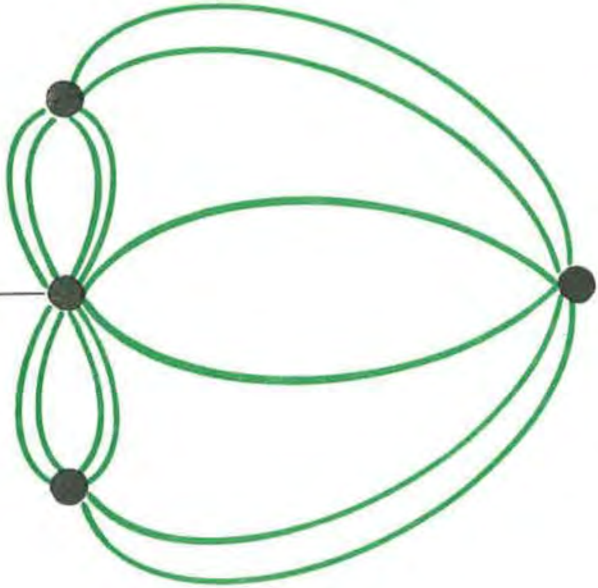
58



MATH ECOLE

MAI 1973
11e ANNÉE

MATH ECOLE 12e ANNÉE MAI 1973 58

Remarques sur l'éducation mathématique

par le professeur Jean Piaget

Ce texte a été lu, pour le compte de Jean Piaget, au «Congrès international pour l'enseignement des mathématiques» à Exeter en septembre 1972. Le professeur Sir James Lighthill de l'Université de Cambridge, président du Congrès, en a aimablement autorisé la publication dans «Math-Ecole» qui lui exprime sa reconnaissance.

1. L'orientation que l'on compte assigner à l'éducation mathématique dépend naturellement de l'interprétation que l'on adopte de la formation psychologique ou de l'acquisition des opérations et des structures logico-mathématiques, mais elle dépend tout autant de la signification épistémologique qu'on leur attribue, les deux questions de leur psychogenèse et de leur épistémologie étant d'ailleurs liées de près. Si le platonisme est dans le vrai et que les êtres mathématiques existent indépendamment du sujet, ou si le positivisme logique a raison en les réduisant à une syntaxe et une sémantique générales, dans les deux cas il sera justifié de mettre l'accent sur une simple transmission des vérités du maître à l'élève et d'utiliser le plus tôt possible le langage du maître, c'est-à-dire le langage axiomatique, sans trop se soucier des idées spontanées des enfants.

2. Nous croyons au contraire qu'il existe, en fonction du développement de l'intelligence en son ensemble, une construction spontanée et graduelle des structures logico-mathématiques élémentaires et que ces structures «naturelles» (au sens où l'on parle de nombres «naturels») sont beaucoup plus proches de celles qu'utilisent les mathématiques dites modernes que de celles dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il y a donc là un ensemble de réalités en général peu connues de l'éducateur, mais dont, avec une meilleure connaissance psychologique, il pourrait largement tirer parti, ce qui faciliterait sa tâche au lieu de la compliquer et ce qui surtout favoriserait l'éclosion de vocations créatrices au lieu de faire des élèves de simples récepteurs conformistes.

3. Mais, pour en arriver là, il importe avant tout de réviser nos notions quant aux rapports entre le langage et l'action. Il semble, en effet, psychologiquement clair que la logique n'est pas issue du langage mais d'une source beaucoup plus profonde, qui est à chercher dans les coordinations générales de l'action. En effet, avant tout langage et à un niveau encore purement sensori-moteur les actions sont susceptibles de répétition et de généralisation constituant ainsi ce que l'on peut appeler des schèmes d'assimilation. Or ces schèmes s'organisent selon certaines lois auxquelles il est impossible de refuser une parenté avec celles de la logique: deux schèmes peuvent être coordonnés ou dissociés (réunion), l'un peut être partiellement emboîté en un autre (cf. l'inclusion), ou ne présenter avec lui qu'une partie commune (intersection), les parties d'un schème ou la coordination de deux ou plusieurs schèmes peuvent comporter un ordre de succession invariant ou certaines permutations (types d'ordre), de même que des correspondances terme à terme, un à plusieurs ou plusieurs à un (bijections, etc.) et lorsqu'un schème impose un but à l'action il est contradictoire pour le sujet de s'orienter en sens contraire. Bref, il y a là une logique de l'action conduisant jusqu'à la construction de certaines identités dépassant la perception (permanence d'un objet caché) et à l'élaboration de certaines structures (groupe pratique des déplacements déjà décrit par Poincaré en ses essais épistémologiques).

4. Ce serait donc, même en pédagogie mathématique, une grande erreur de négliger le rôle des actions et de s'en tenir toujours au plan du langage. Chez les jeunes élèves l'action sur des objets est au contraire indispensable à la compréhension des relations arithmétiques aussi bien que géométriques (comme c'était le cas au niveau de la mathématique empirique des Egyptiens). Or la répugnance des maîtres de mathématique à l'égard de toute action ou expérience matérielles est très compréhensible: ils y voient une sorte d'appel à des propriétés physiques et craignent que les constatations empiriques ne nuisent au développement de l'esprit déductif et purement rationnel qui caractérisent leur discipline. Mais en fait il y a là un malentendu fondamental et l'analyse psychologique permet de le dissiper et de rassurer les mathématiciens quant à leur exigence essentielle d'une éducation de l'esprit déductif et formel. Il existe, en effet, deux formes bien différentes d'expériences liées aux actions matérielles du sujets. Il y a, en premier lieu, les expériences physiques (au sens large), qui consistent à agir sur les objets pour en découvrir des propriétés qui existaient en eux avant que le sujet ne les manipule: par exemple comparer des poids ou des densités, etc. Mais il existe aussi, et on l'ignore généralement, ce que l'on peut appeler des «expériences logico-mathématiques», car elles tirent leur information non pas des objets particuliers en tant que physiques, mais des actions elles-mêmes (ou plus précisément de leurs coordinations) que le sujet exerce sur les objets, ce qui n'est nullement équivalent. Je suis lié d'amitié avec un mathématicien bien connu qui fait remonter le début de ses intérêts mathématiques à une expérience de ce second type, qu'il a faite aux environs de 4 ou 5 ans: assis dans son jardin il s'est amusé à mettre des cailloux en une rangée linéaire et à les compter, par exemple de 1 à 10 en procé-

dant de gauche à droite. Après quoi il les a comptés de droite à gauche et à son grand étonnement il a retrouvé le nombre de 10. Il les a alors mis en cercle et, avec enthousiasme, il a de nouveau obtenu 10, dans l'un des sens de rotation comme dans l'autre! Il a continué avec d'autres figures et a fini par se persuader que la somme 10 était indépendante de l'ordre. Or, il est évident que ni la somme ni l'ordre n'appartenait aux cailloux avant que le sujet ne les range ou ne les réunisse en un tout: ce que l'enfant a découvert c'est donc que l'action de réunir donne des résultats indépendants de l'action d'ordonner et c'est ce qu'il aurait pu constater sur des solides quelconques, sans que les propriétés physiques des cailloux jouent de rôle particulier (sauf qu'ils se sont «laissé faire» en tant que se conservant mais la conservation elle aussi donne lieu à des expériences logico-mathématiques).

5. Or, ce rôle initial des actions et des expériences logico-mathématiques, loin de nuire au développement ultérieur de l'esprit déductif, en constitue au contraire la préparation nécessaire et cela pour deux raisons. La première est que les opérations mentales ou intellectuelles qui interviennent dans ces déductions ultérieures dérivent précisément des actions: ce sont des actions intériorisées et lorsque cette intériorisation, avec les coordinations qu'elle suppose, sera suffisante, les expériences logico-mathématiques, en tant qu'actions matérielles deviendront inutiles et la déduction intérieure se suffira à elle-même. La seconde raison est que les coordinations d'actions et les expériences logico-mathématiques provoquent en s'intériorisant la formation d'une variété particulière d'abstraction qui correspond précisément à l'abstraction logique et mathématique: contrairement à l'abstraction ordinaire, ou aristotélicienne, qui part des propriétés physiques des objets et que nous appellerons pour cette raison une «abstraction empirique», l'abstraction logico-mathématique peut être désignée du terme d'«abstraction réfléchissante» et cela selon deux significations solidaires: d'une part, elle «réfléchit» (au sens d'un réflecteur ou d'une projection) ce qui est tiré d'un plan inférieur (par exemple des actions) pour le projeter sur un plan supérieur de pensée ou de représentation mentale; d'autre part, elle est une «réflexion» au sens d'une activité mentale de réorganisation puisqu'elle reconstruit sur ce plan supérieur ce qui est tiré des coordinations de l'action.

