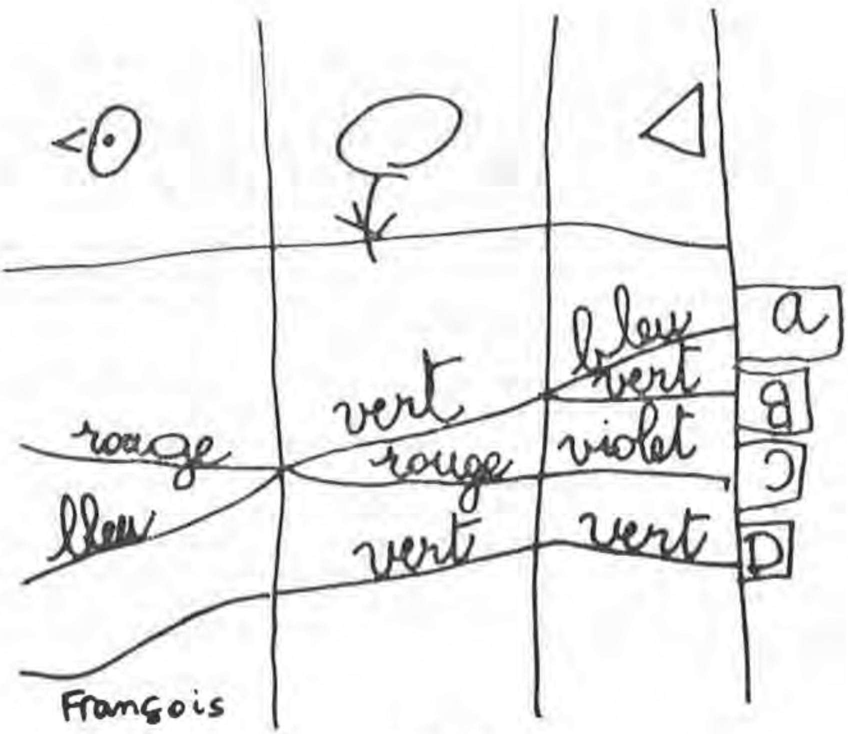


Figure 3

Ainsi, ils représentent ce qu'ils ont *utilisé* de l'arbre. Un seul est capable d'en saisir la structure. Nous avons laissé les choses ainsi lorsque, dans la séance de travail suivante, un groupe d'enfants propose de dessiner «un vrai arbre» où les oiseaux pourront se nicher. Je saisis l'occasion et suggère de «faire des nids au bout des branches et mettre dans chaque nid seulement des oiseaux pareils». Motivés par le fait de devoir nicher tous les oiseaux suivant cette consigne et non pas de donner des exemples à leur camarade, comme dans le cas précédent, les enfants cherchent un mode de construction répondant au critère choisi. Ils y parviendront et, chose intéressante, certains d'entre eux créeront ensuite des jeux personnels en dessinant correctement *au préalable* un arbre, d'autre proposeront «un arbre pour classer des enfants de la classe».

Cet exemple montre l'intérêt d'une recherche en vue de la construction. Il est évident que les enfants n'auraient pas *inventé* la schématisation en arbre mais, ayant déjà utilisé cet outil, le fait d'avoir à en créer un leur permettra de saisir la *structure* du matériel et son *mode de construction* alors que, sans cela, ils en restaient au niveau d'une perception fragmentaire (ce qui est a fortiori vrai pour un matériel déjà existant).

2. *Un jeu de dominos* (3e année)

La construction de ce jeu s'est trouvée motivée par une question posée par des enfants au sujet de la fiche M. 1. du journal de Mathématique I *. Il s'agissait, dans la fiche, de fabriquer 8 objets (on donnait 4 formes et 2 couleurs). Des enfants demandent s'il fallait aussi fabriquer des objets en assemblant les objets précédents. Nous avons donc cherché tous les assemblages de deux objets en les représentant sous forme de dominos.

La recherche fut, au départ, tout à fait anarchique, chaque enfant dessinant quelques dominos sans se préoccuper si ces dominos avaient déjà été proposés. On institua donc la règle de proposer seulement des dominos nouveaux. Quand on eut une trentaine de dominos, on se demanda alors s'il était possible d'en trouver d'autres. Cela nécessita de les classer: Des enfants cherchèrent par exemple tous les dominos ayant un carré rouge à gauche puis se demandèrent ce qu'il était possible de mettre comme objet à droite. On constata ainsi des manques et on compléta le jeu.

Quelques enfants suggérèrent alors que chacun fabrique son propre jeu. La proposition fut immédiatement adoptée mais certains firent remarquer que 64 dominos, ce serait long à dessiner. Je proposai alors de faire tirer des feuilles que les enfants devraient colorier mais ils devaient établir un plan de travail de façon à faire faire à la secrétaire le moins de dessins possibles. Ils trouvèrent alors qu'il fallait dessiner 16 dominos ce qui revenait en fait à remplir le tableau suivant:

à droite / à gauche	□	○	△	⬡
□	□□	□○	□△	□⬡
○	○□	○○	○△	○⬡
△	△□	△○	△△	△⬡
⬡	⬡□	⬡○	⬡△	⬡⬡

Figure 4

et à faire tirer 4 feuilles par personne (4 types de coloration: rouge-rouge, rouge-bleu, bleu-rouge, bleu-bleu).

* Nicole Picard, Journal de Mathématique I, O.C.D.L., 1970.

Une fois le jeu construit, on joua à dessiner un domino en ne posant jamais de questions inutiles: Cela conduisit à établir le questionnaire suivant:

No	Question
1	Le premier objet est-il un carré?
2	Le premier objet est-il un triangle?
3	Le premier objet est-il un hexagone?
4	Le deuxième objet est-il un carré?
5	Le deuxième objet est-il un triangle?
6	Le deuxième objet est-il un hexagone?
7	Le premier objet est-il rouge?
8	Le deuxième objet est-il rouge?

Ce questionnaire a ensuite servi d'outil pour fabriquer un jeu de cartes perforées, images du jeu de domino, chaque question à laquelle on répond *oui* conduisant à encocher le numéro du trou correspondant. Un travail de logique fut fait à l'aide de ce jeu de cartes perforées.

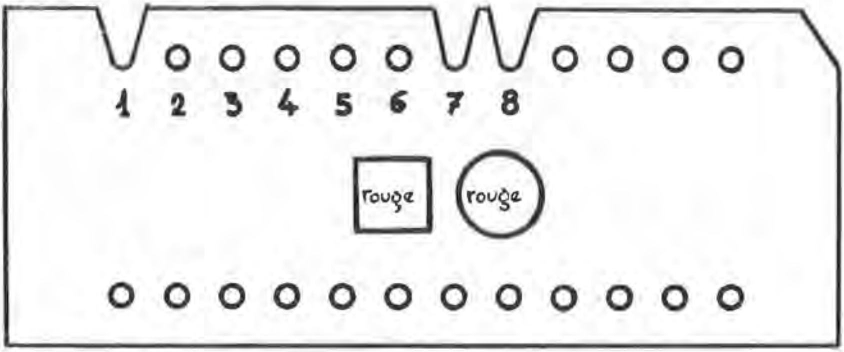


Figure 5

3. Fabrication de cocardes (4e année)

Nous allons trouver ici un autre exemple concernant le fait de l'utilité de tâtonnements en vue de la découverte de la structure d'un matériel dont ne disposent pas les enfants; mais des indications leur sont fournies pour la construction de ce matériel. On notera que l'expérience suivante se situe en 4e année alors que celle sur les oiseaux se situe en seconde année. En 4e année les enfants savent utiliser un arbre pour représenter la structure d'un matériel qu'ils connaissent.

Le professeur de dessin avait donné comme consigne de couvrir une feuille de ronds de couleur: deux ronds ne doivent pas se superposer mais on peut mettre plusieurs ronds les uns à l'intérieur des autres. On examine les réalisations:

— Certains sont d'une seule couleur.

— Il y a des empilements de ronds, deux, trois, ou davantage de ronds les uns dans les autres.

— Plusieurs couleurs sont utilisées.

On se pose alors la question de savoir quelles sont toutes les espèces de ronds que l'on peut fabriquer à l'aide de *trois* marqueurs de couleurs différentes, deux ronds de même couleur ne devant pas être l'un à côté de l'autre.

J'ébauche l'arbre à l'aide des enfants.

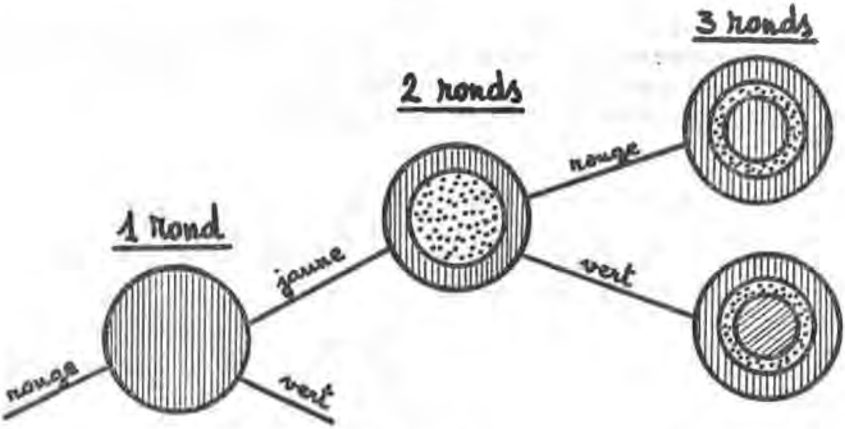


Figure 6

Les enfants ont de très grosses difficultés. Pourtant, la semaine précédente, l'arbre avait été introduit comme schéma pour organiser un matériel que les enfants connaissaient: 13 sur 29 enfants avaient été d'emblée capables de construire correctement l'arbre. L'exercice proposé semble ici le même. En fait il n'en est rien. L'exercice antérieur a servi à expliciter une structure (celle du matériel) bien intégrée par les enfants alors qu'ici ils n'avaient pas perçu la structure du matériel constitué par les cocardes. Dans la première étape, l'arbre peut être, à ce niveau, facilement construit *pour organiser un matériel existant mais non pour concevoir un matériel.*

Dans une deuxième classe, avant de proposer l'arbre, je fais dessiner aux enfants un grand nombre de cocardes en précisant que chaque enfant ne doit pas avoir deux cocardes semblables. On découpe ensuite les cocardes et on fait un inventaire de toutes les cocardes à 1, 2, 3 couleurs. On se pose la question de savoir si on est assuré de ne pas avoir oublié de cocarde.

J'ébauche alors l'arbre comme précédemment. L'arbre est achevé extrêmement rapidement par tous les enfants de la classe. Cette réussite semble étonnante par rapport à l'échec obtenu dans l'autre classe. C'est qu'en fait les choses ne se sont pas passées de la même façon: la consigne donnée dans la deuxième classe de *ne pas faire deux cocardes semblables* a conduit les enfants à une analyse de la production permettant une stratégie de la construction. Les enfants se trouvent donc vis-à-vis de la construction de l'arbre dans les mêmes conditions que pour l'exercice de construction d'un arbre destiné à mettre en évidence la structure d'un matériel connu.

II. Matériels fournis par l'environnement

Ces matériels sont absolument nécessaires si nous voulons que les enfants aient un jour quelque chance de savoir utiliser les mathématiques qu'ils apprennent. Ces matériels varient évidemment d'une classe à l'autre. Ils ne seront pas les mêmes, souvent, à la ville et à la campagne. Je ne m'étendrai pas longuement sur ce sujet mais je donnerai rapidement quelques exemples:

1. Une enquête sur des prix (5e année)

Les enfants, dans le cadre des activités d'éveil, ont fait chez les commerçants du quartier et sur les marchés voisins une enquête sur les prix des denrées alimentaires. Les documents ont ensuite été présentés sous forme de graphiques en bâtonnets, des comparaisons ont été faites. Ensuite les enfants se sont donné des problèmes; par exemple établir un menu pour sa propre famille après s'être attribué un budget pour ce repas.

