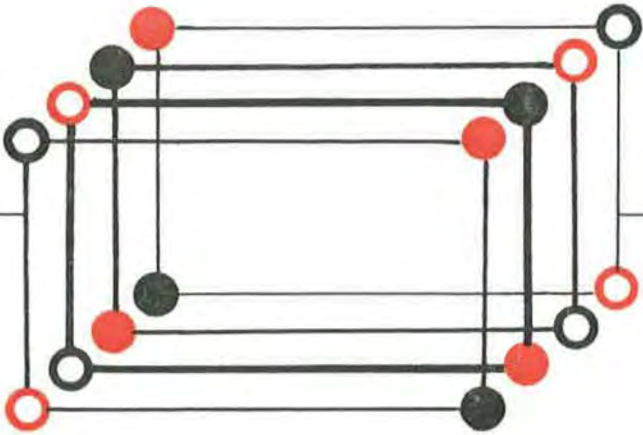
61/62

L'acte mathématique



MATH
ECOLE

JANVIER-MARS 1974
13e ANNÉE

MATH ECOLE 61-62
13e ANNÉE JANVIER-MARS 1974

L'acte mathématique

Introduction

L'an dernier, le comité de rédaction de Math-Ecole a désiré interroger un certain nombre de personnalités pour qu'elles veuillent bien préciser, à l'intention des enseignants, et des parents aussi, une notion fondamentale, celle *d'acte mathématique*. Le texte suivant a été envoyé à une trentaine de mathématiciens, psychologues et philosophes. Une dizaine d'entre eux ont répondu. Math-Ecole leur exprime sa reconnaissance.

> *L'option est prise. L'école, en Suisse romande, enseigne, depuis septembre 1973, la mathématique «nouvelle» aux enfants de 6 à 7 ans; puis, en 1974, elle le fera à ceux de 7 à 8 ans, etc.*
> *Des plans d'étude ont été élaborés; des ouvrages nouveaux publiés, des maîtres recyclés. Tout cela ayant pour but de mettre les élèves en mesure de penser «mathématiquement». Ainsi, dit-on, il est désormais possible de faire faire, très vite, à de jeunes enfants, de la* vraie *mathématique. Cette mathématique, «agie» et «faite» — et l'on se plaît à supposer que l'enfant se trouve invité à participer à la création mathématique elle-même — serait le but unique, ou presque, que s'assigne le nouvel enseignement.*
> *Si ces choses-là sont, à l'envi, pensées, dites et écrites, il n'en demeure pas moins que les enseignants — les «primaires» d'abord — auxquels est commis le soin d'enseigner la nouvelle mathématique sont, somme toute, encore mal éclairés. Qu'est-ce, en définitive, que cet* acte mathématique *dont il importe de rendre capables les élèves?*
> *Les remarques qui suivent prolongent cette interrogation. Leur intention est d'essayer de faire percevoir à un certain nombre de personnalités du monde de la mathématique, de la psychologie et, aussi, de la pédagogie, une faim qu'éprouvent les enseignants, celle de savoir clairement ce qui, en définitive et essentiellement, est attendu d'eux.*
> *C'est, en fait, de* la *mathématique que l'on désire faire faire aux enfants — aux élèves des écoles de ce temps — en leur enseignant «la mathématique nouvelle», comme on dit. On veut la leur* faire faire; *on ne veut pas, on ne veut plus la leur inculquer. Cette dernière prétention est d'ailleurs vaine car on ne peut pas inculquer ce qui ne doit être, ce qui ne peut être que la résultante d'une activité propre du sujet. Le ski ne s'inculque pas, pas plus que le violon ou la danse. Le ski s'acquiert par un effort de l'individu sur lui-même, effort qui engage tout son être, ses muscles, mais aussi et surtout (on le sait toujours mieux) son système nerveux (y compris et principalement le système nerveux central). Faire de la mathématique, c'est agir, mais agir mentalement; c'est, dans le sens piagétien du terme,* opérer. *La question est de savoir si l'acte mathématique peut se ramener à l'*opération *telle que la caractérise Piaget. Voici, à titre de rap-*

pel, la définition qu'il en donne dans «Logique et connaissance scientifique» *(Pléiade, 1967, p. 31):*

> «Une opération est avant tout un acte, qui ne «représente» pas mais effectue réellement une «transformation», ceci en opposition avec les deux états, initial et final, dont la transformation modifie le premier pour construire le second. Que cette transformation soit effectuée matériellement ou symboliquement, il s'agit dans les deux cas d'une transformation authentique. Par exemple transformer un arc en une droite, additionner deux nombres en un nouveau nombre ou synthétiser un système de classes avec un enchaînement de relations asymétriques transitives pour en tirer la suite des nombres entiers, revient dans ces trois cas à construire des propriétés nouvelles au moyen d'opérations simples ou complexes et tout acte complet d'intelligence (c'est-à-dire toute solution d'un problème nouveau pour le sujet) suppose de telles transformations opératoires».

Si l'activité mathématique — l'acte mathématique — est synonyme de cette opération, il serait bon de l'exemplifier en puisant dans le secteur mathématique lui-même (l'arithmétique, la géométrie) et, aussi, dans le secteur non-mathématique (la langue peut-être, ou les sciences, ou la géographie, ou l'histoire, ou encore des situations offertes par la vie actuelle).

Si l'activité mathématique ne se réduit pas — ou pas entièrement — à l'opération, il faudrait alors dire en quoi elle consiste (en plus de l'opération ou, ce qui paraît peu probable, par opposition à l'opération). Et, une fois qu'on aurait/aura dit cela, il faudrait aussi exemplifier.

Il est probable en effet — si ce n'est certain — que l'acte mathématique ne se réduit pas à l'opération telle que l'a définie Piaget. La mathématique, dit-on, est la science des systèmes formels. *La formalisation est donc une de ses composantes. Mais la formalisation elle-même suppose — André Delessert l'a dit maintes fois ces derniers temps — l'établissement de codes et, liés à eux, les processus d'encodage et de décodage. Vient ensuite la manipulation des éléments du code (les symboles), manipulation qui se fait* selon certaines règles. *Faire de la mathématique, c'est appliquer de telles règles (des règles de jeu) ce qui implique qu'on les a comprises. Cette activité cependant, par rapport à l'activité mathématique plénière, n'est que partielle. La compréhension des règles supposerait à son tour qu'on participe à l'effort de création, d'invention, de ces règles. Celles-ci ne sont comprises que dans la mesure où elles sont réinventées par le sujet mathématisant, reconstruites (voir le constructivisme de Piaget). Cependant, appliquer des règles, même dûment comprises, est-ce, une fois encore, faire de la mathématique? Il semble que ce «faire de la mathématique» suppose quelque chose de plus, à savoir l'invention même de nouvelles règles. Il y aurait ainsi, dans l'acte mathématique, une composante heuristique.*

Ainsi, le but poursuivi est de définir si clairement l'acte mathématique, que quiconque sache le reconnaître partout où il existe et où, le plus sou-

vent, on ne savait pas qu'il pût exister (on faisait de la mathématique comme Monsieur Jourdain...). Ce serait aussi mettre chacun en état de s'instrumenter de telle sorte qu'il puisse inventer des situations où l'acte mathématique ait à se déployer.
Tout cela étant destiné, en priorité, aux enseignants. Tout cela devant aussi, a posteriori, devenir le fait des élèves qui prendraient conscience de cet acte: «Je fais de la mathématique; je sais en quoi, exactement, cela consiste; je sais ce qui se passe en moi quand j'en fais; je sais comment je dois m'y prendre pour en faire, authentiquement; je sais aussi — contre-épreuve — ce que c'est qu'un acte non mathématique; je sais ce qui se passe quand je n'agis pas selon la mathématique; je sais comment je dois m'y prendre pour me déconnecter par rapport à l'«agir mathématiquement». La question, d'ailleurs, peut être posée — ou reposée (elle l'était à propos de l'opération) — de savoir si l'acte mathématique se confond avec l'acte rationnel ou s'il n'en est qu'un sous-ensemble.
Si l'acte mathématique s'apparente à l'agir en général, il doit impliquer l'investissement de toutes les dimensions énergétiques de l'être: la pensée et l'affectivité, et la motricité, et aussi le système des valeurs. Cela devrait aussi être dit à propos de la description de cet «acte».