6. Mais entre l'âge où l'action matérielle et les «expériences logico-mathématiques» sont nécessaires (avant 7-8 ans) et l'âge où la pensée abstraite commence à devenir possible (vers 11-12 ans et encore par paliers successifs jusqu'à 14-15 ans) il faut distinguer une étape dont les caractères sont intéressants pour le psychologue et utiles à connaître pour l'éducateur: entre 7 et 11-12 ans, en effet, on assiste à un important développement spontané des opérations déductives, avec leurs caractères de conservation, de réversibilité, etc., ce qui permet l'élaboration d'une logique élémentaire des classes et des relations, la construction opératoire de la série des nombres entiers par synthèse de l'inclusion et de l'ordre [1], la construction de la mesure par synthèse de la partition d'un continu et du déplacement ordonné de la partie choisie comme unité, etc.

Mais ces progrès logiques en un sens considérables demeurent néanmoins assez limités: à ce niveau l'enfant ne parvient, en effet, pas encore à raisonner sur de pures hypothèses, exprimées verbalement, et, pour parvenir à une déduction cohérente, il a besoin de l'appliquer à des objets manipulables (en réalité ou en imagination). C'est pourquoi nous ne parlons à ce niveau que d'«opérations concrètes», par opposition à formelles, et l'on voit qu'elles demeurent en fait en une situation intermédiaire entre les actions préopératoires des débuts et la pensée abstraite dont la possibilité reste plus tardive.

7. Or, une fois rétablie ainsi la continuité entre les actions spontanées de l'enfant et sa pensée réflexive, on s'aperçoit du fait que les notions essentielles caractérisant les mathématiques nouvelles sont en réalité beaucoup plus proches des structures de la pensée «naturelle» que les concepts dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il faut d'abord signaler à cet égard le rôle spontané considérable que jouent les opérations de mise en correspondance entre ensembles, donc la construction de morphismes, en particulier lorsqu'on peut les combiner avec des suites récurrentielles. Nous avons, par exemple, demandé avec B. Inhelder à des enfants de 4-5 à 7-8 ans de mettre d'une main une perle dans un bocal transparent, et de l'autre main (et simultanément) une autre perle dans un second bocal mais masqué par un écran; les questions étaient de savoir si les deux ensembles ainsi constitués étaient équivalents ou non, et, d'autre part, si, en continuant indéfiniment, cette égalité se conserverait ou non. Or, tous les enfants interrogés admettaient l'égalité au cours même de l'action, mais les plus jeunes se refusaient à généraliser pour ce qui est de la suite. Par contre, dès 5-6 ans, ils admettaient cette généralisation et un petit garçon de cinq ans et demi a même trouvé cette jolie formule: «Quand on sait pour une fois, on sait pour toujours». Or, ce même sujet, pour 10 jetons rouges posés sur la table en correspondance terme à terme avec 10 jetons bleus, niait encore la conservation de cette équivalence lorsque l'on espaçait quelque peu les éléments de l'une des deux rangées et que la correspondance cessait ainsi d'être optiquement constatable. On voit en cet exemple le rôle constructif de la mise en correspondance combiné avec la récurrence.

8. Un exemple frappant de convergence entre la théorie et le développement spontané est celui des intuitions géométriques. Historiquement celles-ci ont débuté par les formes euclidiennes, les structures projectives n'ayant été dégagées que plus tardivement et la topologie au XIXe siècle seulement. Or psychologiquement les enfants de 3-4 ans qui ne savent pas encore dessiner des carrés et les assimilent comme les cercles, rectangles, triangles, etc. à de simples courbes fermées, marquent au contraire soigneusement la différence entre celles-ci et des figures ouvertes et dessinent avec le même soin un petit cercle à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière d'un grand. De ces intuitions topologiques précoces dérivent ultérieurement et simultanément les notions projectives (ponctuelles avec vérification par visée, etc.) et euclidiennes, selon un processus qui est donc plus proche de la théorie que de l'histoire.

9. Une autre convergence intéressante tient au fait que l'on retrouve, à partir du niveau des «opérations concrètes» de 7-8 ans, un équivalent élémentaire des trois «structures mères» distinguées par les Bourbaki, ce qui montre leur caractère «naturel». On relève d'abord la construction de structures de caractère algébrique, en ce sens que leurs lois de composition comportent des opérations inverses et un élément neutre $+\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{O}$. On les observe notamment dans les systèmes de classes (classifications, etc. avec quantification des inclusions $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ si $\mathbf{B}=\mathrm{A}+\mathbf{A'}$ non nulles). On trouve en second lieu des structures d'ordre dont les lois de composition reposent sur la réciprocité et qui caractérisent les systèmes de relations (sériations), etc. On distingue enfin des structures topologiques fondées sur le continu, les voisinages et séparations, etc. Or de telles structures élémentaires peuvent se combiner dans la suite. En particulier les inversions ou négations ($-\mathbf{A}$) et les réciprocités, qui ne se composent pas entre elles au niveau des opérations concrètes, se combinent dès le niveau de 11-12 ans, en un groupe de quaternalité rendant possibles de telles compositions: c'est le cas lorsqu'aux structures élémentaires de classes et de relation se superpose un début de logique des propositions avec la combinatoire (ensemble des parties) qu'elle suppose. Le sujet devient alors capable de manipuler des systèmes comportant quatre transformations, par exemple $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$ maintenue identique **I**, son inverse **N**=«**p** et **non-q**», sa réciproque $\mathbf{R}=\mathbf{q} \supset \mathbf{p}$ et sa corrélative **C**=«**non-p** et **q**». En ce cas **RC**=**N**, **RN**=**C**, **NC**=**R** et **NRC**=**I**, ce qui assure enfin la coordination en un système unique, des inversions et des réciprocités.

10. On pourrait citer bien d'autres exemples, en particulier la construction de formes élémentaires et triviales de «catégories». Mais il convient surtout de montrer maintenant ce que l'éducateur peut tirer de ces convergences entre la pensée spontanée de l'enfant en son développement «naturel» et un certain nombre de notions théoriques fondamentales. Il peut arriver, en effet, que l'on cherche à enseigner à de jeunes élèves les «mathématiques modernes» avec des méthodes pédagogiques archaïques, exclusivement fondées sur la transmission verbale du maître à l'enfant et avec un emploi prématuré de la formalisation. Il en est résulté quelques échecs qui expliquent le scepticisme affiché par certains grands mathématiciens, comme J. Leray. Mais la faute n'est pas alors à chercher dans le caractère «moderne» du programme mathématique lui-même: elle tient uniquement au caractère archaïque de la pédagogie et de la psychologie utilisées en de tels cas. Il est, en effet, particulièrement difficile à un maître de mathématiques, dont l'esprit est professionnellement abstrait, de se placer dans la perspective essentiellement concrète qui est celle de ses jeunes élèves, alors que du point de vue du développement et de l'assimilation progressive des structures en jeu, il n'y a aucune contradiction (comme on l'a vu plus haut) entre les phases concrètes initiales et leur aboutissement abstrait; mais c'est à la condition (et c'est là qu'est la difficulté pour le maître) de bien connaître les détails et le mécanisme de ces structurations spontanées successives. En un mot, le problème pratique difficile à résoudre est de greffer des notions de type général, que le maître conçoit dans son propre langage, sur des cas parti-

culiers de ces mêmes notions, construits et utilisés par les enfants, mais sans qu'ils soient encore pour eux des objets de réflexion ni des sources de généralisation.

Pour opérer cette jonction nécessaire entre les structures logico-mathématiques du maître et celles de l'élève aux différents niveaux de son développement, il convient alors de se rappeler quelques principes psycho-pédagogiques très généraux. Le premier est que la compréhension réelle d'une notion ou d'une théorie implique sa réinvention par le sujet. Certes, celui-ci peut souvent donner une impression de compréhension sans remplir cette condition de réinvention, lorsqu'il devient capable de répétition et de quelques applications dans les situations apprises. Mais la vraie compréhension, c'est-à-dire celle qui se manifestera par de nouvelles applications spontanées, autrement dit par une généralisation active, suppose bien davantage: elle exige que le sujet ait pu trouver par lui-même les raisons de la vérité qu'il s'agit de comprendre, donc qu'il l'ait au moins partiellement réinventée pour lui-même. Cela ne signifie naturellement pas que le maître soit inutile, mais son rôle doit moins consister à donner des «leçons» qu'à organiser des situations provoquant la recherche et à la favoriser par des dispositifs appropriés. En cas d'erreur de l'élève au cours de ses tâtonnements, les procédés propres aux méthodes «actives» consisteront non pas à la corriger directement mais à susciter des contre-exemples tels que les nouveaux essais de l'enfant le conduisent à se corriger lui-même.