2. Utilisation de documents (5e année)

La revue *Textes et Documents pour la classe* (SEVPEN, Paris) avait publié des statistiques de l'évolution démographique, du revenu par tête, de la production, de la consommation de diverses denrées pour différents pays du monde. Dans le cadre d'un travail fait à propos de la campagne *La faim dans le monde*, les enfants ont utilisé ces documents, mis les données sous forme de graphiques; ils ont pu ainsi recueillir maintes informations qui n'apparaissaient pas du tout sur le document initial conçu pour les élèves beaucoup plus âgés qu'eux.

3. *Utilisation d'horaires des chemins de fer pour établir des itinéraires* (4e année)

L'intérêt de l'utilisation de tels documents est, en particulier, de trier des informations très nombreuses pour tenir compte de critères choisis (arriver le matin au lieu de destination, ne pas partir avant ou après une heure choisie, conditions de parcours: trains à supplément, trajet minimum imposé, etc...).

De la même façon on a utilisé les tarifs distribués dans les bureaux de poste; ou bien encore, dans une école, la coopérative est gérée par les enfants.

4. *Les outils acquis en mathématique peuvent être d'une aide très appréciable pour les autres disciplines*

En voici un exemple: Dans une classe, les enfants avaient décidé de faire une enquête sur les oiseaux. Ils cherchaient donc des documents. Au bout de quelques jours de recherche enthousiaste, il y avait tant de documents, de provenances si diverses qu'il devint évident qu'on ne pouvait pas en tirer parti par une simple lecture; les enfants furent très découragés. On suggéra alors de chercher quelques points sur lesquels on souhaitait avoir des informations concernant la morphologie ou la vie des oiseaux. On établit une liste, puis les documents furent distribués et on établit pour chaque oiseau une carte perforée sur laquelle chaque trou correspondait à un des points choisis: la masse des documents devenait ainsi utilisable. La même idée fut reprise en 2e année (étude des légumes), en 3e année sur les fruits, en 4e année sur les ports de pêche. On établit aussi une carte d'identité des enfants indiquant leurs goûts, les activités particulières faites à l'école par chacun, le nombre de frères et soeurs (20 renseignements au total).

5. *Etude de ballons de sport* en rapport avec la construction et l'étude de polyèdres (3e et 4e années)

6. Pour terminer je donnerai un exemple d'une utilisation spontanée, en 2e année, de schémas pour organiser des informations. Dans une classe les enfants avaient étudié le hérisson. A partir de cette étude de nombreuses activités avaient été faites. J'arrive un jour dans la classe, la maîtresse me dit: «Si vous saviez tout ce que nous avons fait depuis deux semaines sur le hérisson». Je demande que l'on m'explique. Les enfants très excités parlent tous ensemble, les informations fusent de toute part. Je fais remarquer qu'ils me disent tant de choses que je n'y comprends rien. Une petite fille me dit (c'était quelque temps après la construction du matériel des oiseaux): «On pourrait faire un arbre».

J'avoue ne pas avoir vu l'utilité d'un arbre mais elle insiste: «Si, on mettra deux branches, la vie du hérisson, et comment il est». L'idée est adoptée par plusieurs autres qui commencent à faire des propositions. Une grande discussion s'organise. Voici le résultat de ce travail:

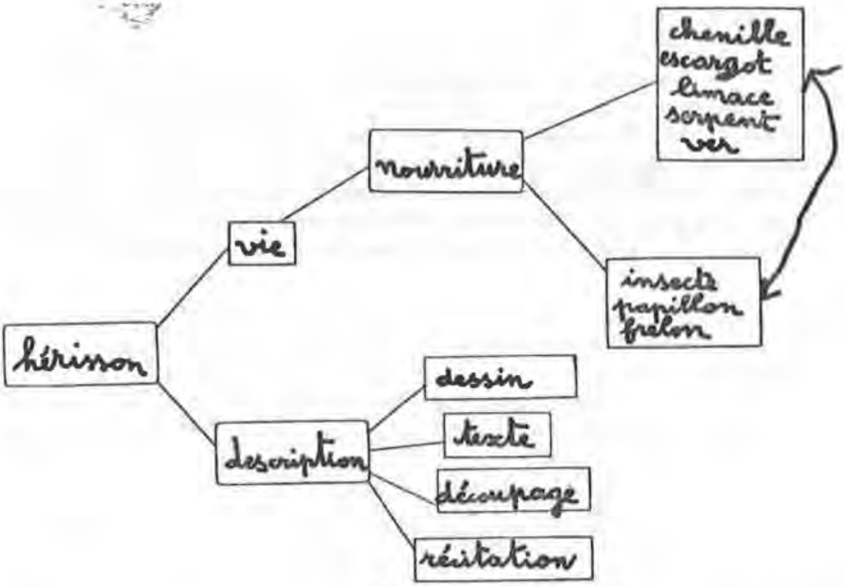


Figure 7

N'est-ce pas touchant de voir des enfants de 7 ans chercher ainsi un moyen de communiquer d'une façon claire leurs activités de deux semaines? En tout cas, cet arbre est apparu réellement à la classe comme un chef-d'œuvre. Il a été recopié dans le «cahier de vie» où l'on marque les événements importants de la classe!

L'utilisation du matériel concret dans l'enseignement de la mathématique

par Z. P. Dienes, Sherbrooke (Canada)

L'apprentissage est un processus d'adaptation de l'organisme à l'environnement. Quand un individu a appris quelque chose cela signifie qu'il se comporte vis-à-vis de son environnement d'une manière plus efficace qu'auparavant. Par conséquent, le pédagogue doit s'occuper de l'organisation efficace de l'environnement de l'enfant, de façon à encourager les développements voulus et souhaitables qui résulteront de l'interaction entre les organismes, c'est-à-dire les enfants et leur environnement tel que nous l'avons organisé. Dans l'environnement, nous pouvons mettre plusieurs sortes d'objets. **Si on parle de l'apprentissage de la mathématique, évidemment les objets que nous y mettrons seront reliés d'une certaine manière à un tel apprentissage. Pour l'apprentissage des ordres il faut des objets qu'on peut ordonner. Pour l'apprentissage des équivalences il faut des objets qui sont pareils d'une certaine manière mais différents d'autres manières. Pour l'apprentissage des propriétés des nombres il faut des ensembles d'objets qu'on peut compter ou bien des objets dont la longueur peut être mesurée.**

Il ne faut pas oublier que la mathématique est générale d'une part et abstraite d'autre part. La généralité des concepts mathématiques sera comprise si on réussit à varier *toutes* les variables inhérentes dans un concept mathématique. Par exemple, si on veut apprendre à l'enfant les propriétés d'un parallélogramme on aurait tort de lui montrer seulement des carrés. On n'aurait pas tort du point de vue de la mathématique parce que toutes les propriétés des parallélogrammes pourront être réalisées au moyen de carrés, mais l'enfant apprendra sans qu'il s'en rende compte certaines des propriétés du carré qui ne sont pas des propriétés générales des parallélogrammes. Le parallélogramme est *plus général* que le carré et si on veut montrer à l'enfant toutes les propriétés qui sont caractéristiques d'un parallélogramme et insister sur la généralité de ces propriétés, il ne faut pas les restreindre aux cas particuliers du parallélogramme comme par exemple le carré ou le losange.

Pour cette raison, quand nous planifions l'environnement mathématique de l'enfant, le matériel envisagé doit être facilement adapté à toutes les variations possibles des variables que nous serons obligés de faire varier pour obtenir la compréhension nécessaire des généralités. Par exemple, la valeur positionnelle sera comprise d'une manière beaucoup plus complète si on fait varier toutes les variables inhérentes:

1. la valeur des chiffres,
2. la valeur des exposants,
3. la valeur de la base.

En général, l'arithmétique est enseignée en faisant varier juste la valeur des chiffres. Les exposants restent presque constants parce que l'on croit que les centaines sont plus difficiles que les dizaines. Cela signifie que l'enfant ne rencontrera que plus tard les valeurs de l'*exposant* supérieures à 2. Quand le «plus tard» arrive, ses idées sont déjà figées. C'est encore pire en ce qui concerne *la base*.

Il rencontre seulement la base dix. Comment est-il possible qu'un enfant puisse apprendre, en se servant d'un seul exemple, ce que l'humanité a mis des milliers d'années à développer, c'est-à-dire l'idée de la valeur positionnelle? Pour cette raison le *matériel multi-base* s'adapte bien à l'obtention de l'idée générale de puissance.

Prenons un autre exemple, les produits cartésiens. Très souvent nous avons affaire à la réalisation simultanée de plusieurs variables. Par exemple, on peut prendre un certain nombre de couleurs, un certain nombre de formes; si on veut réaliser chacune de ces formes en chacune de ces couleurs on aura un système d'objets dans lequel il y a autant d'objets que le nombre cardinal du produit cartésien de l'ensemble des couleurs par l'ensemble des formes. On pourrait encore multiplier le nombre de variables en prenant d'autres sortes de propriétés des objets. Par exemple, on peut mettre un trou dans l'objet ou bien deux trous, ou bien pas de trou; alors si l'objet est perforé ou non, ou combien de fois il est perforé, cela va nous donner encore une autre dimension le long de laquelle nous pouvons exercer la variation dans cette dimension. Le matériel récemment introduit, appelé QUADRIMATH est un exemple d'un tel matériel. Dans ce matériel, il y a quatre couleurs, quatre formes, quatre nombres de trous, c'est-à-dire 1, 2, 3 et 4. Pour réaliser une fois, et seulement une fois, chaque combinaison de couleur, de forme et de nombre de trous, il faut 64 objets dans notre ensemble d'objets. Une autre forme pour réaliser un tel matériel, c'est les *blocs logiques*; c'est un exemple d'un produit $4 \times 3 \times 2 \times 2$ parce que, dans la forme la mieux connue de ce matériel, il y a 4 formes, 3 couleurs, 2 épaisseurs et 2 grandeurs. Il est important de varier dans l'apprentissage de l'enfant les deux variables suivantes:

1. le *nombre de variables* dont on tient compte,
2. le *nombre de valeurs* que peut assumer chacune de ces variables.

Examinons les deux ensembles cités. Le matériel Quadrimath comporte trois variables et chacune des variables peut assumer quatre valeurs. Le matériel Blocs Logiques comporte quatre variables; la variable couleur peut assumer trois valeurs, la variable forme peut en assumer quatre, les deux autres variables peuvent assumer deux valeurs respectivement. Il est évident qu'il faudrait multiplier les différents moyens de combiner les valeurs. Evidemment, étant donné le matériel $4 \times 4 \times 4$ on peut enlever une certaine partie et en faire un autre matériel par exemple $3 \times 3 \times 2$ ou $3 \times 4 \times 3$, etc...

En bref, l'utilisation des sous-ensembles des ensembles d'objets construits, destinés à aider l'apprentissage d'une idée, est un principe très important qu'il serait dangereux d'oublier.