Maintenant que les contributions des personnes qui ont répondu à notre requête sont là, groupées sur notre table, il est possible de dire certaines choses plus nettement qu'avant. Quelques mots seulement, dans cette fin d'introduction. Raymond Hutin, par ailleurs, se livre à un essai de synthèse qui clôt le présent numéro.
Les Egyptiens, apprend-on à l'école, ont inventé la géométrie pour pouvoir, après chaque crue du Nil, rétablir l'ordre foncier, celui des propriétaires d'un sol mis en désordre par les alluvions du fleuve. Ainsi en a-t-il été, désormais, de tous les efforts de mathématisation. Ils ont, d'abord, eu pour intention d'introduire un certain ordre dans le désordre apparent d'un réel malcommode à manipuler. L'esprit, pour cela, a construit des édifices, simples d'abord, compliqués ensuite, qui, permettant de se faire du réel une image maniable, assuraient l'emprise de l'homme sur son milieu. Mathématiser, c'est construire de tels édifices. Les mathématiciens de profession poursuivent ces constructions; leur ouvrage n'aura vraisemblablement pas de fin. Les écoliers aussi sont appelés à de semblables fabrications, non pas parce que les leurs pourraient être aussi bonnes ou meilleures que celles des mathématiciens, mais parce que l'acte même de la construction est, lui, particulièrement, voire essentiellement formateur. Une telle activité mathématique — celle donc qui consiste à élaborer un «modèle» rationnel — est «naturelle». Le tout jeune enfant s'y livre déjà. Et l'on s'y est livré, plus ou moins consciemment, de tout temps. La nouveauté est qu'on en a pris une conscience aiguë en raison même du fait que l'empire de l'homme sur les choses s'est accru à la faveur du développement de cette même démarche mathématisante.
Elaborer un modèle, c'est inventer un jeu et ses règles. Il y a du jeu dans

l'activité mathématique. Les mathématiciens donnent souvent l'impression d'être de grands enfants. On joue à un jeu établi; on joue aussi — et cela est un raffinement du plaisir — à modifier le jeu, à en changer les règles. Les jeux de société — le jeu des échecs étant le plus noble de tous — ont souvent valeur mathématisante. Ils contribuent à entretenir dans les esprits une attitude rationalisante dont la vie de tous les jours profite ensuite. Ces jeux, jadis, étaient nombreux dans nos campagnes. Les esprits se déliaient grâce à eux et se renforçaient.

Tant qu'on est dans le jeu rationnel, on est dans le formel; on est loin du réel et on peut se complaire à cela. D'où le danger, on l'a dit, d'un excès de formalisation. On pourrait presque dire qu'à ce moment — quand on ne fait plus guère que manier des symboles comme le Joseph Valet de Hermann Hesse maniait ses «perles de verre» — on ne se livre plus à une activité proprement mathématisante.

Cette dernière s'appuie sur le réel; elle le «modélise» et, ensuite retourne au réel. Il en résulte que l'activité mathématisante — celle d'une pensée structurante — devrait, autant que possible, s'appuyer sur le réel le plus concret, le plus immédiat, le plus lié à la réalité vécue des enfants. D'où une retenue qu'il convient d'avoir à l'égard des «matériels» didactiques de tous ordres. Ceux-ci n'ont de valeur que dans la mesure où ils stimulent l'esprit et le disposent à porter sur sa propre réalité un regard sous-tendu par le désir de l'ordonner, de la maîtriser. Il serait infiniment regrettable de voir ces matériels servir d'écrans entre les esprits et la réalité et anémier ces mêmes esprits.

Les mathématiciens «purs» — et notre école n'en fait guère qu'un pour 1000 contemporains — demeurent volontiers dans leur monde rationnel et aseptique. Ce ne sera pas le fait de ceux auxquels est destiné le nouvel enseignement de la mathématique, ceux justement qui doivent être «mathématisants». Les modèles une fois élaborés, il faut faire retour au réel pour s'assurer que le contact est établi, qu'il pourra se maintenir. Il s'agit là de ce que le philosophe Ferdinand Gonseth appelle «l'ouverture à l'expérience».

Rien ne servirait de mathématiser si notre adhérence au réel devait perdre de sa force. Ici, sans doute, se place l'avertissement adressé à ceux qui pourraient oublier l'utilité pratique de la mathématique. Si on la cultive, cette mathématique, ce n'est pas pour un quelconque plaisir intellectuel, c'est, d'abord, pour mieux s'établir dans sa réalité, celle du monde technique où nous sommes. La math moderne doit rendre le mécanicien plus avisé, plus efficace.

Ceci dit, des inquiétudes peuvent quand même surgir. L'activité mathématique, en raison de sa puissance — c'est elle qui, en bonne partie, à fait le monde occidental — jouit d'un prestige immense. La tentation de l'orgueil la guette. Elle pourrait se croire capable de tout expliquer — par le moyen de ses fameux «modèles» —. Ecoutons alors l'avertissement de Bertrand Russel adressé aux physiciens: «La physique est mathématique non parce que nous connaissons bien le monde physique, mais au contraire parce que nous le connaissons fort peu: nous ne pouvons en découvrir que les propriétés mathématiques». Dès lors, si un des plus grands esprits de ce temps nous convainc que la physique elle-même n'est pas tout expliquée par la mathématique, à combien plus forte raison d'autres disciplines risquent-elles de ne pas l'être non plus. Pas d'anathème ici, un avertissement seulement. Disposons nos élèves à vraiment mathématiser. Qu'ils aient à cela aise et bonheur. Mais qu'ils sachent aussi, qu'ils éprouvent surtout, que les rets de la mathématique n'ont pas à enserrer tout le paysage des hommes et que celui-ci attend aussi la sensibilité et la tendresse du toucher immédiat.

S. Roller

C'est en mathématisant qu'on devient «mathématiseron»! [1]

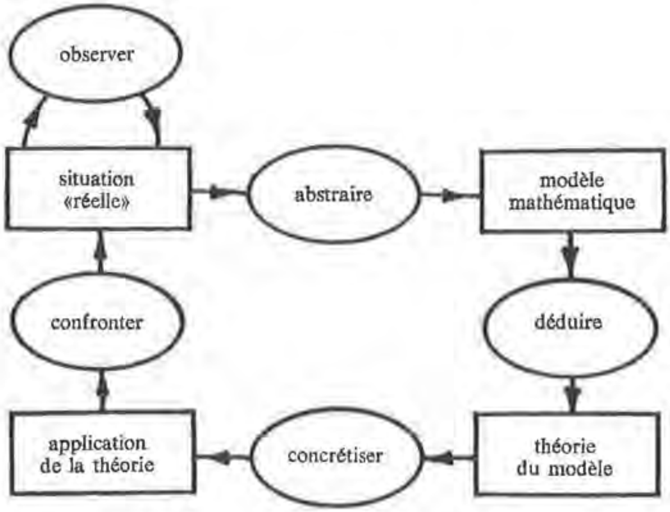
par Gilbert Walusinski, professeur de mathématique, Paris

Dans toute question relative à l'enseignement mathématique, on a raison de distinguer ce qui concerne le contenu, la science mathématique, *et la manière d'enseigner,* les méthodes didactiques. *La distinction faite, ne pas oublier non plus que les deux domaines, le scientifique et le pédagogique, sont liés. En fait, ils sont complémentaires.*
L'expérience des réformes manquées le prouve. Vouloir diminuer l'écart entre la science vivante et la science enseignée est une excellente intention; elle n'est pas suivie d'effet si la didactique reste inchangée. An nom des méthodes actives, on a commis parfois la faute symétrique; combattre le dogmatisme est toujours utile; encore faut-il que ce ne soit pas «à vide», ce sont de vraies mathématiques que nous devons enseigner.
Or les circonstances sont aujourd'hui favorables à une rénovation en profondeur de notre enseignement. L'évolution des mathématiques depuis cent cinquante ans met l'accent sur la grande liberté du mathématicien pour construire ses théories, sur la rigueur avec laquelle il peut ensuite les développer, sur l'intérêt qu'il prend enfin à en appliquer les résultats. A force d'enseigner et par conséquent de commettre des fautes pédagogiques, on a fini par comprendre que rien ne sert de fournir à l'élève des mathématiques toutes faites généralement peu assimilables et qu'il est beaucoup plus fructueux de mettre l'apprenti en situation de mathématiser. On savait depuis longtemps que «c'est en forgeant qu'on devient forgeron!» Et puisqu'il n'y a pas de différence de nature entre la recherche du mathématicien professionnel et l'action d'apprentissage de l'élève, «c'est en mathématisant...»