Une seconde considération doit demeurer constamment présente à l'esprit du maître: c'est que, à tous les niveaux jusqu'à l'adolescence y compris, et de façon d'autant plus systématique que le niveau est plus élémentaire, l'élève est capable de «faire» et de «comprendre en action» bien davantage que ce qu'il parvient à exprimer verbalement. Autrement dit une bonne partie des structures que l'enfant met en œuvre lorsqu'il cherche à résoudre activement un problème demeure inconsciente. C'est, en effet, une loi psychologique très générale que la prise de conscience est toujours en retard sur l'action elle-même, autrement dit, que le sujet possède bien plus de pouvoirs que ceux dont il parvient à faire la théorie ou simplement à décrire l'exercice [2]. Dans la mesure, par conséquent, où le maître, une fois renseigné par les travaux psychologiques mentionnés plus haut, connaît les structures sous-jacentes dont l'enfant dispose, il pourra l'aider à en prendre conscience, soit par des discussions appropriées entre l'élève et lui-même, soit par l'organisation de travaux en équipe où les partenaires du même âge ou d'âges voisins (un aîné agissant comme meneur et un petit groupe dont il est responsable) discutent entre eux, ce qui favorise la verbalisation et la prise de conscience.

Une troisième remarque s'imposait au temps de l'enseignement traditionnel des mathématiques, lorsque l'on obligeait les élèves à résoudre quantités de problèmes souvent absurdes, supposant de nombreux calculs sur des données numériques ou métriques. En ces cas, la seule manière de réussir avec les élèves non particulièrement doués était de procéder en deux étapes (mais on l'oubliait trop souvent): une étape purement qualitative portant sur la structure logique du problème, puis ensuite seulement, l'introduction des données métriques, avec les difficultés supplémentaires que le calcul comportait. Avec les programmes de mathématiques modernes la question est bien moins aiguë, puisqu'elles sont essentiellement qualitatives. Mais elle se retrouve sur un autre plan, lorsque le maître est tenté de présenter trop tôt les notions et opérations en un cadre déjà formalisé. En ce cas la procédure qui me semble indispensable consiste à partir du qualitatif concret, autrement dit de représentation ou modèles correspondant à la logique «naturelle» du niveau considéré des élèves, et de réserver la formalisation pour plus tard, à titre de couronnement et de systématisation de notions déjà acquises. Cela revient certes à faire appel à l'«intuition» avant toute axiomatisation et nous connaissons bien le mépris des logiciens pour toute pensée intuitive ou «naïve». Mais lorsqu'on se rappelle que l'intuition mathématique est essentiellement opératoire et que le propre des structures opératoires est de dissocier la forme du contenu, la formalisation finale apparaît alors comme préparée et rendue progressivement nécessaire par la construction elle-même de ces structures initialement intuitives. Nous ne croyons donc pas avec Pasch que la formalisation s'engage en sens contraire des tendances de la pensée naturelle, mais, pour qu'il n'y ait pas conflit entre celles-ci et celle-là, il faut qu'elle se constitue à son heure et non pas en vertu de contraintes prématurées.

[1] Plusieurs auteurs (Freudenthal, etc.) m'ont compris comme si je regardais le nombre ordinal comme plus primitif que le cardinal, ou l'inverse. Or je n'ai jamais rien dit de pareil et ai toujours considéré ces deux aspects du nombre comme indissociables dans le fini et comme s'appuyant psychologiquement l'un sur l'autre en une synthèse qui dépasse à la fois l'inclusion des classes et l'ordre sérial des relations asymétriques transitives. Si l'ordre est nécessaire c'est que les unités, rendues équivalentes par l'abstraction des qualités ne se distinguent plus alors les unes des autres que par leur ordre d'énumération. Mais l'ordre des unités élémentaires est lui-même relatif au nombre (cardinal) de celles qui précèdent chacune des unités ainsi ordonnées.

[2] Euclide lui-même n'avait pas conscience de toutes les structures opératoires dont il se servait en réalité, par exemple du groupe des déplacements.

Deux bonnes douzaines de problèmes de mathématique

(ou mathématique de toujours)

par Gérard Charrière, Service de la recherche pédagogique, Genève

Les 25 problèmes qui sont soumis, dans les pages qui suivent, à la sagacité du lecteur devraient, pour satisfaire à la mode des revues spécialisées et de nombreux livres d'enseignement porter le titre: «Mathématique récréative»! Cette tendance laisse entendre qu'il existe une mathématique non-récréative; celle-ci étant beaucoup plus importante (si l'on mesure l'importance au nombre de pages imprimées) que celle-là.
Nous estimons personnellement que si l'enseignement de la mathématique ne répond presque jamais à ce besoin universel de l'homme qu'est le jeu, mais au contraire se présente généralement sous un aspect rébarbatif, la faute n'est pas imputable à la mathématique elle-même, mais à ceux qui la présentent.
Les problèmes qui suivent (et pour la résolution desquels aucune connaissance mathématique «supérieure» n'est exigée) n'ont pour prétention que de stimuler l'intérêt pour la mathématique. Cet intérêt peut, par exemple, naître de la présentation de certains faits qui nous paraissent étonnants ou paradoxaux parce qu'ils vont à l'encontre de notre intuition, de notre bon sens. Une autre source d'intérêt peut être trouvée dans la constatation qu'un raisonnement utilisant un minimum de réflexion permet d'atteindre des solutions... apparemment hors de portée de nos faibles moyens techniques.
Pour chaque problème, une solution (ou une esquisse de solution) a été indiquée; elle n'est pas nécessairement la meilleure possible. Mais peu importe, car ce qui compte c'est que le lecteur trouve SA meilleure solution et surtout qu'il constate que tout problème résolu suggère une question nouvelle, ouvre un champ d'étude plus large; en un mot: chaque problème est une situation mathématique.

1. En utilisant une scie mécanique, combien de passages (coupes) sont-ils nécessaires pour découper un cube de bois de 3 dm de côté en 27 cubes de 1 dm de côté?
La réponse est immédiate; en laissant les pièces juxtaposées il faut six coupes (fig. 1). Une question intéressante peut se poser. Est-il possible de diminuer ce nombre, en changeant par exemple la disposition des morceaux après chaque coupe?

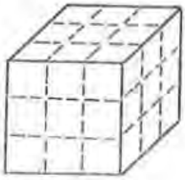


Figure 1

2. Considérons maintenant notre grand cube formé des 27 cubes élémentaires (fig. 1). Est-il possible, en commençant par l'un quelconque des 26 cubes extérieurs d'enlever l'un après l'autre les 27 petits cubes en satisfaisant aux deux conditions suivantes:

a) on ne peut enlever un cube que s'il touchait le cube précédent par une de ses faces;
b) le dernier cube enlevé doit être le cube central.

Essayez, cela en vaut la peine! Il vous semble à priori que ce petit jeu est facile. Or, pour une fois, la première impression n'est pas la bonne. Pourquoi?

3. Prenons un de ces cubes. Si l'on désire colorier ses faces à raison d'une couleur par face, quel est le nombre minimum des couleurs nécessaires pour que deux faces ayant une arête commune soient de couleurs différentes?

4. Autre problème de coloriage. On dispose cette fois de six couleurs différentes. Quel est le nombre maximum de cubes différents que l'on peut peindre avec les six faces de couleurs différentes?
Joli problème, n'est-ce pas?

5. Quelle est dans le cube de la figure 2 l'angle entre les deux lignes pointillées?

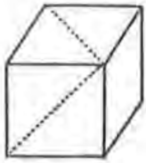


Figure 2

6. Dans le réseau électrique ci-contre (fig. 3) chaque arrête a une résistance d'un ohm.
Quelle est la résistance de tout le réseau quand le courant passe de A vers B?

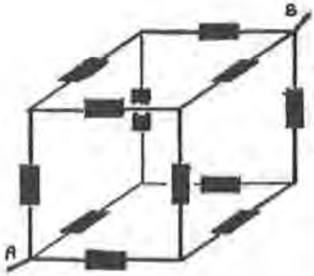


Figure 3

7. Cinq billes sont apparemment identiques, bien que toutes de poids différents. En utilisant une simple balance à deux plateaux (fig. 4), assez sensible pour marquer les différences de poids, arrangez ces billes dans l'ordre — de la plus lourde à la plus légère — en un maximum de 7 pesées.

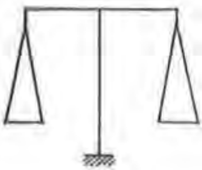


Figure 4

8. On dispose de la même balance à plateaux. On désire pouvoir peser tous les poids (nombres entiers) de 1 à 150 grammes.
Quel est le nombre minimum d'étalons nécessaires pour permettre d'effectuer toutes les pesées?

9. On demande d'inscrire dans les carrés de la figure ci-contre (fig. 5) les chiffres de 1 à 8 de telle manière que deux chiffres consécutifs ne soient pas placés dans deux carrés ayant au moins un sommet commun.
Parmi les 40 320 possibilités d'inscrire les huits chiffres donnés dans cette grille, 4 seulement remplissent la condition imposée.
N'essayez donc pas au hasard, vous auriez peu de chances d'aboutir...