Il est très important de nous assurer, non pas seulement que la *généralité* de la mathématique soit comprise par l'enfant, mais aussi qu'il conçoive la mathématique comme une structure *abstraite*. L'enfant abstrait une structure en se rendant compte qu'elle est possédée par beaucoup de situations différentes. Ainsi il tient compte du contenu commun de toutes ces situations et il rejette les parties non pertinentes qui appartiennent seulement à une situation particulière, mais non pas à toutes. Si l'on accepte un tel point de vue du processus d'abstraction, il est important d'utiliser une grande variété de matériels dans la classe pour que les enfants aient la chance de monter des expériences dans lesquelles ils doivent faire face à des situations très différentes. Le processus qui consiste à trouver les liens entre deux situations différentes mais de structure semblable ou idendique, est la recherche des *isomorphismes* entre ces représentations concrètes. Prenons par exemple un problème où l'objectif est d'ordonner un certain ensemble. Pour ordonner un ensemble il faut que ses éléments puissent se distinguer les uns des autres afin que nous puissions tenir compte de la manière dont les éléments sont différents les uns des autres. Par exemple dans un autre matériel semblable au Quadrimath, nous nous servons également de la couleur, de la forme et du nombre de trous. C'est le TRIMATH. Prenons-en un sous-ensemble de 27 objets et ordonnons-les comme suit :

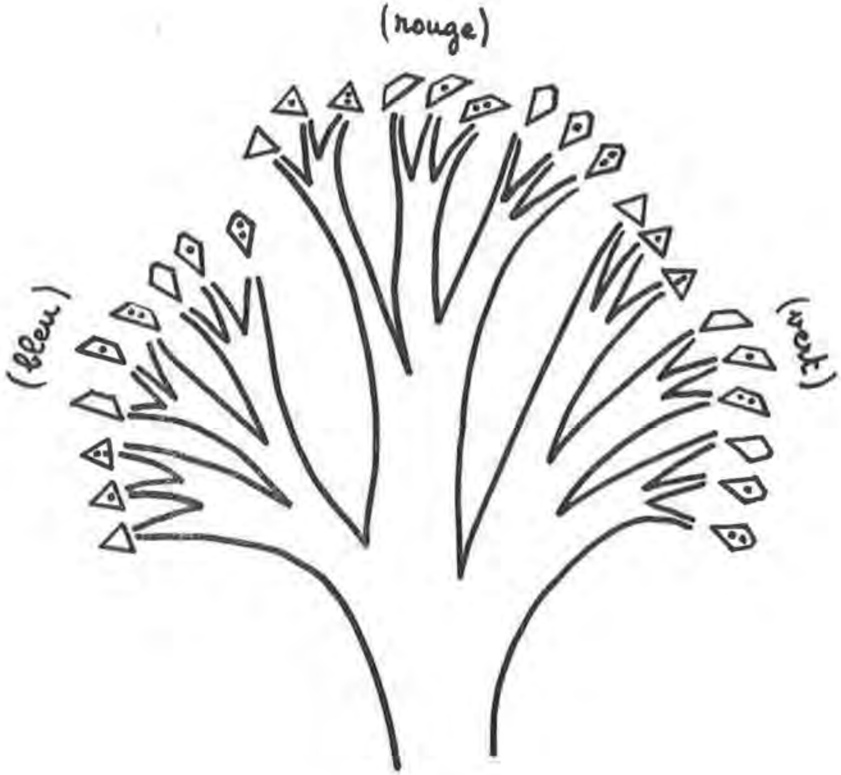


Figure 1

Prenons maintenant une autre situation. Par exemple, prenons des réglettes Cuisenaire, des blanches, des vertes, des bleues. Mettons à la disposition des enfants 27 de chacune de ces trois sortes. La première consigne pourrait être de leur demander de construire autant d'ensembles que possible de façon à ne jamais mettre plus de 2 réglettes de la même sorte dans le même ensemble. Deux ensembles «pareils» ne doivent pas être construits; dans deux ensembles «pareils», il y a le même nombre de blanches, le même nombre de vertes, le même nombre de bleues. Après avoir construit ces ensembles, y compris l'ensemble vide, on se rendra compte qu'il y en a exactement 27. On peut poser le problème maintenant d'ordonner ces ensembles. Voici deux ordres possibles:

Première façon d'ordonner

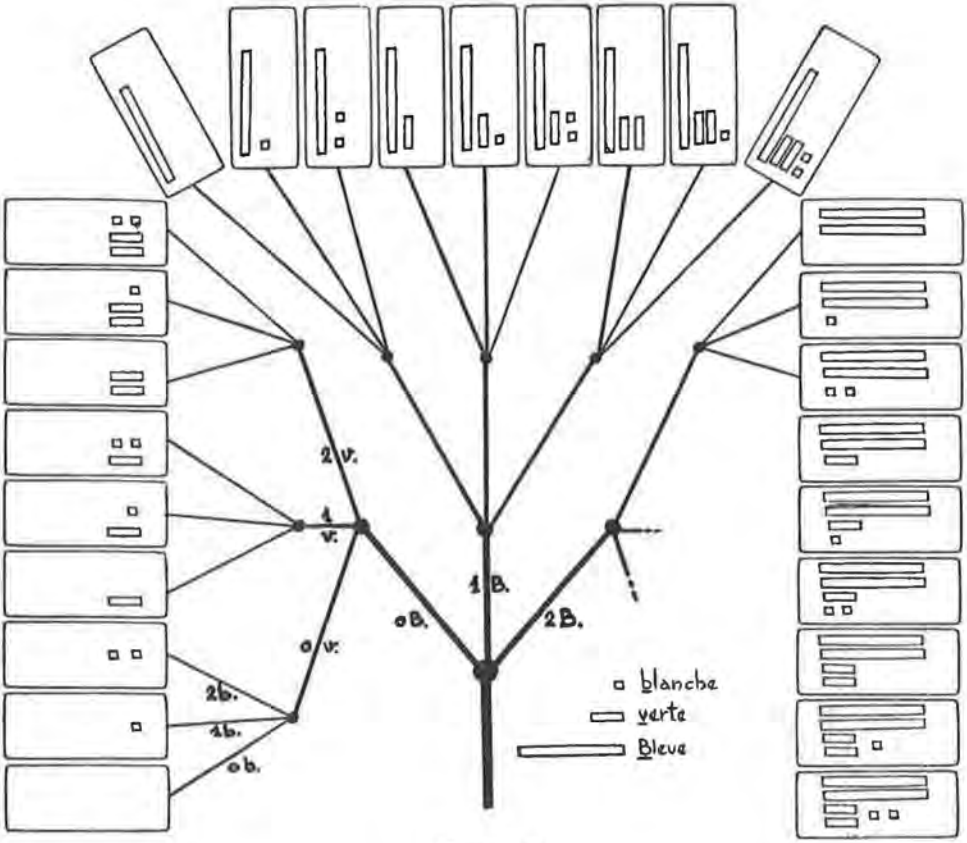


Figure 2

Deuxième façon d'ordonner

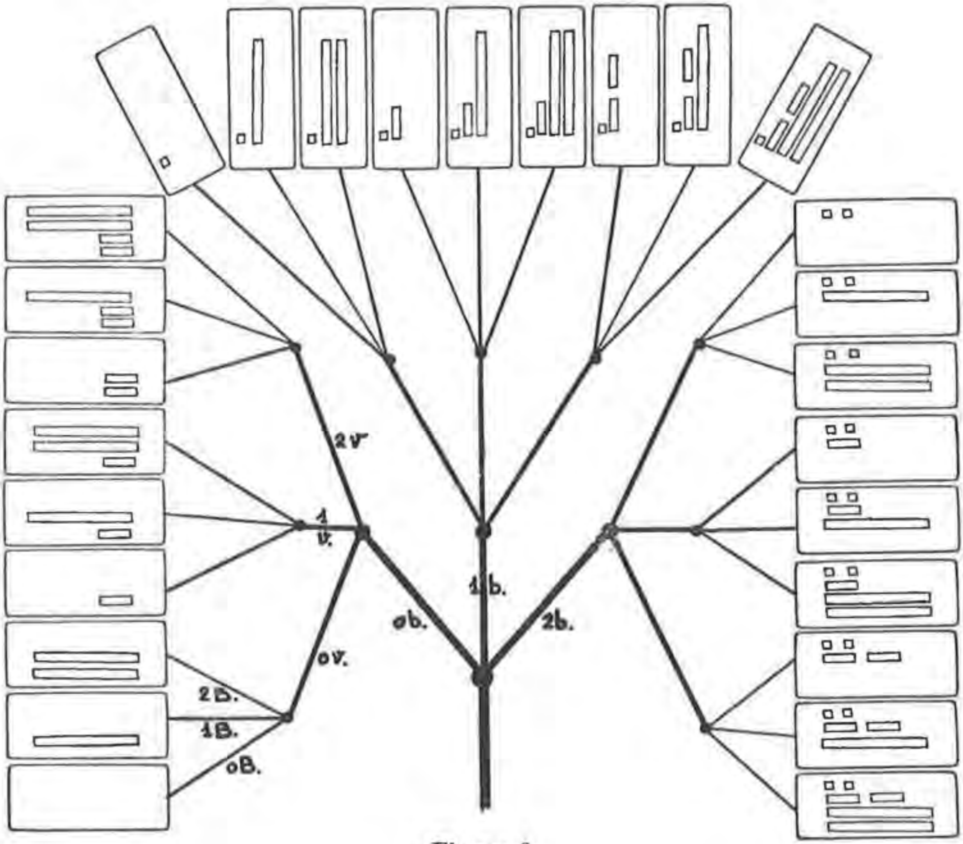


Figure 3

Le premier ordre se fait en commançant par 0 et *en ajoutant 1*, c'est-à-dire une blanche et en tenant compte de l'équivalence de volume. Par exemple, une verte sera équivalente à 3 blanches et une bleue à 3 vertes.

Dans l'autre ordre, ce n'est pas le 1 de plus que nous faisons, parce que l'ordre de l'importance des réglettes a été changé. Il y a évidemment quelque chose de commun entre les deux consignes et aussitôt que l'enfant découvre ce qu'est ce contenu commun, il comprendra d'une manière plus profonde ce que c'est qu'ordonner un ensemble $3 \times 3 \times 3$, parce qu'il sera en mesure de se détacher de la concrétisation particulière qu'il a utilisée.

Ici nous avons les transformations suivantes entre l'ordre des TRIMATHS et l'ordre des ensembles de réglettes.

Premier ordre des ensembles de réglettes	Trimath	Deuxième ordre des ensembles de réglettes
0 blanche	pas de trou	0 bleue
1 blanche	1 trou	1 bleue
2 blanches	2 trous	2 bleues
0 verte	triangle	0 verte
1 verte	trapèze	1 verte
2 vertes	cerf-volant	2 vertes
0 bleue	blanc	0 blanche
1 bleue	rouge	1 blanche
2 bleues	vert	2 blanches

Evidemment il est possible d'ordonner soit les trimaths, soit les ensembles de réglettes, d'une manière différente. Pour décider quel ensemble de réglettes ou quel trimath suit quel autre ensemble de réglettes ou quel autre trimath, il faut établir un système de décisions. Un tel système est fourni visuellement par l'arborescence suivante:

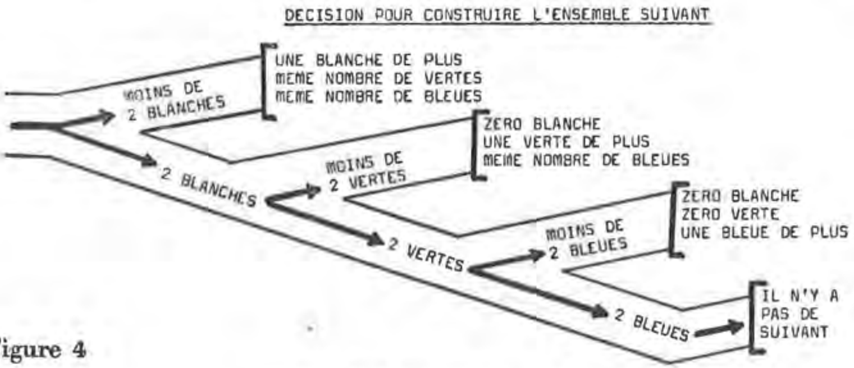


Figure 4

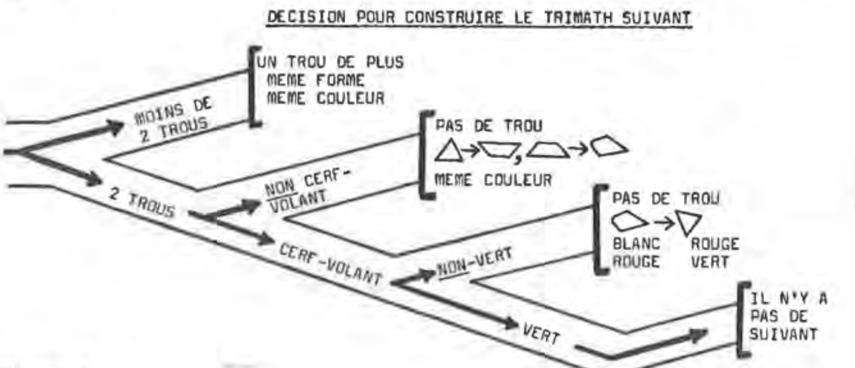


Figure 5

L'arborescence de décisions introduit une étape plus élevée de l'abstraction parce que, maintenant, il est évident que la même arborescence peut être remplie d'autres contenus, tout en laissant la structure de la consigne intacte. C'est ce que j'ai appelé ailleurs l'étape de la représentation tandis que l'étape antérieure était l'étape des isomorphismes ou des comparaisons.* L'enfant devra être capable de passer d'une situation concrète à la représentation et de la représentation à une situation concrète qui lui est appropriée. Il devra aussi être capable de voir si une situation concrète n'est pas adaptée à la représentation en question. Par exemple, voici deux structures différentes à 8 éléments.