[1] Je dis «mathématiseron», artisan de sa mathématique, et non mathématicien, inventeur en mathématique.

L'action mathématisante

Je la vois se développer selon un cycle schématisé ci-dessous:



et que je commenterai de la façon suivante.

1. Observer. *Au départ, une situation «réelle». Bien sûr, il y a des degrés divers de réalité; pour le débutant, la réalité est très matérielle: sacs de haricots, formes diverses, objets à caractères sensoriels multiples... Pour l'étudiant un peu initié, le matériel observé est déjà plus «abstrait», par exemple, les droites du plan affine, les fonctions de nombres réels... Et pour le savant, c'est une situation plus abstraite encore. Selon le niveau du praticien, observer cette situation a le même sens mais n'use pas des mêmes moyens: le jeune enfant manipule, l'apprenti géomètre dessine, ...*

2. Abstraire. *Les uns et les autres dégagent de ces observations quelques propriétés qu'ils vont poser en axiomes, en règles du* modèle mathématique *qui va remplacer (imparfaitement) la réalité observée. Imparfaitement mais avantageusement à un double titre: on s'est débarrassé des caractères jugés superflus qui encombraient la réalité, on a* simplifié; *en formulant les axiomes aussi nettement que possible, on a* précisé *ce qui dans la réalité était assez flou. Simplification et précision sont des obstacles à la compréhension complète de la réalité observée mais «ce qu'on perd en intuition, on le gagne en efficacité» écrit justement Raymond Queneau (*Bords, *p. 22) qui rapproche cette action d'abstraire, cette façon de mutiler la réalité, cette axiomatisation, d'une remarque de Caillois: «Tout se passe comme si l'homme, chaque fois,* choisissait *une solution qui lui nuit dans l'immédiat, mais qui lui ménage bientôt un surcroît de pouvoirs*».

3. Déduire. *Ici, ce surcroît de pouvoirs, c'est la possibilité de raisonner sur le modèle: à partir des axiomes, déduire et par conséquent* démontrer des théorèmes, *accumuler des résultats cohérents qui vont constituer la théorie du modèle. L'apprenti aura des déductions courtes; peu à peu, il saura mener des raisonnements plus compliqués s'appuyant sur des résultats déjà obtenus. La théorie sera plus ou moins développée selon la maturité logique du praticien.*

4. Concrétiser. *Le moment viendra alors d'appliquer la théorie, d'en concrétiser les résultats; c'est le stade des mathématiques appliquées. Les théories mathématiques ne s'usent pas quand on s'en sert; au contraire la bonne utilisation peut même suggérer de nouveaux perfectionnements scientifiques.*

5. Confronter. *En tout cas, en poursuivant l'activité dans le même sens (celui des aiguilles d'une montre sur mon schéma), on rapproche les résultats de ces mathématiques appliquées de la réalité observée au départ. Aucun écart? Alors le modèle mathématique est adéquat. C'est le cas exceptionnel. Le plus souvent il y aura «du jeu» entre réalité et résultat théorique: on n'est pas ramené à la situation du départ mais à une réalité enrichie par ce cycle d'activité mathématisante; on peut recommencer un autre cycle qui se situera donc à un niveau plus élevé. Le progrès de la pensée suit cette voie en hélice.*

Deux remarques

Sur le schéma, les actions successives sont exprimées par des verbes encadrés d'ovales. Les étapes de l'action sont exprimées par des noms encadrés de rectangles. Peut-être le mathématicien professionnel sera-t-il tenté de mettre l'accent sur le rectangle Sud-Est. Le pédagogue au contraire insistera sur les ovales.
Sur tous les ovales *et pas seulement celui de l'Est.*
Réduire l'activité mathématique à la démonstration, c'est l'amputer, ou pire encore, la dénaturer. Ce serait un même contresens de réduire l'agriculture à la moisson; labourage et semailles, qui penserait à les omettre? Lorsque Bourbaki écrit — c'est la première phrase de son traité —: «Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration», c'est pour préciser ensuite que c'est seulement dans le domaine mathématique que démontrer a un sens et que le sens du mot n'a pas changé depuis Euclide. Mais cela ne signifie pas que la mathématique se réduit à des démonstrations.
J'insisterai sur ce dernier point. On a souvent reproché à l'enseignement mathématique de ne développer que l'esprit logique aux dépens de l'imagination. Développer l'esprit logique, ce ne serait déjà pas si mal. Mais dans un enseignement fondé sur l'action mathématisante, l'imagination, l'observa-

tion, la manipulation jouent un grand rôle. On y développe une conception de la mathématique qui en fait réellement la servante de la pensée créatrice, un apprentissage de l'action réfléchie et par conséquent un apprentissage de la liberté.

Moyens

Les meilleurs principes pédagogiques sont sans valeur s'ils ne peuvent être mis en pratique. Heureusement, c'est dans l'enseignement le plus élémentaire que le principe de l'action mathématisante peut le plus facilement servir de guide au maître. Les élèves ayant goûté à ses charmes ne les oublieront plus. Ici, les observations initiales portent sur des manipulations très concrètes. On sait les avantages de matériels didactiques variés. Il faut aussi laisser faire le temps, ne rien précipiter.
Ce n'est pas seulement une question de matériel, c'est surtout une question de présence *du maître. Car ce sont les élèves qui prennent les initiatives. Dans leurs actes et dans leurs réflexions, il y a beaucoup de bonnes choses si on sait les exploiter au bon moment et beaucoup de considérations inutiles ou inopportunes qu'il faut savoir faire écarter par les élèves eux-mêmes. Autrement dit, la grosse affaire reste la direction de la classe par un maître expérimenté, compétent, compréhensif surtout vis-à-vis de* toutes *les propositions de ses élèves.*

Faut-il en conclure que la réussite dans un enseignement de cette sorte est plus difficile que dans la conception traditionnelle? La question est mal posée puisque les deux enseignements ont des objectifs opposés: apprendre du tout fait, apprendre à faire. Le rôle du pédagogue véritable ne peut se réduire à celui d'un répétiteur, d'un reproducteur d'idées préconçues. C'est celui d'un éternel chercheur en voies nouvelles pour mieux dialoguer avec ses élèves. Est-il une tâche plus exaltante?
Ouvrir ou faciliter l'accès à la mathématique est le premier but de la réforme de cet enseignement. Si les élèves prennent goût à cette activité, s'ils éprouvent des satisfactions à cette construction par eux-mêmes des modèles abstraits, à leur utilisation, à leur perfectionnement, ce sera un signe favorable. La réforme n'est pas faite pour la satisfaction des maîtres mais celle-ci sera obtenue par surcroît.

Sur une condition nécessaire pour qu'un acte soit mathématique

par André Revuz, professeur de mathématique à l'Université de Paris - VII

On peut se demander si le singulier convient vraiment lorsqu'on parle d'acte mathématique et si la nature d'un tel acte n'est pas en réalité très diverse et très riche d'aspects variés qui peuvent intervenir isolément dans certain actes, ou au contraire y figurer tous à la fois.
Etudier tous ces aspects serait fort intéressant, mais laisserait peut-être échapper ce qui me paraît l'essentiel: à n'importe quel niveau, on ne fait de la mathématique, on n'est à même d'agir mathématiquement, que si l'on s'est placé dans le cadre d'une théorie, c'est-à-dire si un certain nombre de principes ont été admis — fût-ce implicitement — et que c'est à eux et à eux seuls que l'on a pris la décision de se référer. C'est ce départ — au double sens de commencement et de démarcation avec ce qui n'est pas mathématique — qui est peut-être le moment le plus difficile de l'enseignement, et qui est la source des innombrables dialogues de sourds où s'opposent vainement des mathématiciens et des utilisateurs qui n'ont pas compris où résidaient à la fois la force et la faiblesse de la mathématique.
Aucun enseignement et aucun scientifique ne devraient ignorer ce fait fondamental que la mathématique est un auxiliaire puissant pour étudier la réalité, mais que son objet, à elle, n'est pas et ne peut pas être l'étude directe de la réalité.
Ce qu'étudie la mathématique, ce sont des modèles rationnels de la réalité. Mathématiser, c'est, à partir de l'observation, à partir aussi d'idées *a priori* qui peuvent être fécondes ou totalement inadéquates, bâtir un modèle que l'on substitue à la réalité, à l'intérieur duquel tous les concepts seront parfaitement nets, et le raisonnement possible, à cause de l'absence totale d'ambiguïté des définitions et des principes, qui fait la commodité du modèle, mais aussi le sépare de la situation concrète.
L'acte mathématique ne peut se déployer correctement que si la distinction est faite entre la situation concrète et le modèle qu'on en a bâti et que l'on étudie. Si, au contraire, on les confond, on ne sait plus sur quoi s'appuie le raisonnement, et on ne sait plus sur quoi reposent les résultats que l'on croit avoir obtenus. On peut, dans ces conditions acquérir un savoir-faire adapté à certaines situations, mais on n'a pas acquis une connaissance rationnelle fondée sur des principes clairs et transposables à un autre modèle qui aurait les mêmes propriétés: en un mot, on n'est pas entré dans la mathématique.