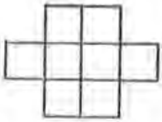


Figure 5

10. De tous temps les carrés magiques ont intrigué les mathématiciens. Un carré magique (voir par exemple celui de la figure 6) est tel que les nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale aient la même somme.
Le carré suivant (fig. 7) où les nombres paraissent répartis au hasard possède cependant une propriété magique déconcertante.
Choisissez un nombre quelconque du carré; éliminez tous les nombres qui se trouvent dans la même ligne et tous ceux qui se trouvent dans la même colonne que le nombre choisi.
Choisissez un deuxième nombre parmi ceux qui restent; éliminez de même ceux qui se trouvent dans la même ligne et ceux qui se trouvent dans la même colonne.
Répétez encore deux autres fois la même opération. Il reste finalement un seul nombre dans le carré. Ajoutez-le à la somme des quatre nombres que vous avez choisis au hasard.
Vous trouvez... nous allons vous le dire: 53. Recommencez si vous le désirez. Vous obtiendrez toujours 53. Mystérieux, non? Alors c'est le moment ou jamais d'exercer votre perspicacité pour résoudre cette... énigme.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figure 6

15	8	21	10	13
7	0	13	2	5
12	5	18	7	10
18	11	24	13	16
9	2	15	4	7

Figure 7

11. Est-il possible de déterminer exactement la longueur de la diagonale AC du rectangle inscrit dans le quart de cercle de la figure 8?

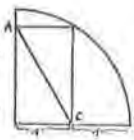


Figure 8

12. Dans le dessin ci-contre (fig. 9), que vaut la distance d?

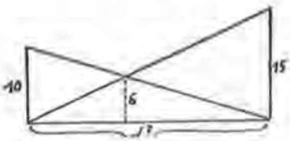


Figure 9

13. Imaginons un clou planté dans chacune des quatre parois d'une chambre ainsi qu'un clou au plafond et un au plancher. Chaque clou est relié à chacun des cinq autres par un bout de ficelle, soit de couleur rouge, soit de couleur bleue. Toutes ces ficelles constituent un certain nombre de triangles; (à propos, combien?).
Est-il possible qu'aucun de ces triangles n'ait ses trois côtés de la même couleur?

14. Un promeneur part de Champex à 9 h. du matin pour se rendre par le sentier à la cabane d'Orny. Sa vitesse est naturellement assez variable; il fait de nombreuses haltes et arrive à la cabane vers 13 h. Après une nuit à la cabane, il redescend, le lendemain, en partant aussi à 9 h. Sa vitesse à la descente est bien sûre plus grande. Au hasard d'une halte, il constate qu'il était à ce même endroit à la même heure le jour précédent. En fait, ce n'est pas du hasard. Montrez qu'il existe toujours dans de telles conditions un point du parcours où on passe à la même heure à l'aller et au retour.

15. Considérant deux vases de même grandeur, remplis l'un de vin, l'autre d'eau, on transvase une certaine quantité de vin du premier dans le second, puis la même quantité du mélange obtenu dans ce dernier est reversée dans le premier vase. Après cette double opération y a-t-il plus de vin dans le vase d'eau ou plus d'eau dans le vase de vin?

16. Le problème suivant est du type «quel est l'âge du capitaine?». Supposez un ascenseur faisant un va-et-vient continuel entre le rez-de-chaussée et le dernier étage d'un immeuble (son temps d'arrêt à chaque étage est toujours le même). Vous êtes au 6e étage et vous constatez (O! surprise) que, quel que soit le moment de la journée où vous allez prendre cet ascenseur, il est presque toujours en train de monter; ou, plus exactement, trois fois sur quatre il se dirige vers le haut! Pouvez-vous dire quel est le nombre d'étages de l'immeuble? En d'autres termes, comment expliquez-vous ce «paradoxe»?

17. Combien y a-t-il de positions, sur le cadran d'une montre, où la grande aiguille et la petite coïncident?

18. Réalisez sur un morceau de carton (à une échelle convenable) le rectangle de la figure 10 qui porte dix lignes verticales, d'égales longueurs, égale-

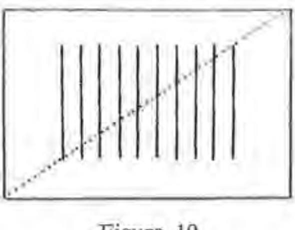


Figure 10

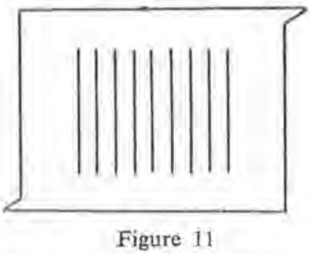


Figure 11

ment espacées. Coupez ce rectangle le long de la diagonale pointillée et faites glisser les deux triangles obtenus l'un par rapport à l'autre pour obtenir la figure 11.
Comptez les lignes verticales. Encore une fois! Vous êtes bien sûr qu'il n'y en a plus que neuf? Oui! Quelle est celle qui a disparu?

19. Le carré de la figure 12 a une superficie de 64. Si on le découpe de la manière indiquée on obtient 4 morceaux qu'il est facile d'arranger pour former le rectangle de la figure 13.
La superficie de ce rectangle est égale à... 5×13, soit 65. Ce résultat troublant nous suggère de disposer les quatre pièces de manière différente pour élucider, peut-être, le mystère.
La nouvelle forme obtenue est celle de la figure 14 dont la superficie est ... 63. Comment expliquez-vous ces résultats pour le moins contraires aux lois de conservations de la nature?

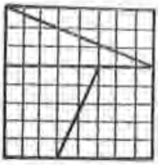


Figure 12


Figure 13

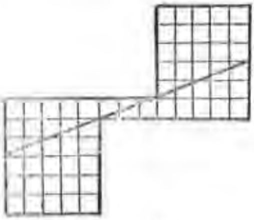


Figure 14

20. Partagez un angle quelconque en trois parties égales à l'aide d'une règle et d'un compas (trisection de l'angle) est un problème dont l'impossibilité a été démontrée il y a fort longtemps. Malgré tout, le lecteur pourra exercer sa sagacité pour trouver une solution (qui existe) si l'on dispose de «suffisamment» de temps.

21. Une personne a choisi un nombre entier compris entre 0 et 1000. Quel est le nombre minimum de questions nécessaires que vous allez lui poser pour deviner ce nombre, questions auxquelles il vous sera répondu par oui ou par non?

22. Supposons une classe de 30 élèves. Il paraît bien, intuitivement, que l'on peut parier à 12 contre 1 qu'il n'y a pas deux élèves ayant leurs anniversaires le même jour. Est-ce vrai?

23. En lançant une pièce de monnaie pour jouer à pile ou face on suppose toujours que la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face, c'est-à-dire qu'on suppose que chacune de ces probabilités vaut $\frac{1}{2}$. La question qui pourrait se poser est de savoir si, à l'aide d'une pièce peut-être pipée, il est également possible de jouer à pile ou face «honnêtement» — c'est-à-dire avec autant de chances d'obtenir pile que d'obtenir face. Qu'en pensez-vous?

24. Supposons que la coupe suisse de football se joue entre huit équipes seulement et que ces équipes aient chacune une force bien définie, ce qui fait qu'une équipe battra toujours une équipe plus faible (cette supposition choquante pour les amateurs du ballon rond n'est heureusement pas toujours vérifiée!). On procède, après tirage au sort, aux quarts de finale qui nous donnent quatre équipes; elles participent après nouveau tirage au sort aux demi-finales. Les deux vainqueurs de ces dernières jouent alors la finale. Il est évident que dans ces conditions l'équipe la plus forte gagnera la finale (1er rang) — elle le mérite.
Mais l'autre finaliste, classé au 2e rang, ne mérite pas nécessairement cet honneur. Quelle est la probabilité pour que le finaliste battu mérite effectivement la deuxième place?

25. Le mètre de certains arpenteurs se différentie du mètre des charpentiers par le fait qu'il possède, à son extrémité (fig. 15) un morceau métallique d'un demi centimètre.

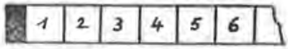


Figure 15

Ces arpenteurs ont l'habitude de dire que leur mètre est meilleurs que les autres. Pourquoi?

Solutions

1. Quelle que soit la façon de s'y prendre, le nombre de coupes nécessaires est de six. La raison est simple. En effet, le cube de 1 dm de côté qui se trouve au centre du grand cube n'a, au début, aucune face extérieure; or la scie coupe suivant un plan, donc une face à la fois. Le cube ayant six faces...
Il est intéressant de se poser la même question pour un cube de 2×2×2 et un cube de 4×4×4. Nous vous laissons entière la joie de la découverte.

2. Ce petit jeu est en fait impossible. La démonstration est simple: en imaginant que les cubes sont de couleur alternée comme les cases d'un échiquier tridimensionnel (fig. 16) on vérifie facilement que 13 cubes sont d'une couleur et 14 de l'autre. La règle du jeu est telle que les cubes enlevés sont alternativement d'une couleur puis de l'autre.
Pour pouvoir enlever les 27 cubes, il faut donc nécessairement commencer par un cube appartenant au groupe des 14. Or il est évident que le cube central appartient (malheureusement) au groupe des 13...

