

# TOTEMS (5ÈME HARMOS) : UNE ACTIVITÉ MATHÉMA- TIQUE POUR APPRENDRE À DÉVELOPPER DES STRATÉ- GIES DE RECHERCHE

Lucie Passaplan

Etudiante à l'Université de Genève

## INTRODUCTION

La résolution de problèmes au sens large (situation-problème, problèmes de réinvestissement...) occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques. De fait, le Plan d'Etudes Romand (PER) note comme visée prioritaire pour la discipline des mathématiques (MSN), dans le domaine de modélisation :

*Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements [...]*

Dans ce sens, les moyens d'enseignement romands s'appuient notamment sur des activités de résolution des problèmes ouverts, situations d'apprentissage qui font en effet travailler de multiples compétences, telles que chercher, faire des hypothèses, tester... Mais les savoirs en jeu dans ces situations sont difficiles à définir et l'absence d'indication pour mener la phase d'institutionnalisation, désignée par Brousseau (1998) comme étant « la prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève », semble induire une mise en place et une gestion délicates.

Dans le cadre d'une recherche pour l'élaboration de mon mémoire universitaire, je me suis intéressée à la thématique des problèmes ouverts en me questionnant sur la gestion d'une telle situation de résolution en classe, notamment par rapport à l'organisation du milieu didactique, ainsi qu'aux réels savoirs en jeu. L'expérimentation de

Totems (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998, p. 118) a été organisée dans deux classes de division moyenne de 5ème HarmoS d'une école genevoise, gérées par des enseignantes en début de carrière. L'article ci-dessous propose un résumé de mon travail.

## ACTIVITÉ PROPOSÉE

Totems figure dans les moyens d'enseignement de mathématiques de 3P, module 1 « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement », qui a comme objectif d'« exercer [un] raisonnement au travers d'activités qui demandent de lire, mettre en relation, classer, organiser des informations et utiliser des représentations personnelles pour se rappeler ou communiquer des informations » (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1997, p. 31). Voici l'énoncé :

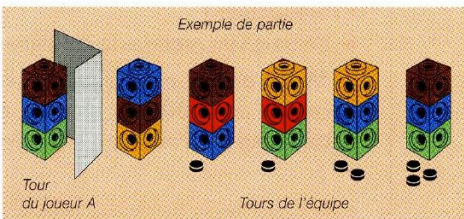
### Totems

**Règles du jeu pour 3 joueurs (A, B et C)**

**Matériel:** environ 50 multicubes répartis en 5 couleurs, environ 20 jetons

- Sans le montrer, le joueur A fabrique une tour de 3 cubes de couleurs différentes.
- Les joueurs B et C forment une équipe. Ils doivent trouver la tour cachée. À chaque essai, ils fabriquent une tour de 3 cubes et la montrent au joueur A.
- Le joueur A compare cette tour à celle qu'il a cachée et indique à l'aide de jetons combien de cubes sont bien placés.

*Exemple de partie*



Tour du joueur A
Tours de l'équipe

- Quand B et C ont trouvé, on compte le nombre de tours qu'ils ont dû fabriquer et on échange les rôles.

Le but est de trouver la tour cachée en fabriquant le moins possible de tours.

118

Le but de l'activité consiste donc à découvrir la combinaison de trois cubes de couleurs différentes parmi les cinq à disposition, en proposant des totems et en exploitant les rétroactions, celles-ci étant données

par le constructeur du totem grâce à des retours sous forme d'un jeton pour chaque cube correctement placé. Il existe, selon cet énoncé, 60 totems différents constructibles ( $5 \times 4 \times 3$ ).

## ANALYSE A PRIORI

### CONNAISSANCES PRÉ-REQUISES ET SAVOIRS VISÉS

Totems ne demande a priori que peu de pré-requis de la part des élèves. Faisant référence au PER quant aux savoirs et compétences utiles pour cette activité, ils doivent tout de même, afin d'être capables de résoudre la situation, se poser des questions et définir un cadre d'étude, imaginer et éventuellement utiliser des représentations visuelles (codes, schémas, ...), identifier les invariants de la situation, trier et organiser des données, se confronter au concept du probable, ainsi que communiquer leurs résultats et leurs interprétations : c'est vraiment la recherche qui est mise en œuvre, Totems mobilise les capacités transversales suivantes : la collaboration et la communication entre pairs, l'élaboration d'une stratégie d'apprentissage et la pratique d'une démarche réflexive. Je note donc que cette activité, proposée déjà en 1998, répond tout à fait aux exigences du PER.