Est-il naturel ou non de penser mathématiquement, ou si l'on veut, d'agir mathématiquement? La réponse n'est ni un oui absolu, ni un non absolu.

C'est naturel, puisque des hommes l'ont fait; ça ne l'est pas puisque la plupart d'entre eux ne le font spontanément que pour des situations très simples et tombent dans la confusion dès que la situation est un tant soit peu complexe.
Tout enfant de quatre ans qui sait dénombrer une collection quelconque de trois objets a la notion abstraite du nombre trois, et c'est lui imposer une régression dommageable que de vouloir lui faire concevoir, comme cela s'est fait, ces monstres que seraient des «nombres concrets». Il sait, en effet, parfaitement distinguer les diverses situations où il aura à dénombrer des collections de trois objets, et le schéma abstrait qui sous-tend chacune de ces actions concrètes. En revanche, il ne lui est pas encore naturel de concevoir l'addition, ou la multiplication des entiers, ni l'ensemble de tous les entiers. Il lui faudra cependant peu de temps pour prendre conscience du fait que, quelles que soient les choses qu'il compte, son action repose toujours sur les mêmes principes, et qu'il peut concevoir des nombres si grands qu'il n'a jamais rencontré de collections pour lesquelles il les aurait utilisés, et qu'en tout cas il lui aurait été matériellement impossible de dénombrer. Peu à peu, dans son esprit, le modèle se bâtit et s'enrichit progressivement.

Distinguer le modèle et la situation est indispensable, mais d'autres dangers menacent et, en particulier, de négliger complètement ou le modèle ou la situation, avec cette conséquence que l'on finit par croire que le modèle représente parfaitement la situation.
Négliger la situation prive le modèle de sa motivation, le rend inintelligible et inutilisable et ravale la mathématique au rang d'un jeu stérile. Négliger le modèle confine dans l'empirisme et peut mener à l'incohérence. Confondre modèle et situation est s'interdire une compréhension du processus scientifique, c'est prendre pour des vérités expérimentales définitives les hypothèses qui ont permis de bâtir le modèle et c'est s'interdire de pouvoir changer de modèle puisqu'on lui a abusivement accordé un statut de réalité.

Une autre attitude est celle qui consiste à refuser le modèle sous prétexte qu'il correspond à une description très appauvrie de la réalité: elle est voisine de celle qui consiste à confondre modèle et situation et procède du même refus d'opérer la distiction; mais, dans un cas on se fonde sur une adéquation très forte du modèle à la situation pour les confondre, dans l'autre, on se fonde sur leur écart très visible pour rejeter le modèle.
Un enseignement scientifique faillit à sa tâche s'il ne montre pas qu'une science qui réussit est une science qui dispose de moyens d'observation très fins et très précis et de modèles à la fois suffisamment raffinés et suffisamment commodes pour permettre des prévisions que l'observation confirme. Le rôle spécifique de la mathématique est l'étude et la création de schémas de modèles de plus en plus élaborés. Le rôle de l'enseignement mathématique est de faciliter l'appréhension de la structure des modèles les plus usuels, de rendre l'esprit assez fort et assez souple pour bâtir des modèles de plus en

plus complexes tout en dominant cette complexité, mais il devrait être aussi de présenter la relation du modèle aux situations qu'il doit aider à maîtriser, et d'évaluer (ce qui est, assurément, hors de la mathématique proprement dite) l'adéquation du modèle à la situation.

On peut me reprocher de n'avoir finalement pas dit ce qu'est un acte mathématique, mais j'ai insisté sur ce que je crois être la condition fondamentale pour qu'un acte mathématique soit possible; la distinction entre la situation concrète et le modèle dont l'étude est proprement mathématique.
Cette distinction peut sembler difficile à opérer avec des débutants qui n'ont pas l'habitude de prendre du recul par rapport à leurs actions: ce recul, ce début de réflexion sur ce que l'on fait est le premier germe de pensée mathématique. Elle l'est aussi chez les gens qui «croient ce qu'ils voient» et avancent dans la vie armés d'un bon sens fruste qui se croit infaillible et ne se pose pas de question. Mais ce serait une erreur de croire qu'elle n'est pas perceptible par les enfants: il ne leur est pas plus difficile de distinguer ce qu'ils font et ce qu'ils pensent à propos de ce qu'ils font, et de comprendre, par exemple, qu'exécuter des dessins sur une feuille de papier et raisonner à partir de principes admis à propos de ces dessins sont deux activités différentes bien que liées.
Tout enseignement élémentaire rencontre la dualité situation-modèle à propos de la création et de la manipulation des nombres entiers, puis des nombres décimaux et des nombres relatifs, de la compréhension des opérations usuelles de mesurage qui sont éclairées par une théorie très élémentaire de la mesure, et enfin de la géométrie, où la confusion trop souvent commise compromet à jamais pour beaucoup d'élèves la compréhension de l'activité mathématique.
Dans tous ces domaines, le problème est non pas d'opposer, mais de distinguer les situations concrètes et les modèles, de ne mépriser ni ceux-ci ni celles-là, mais de bien comprendre et de bien faire comprendre que c'est dans la fabrication du modèle et dans son étude que se déploiera l'activité mathématique, avec sa rigueur et son indispensable imagination qui doivent travailler de concert.

Certains points sont traditionnellement mal enseignés ou paraissent anormalement difficiles parce que l'on craint de faire la distinction que je réclame ou qu'on se refuse à la faire:

a) *Les nombres décimaux et les nombres relatifs.*
   Il s'agit de bien mettre en évidence que l'on effectue là une création de nouveaux êtres mathématiques, que cette création résulte d'une activité autonome de l'esprit, qui s'impose lui-même certaines règles pour la cohérence de la création, qui lui permettra d'agir plus aisément dans un certain nombre de situations. On a là d'excellents exemples où observation intelligente et active, imagination et rigueur collaborent pour la mise au point de ces nouveaux outils intellectuels. Il importe, là aussi, de bien

distinguer ce qu'il y a d'arbitraire dans la création que l'on effectue, et ce qu'il y a de nécessaire dans les propriétés des outils créés, une fois que certaines leur ont été assignées. Rien n'est plus fâcheux à ce propos, que l'énoncé pêle-mêle de règles prises comme points de départ et de règles déduites, le tout présenté sous une forme faussement juridique: «On a le droit de...», «On n'a pas le droit de...».

b) *Les opérations de mesurage.* Leur présentation ne dépasse souvent pas le niveau de la «leçon de choses», alors qu'il est très facile de montrer que leur fondement rationnel est la notion de fonction additive d'ensemble qui a, en outre, le mérite de faire utiliser les opérations ensemblistes et de préparer l'avenir (probabilités, intégration).

c) *La géométrie* est le terrain royal où la distinction entre situation et modèle aurait dû être faite, mais où apparemment elle effarouche le plus. On a là, cependant, dans l'espace intuitif, un exemple d'une réalité prodigieusement complexe qu'il s'agit de mettre en ordre. La meilleure méthode pour y voir clair consiste précisément à mettre de côté cette trop grande richesse et à bâtir pièce à pièce des modèles de plus en plus raffinés, en mettant bien en évidence, pour chacun d'eux, les propriétés de la réalité dont il peut rendre compte et celles qui lui échappent et est l'occasion de créer les puissants outils de l'algèbre linéaire.

Pour conclure, je voudrais reprendre le titre de cette note et insister sur l'absolue nécessité de la condition que j'ai décrite, pour qu'une activité soit mathématique. Cela n'épuise nullement la question de savoir en quoi consiste un acte mathématique; mais on présente trop souvent sous le nom de mathématique, des considérations qui n'en font pas partie, pour que j'aie cru utile de souligner l'importance de cette condition trop souvent méconnue, cette méconnaissance étant aussi dommageable à la mathématique qu'à ses applications.