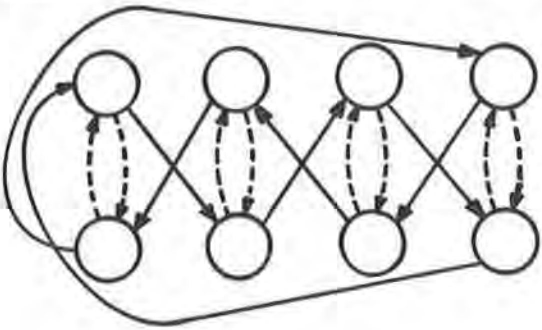


Figure 6

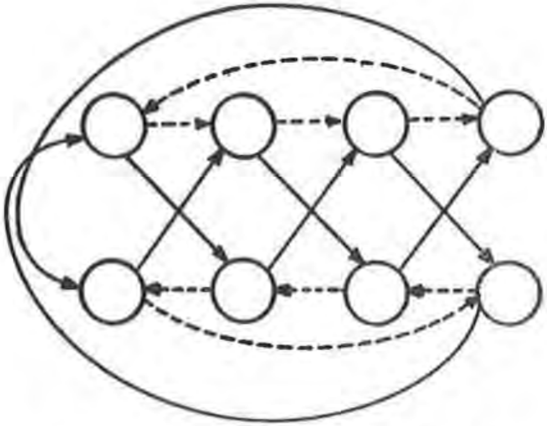


Figure 7

On peut représenter les huit états du jeu en se servant de certaines permutations. Pour le premier diagramme (fig. 6), qui est celui des isométries du carré, on mettra des ensembles ordonnés de réglettes blanches, rouges, vertes et jaunes, par exemple comme suit:

brvj vrbj vjbr bjvr
jvrb jbrv rbjv rvjb

* Voir «Les Six Etapes de l'Apprentissage des Structures», publié avec illustrations sous forme d'un petit livre, par O.C.D.L., Paris.

L'enfant devrait être capable de dire si un jeu concret à 8 éléments correspond à la première ou à la deuxième représentation. La deuxième représentation (fig. 7) met en représentation sagittale le groupe des quaternions. Par conséquent tout autre jeu de cette nature pourrait être mis en correspondance avec celui-ci mais non pas avec les isométries du carré. Les éléments d'une autre sorte de jeu devraient remplir les cases vides dans la représentation sagittale qui sert à représenter les isométries du carré. C'est une espèce de discrimination conceptuelle qu'on essaie d'apprendre à l'enfant à cette étape. L'enfant est en mesure de discriminer entre un triangle et un carré mais il n'est peut-être pas en mesure de discriminer entre la structure des isométries d'un carré et la structure des isométries d'un triangle. Ici nous nous trouvons à un niveau plus abstrait. Par l'étude des situations concrètes en utilisant du matériel didactique, la plupart des enfants seront amenés à une réalisation de cette abstraction plus profonde, qui leur permet d'exercer cette discrimination conceptuelle entre différentes structures.*

En mathématique il y a des abstractions à beaucoup de niveaux différents. L'abstraction de premier ordre se fait à partir de l'expérience. On groupe des événements et on dit que cette espèce de chose appartient à telle ou telle place. Cette place est l'abstraction tirée de l'expérience des événements. L'astuce pédagogique consiste à utiliser du matériel chaque fois que l'enfant doit sauter de niveau. A ce moment-là, on introduit un matériel pour représenter certaines abstractions déjà faites par l'enfant pour qu'il puisse en faire d'autres à partir de manipulations concrètes et non pas à partir seulement de réflexions dont il n'est peut-être pas capable. Dans notre exemple de tout à l'heure, la comparaison de deux structures est à un niveau d'abstraction supérieur à l'apprentissage de l'une ou de l'autre de ces structures. L'enfant, à un certain stade, peut très bien apprendre comment le carré se comporte quand on le tourne d'un côté à l'autre par rapport à ses axes de symétries, ou quand on le tourne dans son plan par rapport à son centre. Il se rend compte aussi qu'il y a d'autres jeux de la même structure. Ce sera à un stade ultérieur qu'il portera des *jugements* sur une telle structure abstraite. Dans le premier cas, c'est la structure abstraite qui est le prédicat dans la phrase et qui dit quelque chose des événements qui se trouvent dans cette structure; dans le cas plus avancé, c'est la comparaison qui est le prédicat et se sont les structures qui sont les sujets. Evidemment l'abstraction est d'ordre plus élevée dans le deuxième cas que dans le premier.

Pour comparer les deux jeux dans notre dernier diagramme, on doit très bien connaître chaque jeu, chacun doit devenir une entité précise qui nous apparaîtra de plus en plus concrète au fur et à mesure que nous assimilons les propriétés pertinentes. Par exemple on peut engendrer les isométries des polygones réguliers et des solides platoniques par deux générateurs

* Voir soit «Algèbre I», O.C.D.L., Paris, ou Partie III «Etude de quelques Structures Mathématiques». Journal of Structural Learning (prochain numéro).

cycliques dont le produit est d'ordre deux. On voit dans notre exemple du carré que ———> ---------> effectué deux fois, est équivalent à l'élément neutre. Il est facile de voir qu'il n'existe pas deux éléments pareils dans le second jeu dont le produit est d'ordre deux et au moyen desquels on puisse engendrer le système, de n'importe quelle façon que les générateurs puissent être combinés. **Pour voir qu'il y a ici une différence structurale fondamentale, il faut être capable de manipuler ces structures abstraites comme le chef manipule ses ingrédients dans la cuisine! Et cela ne vient pas par la théorie. La plupart de nous serons obligés de passer par l'école de l'expérience personnelle, fournie par la possibilité d'une interaction avec du matériel didactique avant de pouvoir passer à ce niveau plus raréfié de l'abstraction mathématique.**

Observations sur l'emploi et la recherche de matériel pour l'enseignement mathématique

par André Delessert et Théo Bernet, Lausanne

Comme on le sait peut-être, diverses études sont en cours depuis plusieurs années dans le canton de Vaud pour adapter l'enseignement mathématique élémentaire aux besoins actuels de l'école. Sous le nom de «Centre vaudois pour l'enseignement mathématique», plusieurs personnes professant aux divers niveaux scolaires sont à l'ouvrage. Celui-ci ne manque pas. Il faut définir les véritables objectifs de l'enseignement mathématique, faire l'inventaire des notions qui, sous une forme ou sous une autre, apparaissent dans l'enseignement élémentaire de la mathématique, déterminer une stratégie générale de l'enseignement mathématique, recenser les méthodes permettant d'atteindre les objectifs fixés, en imaginer de nouvelles, concevoir un dispositif d'adaptation continue de l'enseignement à ses tâches, organiser la formation continue des maîtres. A certains égards, les circonstances sont favorables, car les recherches de notre Centre vont dans le même sens que les réformes scolaires qui sont en gestation un peu partout. En particulier, notre démarche, qui visait initialement l'école secondaire seule, englobe naturellement aujourd'hui tous les niveaux scolaires, de l'école enfantine à l'université. C'est dans cette perspective que nous avons été amenés à nous intéresser particulièrement à l'emploi de matériel pour l'enseignement mathématique et aux recherches qu'il nous paraît utile de faire à ce sujet.

Essayons de voir pourquoi une telle démarche s'impose aujourd'hui. Notons d'emblée que plusieurs excellents maîtres sont bien loin d'en être convaincus. «Nous avons appris les mathématiques sans machinerie», disent-ils, «il serait bien étonnant que nos élèves ne puissent pas en faire autant!». Il faut bien reconnaître, en effet, que par leur nature même, les mathématiques peuvent être apprises sans recours à des expériences concrètes. Mais cet exploit ne peut être réalisé que par des individus dont la curiosité, l'imagination et la persévérance sont déclanchées et entretenues par une sollicitation purement intellectuelle, un paradoxe, une énigme, une simple collision verbale. De tels éléments existent dans nos écoles. S'ils ne deviennent pas tous mathématiciens, ils sont cependant hantés leur vie durant par la spéculation abstraite et le goût des idées générales. Malheureusement l'expérience montre qu'ils sont rares et qu'il n'est pas possible de ne tenir compte que d'eux dans l'élaboration d'un enseignement mathématique. Il existe dans les classes une bien plus forte proportion d'élèves dont les facultés intellectuelles créatrices sont mises en action par des stimulations visuelles, auditives, tactiles ou motrices, par le comportement d'une machine ou par un conflit de personnes. Leur intelligence n'est pas moindre que celle des élèves considérés précédemment; simplement son fonctionnement nécessite la réalisation de conditions pratiques qui, peut-être, gêneraient leurs camarades plus cérébraux. En tout cas, ils sont capables d'une excellente formation mathématique et certains d'entre eux deviennent des mathématiciens de premier plan. Nous nous bornerons à ces deux catégories d'élèves et nous ne mentionnerons pas ceux dont l'activité intellectuelle n'est due qu'à l'obéissance ou à la rivalité, pas plus que ceux chez qui elle ne démarre sous aucun prétexte. Nous pouvons déjà déduire qu'en s'obstinant à donner un enseignement purement intellectuel — nous allions dire: purement littéraire — de la mathématique, on condamne à l'inactivité mathématique une bonne partie des élèves intéressants.

Chacun a pu en faire l'expérience. On vient de lire un ouvrage de mathématique fort clair et pourtant, à peine le livre fermé, tout s'embrouille et il devient impossible de décrire ni d'utiliser ce qu'on vient de parcourir. Et puis, à l'occasion d'un problème qu'on s'est posé, on revient à ce texte et brusquement tout prend un sens. Ce qui paraissait artificiel est compris maintenant comme de l'intérieur et devient un outil commode. Rien n'est plus absurde que la solution d'un problème dont on ignore l'énoncé. Mais quand la question est claire, la réponse le devient aussi, et une question n'est jamais si claire que lorsqu'on se la pose à soi-même. Depuis Socrate, on a beaucoup insisté sur l'importance de découvrir par ses propres moyens. Il est peut-être plus nécessaire encore d'apprendre à se poser des questions. L'enseignement mathématique élémentaire fera une place grandissante aux techniques situationnelles qui poussent les élèves à formuler eux-mêmes leurs interrogations et leur permettent ainsi de comprendre de l'intérieur le fonctionnement des outils mathématiques utilisés. Si l'on veut solliciter efficacement la curiosité de la plupart des élèves, il faudra créer des situations centrées sur des dispositifs matériels et non seulement sur des énoncés abstraits.

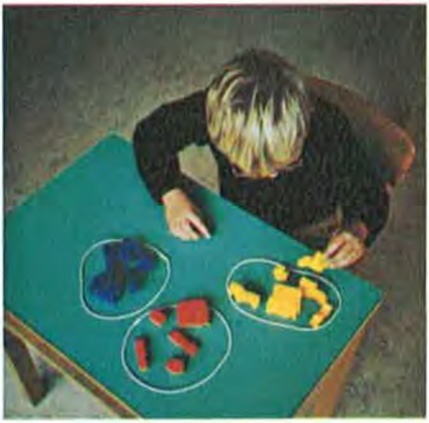
Il existe une autre raison sérieuse de s'attacher à la création de matériel d'enseignement mathématique. La science mathématique se présente comme une fabrique de modèles formels. Ces modèles peuvent servir à coder d'autres modèles formels ou des systèmes pris hors de la mathématique. Nous ne développerons pas ici cette notion de *codage.** Qu'il nous suffise de dire qu'elle joue un rôle essentiel dans l'enseignement mathématique d'aujourd'hui et que les élèves doivent parvenir à la manipuler correctement. En particulier, il importe de savoir toujours distinguer le code du système codé, le signe de la chose désignée. Cela exige une véritable virtuosité lorsque l'un et l'autre sont des objets mathématiques. En revanche la distinction est plus naturelle lorsque le système mathématique sert de code à un système matériel. Si nous ajoutons que l'idée de codage régit non seulement les applications de la mathématique mais encore l'élaboration de la mathématique elle-même, nous voyons que la recherche concernant le matériel d'enseignement mathématique est d'une importance fondamentale.