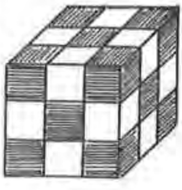


Figure 16

3. Il faut naturellement... trois couleurs.

4. Dans la résolution de ce problème, il est évident qu'il fallait d'abord définir ce que sont deux cubes différents; c'est-à-dire deux cubes qu'il est impossible de placer côte à côte en faisant correspondre toutes leurs faces. La réponse: 30 cubes différents. Il est intéressant de noter que la manière d'y arriver n'est pas unique; c'est là un des intérêts supplémentaires de ce problème. Il doit y avoir une face rouge (par exemple) sur chaque cube. Le choix pour la couleur de la face opposée est de 5 couleurs. Pour une des quatre faces restantes on peut choisir une couleur restante, n'importe laquelle. Le choix pour la face opposée est maintenant de 3 couleurs. Les deux dernières couleurs pouvant être disposées de 2 façons différentes, on obtient: $5 \times 3 \times 2 = 30$.
Le lecteur aura remarqué que ce problème est le même que celui qui consiste à trouver le nombre de dés à jouer différents que l'on pourrait imaginer, avec les chiffres de un à six.

5. Cette question est un exemple typique de ces problèmes qui font se lancer les scientifiques dans des calculs trigonométriques longs et souvent... inextricables!
Il suffit, en fait, de constater qu'en joignant les extrémités des deux lignes pointillées on obtient un triangle équilatéral.
La réponse est donc 60 degrés.

6. Une fois encore «la réflexion avant les calculs» est la seule méthode qui convienne (seul un diplômé en génie électrique avec distinction permettrait d'aboutir avec la méthode «calculs sans réflexion»).
Les points 1, 2 et 3 sont au même potentiel. On peut donc les réunir en les court-circuitant sans qu'il passe aucun courant dans le triangle 123 (fig. 17). Il en est de même pour le triangle 456. Nous voyons donc qu'entre le point A et le triangle 123 il y a trois résistances (d'un ohm chacune) mises en parallèle, d'où une résistance partielle pour cette partie du réseau de 1/3 d'ohm. De même entre le triangle 456 et le point B: 1/3 d'ohm. Entre les deux triangles 123 et 456, il y a 6 résistances (d'un ohm chacune) mises en parallèle, ce qui nous donne une résistance de 1/6 d'ohm pour cette partie du réseau.

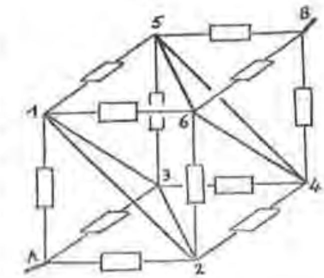


Figure 17

Entre les points A et B, les trois résistances partielles sont en série, d'où une résistance totale de 5/6 d'ohm $(1/3+1/6+1/3)$.

7. Il est assez facile de voir que huit pesées au maximum permettent d'arranger les billes dans l'ordre désiré. C'est la stratégie classique suivante qui nous donne ce nombre:
1re pesée: permet «d'ordonner» deux permières billes;

2e et 3e pesées: il faut au maximum deux pesées supplémentaires pour ordonner une troisième bille par rapport aux deux premières;

4e et 5e pesées: permettent d'ordonner une quatrième bille par rapport aux trois premières utilisées;

6e, 7e et 8e pesées: trois pesées au maximum sont nécessaires pour placer la cinquième bille par rapport aux quatre précédemment utilisées.

Il est évident que le nombre maximum de 8 pesées est nécessaire si l'on a de la «malchance» dans le choix des billes.

Or il s'avère que l'on peut réduire ce nombre maximum à 7 si l'on procède comme suit:

1re pesée: permet d'ordonner deux billes quéconques que nous appellerons L (lourde) et l (légère);

2e pesée: permet d'ordonner deux autres billes (choisies parmi les trois restantes) que nous appellerons L' et l';

3e pesée: permet d'ordonner L et L'. Supposons que L' est plus lourde que L.
Nous aurons, dans ce cas: L' - L - l. Nous laissons alors l' de côté;

4e et 5e pesées: deux pesées au maximum permettent d'ordonner la cinquième bille par rapport à l'ordre déjà obtenu (L' - L - l);

6e et 7e pesées: quelle que soit la position de la cinquième bille, deux pesées au maximum permettent de placer l' car nous savons déjà que l' est plus légère que L'.

Si vous nous avez suivi jusqu'ici, bravo! ...et essayez de faire mieux!

8. Si l'on n'est autorisé à placer les étalons que sur un seul plateau, la réponse est huit. A savoir:

(Le lecteur remarquera que ce sont les puissances successives de 2 inférieures à 150).

Si l'on peut placer des étalons sur les deux plateaux à la fois, le nombre minimum est cinq. A savoir:

(Ce sont les puissances successives de 3 inférieures à 150).

Ainsi pour obtenir un poids de 7, on placera:

— avec la 1re méthode: 1, 2 et 4 sur le plateau;

— avec la 2e méthode: 1 et 9 sur un plateau et 3 sur l'autre.

9. La solution est donnée par la figure 18. Par des symétries gauche-droite et bas-haut on obtient les trois autres solutions. La justification de l'unicité de la solution est la suivante. C'est en même temps le raisonnement que vous avez fait (ou auriez dû faire!). Quels sont les chiffres que l'on peut placer dans les cases d et e? (fig. 19). Uniquement 1 et 8. Ce sont en effet les seuls que l'on peut entourer de six autres nombres (choisis parmi les huit) qui ne suivent pas 1 ou ne précèdent pas 8. Si 1 est en d, alors 8 est en e, 2 en f et 7 en c.
Par conséquent 3 ne peut aller qu'en a ou en g. En mettant 3 en a, 4 ne peut aller qu'en g, 5 en b et 6 en h.

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

Figure 18

	a	b	
c	d	e	f
	g	h	

Figure 19

10. Vous n'avez pas trouvé. C'est une preuve supplémentaire que vous ne connaissez pas votre bonne vieille table d'addition (malgré un enseignement de mathématiques traditionnelles!).
En effet, le carré magique proposé n'est rien d'autre qu'une partie (fig. 20) de la table d'addition, légèrement désordonnée. On est en présence de deux groupes de nombres générateurs: 7, 0, 13, 2, 5 et 8, 0, 5, 11, 2.
En choisissant un nombre du carré, on a en fait la somme d'un élément du premier groupe générateur et d'un élément du second groupe.

+	7	0	13	2	5
8	15	8	21	10	13
0	7	0	13	2	5
5	12	5	18	7	10
11	18	11	24	13	16
2	9	2	15	4	7

Figure 20

Comme les cinq nombres que vous avez choisis sont dans des lignes et des colonnes différentes, ils représentent les sommes de cinq paires différentes prises parmi les dix nombres générateurs, c'est-à-dire tout simplement la somme de ces dix nombres.

11. Les diagonales d'un rectangle étant égales, la diagonale AC est égale à l'autre diagonale du rectangle qui est égale elle-même au rayon du cercle, c'est-à-dire 2...

12. Résultat étonnant, cette distance d est quelconque (fig. 21).

En effet: $$\frac{6}{10} = \frac{e}{d}$$

et $$\frac{6}{15} = \frac{d-e}{d}$$

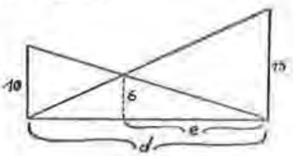


Figure 21

d'où l'on tire facilement

$$d = \frac{5}{3} e \,!$$

On vérifie également que

$$6 = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15}$$

13. Il y a 20 triangles; et au moins un d'entre eux a ses trois côtés de la même couleur.
Considérons (fig. 22) un clou A, quelconque. Quelle que soit la couleur des cinq ficelles qui partent de A, il y en a au moins trois qui sont de la même couleur (soit bleue, soit rouge).
Supposons que AC, AD et AF soient rouges. Si l'on regarde le triangle ACD, on en conclut que CD doit être bleue.
Le même raisonnement conduit à DF bleue et FC bleue. Il s'en suit que le triangle CDF a ses trois côtés bleus.

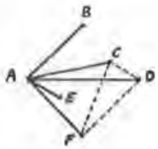


Figure 22

14. Le fait de tenir compte des vitesses de marche, de la durée des pauses, du poids du sac, de la pression atmosphérique, etc., ne facilite évidemment pas la démonstration!
Or il suffit de supposer que la montée et la descente sont effectuées le même jour par deux personnes différentes. Elles vont nécessairement se croiser!...

15. Réponse classique: plus de vin dans le vase d'eau puisqu'on y a versé du vin et retiré du mélange.
Cette réponse est fausse, car les quantités d'eau dans le vin et de vin dans l'eau sont égales. Le lecteur pourra vérifier cette affirmation en se donnant des nombres et en faisant quelques petits calculs.
Nous nous contenterons pour notre part de justifier notre affirmation de la façon suivante: s'il y avait plus de vin dans le deuxième vase que d'eau dans le premier, la quantité totale de vin aurait augmenté et la quantité totale d'eau aurait diminué, et il y a longtemps que les marchands se seraient emparé du procédé!