Faire de la mathématique

par Louis Jeronnez, professeur de mathématique
président de l'Association Cuisenaire Belgique

Pour savoir ce qu'est l'acte mathématique, regardons ceux dont on dit qu'ils font de la mathématique.
Il y a d'abord les mathématiciens, *les créateurs, ceux qui font, qui «fabriquent» la mathématique, qui sont des «inventeurs». Ceux-là résolvent des problèmes nouveaux ou des problèmes dont la solution était jusqu'alors inconnue, échafaudent des théories nouvelles qu'ils formalisent quand ils sont convaincus de leur valeur, proposent des problèmes nouveaux et engagent à leur sujet le dialogue avec leurs collègues. C'est du moins ce que nous enseigne l'histoire de l'évolution de la science mathématique.*
Pour prendre connaissance des travaux des mathématiciens, pour déchiffrer leurs œuvres qui sont présentées sous une forme hermétique pour le profane, il faut avoir reçu une initiation qui demande un temps fort long et nécessite un travail ardu. Ce «décodage» d'un texte mathématique présenté sous forme axiomatique est un acte mathématique puisqu'il exige du lecteur des sortes de «vérifications» disons «des calculs», des opérations.
Mais enfin, pour bien savoir ce qu'est devenue *ce qu'on appelle encore dans les dictionnaires «la science de la quantité et de l'ordre», il faudrait le demander aux «princes de la science» qui élaborent des théories axiomatisées. Cette science des systèmes formels s'éloigne tous les jours davantage de la science que peut encore comprendre un* professeur du secondaire. *Le fossé se creuse de plus en plus chaque jour. Les progrès réalisés sont tellement rapides que tel grand mathématicien déclare sans fausse honte que l'un de ses disciples l'a distancé et qu'il ne peut plus le suivre...*
Certaines qualités morales (courage, réflexion profonde, humilité, désintéressement...) sont-elles l'apanage des mathématiciens? Ce serait encourageant puisqu'ils seront sans doute, dans peu d'années, les maîtres du monde...
Il faudrait faire des réserves sur le non-communicabilité des découvertes actuelles. Il y a l'art des tout grands qui parviennent à faire percevoir l'essence même de leurs découvertes à ceux qui se situent à un niveau plus modeste, je veux parler des professeurs des écoles, de ceux qui ont fait un certain apprentissage (parfois rien que cet apprentissage), sûrs d'eux-mêmes comme de la pérennité de la science qu'ils enseignent.
La révolution faite par Bourbaki, qui a modifié sinon la nature, du moins les bases et l'aspect de la mathématique, n'a guère changé cette attitude. Il faut craindre qu'on ait tout simplement changé de religion.
Et pourtant quel aiguillon plus efficace que les bouleversements qui ont secoué la mathématique et son enseignement pour vraiment, une bonne fois,

«faire de la mathématique», pénétrer les mystères d'un symbolisme inconnu, d'un codage nouveau, d'une nouvelle axiomatique?

Quel bonheur sans doute pour le «prof de math», pour celui qui a enseigné une «grammaire» et non la «littérature» dans ses œuvres les plus riches, d'aller à la découverte de la mathématique et «faire ainsi de la mathématique».

Et ici, il faut bien penser aux enfants de nos écoles. *Est-ce qu'ils font, eux, de la mathématique?*

L'enfant de 4 ans qui classe des objets suivant un critère personnel fait de la mathématique.

L'enfant de 5 ans qui prend conscience de la notion cardinale du nombre à partir d'ensembles équipotents fait aussi de la mathématique. Mais l'enfant d'école primaire qui dit $3+2=5$ ne fait pas de la mathématique.

L'enfant de 8 ans qui découvre qu'une droite peut être représentée par un diagramme de Venn et qui acquiert ainsi l'idée de la double représentation (celle du dessinateur et celle du mathématicien) d'une partie du plan, fait certainement de la mathématique.

L'enfant qui traduit par des tables de vérité l'appartenance d'un objet à un ou plusieurs ensembles fait aussi de la mathématique.

L'enfant qui prend conscience de ce qu'est une démonstration, qui en perçoit la nécessité, fait certainement de la mathématique. Thalès de Milet, considéré comme un des premiers mathématiciens, n'est-il pas resté célèbre pour avoir compris la nécessité d'une démonstration d'une propriété des triangles isocèles?

Si le calcul numérique n'est pas de la mathématique, la découverte des propriétés est bien de la mathématique.

L'utilisation d'une machine à calculer n'est pas un acte mathématique, mais la découverte d'un perfectionnement de cette machine ressort à la mathématique — disons «à la mathématique appliquée».

Et le technicien, l'ingénieur? Ceux-là sont les utilisateurs de la mathématique qu'ils appliquent au réel. Est-ce bien de cette mathématique dont parle Freudenthal pour qui «la mathématique est un art de penser»? *«Faire de la mathématique» suppose chez S. Roller essentiellement un* acte d'invention *ou, pour le moins, de redécouverte.*

La «mathématique appliquée» ne serait donc pas de la mathématique.

C'est peut-être un des points les plus controversés. Les frontières entre logique et mathématique sont aussi parfois difficiles à fixer...

Revenons-en à la question: qu'est l'acte mathématique?

La notion d'opération, au sens de Piaget, a — pour le moins — une signification plus large que celle du mathématicien.

De toutes façons, pour le mathématicien, une opération binaire est une fonction de $A \times B$ vers C, les ensembles A, B, C étant ou non égaux.

Ici, la précision est tranchante.

Il ne s'agit pas de «construire des propriétés nouvelles» mais bien de rechercher les propriétés d'une opération définie à partir des ensembles.
Cette acception du mot opération rentre-t-elle dans celle de Piaget?
Nous n'avons pas trouvé de réponse dans le texte proposé, ni dans le dictionnaire des expressions de Piaget rédigé par plusieurs de ses collaborateurs.
Le texte en question restera toujours quelque peu extérieur à l'idée du mathématicien. De part et d'autre, on parle de choses différentes dans des langues différentes.
De toutes façons, il nous semble avoir montré que l'acte mathématique ne se réduit pas à «l'opération» même si l'on se place au niveau des techniciens de tous genres et de tous grades qui ont besoin d'un outil mathématique de plus en plus affiné.
Le temps est passé — ou presque — où équations, abaques, tables, règles à calcul, etc., suffisaient à l'art de l'ingénieur.
Le futur sera le temps de la mathématique.
Le rôle des enseignants «à l'élémentaire» prend ainsi une dimension nouvelle.
Une pédagogie active qui suscite la recherche et le travail personnel s'impose à tous.

L'acte mathématique

par Zoltan P. Dienes, Sherbrooke (Québec)

On demande ce qu'est l'acte mathématique? Un acte, dans tous les cas, est une interférence dans l'état de choses actuel. Un organisme, un être humain, dans ce cas, c'est quelque chose qui n'était pas là auparavant. Un acte est un atome de création; si l'acte n'avait pas été commis, quelque chose aurait manqué dans l'univers, qui est là à cause de l'acte. Dans l'histoire de l'acte, il y a toujours quelque chose qui provoque l'acte, ensuite il y a l'acte même et il y a le résultat. C'est comme une machine: il y a une entrée; ensuite la machine fonctionne et il y a une sortie. Dans le cas de la mathématique, l'entrée c'est l'ensemble des situations qui conduisent à l'acte. Ceci veut dire que le devoir du pédagogue, c'est d'arranger les situations pour la majorité des enfants, afin qu'il soit de plus en plus probable que des actes mathématiques se produisent. Un acte de création, dans tous les cas, est une espèce de résultat de la «digestion» de toutes les entrées que nous recevons. L'artiste fait son dessin ou sa peinture après avoir «digéré» un certain aspect de la réalité et après une telle digestion, il projette son résultat sur un dessin. C'est la même chose pour la mathématique.