L'étude des diverses manières d'engager du matériel d'enseignement mathématique dans la leçon dépasserait les limites de ce bref exposé. Nous nous bornerons à quelques exemples.

Une loi de composition interne dans un ensemble E est la donnée d'une application qui, à tout couple (a, b) d'éléments de E, attache un élément bien déterminé de E appelé produit a . b de a et b pour la loi considérée. Les premières lois de composition internes que rencontre l'élève sont toutes données par l'addition, la multiplication des nombres entiers, ou des opérations dérivant de ces deux-là. Il en résulte que l'élève ne peut concevoir que des lois de composition internes nécessitant une suite de calculs manuels et il identifie «loi de composition» et «algorithme de calcul». Par exemple, la loi de composition dans E qui, à tout couple (a, b) attache le produit a . b = a n'est pas considérée comme une véritable loi de composition interne. Il est donc utile de concevoir un dispositif comportant trois tableaux d'affichage; sur le premier, on pointe la valeur de a, sur le deuxième, la valeur de b et sur le troisième apparaît automatiquement la valeur de a . b. C'est cette machine que M. J.-D. Nicoud, chargé de cours à l'EPFL, a accepté de concevoir et de construire pour nous. Cet appareil est capable de matérialiser rapidement n'importe laquelle des 4^{16} lois de compositions internes possibles sur un ensemble de 4 éléments. Nous voyons qu'*il existe des systèmes matériels qui illustrent une notion mathématique formelle d'une manière plus adéquate que n'importe quel système mathématique construit avec les connaissances préalables de l'élève.*

L'élève qui étudie la notion de loi de composition interne doit pouvoir faire de nombreuses vérifications concernant diverses propriétés possibles: commutativité, associativité, éléments neutres ou absorbants, etc. Il doit pouvoir construire des exemples et des contre-exemples. La machine de M. Nicoud permet d'effectuer ces tâches rapidement alors que, faites à la main, elles sont plutôt laborieuses. On voit qu'*on peut trouver des disposi-*

* *A. Delessert:* Introduction à une journée d'étude, Math-Ecole, No 46, 1971.



Le matériel dans une classe enfantine d'Avenches
(enfants de 6 ans, Mme Marie Maire)

Matériel Matex. Ensembles disjoints. Attribut: «couleur».

Sériation avec deux différences.

Matériel de Pré-calcul. Ensembles de véhicules. Ensemble de véhicules avec des roues. Véhicules qui ne sont pas utilisés sur des routes. Les avions sont dans l'intersection.

Petites machines. Changement de forme et de couleur.

Relation. Premier travail: «A la même forme que...». Deuxième travail: «A la même couleur que...».

Fleurs de la valise Matex. Matériel utilisé: fleurs de la valise Matex. La moitié des fleurs a une perle bleue comme cœur, l'autre moitié une perle noire. Une moitié a une feuille verte à droite, l'autre à gauche. Construction en arbre avec branches mobiles. Ordre de construction: perles noires et bleues; deuxième étape: couleur; troisième étape: feuille à gauche et à droite; quatrième étape: grandeur.

SION. Nicolas Savary

A la découverte d'un système de numération (Base 3).

1. Formation de groupements, premier stade. Chaque paquet de trois réglettes est échangé contre une barre. Les relations volumiques perçues par l'enfant, constituent un point de départ qui permettra une intériorisation progressive du concept de puissance. Il est entendu qu'auparavant des matériels divers non structurés ont été utilisés.

2 et 3. Premiers pas vers la récurrence. Les barres elles-mêmes, ici 3, sont échangées contre une plaque. La flèche blanche signale le passage de la première à la deuxième puissance. A gauche (fig. 2), suivant le même processus, l'enfant compare 3 plaques à un cube, ce qui légitimera l'échange.

GENEVE. Charles Burdet

Un gros cube de base six doit être partagé entre quatre enfants. Les enfants ont échangé le gros cube contre six plaques et les distribuent. Un exercice de ce type prépare à la technique de la division.

Trois ensembles de blocs logiques ont été définis en compréhension. Les blocs triangulaires, les petits blocs et les blocs bleus. A l'aide du diagramme de Venn, les enfants classent les blocs selon les critères choisis.

Les propriétés des polygones sont découvertes par un groupe d'élèves.

tifs matériels permettant d'augmenter le capital d'expériences de l'élève aux dépens d'activités fastidieuses sans relation avec la notion étudiée.

L'expérience en classe doit nous montrer si la machine de M. Nicoud rend bien les services que nous en attendons. Mais nous savons déjà qu'il faut poursuivre la recherche. Un système moins coûteux permettrait de doter chaque élève de sa machine. De petits groupes d'élèves pourraient alors s'attaquer à la composition de lois de composition internes, étudier la notion de distributivité. Il serait intéressant aussi de mettre au point des dispositifs réalisant les mêmes lois de composition internes par des moyens physiques différents. Cela permettrait de considérer une même loi de composition interne comme un code mathématique adapté à plusieurs systèmes physiques distincts.

En nous appuyant sur les deux principes énoncés plus haut, nous avons entrepris d'autres recherches. Nous aimerions augmenter l'efficacité des méthodes graphiques. Les figures réalisées par les élèves n'ont généralement qu'une valeur illustrative. Elles ne permettent pas d'évaluations numériques, par exemple. Le dessin soigné exige du temps, un appareillage encombrant, voire un local spécial. Il existe des planchettes à dessin permettant de réaliser séance tenante des graphiques soignés et précis. Grâce à un système de fixation instantanée, des accessoires bien conçus et un format maniable, il devient possible d'introduire à n'importe quel moment de la leçon une expérience, une vérification ou un calcul graphiques. Nous avons demandé à une équipe de maîtres du collège de Vevey de déterminer l'appareillage le plus efficace et de mettre au point des manipulations auxquelles il fallait renoncer jusqu'ici. Ajoutons que l'usage des méthodes graphiques est une excellente introduction à l'étude systématique des approximations que l'enseignement traditionnel évitait avec tant de soin. Nous voyons par là que l'*emploi d'un matériel adéquat permet d'infléchir le contenu même de l'enseignement mathématique dans une direction favorable.*

Nous avons confié à deux de nos collègues la responsabilité de réaliser une sorte de rapporteur permettant de matérialiser n'importe quelle fonction linéaire.* Ce dispositif permettra de nombreuses expériences de portée théorique sur tout ce qui gravite autour de la fonction linéaire: proportionnalité, trigonométrie, systèmes linéaires, construction des nombres rationnels. Il se prêtera aussi à des résolutions pratiques d'équations de degrés 1, 2 et 3, ou d'autres encore, grâce à des accessoires faciles à réaliser. Nous y voyons en outre l'occasion d'employer tôt la droite réelle qui n'apparaît que bien trop tardivement dans l'enseignement traditionnel.

En collaboration avec le Séminaire pédagogique de l'enseignement secondaire vaudois, nous étudions la méthode des séquences de diapositives.

* *A. Delessert:* Connexions between the Reform of Mathematical Instruction and the Further Training of Teachers, Educational Studies in Mathematics, vol. 1, No 4, 1969.

Elle permet de faire découvrir des lois de formation, la structure de certaines configurations géométriques, l'existence et les propriétés de diverses transformations. L'intérêt de ce procédé réside dans la possibilité de faire entrer en classe des situations très diverses sans intervention verbale. La sollicitation visuelle est très forte chez beaucoup d'élèves et l'absence de paroles incite d'autant plus vivement à la recherche d'un langage efficace. Nous espérons aussi exercer la rapidité de réaction qui est sous-développée par l'usage du tableau noir. Cette technique ouvre des perspectives illimitées, elle est d'une réalisation facile et d'un emploi commode.

Les premiers essais ont montré que celui qui désire créer de telles séquences doit commencer par assimiler une philosophie adaptée à ce genre de procédé. Montrons-le sur un exemple. Il s'agit d'amener les élèves à décrire une construction spatiale formée de cubes de couleurs, empilés suivant une certaine organisation. Le créateur débutant est tenté de montrer sur un premier cliché l'apparition d'un premier cube. Un deuxième cliché montre l'arrivée de deux ou trois nouveaux cubes et ainsi de suite jusqu'à l'achèvement de l'édifice. Une telle séquence n'est certes pas inutilisable, mais elle enferme d'emblée l'élève dans une seule loi de formation. Elle l'empêche même de découvrir qu'on peut décrire l'édifice à l'aide d'une loi de formation. Elle lui interdit de procéder à une autre sorte de description, par transformations par exemple. Il est donc bien préférable de montrer d'abord l'édifice achevé, puis, si c'est nécessaire et à la demande de l'élève, des vues du même édifice sous d'autres angles, avec d'autres couleurs, ou des édifices analogues mais plus simples. Rappelons qu'il est plus utile de conduire l'élève à se poser lui-même des quetions que de lui offrir la liberté de découvrir n'importe quoi, pour autant que ce soit exactement la vérité préfabriquée par le maître.

Nous avons encore d'autres projets. Une initiation précoce à la géométrie de l'espace serait favorisée par des collections de polygones faciles à associer afin de construire divers polyèdres. Des feuilles préimprimées mettraient à la disposition du maître et des élèves des réseaux ou différentes configurations permettant d'aborder sans peine des problèmes de pavages, de transformations géométriques. D'énormes possibilités restent à exploiter du côté du film, des circuits électriques transformables, des jeux. De merveilleuses réalisations ont déjà été présentées ailleurs; nous sommes prêts à nous en inspirer.

L'emploi de matériel d'enseignement mathématique n'est pas une panacée. Il doit concourir avec d'autres méthodes traditionnelles ou non. Par ce qui précède, nous avons voulu montrer l'activité du Centre vaudois dans ce domaine. Surtout, nous avons tenu à insister sur la nécessité d'une réflexion en profondeur pour toute recherche et toute réalisation en ces matières. Quelles que soient les difficultés techniques rencontrées, la construction d'un matériel d'enseignement mathématique doit d'abord satisfaire à de fermes exigences mathématiques, didactiques et psychologiques.* C'est d'ailleurs ce qui en fait l'intérêt aux yeux de tous les enseignants qui s'adonnent à cette recherche vivante et pleine de promesses.

* *A. Delessert:* Introduction à une journée d'étude, Math-Ecole, No 46, 1971.

«Par l'action à la pensée»

Introduction à l'étude du matériel auto-éducatif créé par Mina Audemars et Louise Lafendel

par Germaine Duparc, Genève

«C'est par l'œuvre de ses mains que l'enfant fera l'acquisition de sa science».
M. Audemars, L. Lafendel

Quelques mois après le départ des deux éducatrices genevoises qui ont marqué d'une empreinte ineffaçable la pédagogie de notre temps, il est singulièrement émouvant de rendre un hommage posthume à leur œuvre créatrice, en soulignant la portée du matériel éducatif qu'elles ont conçu au début de ce siècle, — matériel qui retient de plus en plus l'attention des psychologues et des éducateurs, — car n'est-il pas comme une préfiguration de recherches très actuelles et n'ouvre-t-il pas la voie aux mathématiques modernes?

Respectant les étapes fondamentales du développement mental, ce matériel conduit l'enfant, par une libre manipulation, à la découverte du nombre, mais cette découverte ne lui est jamais proposée comme une fin en soi; elle est l'aboutissement d'une lente approche individuelle où la joie de construire, d'échafauder, de trier, de choisir, d'apparier, de sérier, répond d'abord à une satisfaction purement sensori-motrice, avant que d'être une prise de conscience du nombre proprement dit.

Malgré sa diversité, ce matériel forme un tout, chaque jeu ayant sa place dans un champ d'expériences complémentaires ou convergentes. On comprend, dès lors, qu'il serait vain de s'attacher à l'étude d'un seul de ces jeux en l'isolant de son contexte, car ce serait faire abstraction de sa complémentarité.

Dans l'éclairage des mathématiques modernes, le matériel auto-éducatif conçu par Mina Audemars et Louise Lafendel nous apparaît soudain singulièrement actuel.

Partant d'une vision globale du nombre, l'enfant est mis d'emblée en présence de la quantité, de l'ensemble, des rapports de groupes plutôt que de l'unité, notion adulte dans sa trompeuse et apparente simplicité. L'ordre dit «naturel» ne lui est jamais imposé comme un a priori: à lui de le découvrir au gré de ses expériences.