### DESCRIPTION DES VARIABLES DIDACTIQUES

En étudiant l'activité, j'ai pu mettre en évidence certaines variables didactiques :

- le nombre  $n$  de cubes dans un totem,
- le nombre  $p$  de couleurs possibles,
- la possibilité ou non de répéter la couleur.

Selon les valeurs numériques des deux premières variables et l'option choisie pour la troisième, il est possible de déterminer le nombre de totems constructibles ; d'une part, s'il n'y a pas la possibilité de répéter une couleur, le nombre de totems possibles est  $p$  s'il n'y a qu'un cube,  $p(p-1)$  s'il y en a deux, et plus généralement  $p(p-1) \dots (p-n+1)$  pour  $n$  cubes et  $p$  couleurs quelconques avec  $p \geq n$ ; d'autre part, s'il y a la possibilité de répéter une couleur, le nombre de totems possibles est  $p^n$ . Pour que l'activité soit jouable et compatible avec le niveau

des élèves, il faut que le nombre de totems constructibles ne soit ni trop faible (au moins 20), ni trop élevé (pas plus de 150) ; de fait, les valeurs choisies dans les moyens d'enseignement romands satisfont aux critères cités.

En plus des variables nommées ci-dessus, je me suis intéressée à deux autres portant sur l'organisation didactique de l'activité ; premièrement, la forme des retours pour lesquels plusieurs valeurs sont envisageables :

- indiquer le nombre de cubes de couleurs correctement positionnés grâce à un ou des jeton(s), comme le stipule l'énoncé,
- indiquer la position de la couleur correcte, les élèves-constructeurs disposant d'une grille de position représentant les trois étages et plaçant le jeton sur l'étage correspondant,
- indiquer toutes les couleurs correctes présentes dans le totem, y compris les mal placées, avec des jetons de couleurs différentes,
- indiquer toutes les couleurs correctes bien et mal positionnées présentes dans le totem, ainsi que les positions grâce aux jetons de couleurs différentes et à la grille de position.

Deuxièmement, concernant l'organisation sociale : il faut au moins un élève-constructeur et un élève-chercheur. Il n'y a, a priori, pas de raison d'avoir plus d'un constructeur, sauf s'il s'avère utile de valider les retours. Concernant les chercheurs, l'organisation préconisée est de deux chercheurs et permet une verbalisation et une confrontation des procédures. J'ai aussi organisé la mise en place d'une partie collective (groupe classe vs enseignante) et d'une partie avec des équipes jouant simultanément les rôles de constructeurs-chercheurs.

### DÉROULEMENT PRÉVU DE LA 1ÈRE SÉANCE

Afin de m'inscrire dans les moyens d'enseignement romands, j'ai repris les différentes phases décrites pour la résolution de problèmes ouverts dans les documents y relatifs (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1997), à savoir : la phase d'appropriation, avec comme objectif la lecture et la compréhension du problème par les élèves, ainsi que l'explication par l'enseignante de l'uti-

lisation de la fiche de report<sup>1</sup>; la phase de recherche, dans le but de mettre en action les élèves, afin qu'ils agissent sur le milieu pour trouver des procédures de résolution; la phase de formulation, prenant place sous la forme d'une partie publique de Totems : ce moment collectif doit permettre la verbalisation de l'interprétation des jetons, l'explicitation et le partage de procédures pour donner des pistes d'action aux élèves. A la fin de ce moment, si aucune piste de codage n'est apparue, l'enseignante distribue la fiche comprenant l'ensemble des totems possibles, dont les couleurs sont codées par des lettres, qui doit permettre aux élèves de se représenter le champ des possibles et de visualiser la réduction des possibilités au fil des retours<sup>2</sup>. Puis, une nouvelle phase de recherche a lieu avec une partie deux contre deux, les élèves étant simultanément constructeurs et chercheurs; ce temps doit permettre aux élèves de réinvestir les stratégies expliquées précédemment et les inciter à trouver des méthodes de résolution plus rapides. A la fin de la séance est prévue une phase de validation au sens large du terme, avec une mise en évidence des procédures efficaces et du facteur chance, l'expression des erreurs ou des difficultés récurrentes.