16. La réponse à la question posée, question en apparence sans rapport avec le problème, est la suivante: l'immeuble a 8 étages (fig. 23). L'ascenseur faisant le va-et-vient, où se trouvera-t-il, selon toute probabilité, à un instant choisi par vous?
Il est évident qu'il y a 6 chances contre 2 pour qu'il soit en-dessous du 6e étage. C'est-à-dire que lorsqu'il passera devant vous, trois fois sur quatre il se dirigera vers le haut.
Vous pouvez également en déduire que votre temps d'attente sera par contre trois fois plus court pour obtenir un ascenseur qui descend qu'un ascenseur qui monte.

Figure 23

17. L'expérience de tous les jours (et de toutes les nuits) nous indique que les aiguilles coïncident en tous les cas à 12 h 00 min 00 sec (fig. 24).
L'aiguille des minutes avance douze fois plus vite que celle des heures; elles vont donc coïncider onze fois en douze heures. Ainsi lorsque la petite aiguille aura parcouru 1/11 du cadran, la grande en aura parcouru 12/11, soit un tour complet et 1/11: elle coïncideront; il sera exactement 1 h 05 min 27 sec et 3/11 Il en sera de même à 2 h 10 min 54 sec et 6/11, etc.

Figure 24

Un autre raisonnement plus général conduit au même résultat: mesurons, à partir du nombre 12, les distances parcourues par les aiguilles sur le cadran en soixantièmes de la circonférence (fig. 25). Ainsi, lorsque les deux aiguilles coïncident, elles ont parcouru x soixantièmes à partir de 12. La petite parcourant 60 divisions en 12 heures soit 5 divisions à l'heure, elle a parcouru ces x divisions en x/5 d'heure; il s'est donc écoulé x/5 d'heure depuis l'instant où la montre indiquait 12.

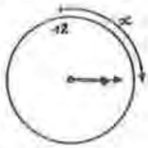


Figure 25

La grande aiguille a parcouru les x divisions en x/60 d'heure; elle a donc passé par 12 il y a x/60 d'heure. La différence x/5 — x/60 indique le nombre d'heures entières qui se sont écoulées depuis 12.

On en tire donc: $\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = n$ où n est un nombre entier.

On arrive finalement à $x = \frac{60 \cdot n}{11}$ et on retrouve pour n = 0, 1, 2, ... 10 les mêmes résultats que ci-dessus.

18. La «manipulation» vous aura facilement convaincu que ce n'est pas une ligne déterminée qui disparait, et aussi que chacune des neuf lignes obtenues est légèrement plus longue que précédemment. La somme de ces accroissements est égale à la longueur de l'une des lignes initiales.

19. Si le carré (fig. 12) est soigneusement dessiné puis découpé, on constate que la «diagonale» du rectangle (fig. 13) n'en est pas une. En exagérant l'effet, elle se présente comme indiqué schématiquement sur la figure 26, la partie hachurée, non recouverte par les quatre pièces, ayant une superficie de 1 (pour le lecteur averti, nous dirons que cet effet découle d'une d'une propriété des séries de Fibonacci).
Dans le cas de la figure 14 (superficie = 63) on peut constater un léger recouvrement des quatre pièces le long de la ligne de jointure.

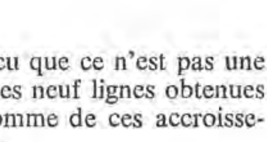


Figure 26

20. Le mot «suffisamment» prend ici toute son importance. En effet, le lecteur a peut-être trouvé une méthode qui requiert théoriquement une infinité d'opérations. C'est en tous les cas une de ces méthodes que nous allons décrire.

D'une part elle mettra en évidence une propriété fort connue — la convergence — de certaines séries infinies. D'autre part elle présente un intérêt pratique évident puisque, après un nombre très limité d'opérations, on obtient un degré de précision très convenable.

Sachant, à l'aide d'un compas et d'une règle, partager un angle en deux parties égales, on procède de la façon suivante (fig. 27):

AOB = angle quelconque à partager en trois.

$$BOC = \frac{1}{2} AOB$$

$$COD = \frac{1}{2} BOC = \frac{1}{4} AOB$$

$$DOE = \frac{1}{2} COD = \frac{1}{8} AOB$$

$$EOF = \frac{1}{2} DOE = \frac{1}{16} AOB$$

etc.

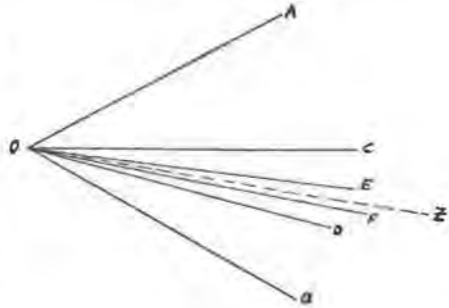


Figure 27

La figure montre clairement que:

$$\begin{aligned} AOZ &= AOB - BOC + COD - DOE + EOF - \ldots \\ &= AOB - \frac{1}{2} AOB + \frac{1}{4} AOB - \frac{1}{8} AOB + \frac{1}{16} AOB - \ldots \\ &= AOB \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots\right) \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est la somme d'une progression géométrique ayant 1 comme premier terme et $-\frac{1}{2}$ comme raison. Cette somme vaut

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \text{ soit } \frac{2}{3}.$$

On trouve donc: $AOZ = \frac{2}{3} AOB$, c'est-à-dire $BOZ = \frac{1}{3} AOB$.

21. Le nombre de questions est 10. En effet, les meilleures questions sont celles qui divisent l'ensemble des nombres possibles (0,1, ...1000) en deux sous-ensembles aussi exactement égaux que possible. Ce qui donne pour la première question: le nombre est-il supérieur à 500? Ayant grâce à la réponse (oui ou non) déterminé dans quel sous-ensemble le nombre se trouve, on le partage, par une nouvelle question, en deux sous-ensembles plus petits et, si possible, égaux. On voit ainsi que 10 questions permettraient de choisir parmi 2^{10} nombres, soit 1024 nombres.
Le procédé est directement applicable au même jeu avec un dictionnaire. (Note: $2^{20} = 1\,048\,576$).

22. Non! Notre intuition nous a joué, une fois encore, un bon tour. En effet, la probabilité d'avoir deux élèves fêtant leurs anniversaires le même jour est égale à 0,7. En voici la preuve: nous allons questionner les 30 élèves à tour de rôle; le premier élève ayant donné la date de son anniversaire, le deuxième élève interrogé a 364 chances sur 365 de ne pas avoir la même date d'anniversaire que le premier; pour le troisième, il y a 363 chances sur 365 que son anniversaire ne coïncide pas avec un des deux premiers. Le raisonnement se poursuivant, on arrive au 30e élève: il y a 336 chances sur 365 que son anniversaire ne coïncide pas avec ceux des 29 élèves précédents.
La probabilité que les 30 élèves aient des dates d'anniversaires différentes est

$$\text{donc } \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \ldots \times \frac{336}{365}, \text{ soit } 0{,}3.$$

Il s'en suit que la probabilité d'avoir une coïncidence est bien égale à 0,7. On peut montrer que parmi 64 personnes cette probabilité est égale à 0,997, c'est-à-dire qu'il y a une quasi-certitude que deux d'entre elles aient leurs anniversaires le même jour.

23. Il y a neuf chances sur dix pour que vous affirmiez qu'il n'est pas possible de jouer à pile ou face avec une pièce pipée. Vous serez donc certainement surpris de constater que, si l'on suit la stratégie suivante, il y a autant de chances d'obtenir pile que face. Il suffit, en effet, de lancer deux fois la pièce. Si la pièce tombe les deux fois sur le même côté, on annule le coup et on recommence (deux lancers). Si, au contraire, la pièce tombe la première fois sur un côté et la seconde fois sur l'autre côté, on considère comme acquis le résultat du premier lancer. La justification est la suivante: si la probabilité d'obtenir pile est égale à p, alors la probabilité d'obtenir face est égale à 1-p. Il s'en suit que:
a) la probabilité d'obtenir pile et ensuite face vaut $p \cdot (1-p)$;
b) la probabilité d'obtenir face et ensuite pile vaut $(1-p) \cdot p$.
Or, par commutativité de la multiplication, $p \cdot (1-p) = (1-p) \cdot p$, ce qui veut dire que l'on peut effectivement jouer à pile ou face à condition d'observer la règle indiquée.