Car, soulignent Mina Audemars et Louise Lafendel, l'enfant «est avant tout *expérimentateur, constructeur, imitateur, inventeur*», et le matériel est là, prêt à satisfaire constamment son besoin fondamental de construire. C'est ainsi qu'il l'amène à passer de la correspondance terme à terme à la sériation, aux emboîtements. C'est ainsi qu'il l'entraîne à découvrir des rapports de longueur par la comparaison de quantités continues (66 blocs), des rapports de groupes par la manipulation de quantités discontinues (planche des 100 boules, abaque des 55 boules, piles de disques), des relations de volumes (jeux de construction, colonnes d'évaluation), des ensembles de surfaces.

C'est dire la variété des expériences dont chacune remet en question une notion qui semblait acquise. Ainsi conçu, le matériel créé par Mina Audemars et Louise Lafendel exclut tout risque de fixation arbitraire, tout danger d'automatisme lié inévitablement à l'emploi d'un seul type de jeu.

«Nous faisons un acte d'intelligence lorsque nous sommes désadaptés», disait Edouard Claparède.

Le même problème, reposé constamment dans des situations nouvelles, provoque cette désadaptation et c'est ainsi que le raisonnement logique de l'enfant va, s'élaborant, à travers une succession d'expériences libres qui ne sont jamais des leçons, mais qui le conduisent à son rythme, sur le chemin de l'abstraction «par l'action, à la pensée».

«Apprendre, c'est réinventer...» écrivaient les grandes éducatrices genevoises. «Nous avons voulu créer un outillage pour l'enfant, mais, — ajoutaient-elles avec autant de sagesse que de modestie, — ne dites pas: «Méthode Audemars et Lafendel»... Nous avons taillé une marche, à vous de continuer!»

Il n'est guère possible d'analyser en quelques pages la valeur psychopédagogique du matériel Audemars-Lafendel et de faire le recensement des innombrables possibilités qu'il offre à l'activité spontanée de l'enfant. Aussi bien, une étude exhaustive est en cours qui rendra compte de ces possibilités.

A une analyse forcément lacunaire, nous avons préféré quelques citations essentielles, jugeant infiniment plus suggestif de faire réentendre les voix que si sont tues.

Le génie précurseur des auteurs s'impose dans les fragments qu'on va lire. Ecrits il y a plus de cinquante ans, ces textes sont singulièrement vivants. Connaissance profonde du développement mental de l'enfant, pénétration psychologique, originalité de pensée et de forme, tout concourt à attester la pérennité d'une œuvre qui demeure étonnamment présente et qui le restera demain.

Germaine Duparc

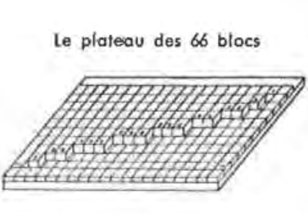
Un «outillage» pour l'enfant

par Mina Audemars et Louise Lafendel

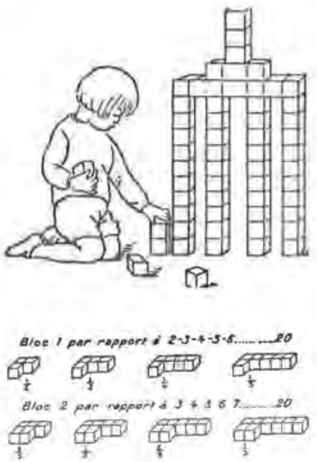
L'enfant constructeur

«Par la liberté vers la discipline, voilà vraiment le principe qui nous a guidées dans l'élaboration de notre matériel. Si, durant ses premières années, le travail individuel est le plus sûr chemin pour que l'enfant puisse acquérir les notions qui lui sont indispensables, il faut qu'il ait à sa disposition des moyens qui favorisent son expérience personnelle, qui provoquent la découverte, qui stimulent l'esprit de curiosité et de recherche, en un mot, qui déclenchent des intérêts et des appétits nouveaux».

Le plateau des 66 blocs



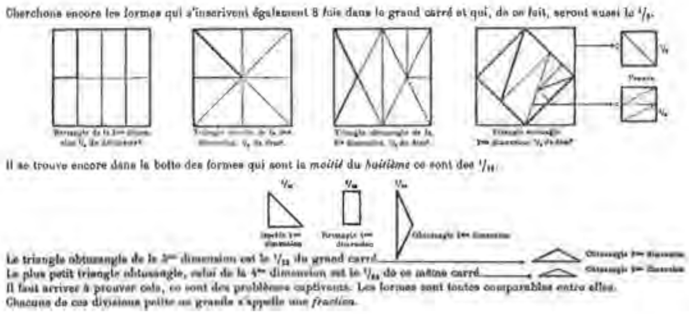
«Il ne suffit pas d'avoir constaté que l'enfant adapte tout à lui-même, et d'avoir satisfait cette première activité essentiellement sensori-motrice; il faut qu'un jeu éducatif soit construit de telle sorte que tôt ou tard, après avoir conduit l'enfant par une voie naturelle, à la discipline de ses mouvements, il suscite



un travail de réflexion, de raisonnement, de jugement, et qu'il l'amène à la discipline intellectuelle. On aperçoit là le germe de la discipline morale.»

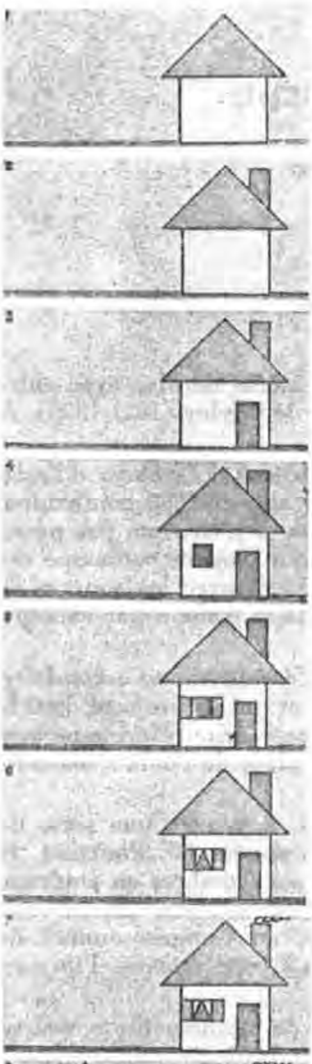
«Après avoir été constructeur de bateaux, de maisons, *l'enfant devient constructeur de sa science du nombre*».

«Loin de nous l'idée d'imposer l'étude de la géométrie. L'enfant a à sa disposition des formes et des mesures précises afin de pouvoir arriver à la discipline dans son travail de création libre. Ainsi l'orientation mathématique devient concrète et sûre».



«Dans son travail de libre recherche, de découverte, l'enfant ne suit pas toujours le chemin que trace l'adulte pour lui. C'est pour cela que nous le verrons se passionner pour des nombres carrés, cubiques, ou pyramidaux bien avant de savoir poser une simple addition sur papier. Voilà en quoi consiste la liberté: *permettre à l'enfant de passer par son chemin.*»

«Dans toute son activité, l'enfant lutte pour pouvoir réaliser ses conceptions rudimentaires et naïves aux yeux de l'adulte évolué. Il est avant tout *expérimentateur, constructeur, imitateur, inventeur.*»



«L'éducateur doit utiliser et guider les expériences et les découvertes de l'enfant et ne pas y substituer les siennes».

«L'enfant veut étancher sa curiosité, voir, toucher, juger par lui-même, avoir des impressions de première main».

«Dans tout jeu, dans tout travail, l'enfant passe par des stades successifs qu'il est indispensable de connaître si l'on veut pouvoir le guider».

»L'éducateur doit conditionner le milieu dans lequel l'enfant se nourrira d'expériences personnelles, s'enrichira d'impressions, développera son pouvoir d'observation».

«L'éducateur doit fournir à l'enfant tous les éléments nécessaires à la satisfaction d'un premier stade d'activité tout en provoquant une activité d'ordre supérieur».

«D'un bout à l'autre, pour la confection du matériel nous nous sommes inspirés de cette loi: donner à l'enfant un guide, un stimulant, en réservant toujours une grande part à son esprit d'initiative, à son imagination créatrice».

«L'éducatrice vraiment digne de ce nom doit être vivante, enthousiaste, affranchie des intérêts personnels, des idées fragmentaires et préconçues. Elle possédera les qualités indispensables: l'esprit curieux, chercheur, expérimentateur; en toutes circonstances elle se laissera diriger par l'amour et le respect de l'enfant. Sans se laisser ni dominer, ni enchaîner par une méthode, elle ne s'attachera pas à la lettre qui tue, mais à l'esprit qui vivifie. Les lois de la psychologie de l'enfant lui dicteront les lois de la psychologie du maître.»

L. Lafendel
M. Audemars

Fragments extraits de «La Maison des Petits de l'Institut J.-J. Rousseau», Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 2e éd., 1950; et de «Par l'activité manuelle à l'activité mentale», ASEN, Genève.

Les réglettes Cuisenaire et la mathématique moderne

par Louis Jeronnez et Isabelle Lejeune (Waterloo)

I. Evolution de l'enseignement de la mathématique

La mathématique dite moderne est née au siècle dernier avec entre autres les travaux d'Evariste Galois (1811-1832), de Cayley (1821-1895), de Cantor (1845-1918) et de Félix Klein (1849-1925)...

Mais si des ouvrages classiques comme les «Leçons d'Algèbre» d'Emile Borel destinés aux élèves de polytechnique des années 1880 contiennent déjà une introduction à la théorie des ensembles, il n'en reste pas moins que la mathématique moderne est venue à la connaissance commune des professeurs du secondaire à partir des années 1950, avec les congrès de mathématiciens et des cours de niveau universitaire comme par exemple celui de Gaston Choquet.

Ainsi vint progressivement une *réforme de l'enseignement secondaire*, réforme qui est toujours en cours de réalisation et qui se propage dans le monde entier. Les problèmes pédagogiques que pose cette réforme ne sont pas tous résolus. La Belgique a en tout cas une place de choix dans cette révolution de l'enseignement mathématique.

En ce qui concerne l'enseignement primaire, il y a eu une sorte de préréforme commencée elle aussi à partir des années 50. Pourtant, la création par Georges Cuisenaire en 1953/54 de ses Nombres en couleurs n'avait pas reçu des pédagogues un accueil enthousiaste. Notre illustre compatriote rappelait d'ailleurs en juillet dernier, au Congrès annuel de l'Association *Cuisenaire-Belgique*, qu'il avait eu, à cette époque, l'*impression d'être seul dans le désert.*

Ce n'est pas tout-à-fait exact. Les professeurs de mathématique avaient décelé, dès le premier contact, les possibilités extraordinaires des réglettes. Ceux qui passèrent à Thuin dès 1954 furent enthousiasmés par les Nombres en couleurs. Ils eurent le sentiment d'être mis en présence d'une découverte géniale et ce, dans la perspective de la mathématique moderne. Il ne faut pas oublier que Gaston Choquet fut l'un des premiers à défendre avec vigueur l'idée d'une réforme radicale de l'enseignement mathématique à tous les degrés. Il pressentait le rôle que le matériel Cuisenaire allait jouer, tant au point de vue de la formation mathématique des enfants de l'école primaire qu'au point de vue de la formation de la pensée calculatrice.

Ce fut Caleb Gattegno qui partit, une boîte de réglettes sous le bras, et répandit les Nombres en couleurs dans les cinq continents, créant sociétés et associations Cuisenaire, promouvant une pédagogie de situations merveilleusement adaptée au matériel.

Ce fut alors cet admirable ouvrage de Madeleine Goutard: «Les Mathématiques et les Enfants», livre de pédagogie authentique basé principalement sur une expérience vécue au Québec et qui révéla au monde du primaire une nouvelle méthodologie de l'enseignement mathématique.

Ce qui est remarquable, c'est l'étonnante simultanéité de la naissance des Nombres en couleurs et la venue à la connaissance des professeurs d'une nouvelle mathématique: c'est ce qui explique cette impulsion que reçut l'enseignement primaire dès 1954 et qui prépara la réforme actuelle.