Les enfants peuvent être placés dans des situations problématiques où il y a quelque chose à chercher. La chose à chercher peut être la solution d'un problème ou la découverte d'une structure; la découverte d'une contradiction ou n'importe quel objectif intellectuel accompagné de la considération de structures superposées. Ces structures superposées (qui sont la mathématique) sont construites mentalement par l'enfant, au fur et à mesure qu'il est en mesure de les distiller dans son expérience. Les premiers concepts mathématiques, les concepts topologiques, puis les concepts d'ordre, de classification et finalement les notions numériques se développent chez l'enfant en tant que résultats de certaines stimulations provenant de son environnement. Un environnement pauvre produit un développement pauvre. Un environnement riche en expériences suscite le développement d'un être intellectuellement riche et doué. Il faudrait, alors, étudier ce que nous pouvons faire pour encourager cette sorte de création qui est, dans le cas de l'acte mathématique, la création de certaines structures mentales qui résultent de l'appréhension et ensuite de la compréhension de l'ensemble des stimuli qui nous arrivent de l'extérieur. Evidemment, l'enfant, lorsqu'il arrive à l'école, est déjà en mesure de résoudre de nombreux problèmes pratiques. Il peut, par exemple, parler; il peut s'exprimer s'il veut quelque chose; ou, s'il veut transmettre des informations, il peut le faire. S'il veut se déplacer d'un endroit à un autre, il peut le faire, car il sait marcher. Il peut par exemple ramasser des objets et les déplacer d'un endroit à un autre. Il peut même transformer des objets, mettre beaucoup d'objets ensemble et en faire des constructions complexes, ou bien encore fragmenter des objets en plusieurs morceaux. Ensuite, il peut chanter,

par exemple. Il connaît le son; la variation des sons est une chose qu'il utilise dans son chant. Tous les enfants chantent. On les inhibe souvent quand on commence avec une leçon de musique car il faut faire certaines choses et ne pas en faire d'autres. On restreint alors la liberté de l'enfant d'expérimenter avec sa bouche, avec sa gorge, en vue de s'exprimer musicalement.
La même chose se voit dans les arts plastiques: Très souvent, on dit à l'enfant: «Dessine exactement ceci, et fais-le exactement de telle ou telle manière». Heureusement, aujourd'hui, il est de plus en plus admis de ne pas restreindre les enfants dans leurs expressions artistiques. La restriction demeure cependant sévère dans l'expression mathématique.
Nous avons des programmes strictement déterminés; il faut que tous les enfants fassent certaines choses en mathématique, qu'ils acquièrent certaines compétences, sinon on croit que le professeur n'a pas fait son devoir, ni l'enfant non plus. Ainsi l'expression libre à l'intérieur des contraintes qu'offre la nature n'est plus possible quand l'enfant entre dans la salle de classe.
Nous avons énuméré un certain nombre de compétences que l'enfant apporte avec lui à l'école: la capacité de parler, de manipuler, de se déplacer, de chanter, de communiquer avec d'autres membres de son groupe social. Quand il arrive à l'école, tout lui est défendu. Il est défendu de parler; il ne faut pas bouger, ne pas chanter, ne pas communiquer; il faut simplement être passif. Ainsi tous les moyens que l'enfant a utilisé pendant les 5 ou 6 premières années de son existence pour faire face aux problèmes de sa petite vie lui sont d'un coup interdits. On introduit en revanche d'autres moyens d'apprentissage qui lui sont totalement étrangers. Il doit écouter attentivement, répéter des choses; il ne faut pas qu'il bouge, il ne doit pas communiquer avec ses copains; or c'est exactement en faisant ces choses-là auparavant qu'il a été capable d'apprendre l'adaptation physique, affective et sociale à son milieu.
Il n'est pas surprenant que beaucoup d'enfants n'aiment pas l'école et qu'ils attendent le moment des vacances pour crier «Vivent les vacances!» Très peu d'enfants disent après les vacances: «Vive l'école!».
Nous devrions, par conséquent, créer dans la salle de classe une situation où la connaissance de la langue (la langue maternelle), la capacité de l'enfant de se déplacer, de manipuler des objets, de distinguer des objets les uns des autres par couleurs, formes et autres propriétés, soit appliquée dans un apprentissage semblable à celui qu'il avait appliqué dès sa naissance. C'est pour cela que nous devons penser à l'acte mathématique, comme à un acte qui se produit à l'intérieur d'un laboratoire. Dans ce laboratoire, il faut qu'il existe un grand nombre de matériels structurés et non structurés, des objets de tous les jours, de la peinture, de la pâte à modeler, toutes sortes de matériels de construction pour que l'enfant puisse se poser des problèmes dans une situation libre mais aussi pour qu'il se trouve soumis à certaines contraintes. C'est pourquoi il faut qu'il y ait aussi un certain nombre de jeux et des jeux mathématiques.
Un jeu c'est, par définition, un passage d'une situation à une autre, à l'intérieur d'un certain nombre de contraintes. Chaque structure mathématique ou

chaque théorème mathématique est un jeu car la démonstration d'un théorème, par exemple, est un chemin qu'il faut suivre d'un point à un autre point, cependant qu'on est assujetti à certaines règles, celles du jeu de la logique et de la partie spécifique de la mathématique dont il s'agit. Les jeux mêmes peuvent être présentés sous des formes très différentes:

On pourrait concevoir un jeu linguistique ou un jeu de gymnastique et les deux jeux pourraient être, du point de vue mathématique, entièrement isomorphes. Les enfants ainsi pourraient apprendre comment transformer un jeu en un autre jeu. Ainsi pourraient-ils aborder le processus de l'abstraction. Il faudrait utiliser les compétences qu'ils possèdent déjà; la connaissance de la langue par exemple, leur capacité de se déplacer et ainsi de suite. On pourrait faire faire un jeu avec huit éléments, en donnant deux noms, deux verbes et deux compléments à partir desquels il soit possible de construire huit phrases différentes. Ensuite, on pourrait penser à huit positions différentes du corps de l'enfant debout et assis, avec les bras croisés ou non, avec les jambes croisées ou non. Ainsi, nous avons huit positions du corps qui pourraient correspondre à huit possibilités de phrases. On pourrait également prendre des objets de couleur, de grandeur et de forme différentes (les blocs logiques, les trimates ou les quadrimates) et demander aux enfants de faire des correspondances. Un changement du verbe correspondrait à un certain changement dans les autres concrétisations. Ensuite, pour poursuivre, on pourrait définir une addition.

On choisirait par exemple une phrase neutre, ceci nous donnerait un nom neutre, un verbe neutre et un complément neutre. En tant qu'opérateur, une phrase aurait l'effet de changer ou de ne pas changer une autre phrase sur laquelle elle opère, suivant si le nom, le verbe et le complément est non neutre ou neutre respectivement. On pourrait également choisir une position du corps qui soit la position neutre: la position assise avec les jambes et les bras non croisés, et ceci passerait la commande à l'autre personne de ne rien faire. Tandis que la personne qui serait debout avec les jambes et les bras non croisés passerait la commande à une autre personne de changer sa position de debout à assis ou bien de assis à debout. S'il avait les bras croisés, mais s'il était assis avec les jambes non croisées, ceci voudrait dire que l'on commande à une autre personne qui occupait l'une ou l'autre des huit positions, que cette autre personne devrait soit croiser, soit décroiser ses bras, et ainsi de suite.

La même chose pourrait être jouée avec les blocs logiques: on choisirait le petit cercle bleu comme neutre, cela veut dire petit et/ou de grandeur neutre (le cercle a la forme neutre, bleu a la couleur neutre) ceci veut dire que les autres valeurs de ces variables seraient les changeurs: quand un bloc est appliqué en tant qu'opérateur pour opérer sur un autre bloc, le bleu et le petit cercle seraient les non changeurs.

On pourrait même aller plus loin et demander aux enfants de construire des situations qui transforment une addition correcte en une autre addition correcte. Il y a un grand nombre de possibilités pour cela et on pourrait choisir des sigles à 7 éléments où les éléments non neutres sont transformés les uns dans les autres de façon qu'il n'y ait pas un seul élément qui ne soit pas transformé en un autre. Ainsi on peut construire en particulier les règles d'une multiplication dans le corps deux par deux par deux. La situation de jeu sera simplement d'arranger les huit éléments de façon qu'il y ait des ensembles de flèches qui transforment les éléments dans les autres, qui respectent la vérité d'une addition, si par une addition il est entendu qu'une phrase opérée par une autre phrase devient une troisième phrase, ou une position du corps opérée par une autre position du corps devient, montrée par une autre personne ou par la même personne, une troisième position du corps; la même chose avec les blocs.

Ce sont là des exemples pour montrer comment on pourrait partir de la capacité de l'enfant à parler, à bouger, et à distinguer entre les couleurs, les grandeurs et les formes, et aborder des problèmes assez profonds de nature mathématique. L'enfant serait encouragé à participer à un développement de son environnement mathématique et ainsi se produirait une inter-action entre cet environnement et lui-même.