24. Il est vrai que la deuxième équipe en valeur absolue peut déjà être éliminée (en quart de finale ou en demi-finale) si le tirage au sort l'a désignée pour jouer contre l'équipe la plus forte; ce qui fait que, dans un tel cas, le finaliste battu ne mérite pas le 2e rang.
Soit B la deuxième équipe en valeur absolue. La probabilité pour qu'elle atteigne les demi-finales vaut $\frac{6}{7}$ (elle peut «tomber» au tirage au sort, contre 7 équipes, 6 cas lui sont favorables). La probabilité pour que, ayant atteint les demi-finales, elle atteigne la finale vaut $\frac{2}{3}$.
La probabilité pour qu'elle obtienne la deuxième place (théoriquement méritée) vaut donc $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$, soit à peine plus que 57 % !

25. Avec le mètre de notre arpenteur, l'erreur que l'on peut commettre est au maximum de 0,5 cm (on suppose naturellement que l'on fait une «lecture» au cm). Avec le mètre du charpentier, cette erreur maximum est supérieure à 0,5 cm. Il existe un avantage supplémentaire important. Mesurons la barre AB (fig. 28).

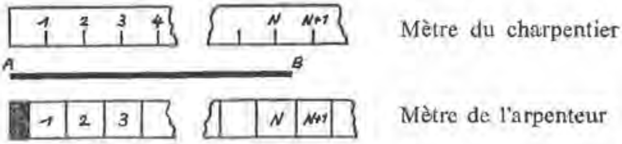


Figure 28

Avec le mètre du charpentier, il est nécessaire (dans la majorité des cas) de choisir entre N et N+1, suivant que B est plus près du trait de gauche ou de celui de droite. Avec le mètre de l'arpenteur, on attribue à AB la longueur N si N est l'inscription portée entre les deux traits. Il n'existe qu'un cas exceptionnel, c'est celui où B tombe exactement sur le trait séparant N de N+1; il suffit alors de prendre AB $= (N + \frac{1}{2})$ cm.

Autour d'un échiquier

par Gérard Charrière

Dans le cadre de leur enseignement de la mathématique, un groupe d'instituteurs composé de MM. P. Arnoux, D. Perrenoud, M. Vacheron et J.-J. Walder, tous titulaires d'une classe à plusieurs degrés dans la campagne genevoise se sont intéressés aux possibilités d'exploitation des innombrables situations offertes par le jeu d'échecs pour le développement du raisonnement logico-mathématique. Les quelques exemples qui suivent illustrent la manière dont un jeu, placé au premier rang de l'actualité lors du dernier championnat du monde, peut être utilisé pour susciter la réflexion des enfants.

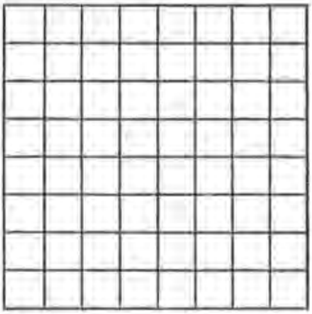


Figure 1

Le tableau de la figure 1, comporte 64 cases. Malgré son apparence de banalité, c'est certainement la structure géométrique qui a donné naissance à la plus grande floraison de jeux et de problèmes dits de mathématiques récréatives.
Essayons de recouvrir ce tableau à l'aide de 32 «dominos» de ce type:

Rien de plus facile, évidemment! (vous pouvez toujours vous demander combien il existe de solutions différentes).

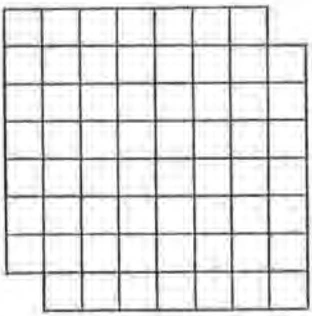


Figure 2

Considérons alors le tableau tronqué de la figure 2. A l'aide de 31 «dominos», il devrait également être possible de le recouvrir. Essayez!
Un essai rapide devrait vous convaincre de la difficulté du problème; un brin d'intuition vous conduira même à affirmer que c'est impossible.

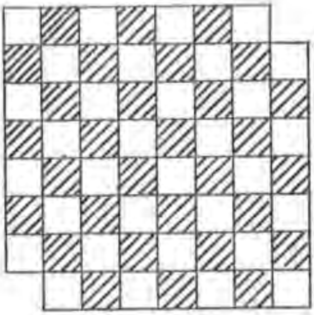


Figure 3

Il ne reste plus qu'à démontrer que vous avez raison. En faisant tous les essais possibles? C'est effectivement une méthode; mais ce serait long, et franchement inélégant. Alors?
Les hachures du tableau de la figure 3 vous aident-elles?
Peut-être; après avoir constaté qu'un domino placé sur ce tableau recouvre toujours une case blanche et une case noire (hachures) et que les deux cases absentes sont toutes deux de la même couleur...

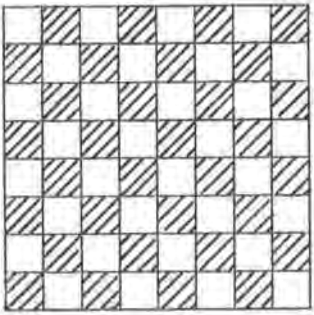


Figure 4

Au lieu de retirer deux cases de la même couleur, retirons de la figure 4 deux cases de couleurs opposées. Est-il possible de recouvrir les 62 cases restantes à l'aide de 31 dominos. Dans certains cas il est évident que la réponse est affirmative. Mais si le prélèvement a été fait «au hasard» (la case blanche par-ci et la case noire par-là!) la réponse est moins sûre. Essayer toutes les combinaisons possibles de deux cases en moins serait une opération à nouveau fastidieuse (pour ne pas dire impossible!).

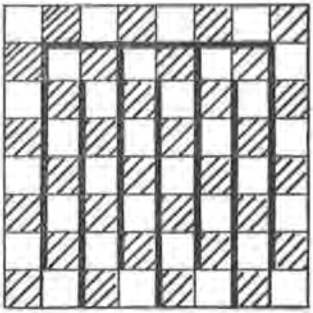


Figure 5

Et pourtant, il est très simple de montrer qu'il est toujours possible de recouvrir les 62 cases restantes avec 31 dominos quels que soient les endroits de prélèvement de la case blanche et de la case noire.
Traçons sur le tableau les droites en traits forts indiquées sur la figure 5.
On obtient ainsi un trajet fermé au long duquel cases blanches et cases noires alternent. Retirer une case blanche et une case noire en deux points quelconques de ce trajet revient à former deux segments ouverts (dans certains cas un seul). Il est facile de constater alors que chacun de ces segments comporte autant de cases blanches que de cases noires et que le recouvrement désiré est immédiat.

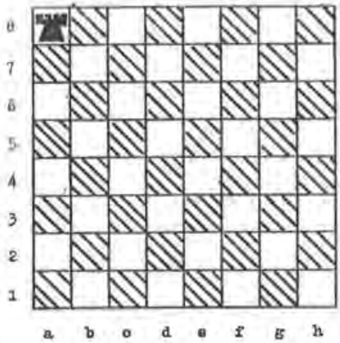


Figure 6

Nous allons considérer maintenant notre tableau comme un échiquier en utilisant la notation habituelle des cases lorsque ce sera nécessaire. Nous supposerons connue la marche des cinq figures du jeu d'échecs à savoir:

— la dame
— le roi
— le fou
— le cavalier
— la tour

Les quelques problèmes qui suivent n'ont en général qu'un rapport éloigné avec le jeu d'échecs prpoprement dit mais présentent un intérêt mathématique certain. Sauf avis contraire, une seule pièce à la fois se trouve sur l'échiquier.

Une tour se trouvant en a8, quelles sont toutes les cases que pourrait atteindre cette tour en un seul coup?
Quel est le nombre de cases ainsi «attaquées»?
Qu'en est-il lorsque la tour est placée sur une autre case (e6 par exemple)? Le résultat est-il le même quelle que soit la case choisie pour poser la tour?

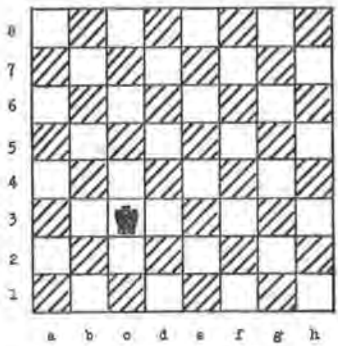


Figure 7

Un roi se trouve en c3; quelles sont toutes les cases qu'il pourrait atteindre en un seul coup?
Combien y a-t-il de cases possibles?
Est-ce que ce nombre dépend de la position du roi sur l'échiquier?
Précisez!

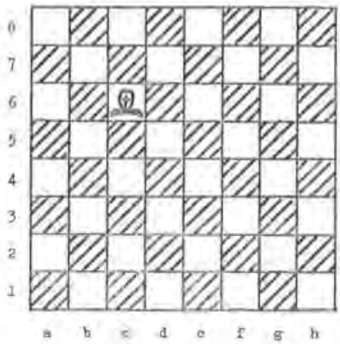


Figure 8

Un fou se trouve en c6; quelles sont toutes les cases que pourrait atteindre ce fou en un seul coup?
Quel est le nombre de cases ainsi attaquées?
Comment ce nombre dépend-il de la position du fou sur l'échiquier?