Les Nombres en couleurs, c'est un matériel structuré, le seul qui ait résisté au temps, qui n'ait pas disparu dans la tourmente actuelle. Regardez cette boîte de réglettes, regardez-la avec les yeux du mathématicien qui y voit un ensemble muni d'une relation d'équivalence (avoir même couleur), et de deux ordres naturels; un ensemble dans lequel on peut définir une opération notée $+$ qui jouit des propriétés que la mathématique met en évidence dans certaines structures.

Nous y reviendrons plus loin.

II. La réforme du primaire

1. Les objectifs

Dès septembre 1971, de nombreuses écoles belges ont adopté de nouveaux programmes de mathématique en première année. Pour certaines d'entre elles, ce sera une transformation importante qui n'est pas sans danger et qui demande beaucoup de savoir et de savoir-faire: on ne s'improvise pas professeur de mathématique, même à des enfants de six ans.

Pour d'autres écoles, il n'y aura que peu de changements. C'est que, depuis 1954, cette préréforme dont nous avons parlé s'est accomplie grâce aux Nombres en couleurs, matériel qui a introduit un esprit nouveau dans l'enseignement et lui a donné plus d'efficacité.

Mais efficacité à quel point de vue? Il faut donc définir les objectifs de notre réforme. C'est bien là que gît la difficulté. Dans le programme belge, on n'a pas cru bon d'insister suffisamment sur l'un des buts essentiels de la mathématique: la formation de la pensée.

Il s'agit aussi, bien sûr, d'apprendre la mathématique, mais l'acquisition de connaissances et de techniques doit céder le pas à la formation de l'esprit, en général, et à la formation de l'esprit mathématique en particulier. Il faut apprendre aux enfants à raisonner de façon déductive. Il faut surtout les habituer au travail personnel de recherche.

Dans les expériences multiples que nous avons réalisées depuis plusieurs années, nous avons été comblés lorsque nos visiteurs décelaient l'aptitude de nos élèves à aborder une situation nouvelle avec un souci de réflexion (L'enfant qui a travaillé avec les réglettes ne dit plus: «Je ne sais pas»; il essaye de résoudre le problème proposé.).

Les élèves d'aujourd'hui seront, dans quelques années, confrontés à des situations nouvelles et imprévisibles, ils devront s'y adapter et créer sans cesse du nouveau, ce qui implique des méthodes d'enseignement variées à partir de situations diversifiées et des programmes d'étude en perpétuelle transformation. La mathématique moderne est une matière riche de substance qui est susceptible de donner à notre enseignement une efficacité plus grande au point de vue de la formation de la pensée. Encore faut-il que l'on bannisse les méthodes stéréotypées qui ont parfois sclérosé l'enseignement traditionnel.

2. *Mathématique d'aujourd'hui et d'hier*

Si nous assistons à un bouleversement en ce qui concerne les fondements de la mathématique (ensembles, relations, structures...) nous constatons en outre un regroupement de matières jadis éparpillées dans des directions diverses, ce qui provoque une sorte de décantation de la mathématique traditionnelle. Des points considérés comme importants deviennent sans intérêt ou découlent de théories plus générales. Par contre, des matières déjà anciennes et bien connues ont pris une importance nouvelle et ont parfois été projetées dans l'enseignement élémentaire. Nous en avons de nombreux exemples.

L'étude des systèmes de numération de position dans des bases autres que 10 figurait jadis en bonne place au programme de seconde scientifique. Les nombres négatifs, la notation exponentielle s'introduisaient jusqu'il y a deux ou trois ans en classe de cinquième du secondaire. L'analyse indéterminée (résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$) et l'analyse combinatoire étaient réservées aux classes de seconde (et c'est encore vrai aujourd'hui). Les équations du premier degré apparaissaient timidement en cinquième. Et cette liste est loin d'être exhaustive.

Il serait intéressant de faire le relevé des matières (jadis réservées aux classes du secondaire) qu'abordent aujourd'hui les enfants de six ans avec une réussite et un profit évidents et qu'on a tendance à classer dans la mathématique moderne.

A l'entrée du primaire, le rythme des acquisitions est beaucoup plus élevé que dans la suite. A sept ans, les enfants calculent dans le binaire sans avoir été drillés. Ils manient les puissances entières des naturels. Ils écrivent des équations. En troisième année, ils résolvent des équations à une et deux inconnues, des problèmes d'analyse indéterminée et de programmation linéaire. Et il n'est pas question, répétons-le d'acquisition de techniques mais bien de formation de la pensée...

Dans la réforme actuelle du primaire, il y a aussi une chose nouvelle, c'est l'accent mis sur l'étude des propriétés des opérations. Et cela, nous le faisons depuis plus de quinze ans dans nos classes Cuisenaire de première et de deuxième années.

III. Les réglettes Cuisenaire

1. *Les réglettes Cuisenaire se sont répandues dans le monde entier* et ont fait réaliser des progrès tangibles à l'enseignement primaire. Une pédagogie dans l'optique de la mathématique moderne est née du maniement de ce matériel, pédagogie que nous avons mise au point par un travail d'équipe dans les classes expérimentales de l'Athénée Royal de Waterloo. Les résultats obtenus avec les enfants de six et sept ans nous ont amenés à raconter cette expérience dans un de nos ouvrages.* L'introduction du plan d'études nouveau ne vient que confirmer la justesse de nos vues.

Si nous l'examinons, nous y trouvons deux volets:

— formation de la pensée mathématique;
— formation de la pensée calculatrice.

Permettez-nous de citer à nouveau quelques extraits du nouveau plan d'études des écoles de l'Etat (juillet 1971):

«Dans le monde d'aujourd'hui et, plus encore dans celui de demain, il apparaît que les forces à mettre en œuvre pour que s'accomplisse le destin de l'homme sont celles qui orientent dès l'enfance vers l'initiative, vers la créativité.»

«... Le nouveau programme veille à introduire un équilibre entre la pensée mathématique et l'activité calculatrice; ce serait mal l'interpréter que de centrer toute l'action éducative sur un de ces deux objectifs aux dépens de l'autre...»

«... En un mot, pas de mathématiciens qui ne sachent pas calculer...»

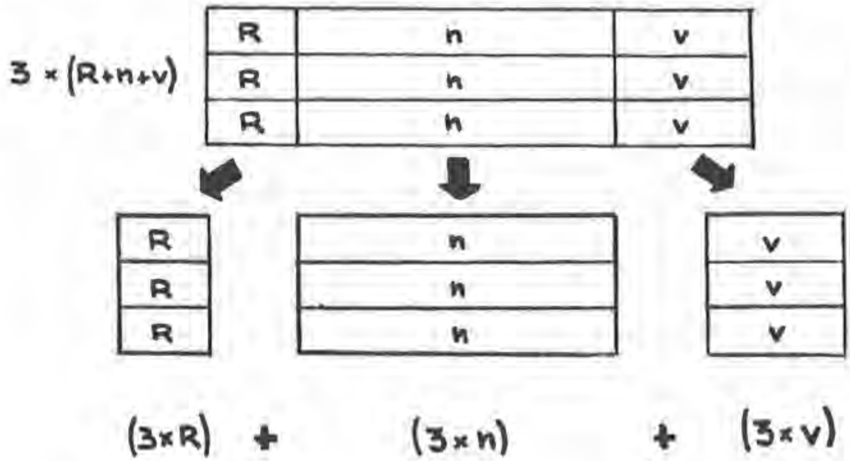
Pour nous, et compte tenu de notre expérience qui se poursuit en quatrième année, il ne fait pas de doute que *la formation de la pensée calculatrice doit essentiellement se faire en première année primaire.*

Dans le plan d'études, il y a les nombres et les opérations sur ces nombres. Ici, l'efficacité des nombres en couleurs n'est mise en doute par personne. L'introduction de l'addition dans le qualitatif, puis dans le quantitatif, avec les trains construits par les enfants, avec les propriétés de commutativité et d'associativité introduites dès le début de la première année est une des plus belles choses qui soient.

Et puis, il y a la multiplication par un nombre entier positif, la construction de rectangles, de croix, de tours. Ces constructions introduisent simplement et rigoureusement les produits de plusieurs facteurs et leurs propriétés (associativité et commutativité).

Il faudrait parler de la distributivité de la multiplication sur l'addition introduite dès le qualitatif comme le montre le dessin ci-dessous:

* A la découverte de la mathématique et les réglettes Cuisenaire.» *L. Jeronnez* et *I. Lejeune*, Editions Calozet, Bruxelles.



La propriété d'associativité est connue depuis très longtemps. Seulement, l'expression ne se trouvait pas dans les plans d'études. On parlait bien, par exemple, de multiplier un produit par un nombre ou d'ajouter un nombre à une somme. Jamais, on n'attirait l'attention sur la propriété qui était utilisée. C'est pourtant ce qu'on fait avec le Cuisenaire depuis plus de quinze ans. La propriété d'associativité est, par ailleurs, *fondamentale dans la structure de groupe.*

Quant à la distributivité de la multiplication sur l'addition, elle est nécessaire pour l'explication de certaines règles de calcul écrit. *Elle conditionne aussi les structures d'anneau et de corps.*

Mais revenons aux tours Cuisenaire qui nous ont conduits aux produits de plusieurs facteurs. Ceux-ci nous amènent aux puissances des nombres (avec des tours dont tous les étages ont la même couleur). L'étude de ces puissances doit être faite en première année. C'est le moment idéal. L'enfant est capable de manier la notation exponentielle avec sûreté. Des milliers d'instituteurs l'ont expérimenté depuis des années.

Quant aux *bases de numération*, elles sont introduites de différentes façons. On a d'ailleurs souvent confondu dans bien des écoles: «bases de numération» et «mathématique moderne». Ce fut souvent la «tarte à la crème» de l'enseignement primaire. On a parfois aussi infantilisé leur présentation. Nous croyons de plus en plus que les réglettes complétées par les carrés et les cubes Cuisenaire sont encore l'outil idéal pour introduire les «bases». Avec les élèves ayant une première idée des puissances, cela devient un jeu. C'est la manière la plus intelligente de s'y prendre. Quand l'enfant écrit 121 en base trois, il sait:

— que le chiffre de gauche représente un carré vert clair (ou 3^2 ou 3×3);
— que le chiffre du milieu représente 2 réglettes vert clair (ou 2×3);
— que le chiffre de droite représente 1 «petit blanc» (ou 1).

En base dix, le nombre vaut:

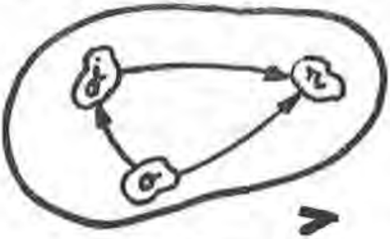
$(1 \times 9) + (2 \times 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16.$

Ainsi, quand nous parlons de la formation de la pensée calculatrice, nous pensons calcul dans différentes bases de numération, mais aussi étude des nombres et des propriétés des opérations sur les nombres, mais encore introduction des nombres négatifs, et enfin application au réel, au monde physique. Et nous ne parlerons pas de la fraction-opérateur, si fondamentale dans les domaines pratique et théorique. Chacun sait que le matériel Cuisenaire constitue, à ce point de vue, le matériel idéal.

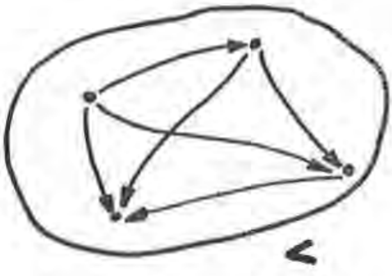
Au premier degré primaire, il y a aussi l'introduction des ensembles et des relations. Nous construisons, dès les premiers jours de classe des ensembles d'élèves, d'objets classiques, d'objets familiers, d'objets pris dans des matériels structurés, de nombres.

Le matériel Cuisenaire conserve sa place * pour introduire de nombreuses notions sur les ensembles, les relations et les structures. Donnons-en des exemples bien précis:

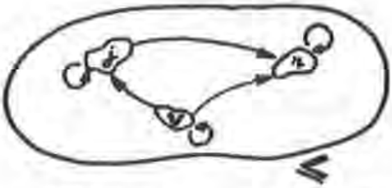
N. B. — Dans les exemples suivants, nous considérons uniquement des ensembles formés de réglettes de couleurs différentes:



— Les réglettes sont représentées par des points munis de taches (pour les tout-petits qui n'écrivent pas encore le nom des réglettes). Les taches indiquent les réglettes représentées. *Les enfants tracent les flèches* qui disent: «est plus grand que».