#### DÉROULEMENT PRÉVU DE LA 2ÈME SÉANCE

Après une courte phase d'appropriation pour rappeler les règles de l'activité, l'exercice Totems maudits<sup>3</sup> est introduit; la recherche se déroule en duo et il est prévu que les élèves contrôlent leurs réponses à l'intérieur du groupe. La séance prend fin avec une phase de formulation et validation qui sert à expliciter et justifier les procédures, marquer les différences entre Totems et Totems maudits et verbaliser ce que les élèves ont retenu (Annexe I).

1 Cette fiche, créée pour l'expérimentation, m'a permis de porter un regard sur l'ensemble des parties et d'analyser les procédures des élèves.

2 Il est bien entendu que cette représentation peut être matérialisée sous d'autres formes.

3 Cette fiche, créée par mes soins mais inspirée d'une activité existante dans COROME, comprend une subtilité avec la question : « Est-ce possible de trouver le totem caché au prochain essai? ».

## ANALYSE A POSTERIORI

### DÉROULEMENT EFFECTIF DE LA 1ÈRE SÉANCE

Après lecture de l'énoncé, certains élèves ont pu reformuler les données et le but de l'activité ; puis, la phase de recherche a débuté et duré environ 30 minutes. La partie publique qui suit n'a pas été gérée de la même manière par les enseignantes : l'une a demandé d'explicitier toutes les propositions en fonction des retours reçus, l'autre a laissé les élèves seuls responsables de la résolution et est revenue sur la partie une fois le totem trouvé. Les enseignantes ont ensuite introduit la fiche de codage et un autre moment de recherche est mis en place, avec une organisation deux contre deux : j'ai observé davantage de verbalisations entre les pairs, mais aussi que la fiche de codage n'a pas été utilisée à bon escient par les élèves, point sur lequel les enseignantes n'ont pas insisté. La dernière phase, celle de validation, n'a pu avoir lieu, faute de temps.

### DÉROULEMENT EFFECTIF DE LA 2ÈME SÉANCE

Etant donné qu'aucune validation n'a eu lieu durant la première leçon, cette séance commence par une partie publique de Totems gérée de la même manière que la précédente. Suit un temps de validation avec le même objectif que lors de la première leçon et se déroulant très rapidement. Puis, comme prévu, les enseignantes introduisent la fiche Totems maudits et la recherche peut débuter. Si je me penche sur les réponses des élèves, ils ont, d'une manière générale, bien réussi à identifier les totems cachés. Toutefois, seuls deux groupes sont parvenus à détecter la subtilité en donnant les différentes réponses encore possibles ; en effet, la plupart des élèves se sont contentés de la première réponse trouvée. Après 30 minutes de recherche, une enseignante décide d'organiser une discussion sur la tâche, alors que l'autre, bénéficiant de plus de temps, choisit de corriger les totems et de conclure par un débat sur les stratégies pour les deux activités.

### STRATÉGIES OBSERVÉES DE TOTEMS

Il y a dans l'activité Totems une part de hasard irréductible, puisqu'il est possible

que le premier totem proposé soit le bon. De fait, il n'est ni possible de définir une hiérarchisation stricte des stratégies, ni d'en désigner une gagnante, mais seulement de les comparer en termes de probabilités, de réduction du champ des totems possibles. J'ai ainsi pu dégager certaines procédures observées lors de l'expérimentation :

- procédures inefficaces : mettre de côté les totems recevant zéro jeton en retour, comme s'ils ne donnaient aucune information, ou ne jamais prendre en considération les jetons, ce qui conduit à proposer des totems au hasard,
- procédures passablement efficaces : tenir compte systématiquement de tous les retours,
- procédures efficaces : proposer des totems en regard des retours, c'est-à-dire lorsqu'il y a zéro ou deux jetons, les prendre en considération, mais lorsqu'il n'y en a qu'un, ne pas chercher à tout prix à identifier de quel cube il s'agit,
- procédures très efficaces, qui n'ont été que rarement observées : proposer un coup perdant, totem ne correspondant pas aux retours reçus ou avec répétition de couleurs<sup>4</sup>; il permet de confirmer la position d'un cube ou de définir les couleurs présentes dans le totem, données facilement mémorisables et directement exploitables.

