DÉCONCERTANT HASARD

Michel Brêchet

Enseignant

Mots clé : probabilités, logique, didactique, résolution de problèmes

Résumé : Les probabilités sont d'un bon secours pour se positionner face à l'imprévu et aux coïncidences. Elles réservent toutefois quelques surprises. Confrontée à une situation probabiliste, notre intuition est souvent mauvaise conseillère. D'où l'importance, au cours de l'éducation mathématique, de bien appréhender les tenants et les aboutissants du hasard.

INTRODUCTION

En Suisse romande, le comportement du hasard est abordé au cycle 3 de la scolarité obligatoire. En 10H et 11H, dans l'axe thématique Nombres et Opérations du Plan d'Etudes Romand (CIIP, 2010), il est précisé dans la progression des apprentissages « Exploration de situations aléatoires » et, en 11H pour les élèves de niveaux 2 et 3, « Traitement de situations aléatoires à l'aide de notions de probabilités ». Quant aux commentaires didactiques relatifs à la 11H figurant dans les Moyens d'Enseignement Romands (MER), ils précisent entre autres que :

> … dans ces activités, on ne demande jamais explicitement la probabilité d'un événement. En 10e, on s'est contenté de rester sur des expressions du type « On a X chances sur Y d'obtenir ce résultat ». Les élèves ont perçu que « X » correspond au nombre de cas favorables et « Y » au nombre de cas possibles. En 11e, on continue bien sûr de travailler sur l'approche « probabiliste ». Par contre, on introduit l'expression « La probabilité d'un événement » qui remplace l'expression « On a X chances sur Y d'obtenir ce résultat »[1].

ASPECTS DIDACTIQUES

La plupart des activités figurant dans les MER invitent à dénombrer les résultats favorables et ceux qui sont possibles, la probabilité d'un événement étant définie dans l'Aide-mémoire (CIIP, 2019) de la collection comme le quotient $\frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$, définition qui ne peut bien entendu être appliquée que si les résultats d'une situation aléatoire sont équiprobables. Le dénombrement constitue donc la tâche principale des élèves. Pour être mené à bien, il nécessite de la rigueur, une organisation rationnelle de la recherche effectuée et de la persévérance.

Par exemple, la recherche de tous les résultats pouvant se présenter lors du lancer de 3 pièces de monnaie peut s'appuyer sur :

- la manipulation physique des pièces ;
- des dessins comme P P P F F F P P F …
- l'énumération sous forme de liste : PPP, FFF, PPF …

[1] https://e.maths-m.ch/contenu/com/index.php?file=11NOLEp33com.pdf

- la présentation dans un tableau :

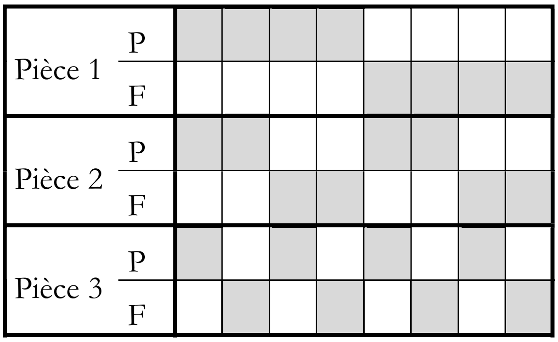


Fig. 1 : Tableau à double entrée

- l'utilisation d'un diagramme en arbre :

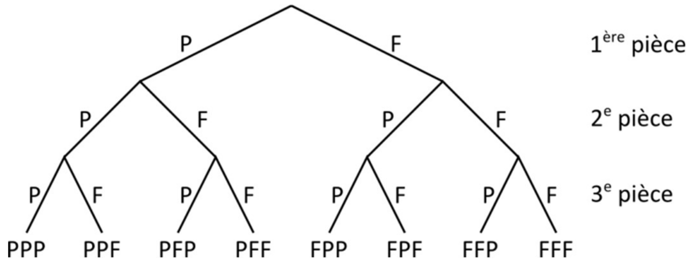


Fig. 2 : Arbre de classement

Une erreur rencontrée fréquemment lors des premiers pas dans l'étude des probabilités est de prétendre qu'il n'y a que 4 cas possibles et non 8 :