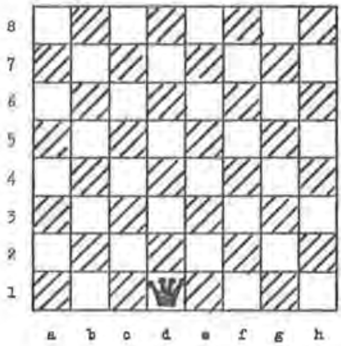


Figure 9

Une dame se trouve en d1.
Quel est le nombre de cases attaquées par cette dame?
Ce nombre dépend-il de la position de la dame sur l'échiquier?
(Se souvenir des problèmes concernant la tour et le fou!).

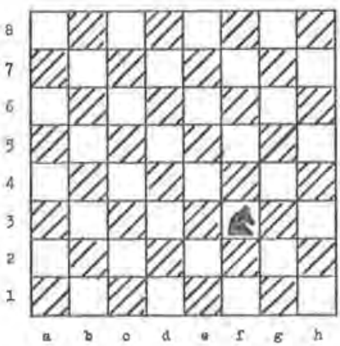


Figure 10

Un cavalier se trouve en f3.
Combien y a-t-il de cases attaquées par ce cavalier?
Comment ce nombre dépend-il de la position du cavalier sur l'échiquier?

Considérons maintenant un autre type de problèmes.

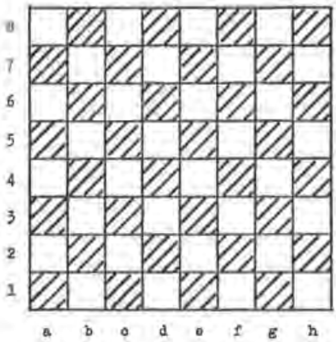


Figure 11

Quel est le plus grand nombre de tours que puisse placer sur l'échiquier sans qu'elles s'attaquent mutuellement?
La réponse est triviale, n'est-ce pas? (vous pouvez toujours chercher le nombre de «dispositions» différentes).
Alors continuons:

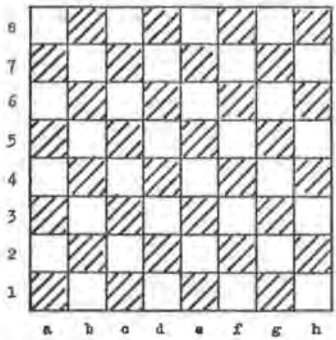


Figure 12

Quel est le plus grand nombre de dames que l'on puisse placer sur l'échiquier sans qu'elles s'attaquent mutuellement?
Compte tenu du résultat que vous avez trouvé avec la tour, il vous est facile d'affirmer que ce nombre maximum ne peut pas être supérieur à...
A combien, en fait?
A huit, bien sûr!
Alors essayez avec huit (on ne sait jamais!).

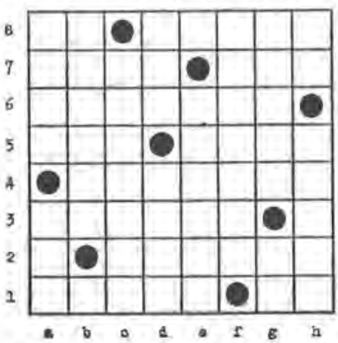


Figure 13

Vous avez trouvé?
Certainement, car il existe exactement 92 solutions différentes au problème posé en tenant compte des rotations et des réflexions.
Vous pouvez admirer une de ces solutions sur la figure 13.
(Les dames sont symbolisées par des ronds noirs).

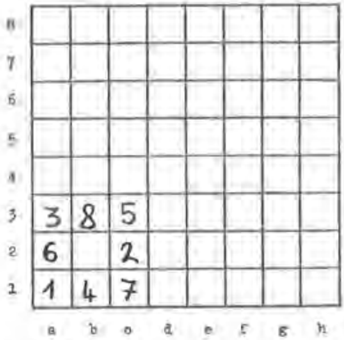


Figure 14

Le même problème pourrait être posé avec d'autres figures. Il est possible de montrer que le nombre maximum de rois est égal à 16, et que le nombre maximum de fous est égal à 14. Le lecteur aura le plaisir de trouver lui-même le nombre maximum de cavaliers qui peuvent être placés sur l'échiquier sans s'attaquer mutuellement? et combien il existe de solutions différentes?
Le cavalier encore va nous permettre d'énoncer un problème tout aussi passionnant: un cheval se trouve en a1; il s'agit de le faire sauter sur l'échiquier aussi longtemps qu'il est possible sans qu'il passe deux fois sur la même case.

En numérotant chaque case atteinte, on obtiendra immédiatement le nombre maximum de sauts possibles (plus un).
Sur la figure 14 nous avons représenté un exemple pour les 8 premiers coups.
A vous de continuer!
A combien arrivez-vous?
Et en choisissant une des 63 autres cases de l'échiquier comme point de départ?

Nous allons finir par deux problèmes d'attaque!

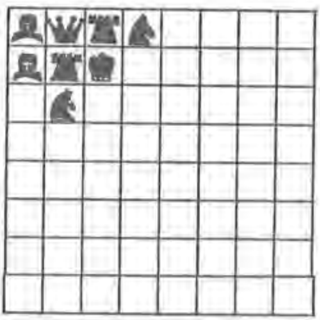


Figure 15

Disposez sur l'échiquier les huit figures d'une même couleur de telle façon qu'un nombre minimum de cases soient attaquées (une pièce n'attaque pas la case sur laquelle elle se trouve, mais elle peut attaquer les cases occupées par d'autres pièces). Avant de regarder la figure 15, essayez un peu!
La solution donnée ci-contre (16 cases attaquées) est la meilleure solution trouvée à l'heure actuelle. Avez-vous trouvé mieux?
Vous remarquerez que cette solution résoud en même temps les deux problèmes suivants: nombre de coups possibles minimum (10) et nombre de pièces mobiles minimum (3).

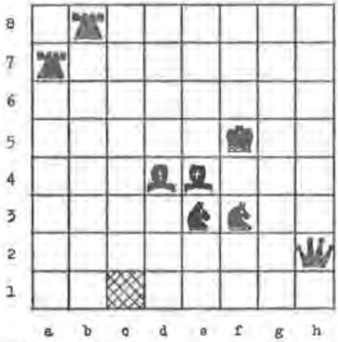


Figure 16

Disposez sur l'échiquier les huit figures d'une même couleur de telle façon qu'un nombre maximum de cases soient attaquées. Cherchez un peu, avant de regarder la figure 16. La solution donnée ici est telle que 63 cases sont attaquées; seule la case c1 n'est pas attaquée.
Si on laisse la liberté de poser les deux fous sur la même couleur, il est possible de trouver une meilleure solution encore (64).

● Nouveauté

André Deledicq, «*Clefs pour les mathématiques modernes*», collection «Clefs, Paris, Editions Seghers, 1972. Préface d'André Revuz.
Les premières lignes de la préface disent bien ce que sera le contenu et le style de ce petit ouvrage qui, d'une manière souriante et sûre tout à la fois, introduit le lecteur dans le grand jeu mathématique:
De combien de clés faut-il disposer pour pénétrer dans toutes les salles du palais des mathématiques? Peut-être d'une infinité, sans compter que ce palais a souvent été remanié et ne sera jamais terminé. Personne ne peut sans doute se vanter de posséder toutes les clés, même si certains ont des passe-partout qui, maniés avec adresse, leur permettent de pénétrer dans la plupart des antichambres.
Quelles sont les clés que va nous confier André Deledicq? Va-t-il vous faire pénétrer dans toutes les salles? Il va au moins vous accueillir dans les salons de réception et, si vous en avez le courage, vous mener sur une terrasse d'où vous apercevrez certains alignements importants, et d'où vous constaterez, peut-être avec surprise, que maintes idées reçues sur les mathématiques ne correspondent pas au panorama qui vous est présenté. Faites confiance à André Deledicq: il a bien rempli sa tâche de guide, et le ton plaisant qu'il utilise n'ôte rien au profond sérieux de ses propos.

● Communiqué

L'Association Cuisenaire Belgique organise les 21, 22, 23 et 24 août 1973 des Journées d'étude à Soignies (Belgique). Thème: opérations, groupes, géométrie. Destinataires: a) Institutrices maternelles; b) maîtres du premier degré (initiation); c) maîtres du premier degré (perfectionnement); d) maîtres ayant déjà une expérience de l'enseignement nouveau de la mathématique.
Maîtres de cours: Louis Jeronnez, Isabelle Lejeune et quatre autres professeurs belges. Adresse pour renseignements complémentaires et inscription: Secrétariat des journées d'études de Soignies; rue Obecq 5, B - 1410 Waterloo.

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

SOMMAIRE

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8., CCP 20-6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).