Quelles sont maintenant les compétences mathématiques auxquelles nous pourrions viser? Nous avons déjà mentionné une compétence, le processus d'abstraction. Nous apprenons sans doute à abstraire en faisant des abstractions; dès lors l'utilisation du principe des concrétisations multiples encouragera les enfants à apprendre à abstraire parce qu'ils feront des comparaisons entre des concrétisations au sein de la même structure sous des formes très différentes.

Il y a évidemment autre chose à viser. La généralisation par exemple. Les enfants pourraient être encouragés à se demander ce qui se passerait si on changeait quelque chose. Si on changeait telle ou telle condition, conserverait-on quand même telle ou telle propriété, est-ce que telle ou telle propriété serait quand même changée? A quelles conditions pourrait-on s'attendre à ce que certaines propriétés soient conservées et sous quelles autres conditions faudrait-il les abandonner? Ainsi, l'étude des conditions nécessaires et suffisantes serait abordée. Dans la vie, il y a une grande confusion entre les conditions nécessaires et suffisantes.

La mathématique est aussi, d'un certain point de vue, un langage, car il y a des informations qu'il faut communiquer et pour communiquer quelque chose, il faut un système de codage. Ainsi la mathématique pourrait être utilisée pour apprendre à l'enfant à encoder des messages, en commençant à lui apprendre à les décoder. Encoder et décoder s'apprennent évidemment lorsqu'on apprend à lire et à écrire, mais il faut aussi, avec le temps, apprendre à écrire la mathématique, à lire la mathématique. Mais avant de le faire, il faut avoir des connaissances premières, ensuite des connaissances secondes superposées pour qu'on puisse communiquer. C'est de la folie d'attendre que les enfants s'expriment en mathématique sans qu'ils comprennent ce qu'ils ont à communiquer. Ainsi l'invention, ou l'apprentissage des systèmes de codage, et ensuite l'apprentissage du processus de décodage seraient un objectif important de l'apprentissage de la mathématique. Ce n'est pas l'apprentissage d'un code particulier, mais plutôt le fait que l'enfant s'habitue à apprendre les codes en général. Il faudrait qu'ils inventent des codes, qu'on leur présente des codes différents relatifs à la même chose. Au lieu d'utiliser toujours le même système de symboles, il faudrait en utiliser plusieurs. De la même manière qu'on peut appliquer le principe de la concrétisation multiple, on peut aussi appliquer celui de la symbolisation multiple. Une application très intéressante du codage et du décodage est le transcodage. L'étude des matrices conduit à un tel transcodage.

Le code pour les vecteurs dans un espace vectoriel peut être exprimé à partir d'une base de cet espace vectoriel mais chaque vecteur peut être exprimé par rapport à une autre base. Nous aurons ainsi deux systèmes de codes différents pour le même ensemble de vecteurs. Le problème est alors de savoir comment passer d'un système de codage à l'autre et inversément. C'est l'étude des matrices qui résout ce problème dans le cas d'un espace vectoriel particulier.

Il serait évidemment très intéressant que les enfants soient capables d'associer des structures semblables les unes aux autres; ce serait le résultat final de l'apprentissage de l'abstraction. Une structure que nous rencontrons dans la vie peut être très semblable du point de vue structure à une autre structure, mais quant à l'aspect concret, les deux situations peuvent être très différentes. Ainsi, il serait intéressant que l'enfant soit capable d'appliquer les structures mathématiques à l'environnement dans lequel il se trouve. Il l'apprécierait de manière beaucoup plus profonde et aurait plus de joie à «interagir» avec son environnement qu'à simplement l'accepter passivement.

Cette dernière compétence, nous pourrions l'appeler application ou interprétation. Nous pouvons appliquer une structure mathématique à une situation quotidienne, dans la vie, ou bien nous pouvons interpréter une situation quotidienne en nous rendant compte que cette situation correspond à un ensemble de situations dont nous avons déjà abstrait la structure, à l'occasion de nos actes mathématiques antérieurs.

On pourrait énumérer encore beaucoup d'autres compétences auxquelles l'apprentissage de la mathématique, l'acte mathématique, pourrait conduire.

Ce que je voudrais souligner c'est que ce qui compte ce n'est pas le contenu mathématique, mais les habitudes de penser que nous pouvons développer chez l'enfant et dont il aura besoin dans la vie. Quant à nous, nous allons pour la plupart oublier presque toute la mathématique apprise à l'école. L'homme de la rue, si nous lui demandons ce qu'il sait de la mathématique, nous répondra probablement: «Pas grand-chose!» Il sait peut-être ajouter et soustraire, peut-être même multiplier, mais de ce qu'est vraiment un nombre rationnel, un entier, un groupe, un anneau ou de semblables choses, il n'a aucune idée. Il n'importe pas d'ailleurs qu'il possède des idées mathématiques particulières, mais il importe en revanche qu'en apprenant la manipulation d'idées mathématiques, il acquière certaines des compétences dont il aura besoin sa vie durant.

Réflexions sur la notion d'acte mathématique

par André Delessert, professeur de mathématique
à la faculté des sciences de l'Université de Lausanne

M. Samuel Roller conduit une enquête sur la notion d'«acte mathématique». Il met ainsi en évidence le tournant que prend aujourd'hui l'enseignement mathématique. Peut-être n'est-il pas inutile de présenter d'abord une esquise de cette évolution.

Les mathématiques élémentaires constituent un domaine de la science mathématique achevée relativement indifférent aux fluctuations de la recherche avancée. L'enseignement traditionnel se donne pour tâche de transmettre des connaissances en mathématiques élémentaires. Qu'on l'examine de l'intérieur de la mathématique ou de l'extérieur, cette conception se révèle insuffisante, comme on va le voir.

Le mathématicien pratiquant, celui qui, par sa participation à la recherche ou à l'enseignement, est appelé à actualiser journellement son expérience mathématique, sait que l'ensemble des faits mathématiques connus est bien loin de représenter toute la mathématique. Le philosophe de la mathématique travaille aussi sur cette documentation et il ne fait pas de mathématique pour autant. La science mathématique englobe en plus certaines démarches, certaines attitudes, certaines préoccupations qu'on recouvre du terme vague d'«activité mathématique». Le mathématicien ne se borne pas à apprendre des faits mathématiques et à appliquer des recettes connues. Il imagine et organise des recherches; il entreprend diverses tentatives; il exploite des analogies; il pèse les raisons d'espérer un succès en imaginant des interprétations et des exemples révélateurs; il s'astreint à forger une variante; il s'efforce d'éviter une hypothèse restrictive. Tout cela, qui paradoxalement ne laisse guère de traces dans la littérature, constitue la part vivante de la mathématique. Cette ferveur à résoudre des énigmes peut fort bien être absente d'un enseignement qui s'attache à la simple transmission d'informations sur les faits mathématiques.

Abandonnons le point de vue du mathématicien pour adopter celui de l'enseignant. Plaçons-nous dans la perspective d'un enseignement mathématique déterminé par une liste de connaissances à transmettre. Il est raisonnable d'admettre qu'une formation normale en mathématiques élémentaires doit comporter, par exemple, la notion d'espace vectoriel réel de dimension finie. Il est possible de présenter cela à des élèves de seize à dix-huit ans. Mais, dans la mesure où l'on estime qu'une telle notion ne peut s'acquérir qu'à partir d'autres notions préalablement assimilées, il faut consacrer à sa mise en place une part importante du temps réservé à la mathématique dès les petites classes. Les notions intermédiaires requises: ensemble, relation, groupe, continuité, *etc., ne sont pas toutes compliquées formellement, mais elles sont tellement générales que leur emploi cohérent et leur véritable nature ne peuvent être montrés que beaucoup plus tard. Or on constate que la moitié au moins — et cette estimation est très optimiste — des élèves des écoles ne parviennent jamais et ne parviendront jamais à la notion d'espace vectoriel réel de dimension finie, soit parce que leur pensée est fermée à des idées aussi générales ou aussi formelles, soit parce que la formation qu'ils reçoivent ne comporte plus assez de mathématique. Quel bénéfice ces élèves retirent-ils d'un enseignement axé en grande partie sur des faits et des notions qui n'ont point de signification ou de valeur opérative pour eux? Sans doute vaudrait-il mieux les en dispenser, pour autant qu'on puisse déceler à l'avance et à coup sûr les élèves méritant cette disgrâce.*

Heureusement, il existe des systèmes mathématiques très simples — de petits ensembles finis, par exemple — à propos desquels il est possible de déployer une activité mathématique digne de ce nom et néanmoins adaptée à l'esprit de jeunes élèves normaux. (En passant il faut mettre à l'actif des «mathématiques modernes» d'avoir su mettre l'accent sur plusieurs de ces systèmes.) Quasiment tous les élèves sont donc susceptibles d'être initiés à des attitudes et des comportements ayant la valeur d'une expérience mathématique authentique.