3 pile - 2 pile et 1 face - 1 pile et 2 face - 3 face

L'enseignant pourra y remédier en attribuant des couleurs aux pièces, par exemple une jaune, une rouge et une bleue. Ainsi, si chacun des cas « 3 pile » et « 3 face » ne peuvent survenir que d'une seule façon, il y a trois façons différentes d'obtenir « 2 pile et 1 face » (de même que pour « 1 pile et 2 face ») :

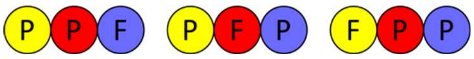


Fig. 3 : Les 3 façons d'aboutir à « 2 pile et 1 face »

Les couleurs sont utiles ici pour rendre le raisonnement plus accessible.

Toujours au plan didactique, il s'agit de ne pas inciter les élèves de l'école obligatoire à résoudre les problèmes rencontrés par l'application de formules (par exemple celles enseignées au lycée qui donnent le nombre d'arrangements ou de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments) ou de calculs (comme celui qui permet de trouver la probabilité d'obtenir un « six » <u>ou</u> le côté « pile » lors du lancer d'un dé conventionnel et d'une pièce de monnaie, $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$ pour information). Ces méthodes sont très efficaces, mais il est délicat de savoir laquelle utiliser dans une situation probabiliste donnée. Seule une certaine aisance permet de ne pas se tromper. Elles sont donc à réserver prioritairement aux étudiants du secondaire 2 et du tertiaire.

De mon point de vue, suite à de multiples séquences d'enseignement traitant des situations aléatoires, les leçons fondées sur des activités où l'expérimentation est possible se déroulent habituellement bien et sont porteuses de sens pour les élèves lorsqu'elles sont articulées autour du scénario suivant :

1. Prévisions a priori, orales ou écrites, pour faire émerger les conceptions des élèves, correctes ou erronées ;
2. Débat au sein de la classe, afin de mettre en exergue les arguments de chacun et de tester leur solidité ;

3. Expérimentation, avec des cartes, des dés, des pièces de monnaie… en veillant que chaque jet, chaque tirage soit indépendant du précédent afin d'être certain que le hasard mène bien la danse ;
4. Recensement des résultats obtenus, nombreux si possible, afin que la loi des grands nombres puisse se manifester ; attention aux biais liés à la taille de l'échantillon : si celui-ci est trop petit, les résultats obtenus risquent de s'écarter des rapports recherchés ;
5. Calculs des fréquences d'apparition empiriques, à exprimer en % ou par un nombre réel compris entre 0 et 1 ; à noter ici que les activités à privilégier sont celles dont les solutions sont des probabilités « simples » et « distantes » l'une de l'autre, comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{8}$ et non comme $\frac{4}{27}$ et $\frac{5}{27}$ qui ne peuvent être mises en évidence expérimentalement qu'au prix d'un très grand nombre de jets ou de tirages ;
6. Analyse théorique, c'est-à-dire calcul des probabilités puis comparaison de celles-ci avec les fréquences empiriques.

Ouvrons une petite parenthèse informatique. Les fréquences empiriques peuvent aussi être le fruit de la programmation d'une feuille de calcul (Excel ou LibreOffice). Par exemple, pour simuler des lancers d'une pièce de monnaie, aussi nombreux que souhaités, on peut programmer les cellules comme suit :

- =(SI(ALEA()<0.5;"P";"F")) pour obtenir P (pile) ou F (face) dans chaque cellule sélectionnée ;
- =NB.SI(A1:A10000;"P") pour compter le nombre de cellules contenant la lettre P à l'intérieur d'une plage donnée, ici la plage A1:A10000, soit une plage correspondant à 10'000 lancers d'une pièce, et enfin diviser ce nombre par 10'000 pour trouver la fréquence d'apparition de P.