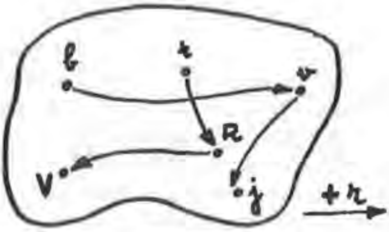


— Graphe muet: *Les élèves doivent placer des taches de couleur* près des points représentant les réglettes (plusieurs solutions).

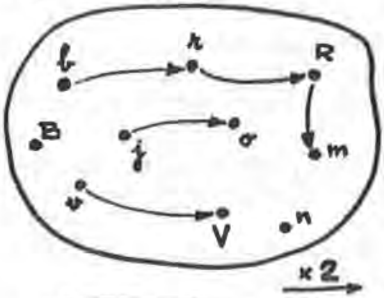


— Les réglettes sont représentées par des points munis de taches. Les élèves dessinent les flèches de la relation: «est inférieur ou égal à».

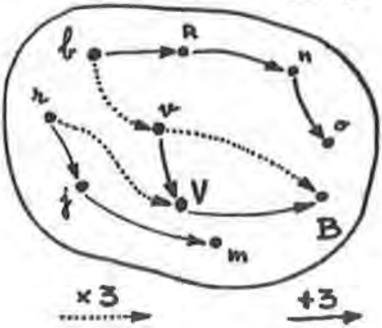
* Voir aussi notre brochure «Ensembles, Relations, Structures avec le Matériel logique Jihel-Set», par *L. Jeronnez* et *I. Lejeune*, Editions Calozet, Bruxelles.



— Les réglettes sont représentées par des points munis de lettres. Les élèves dessinent les flèches de la relation: «augmenté de r».

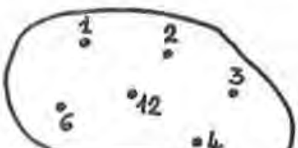


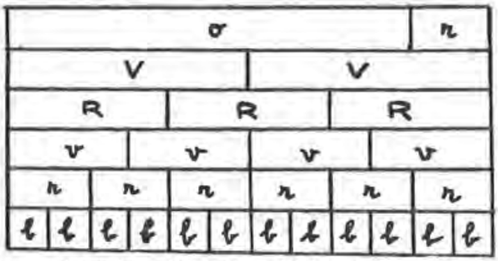
— Les réglettes sont représentées par des points munis de leur nom.
Les enfants tracent les flèches rouges qui disent: «a pour double».



— Voici l'ensemble des réglettes différentes:
(b, r, v, R, j, V, n, m, B, O,).
Les enfants tracent: les flèches pleines qui disent: «augmenté de 3», les flèches pointillées qui disent: «a pour triple».

— L'ensemble des diviseurs de 12 est obtenu en construisant le «tapis 12». Représentons cet ensemble par un diagramme.

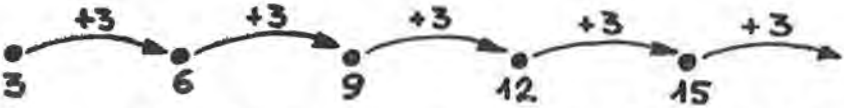




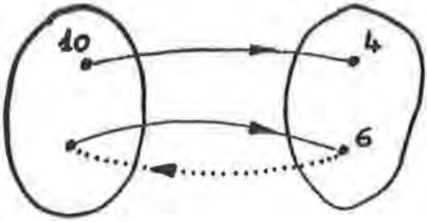
$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2 = 12 \times 1.$

— Représenter l'ensemble formé par les réglettes b, r, v, V, B par un dessin (un diagramme). Tracer les flèches rouges qui disent: «$\times$ 3».

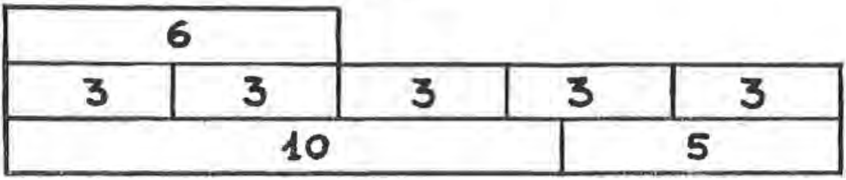
— On forme l'escalier vert clair: pour passer d'une marche à la suivante «on fait + 3». On va aussi loin qu'on peut... Représentons cette situation par un graphe...



— Un ensemble de prix d'achat et un ensemble de bénéfices. Le bénéfice vaut 40 % ou les 2/5 du prix d'achat. Si j'achète un chocolat pour 10 F, je gagne... 2/5 × 10 F = 4 F.
Si j'ai gagné 6 F...

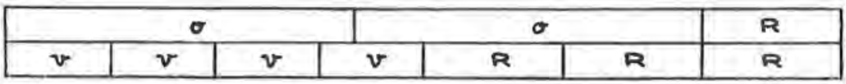


Que dit la flèche pointillée?
Trouver la réponse avec les réglettes!



$6 = 2 \times 3$ et $5 \times 3 =$ les 5/2 de 6.
$3 = 1/2 \times 6$

— Formons un train 24 avec des réglettes vert clair et des réglettes roses (plusieurs solutions).
Représentons par un graphe. Exemple de solution:



— Formons un train 21 avec des réglettes 2 et des réglettes 5.
Représentons par un graphe (plusieurs solutions).

3. Conclusion

Il s'agit maintenant de conclure. La réforme actuelle du primaire, en ce qui concerne la mathématique, est souvent passée par les réglettes.

Dans la formation de la pensée mathématique, elles ont joué jusqu'ici un rôle important. Nul doute que leur utilisation au degré primaire conserve toute sa valeur.

Le nouvel enseignement de la mathématique, même s'il nous paraît difficile, est très attrayant pour nos enfants qui adorent vaincre des difficultés et se plaisent dans une certaine abstraction. Ils forment des ensembles, réalisent des inclusions et éprouvent une grande joie à réfléchir à propos de situations mathématiques prises dans la vie de la classe ou suscitées à l'aide de matériels structurés.

Nos enfants rejetteront alors l'apprentissage du calcul à l'aide de méthodes et de matériels surannés, tels que capsules, boutons, pions...

Nous devons leur donner là encore un matériel structuré qui puisse assouvir leur besoin de réfléchir et de créer: le matériel Cuisenaire est pour cela irremplaçable, sans vouloir prétendre que ce sera là le matériel unique pour l'enseignement de toute la mathématique. Il lui reste un domaine d'application si important, si dense qu'il n'est nul besoin de vouloir à tout prix le mettre à toutes les sauces.

Utilisation des matériels et auxiliaires dans l'enseignement de la mathématique, conclusion

par Willy Servais, Morlanwelz (Belgique)

Le professeur Servais, dans une forte publication ronéotypée, traite du rôle des matériels dans l'enseignement mathématique. Ses chapitres sont évocateurs et nous font regretter de ne pas être en mesure de publier l'étude dans son ensemble: Dessins et Schémas, Géoplans, Les modèles spatiaux, Cadres spatiaux, Les modèles animés, Les films, Matériels algébriques et arithmétiques (au nombre desquels figurent les réglettes Cuisenaire), Matériels Logiques, Machines à calculer, Les livres d'enseignement, La classe-laboratoire de mathématiques. Et enfin, une conclusion qui, avec l'autorisation de l'auteur, servira de conclusion, aussi, à la série d'articles dont se compose le présent numéro de Math-Ecole.

S. R.

Au terme de cette revue des matériels et des auxiliaires utilisés dans l'enseignement, il convient de souligner le rôle de ces moyens dans l'apprentissage de la pensée mathématique.

Il y a des professeurs opposés à l'utilisation des situations concrètes comme base de sustentation de la démarche abstraite. Ils veulent la rigueur logique, toute la rigueur et ne tolèrent aucune promiscuité compromettante avec un empirisme approximatif.

A l'opposé sont ceux qui veulent le concret pour le concret et remplacent les démonstrations par des monstrations, croyant que le concret est immédiat, qu'il a un pouvoir magique et contient la mathématique.

En fait, c'est quand nous agissons sur le concret que, en nous, s'éveillent les premières notions mathématiques. Toute perception ou action relative au concret se doublant d'une représentation mentale qui s'organise, celle-ci peut alors être évoquée pour elle-même.

Les relations entre les perceptions et les actions ainsi rendues virtuelles sont le premier objet de l'étude mathématique.

Dans l'expérience concrète, nous sommes attentifs à la réalisation matérielle plus ou moins satisfaisante qui résulte de nos actions. Dans l'expérience mathématique virtuelle, les objets sont stylisés et n'ont aucune imperfection. C'est pourquoi quand nous soutenons cette expérience mentale abstraite à l'aide de croquis, de modèles sensibles, nous faisons bon marché des imperfections de ceux-ci par rapport aux êtres mathématiques auxquels ils servent de substituts. L'expérience mathématique et les objets sur lesquels elle opère sont au deuxième échelon. On ne peut les confondre avec l'expérience et les objets physiques qui sont au niveau antérieur.

Sans doute nous est-il impossible de nous mouvoir d'emblée au second échelon sans avoir agi au premier. La plupart des hommes, si pas tous, ont le besoin de donner à leur activité mentale une trace concrète; c'est le rôle des langages, de la langue véhiculaire aux schémas et au symbolisme mathématiques. Ce symbolisme et ces schémas sont des modèles concrets qui obéissent à des règles de manipulation précises et sont, en définitive, le véhicule de la rigueur.

Tous les moyens matériels qui, sous l'aspect où on les envisage, sont isomorphes, remplissent le même rôle du point de vue mathématique, quoique, psychologiquement, l'un ou l'autre d'entre eux soit mieux adapté à nos modes de représentation par sa couleur, sa maniabilité ou sa capacité d'évocation intuitive.*

Une fois l'isomorphisme reconnu, nous pouvons déléguer à un matériel concret le rôle de servir de support à une activité mathématique qu'il peut doubler automatiquement. C'est la fonction des machines mathématiques conçues en sens inverse pour matérialiser l'abstraction.

Ainsi le terme modèle est employé dans deux acceptions complémentaires correspondant aux deux sens de l'interaction du physique et de la mathématique:

* W. Servais. Concret-abstrait dans *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

— *le matériel physique est modèle concret d'une relation mathématique qu'il illustre;*

— *la structure mathématique est modèle abstrait d'une situation physique qu'elle explique.*

La plus grande valeur pédagogique du matériel concret est de permettre à l'élève de se faire une expérience mentale à sa mesure, en dehors de l'autorité du maître. Il y a des enseignants consciencieux qui veulent faire connaître toutes choses en les disant et les répétant, sans savoir que leur zèle est vain aussi longtemps qu'il n'engage pas l'activité intellectuelle profonde des élèves. Il est des enseignants qui ne connaissent pas assez bien qu'ils sont tenus de faire apprendre.

Le matériel peut, dans une certaine mesure, s'il est bien conçu, protéger l'élève contre l'enseignant et mettre la fraîcheur créatrice de la jeunesse à l'abri d'un savoir adulte un peu usé à force d'être redit.

Afin que le matériel pour l'enseignement mathématique remplisse ses fonctions, il faut qu'il soit l'objet de la manipulation des élèves, les aidant ainsi à élaborer, à coordonner et à organiser leurs idées. Pour cette raison, contempler un modèle complexe tout fait est de peu de rendement.

Ce que les firmes qui construisent des matériels peuvent faire de plus utile, est de mettre à la disposition de l'enseignement des jeux de construction géométriques, mécaniques, électriques, algébriques ou logiques, qui provoqueront l'activité des élèves et feront gagner du temps aux professeurs.

Dans les pays où la difficulté du recrutement de bons maîtres à tous les degrés ajoute un fardeau de plus aux charges de ceux qui veulent promouvoir l'enseignement, il faut considérer avec espoir l'apport des matériels et des auxiliaires didactiques.

L'idéal serait de mettre au point un outillage pédagogique qui puisse aider le plus possible les élèves à devenir des étudiants, c'est-à-dire des êtres qui assument surtout par leur propre activité leur accès à la connaissance.

Comité de rédaction:

Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin, F. Oberson, L. Pauli, S. Roller, rédacteur.

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).