D'une manière générale, les premiers retours ne donnent pas suffisamment d'informations fiables pour conditionner les propositions de totems et il est donc judicieux de ne les considérer qu'à partir du 3ème ou 4ème essai.

## SYNTHÈSE DE L'EXPÉRIMENTATION

Il n'est pas aisé d'extraire des résultats significatifs de cette expérimentation. Je note tout de même que la plupart des élèves ont été capables d'effectuer des hypothèses en organisant les données à leur disposition, mais que seuls certains d'entre eux ont démontré qu'ils étaient en cours de développement de la notion d'apodicticité, qui demande d'extraire les solutions à caractère

nécessiteux<sup>5</sup>, de rester dans le registre du rationnel en énonçant les solutions restantes ou en affirmant que le totem proposé était le dernier possible. De plus, aucun élève n'a trouvé un moyen de représenter les informations concernant le totem à découvrir.

L'activité Totems a un grand potentiel didactique qui, à mon avis, n'a pas été complètement exploité. Plusieurs raisons à cela : les élèves n'avaient peut-être pas, à ce moment de l'année, les compétences nécessaires pour démontrer une progression dans leurs procédures de résolution; quant aux enseignantes, je pense qu'elles sont restées dans une logique de jeu, avec une gestion difficile, dans le feu de l'action. Elles ont également manqué de conviction par rapport à la fiche de codage, dont elles n'ont, selon moi, pas évalué le gain; je peux de fait penser que l'introduction de cet outil leur demandait un important investissement pour l'intégrer dans la leçon ou peut-être estimaient-elles qu'il était trop éloigné de leur pratique ou des compétences des élèves.

## CONCLUSION

Les savoirs en jeu pour la résolution de problèmes ouverts sont d'ordre méthodologique, chercher, effectuer des essais, formuler des hypothèses, argumenter et prouver, ainsi que transversal, correspondant plus à des habiletés sociales ; en plus du hasard et du manque de stratégie gagnante pour Totems, l'absence de savoir mathématique notionnel à institutionnaliser génère une gestion difficile pour les enseignants, qui proposent alors ces situations comme des activités à part, la mise en place s'évaluant par le niveau de participation des élèves et une certaine réussite superficielle des tâches. Pour améliorer ces pratiques, il me semble qu'une clarification des enjeux et un matériel didactique plus important permettant d'enrichir le milieu sont nécessaires pour favoriser, chez les élèves, de nouvelles stratégies de recherche.

<sup>4</sup> A noter que dans la consigne, aucune précision n'est donnée sur la composition des totems proposés.

<sup>5</sup> « Si A est nécessairement vrai (au sens « il ne peut être autrement »), non A ne peut pas aussi être nécessairement vrai » (Hersant, 2010, p. 37).

## Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

Danalef, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Livre de l'élève. Mathématiques 3P*. Neuchâtel : COROME.

Gagnebin, A., Guignard, N., Jaquet, F. (1997). *COROME : Apprentissage et enseignement des mathématiques : commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*, Bienne : Ediprim SA.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques. Mémoire complémentaire pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Education*, Université de Nantes.

<http://www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques> (consulté le 19.10.12)

## Annexe I

### Totems maudits

Voici les premiers essais d'une partie de « Totem ». On joue avec les règles suivantes :

- il y a 3 étages,
- il y a 5 couleurs possibles,
- on ne peut pas répéter la même couleur dans une tour.

Est-ce possible de découvrir le totem caché au prochain essai ? Si oui, désigne-le !

R = rouge    V = vert    J = jaune    B = bleu    O = orange

#### Totem A

R
V
O
•

R
O
V
---

B
V
J
---

J
R
B
•

V
R
O
•


#### Totem B

B
J
O
••

V
J
O
••


#### Totem C

O
J
V
••

R
J
V
•

O
J
B
•


#### Totem D

O
J
B
•

J
V
B
---

R
J
O
••

V
J
O
••


#### Totem E

J
O
R
---

O
V
B
•

R
V
O
---

O
B
J
•

O
J
V
••