EVIDENT OU ÉTRANGE ?

L'étude des situations aléatoires a ceci d'intéressant qu'elle vise également à forger l'esprit scientifique des élèves, à les amener sur le chemin du doute, de l'inédit, à les contraindre à remettre en question certaines de leurs intuitions. Dans ce domaine, elles sont fortes et bien tenaces, mais malheureusement elles sont souvent fausses. Les adultes n'échappent d'ailleurs pas à ce phénomène. Qui n'a jamais constaté que le hasard est un hôte indésirable de la pensée humaine, qui préfère les certitudes ? Hum… très inconfortable ce hasard ! Ainsi, quelques activités des MER conduisent à des résultats surprenants, qui semblent paradoxaux à première vue, mais qui, après analyse, reflètent bien la réalité. On peut citer par exemple dans le Livre 11e *NO117 Mâle ou femelle ?*, *NO124 Quelle stratégie ?* ou encore *NO125 Dés intransitifs*. Ces problèmes, sans examens détaillés et exhaustifs, conduiront certainement à des erreurs de jugement. Pour illustrer ce propos, voyons trois problèmes semblables à l'histoire des perroquets du NO117. Ils ont pour thème un couple et leurs deux enfants. Il est supposé qu'à la naissance les garçons et les filles sont équiprobables, que les sexes des enfants soient des variables aléatoires indépendantes et que les enfants soient d'un sexe ou de l'autre.

1. Un couple a deux enfants, dont l'un au moins est une fille.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Une attitude courante consiste à se dire que si l'un des enfants est une fille, l'autre est soit une fille soit un garçon. Ce raisonnement erroné débouche sur une probabilité de 1/2 (FF ou FG). Mais quand on dit que « l'un au moins est une fille », il peut s'agir du premier ou du deuxième enfant. Quatre possibilités surviennent lors de deux naissances :

FF - FG - GF - GG

Toutefois, comme l'énoncé précise qu'il y a au moins une fille, le cas GG est exclu et il reste trois cas équiprobables. Comme il n'y a qu'un seul FF parmi eux, la probabilité que les deux enfants soient des filles est de 1/3. Cette situation peut être illustrée par le tableau ci-dessous. Seules les cases grises (au moins une fille) sont à prendre en considération. Et seule la case contenant une croix satisfait à la condition « les deux enfants sont des filles ».

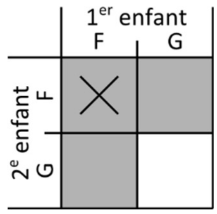


Fig. 4 : Au moins une fille

En classe, après avoir laissé un temps de réflexion aux élèves afin qu'ils puissent résoudre ce problème, l'enseignant pourra former des binômes d'élèves puis :

- demander qu'un membre du binôme lance simultanément deux pièces de monnaie (pile pour garçon et face pour fille) et que l'autre note les résultats obtenus dans un tableau (voir figure 5), pendant un temps donné (10-15 minutes) afin d'avoir un grand nombre de résultats ;

Nombre de lancers (hormis configuration GG)	𝍸 𝍸 𝍸 III …
Nombre de configurations FF	𝍸 II …

Fig. 5 : Exemple de tableau des résultats

- recenser les résultats obtenus par tous les binômes, dans un tableau analogue à celui-ci-dessus ;
- calculer la fréquence d'apparition (en %) des configurations FF.
- Cette expérimentation permettra de vérifier que FF apparaît environ une fois sur trois. Comme dit précédemment, ce rapport est « simple » et peut donc être bien mis en évidence.

> 2. Un couple a deux enfants, dont le premier est une fille.
>
> Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Ici c'est plus simple. Vu que le premier enfant est une fille, l'autre a autant de chances d'être un garçon qu'une fille. FF et FG sont les deux cas possibles, et seul FF répond à la demande, d'où la probabilité de 1/2, comme le montre également ce diagramme :

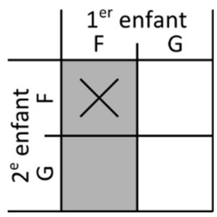


Fig. 6 : Le 1er enfant est une fille

> 3. Un couple a deux enfants, dont l'un au moins est une fille née un mardi.
>
> Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Dans cette nouvelle version, de prime abord, le jour de naissance de la fille paraît sans intérêt, mais attention aux pièges d'une réflexion trop hâtive ! On nage en plein cœur du domaine contre-intuitif de la probabilité conditionnelle, qui est la probabilité d'un événement (ici deux filles) après qu'un autre événement s'est déjà produit (ici la naissance d'une des filles un mardi).

Une des difficultés majeures de ce problème consiste à identifier tous les cas pouvant se présenter. Aux élèves bloqués, l'enseignant pourra conseiller en guise de relance de dresser méthodiquement la liste de ces cas. Au besoin il en établira l'amorce avec eux. Il rappellera en outre avantageusement que la première phrase de l'énoncé n'exclut pas que les deux enfants soient des filles nées un mardi (**FMa**), et qu'il s'agit de tenir compte du jour de naissance de chaque enfant lors de la recherche. On obtient alors 14 cas (2 · 7) si le premier enfant est une fille née un mardi : **FMa**FLu - **FMa**FMa - **FMa**FMe - **FMa**FJe - **FMa**FVe - **FMa**FSa - **FMa**FDi - **FMa**GLu - **FMa**GMa - **FMa**GMe - **FMa**GJe - **FMa**GVe - **FMa**GSa – **FMa**GDi, et donc 14 également si le deuxième enfant est une fille née un mardi (FLu**FMa** – FMa**FMa** – FMe**FMa** - …). D'où l'erreur bien connue d'aboutir à la conclusion qu'il y a 14 + 14 = 28 cas possibles. En fait il n'y en a que 27, car la configuration FMaFMa apparaît à deux reprises. Reste à repérer dans cette liste tous les cas favorables, à savoir les cas où les deux enfants sont des filles (il y en a 13), et à calculer la probabilité demandée (13/27) en appliquant la formule usuelle.

Représenter cette situation de façon analogue aux deux exemples précédents apportera sans doute un éclairage bienvenu :

		1^er^ enfant													
		fille							garçon						
		Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
2^e^ enfant – fille	Lu		X												
	Ma	X	X	X	X	X	X	X							
	Me		X												
	Je		X												
	Ve		X												
	Sa		X												
	Di		X												
2^e^ enfant – garçon	Lu														
	Ma														
	Me														
	Je														
	Ve														
	Sa														
	Di														

Fig 7 : Au moins une fille née un mardi

Seules les 7 · 4 – 1 = 27 cases grises (au moins une fille née un mardi) sont à considérer et seules les 7 · 2 – 1 = 13 cases marquées d'une croix conduisent à « deux filles », d'où la probabilité de 13/27, car tous les carreaux sont équiprobables. Et donc le jour de naissance a son importance, ce qui était difficile à prédire !

En fait, la connaissance du jour de naissance pour l'une des filles contribue à améliorer la distinction entre les deux filles et modifie ainsi la probabilité conditionnelle. Et plus l'information supplémentaire apportée est précise, plus la probabilité que les deux enfants soient des filles s'approche de 1/2 :

- si on ne sait pas quel enfant est la fille, la probabilité est de $\frac{1}{3}$;
- si une des filles est née au printemps (il y a 4 saisons), la probabilité est de $\frac{4\cdot 2-1}{4\cdot 4-1}=\frac{2-\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}=\frac{7}{15}$;
- si une des filles est née un mardi (7 jours dans la semaine), la probabilité est de $\frac{7\cdot 2-1}{7\cdot 4-1}=\frac{2-\frac{1}{7}}{4-\frac{1}{7}}=\frac{13}{27}$;
- si une des filles est née à Noël (365 jours dans l'année), la probabilité est de $\frac{365\cdot 2-1}{365\cdot 4-1}=\frac{2-\frac{1}{365}}{4-\frac{1}{365}}=\frac{729}{1459}$;

- si on sait que le premier enfant est une fille, la probabilité est de $\frac{1}{2}$.

On a bien $\frac{1}{3} < \frac{7}{15} < \frac{13}{27} < \frac{729}{1459} < \frac{1}{2}$.

Dans les égalités ci-dessus, les fractions $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{365}$ correspondent aux probabilités respectives de naître à une saison donnée, à un jour de la semaine donné ou à une date donnée. D'une manière générale, en appelant c la probabilité de satisfaire à une condition donnée, le résultat recherché est $\frac{2-c}{4-c}$. Décidément le monde des probabilités conditionnelles réserve de belles surprises !

Voici encore quatre problèmes (peut-être les connaissez-vous) qui montrent volontiers que l'être humain a une perception fluctuante et imprécise du hasard. Si le cœur vous en dit, vous pouvez y réfléchir et chercher leurs solutions. Des aides à la résolution sont dissimulées sous chaque problème. Un prochain numéro de RMé vous livrera tous leurs secrets.

Bonne réflexion.

Les 3 boîtes

Dans une boîte sont cachées deux pièces d'or, dans une autre deux pièces d'argent et dans la troisième une d'or et une d'argent. Votre main retire une pièce d'or d'une boîte.

Quelle est la probabilité que la pièce restante soit d'argent ?

Les 3 cartes[2]

Pauline possède les trois cartes suivantes :

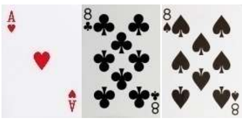


Fig. 8 : As de cœur, 8 de trèfle, 8 de pique

Elle les mélange puis les retourne (faces cachées). Elle demande alors à Marc de deviner où se trouve l'as de cœur. Pauline, qui sait où est l'as de cœur, ne retourne pas la carte montrée par Marc.

Pauline retourne alors l'une des deux cartes autre que celle qui a été choisie par Marc et autre que l'as de cœur. Elle retourne donc soit la 8 de trèfle, soit la 8 de pique.

Marc souhaite trouver l'as de cœur. Pauline, fort sympathique, lui permet de maintenir son premier choix (la carte qu'il avait montrée) ou de le modifier (montrer l'autre carte).

Que lui conseillez-vous de faire ?

[2] Ce problème est identique au NO124 Quelle stratégie ? cité plus haut, ainsi qu'au jeu télévisé Let's make a deal.

Pile ou face

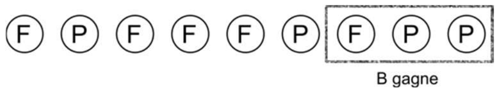
Deux joueurs A et B s'affrontent dans une série de lancers de pièce de monnaie.

A gagne si, dans la série, la configuration PPF (pile, pile, face) apparaît avant la configuration FPP (face, pile, pile).

B gagne si, dans la série, la configuration FPP apparaît avant la configuration PPF.

Le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne, soit après 3 lancers au minimum.

Par exemple, dans la série ci-dessous, c'est le joueur B qui gagne :



Le jeu est-il équilibré ?

Le test

Un test de dépistage d'une infection est à l'étude :

- il y a 4% de risques qu'une personne soit atteinte par l'infection ;
- si elle est atteinte par l'infection, il y a 75% de risques qu'elle ait une réaction positive au test ;
- si elle est épargnée par l'infection, il y a encore 12,5% de risques qu'elle ait une réaction positive au test.

Pierre a une réaction positive au test.

Quelle est la probabilité qu'il soit atteint par l'infection ?

BIBLIOGRAPHIE

Bronner, G. (2007). Coïncidences, Vuibert.
CIIP. (2010). *Plan d'étude romand.* https://www.ciip-esper.ch/#/
CIIP. (2013). *Mathématiques 9-10-11, Livre 11^{e}*, LEP
CIIP. (2019). *Mathématiques 9-10-11, Aide-mémoire*, LEP.
Gauvrit. N. (2009). *Vous avez dit hasard ?* Belin.
Stewart, I. (2020). *Les dés jouent-ils aux dieux ?* Dunod.