La tendance actuelle est de renoncer à déterminer le contenu de l'enseignement mathématique par une table des matières seulement et de se fixer des objectifs de comportements inspirés de l'activité du mathématicien. La mission de cet enseignement consiste à amener chaque élève à réussir des activités mathématiques véritables, adaptées à ses moyens.

Mais on voit alors apparaître une difficulté majeure. Rien n'est plus facile que de s'assurer qu'une notion mathématique figure ou non dans une table des matières et l'on peut vérifier séance tenante si telle classe a traité ou non le parallélogramme ou la multiplication des nombres décimaux. A quoi reconnaît-on qu'un élève a été initié à une vraie activité mathématique et comment le maître peut-il savoir que la leçon qu'il vient de donner le fait progresser dans l'accomplissement de cette tâche?

On est donc conduit à se demander en quoi consiste au juste cette fameuse «activité mathématique». On se heurte d'emblée à deux obstacles. Le premier est constitué par l'étonnante discrétion dont les mathématiciens entourent leur démarche. Si l'on peut à la rigueur en observer quelques aspects au cours des séminaires les plus détendus, il n'en apparaît quasiment plus rien dans les textes mathématiques. Les conférences ex cathedra, *elles-mêmes, se déroulent suivant un scénario presque invariable. Après avoir présenté l'état de la question, le conférencier désigne le résultat qu'il se propose d'atteindre. Il donne à ses auditeurs le temps d'observer qu'aucun cheminement, aucune prise ne sont en vue. Au besoin il a la coquetterie de bien montrer que les premières idées qui viennent à l'esprit conduisent à l'échec. Après quoi, tel un alpiniste virtuose, il chemine vers son but suivant une ligne aveuglante de simplicité ou, au contraire, selon une trajectoire riche en détours imprévisibles. Et l'auditoire* *est d'autant plus ravi qu'on lui a plus soigneusement dissimulé les affres de l'invention.*

Cette manière au fond aggressive de présenter les faits mathématiques — qu'on songe aux défis des mathématiciens du XVII^{e} siècle — a fait naître chez les profanes le sentiment que le mathématicien dispose de moyens cachés, et c'est là le second obstacle évoqué précédemment. L'œuvre du mathématicien s'enveloppe de mystère. Lui seul sait trouver les gestes efficaces, en vertu de pouvoirs attachés à son titre. Le terme d'«acte mathématique» semble porter l'empreinte d'une telle superstition. Le mathématicien rejoindrait ainsi le médecin dans l'imagination populaire et, par des procédés qui lui seraient propres, interdirait la pratique illégale de la mathématique.

Il ne faut pas se laisser rebuter par ces difficultés illusoires. L'activité du mathématicien n'est pas plus mystérieuse — pas moins, non plus — que celles de l'alpiniste ou du menuisier. En outre, il n'est pas nécessaire d'étudier le comportement du chercheur avancé, car il est foncièrement de même nature que celui de l'écolier qui, placé dans une situation mathématique neuve pour lui, s'en tire seul.

On est tenté de procéder d'abord à une analyse cartésienne et de dresser une liste des démarches méthodiques qu'exécute le mathématicien: classification des données, réduction du complexe au simple, substitution de la définition au terme défini, réduction à l'absurde, etc. Mais on constate bientôt que cela équivaut à décrire la présentation extérieure des textes mathématiques et que, par conséquent, l'essentiel de l'activité mathématique passe entre les mailles du filet. On en vient rapidement à admettre que cette activité présente un caractère global en ce qu'elle implique la totalité de la personne pensante. Les actes méthodiques, qui relèvent de la conscience, opèrent sur des flux d'images qui se présentent, des idées qui «viennent» d'une manière apparemment anarchique, mais avec d'étranges insistances, d'étranges occultations aussi. La sensibilité se manifeste constamment: sensibilité à l'élégance, à l'économie d'un développement, qui peut fortement infléchir une recherche. L'affectivité intervient en marquant de la tendresse pour une présentation géométrique de préférence à un exposé purement algébrique, par exemple. Le caractère du mathématicien joue un rôle: sa patience lui facilitant l'achèvement d'un long calcul, son impatience le contraignant à chercher une démonstration plus synthétique, son courage ou son orgueil lui interdisant de restreindre ses hypothèses de travail. On peut ajouter encore diverses aptitudes sensorielles telles que la vision ou le sens de l'espace, sans oublier le caractère social de l'individu qui le pousse à rechercher la limpidité de l'expression ou l'ésotérisme.

La variété des aspects que revêt l'activité du mathématicien est telle qu'on peut se demander en quoi celle-ci se distingue de l'activité de n'importe quel autre personnage pensant. C'est bien ce qui se produisit récemment lorsqu'une liste de comportements de mathématicien considérés comme objectifs de l'enseignement mathématique fut présentée à des professeurs de français: ils reprirent immédiatement à leur compte l'essentiel de cette liste, ne laissant que ce qui relève de la pure technique mathématique. Toutefois il paraît évident que le

MATH-ÉCOLE

Index analytique

Numéros 52 à 60 (mars 1972 à novembre 1973)

Les titres des périodiques sont en caractère gras. Les titres des ouvrages cités sont entre guillemets. Les noms propres sont en capitales. Les mots-clés sont en minuscules.

Les nombres en chiffres gras indiquent le numéro du bulletin ; ils sont suivis de l'indication de la page (chiffres maigres).

F

G

H

I

L

M

N

O

NOUS AVONS ÉDITÉ POUR VOUS

● *ACTION PÉDAGOGIQUE*

A. Stern	**L'expression**	**12.—**
H. Roorda	**Le pédagogue n'aime pas les enfants**	**12.—**
J. Depouilly	**Culture et expression**	**12.—**
J. Krishnamurti	**De l'éducation**	**12.—**
P. Chauchard	**Le cerveau et la main créatrice**	**10.—**
G.-H. Luquet	**Le dessin enfantin**	**12.—**
Ed. Gilliard	**L'école contre la vie**	**10.50**

● *ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES*

J. Thyne	**Psychologie de l'apprentissage et techniques d'enseignement**	**26.—**
B.-A. Akhurst	**L'évaluation de l'aptitude intellectuelle**	**25.—**
J.-P. Descombes	**Intérêts et choix professionnels**	**36.—**
A. Michelet	**Les outils de l'enfance**	
	Vol. I. La pédagogie de l'action	**36.—**
	Vol. II. La conquête de l'intelligence	**32.—**
A. Girolami-Boulinier	**Acquisition du vocabulaire** Conditions d'apprentissage au niveau du cycle primaire	**12.—**
S. Borel-Maisonny	**Grammaire en images** De l'orthographe à la pensée	**26.—**

● *LES MATHÉMATIQUES MODERNES A L'ÉCOLE PRIMAIRE*

L. Vandendriessche

Préparatoire et élémentaire 1re année :

Le livre de l'élève No 1	**15.—**
Cahier de travaux pratiques No 1	**2.—**

Elémentaire 1re année :

Le livre de l'élève No 2	**15.—**
Mise à jour du manuel No 2	**6.—**
Cahier de travaux pratiques No 2	**2.—**

Elémentaire 2e année :

Le livre de l'élève No 3	**15.—**
Cahier de travaux pratiques No 3	**2.—**
Le livre du maître No 3	**39.50**

Cours moyen 1re année :

Le livre de l'élève No 4	**15.—**
Cahier de travaux pratiques No 4	**2.—**
Le livre du maître No 4	**45.—**

Ces ouvrages sont en vente dans toutes les librairies et aux

ÉDITIONS DELACHAUX ET NIESTLÉ

4, rue de l'Hôpital, 2001 Neuchâtel - Tél. (038) 25 46 76

mathématicien a une activité spécifique et qu'il n'est pas possible de fondre tout simplement l'enseignement de la langue maternelle et celui de la mathématique.
En première approximation, le mathématicien exerce une activité globale à propos de mathématiques. La banalité affligeante de cette proposition ne doit pas nous en dissimuler certains aspects positifs. Ainsi l'élève placé dans une situation problématique faisant intervenir de la mathématique agira en mathématicien dans la mesure où il investira la totalité de ses ressources conscientes, imaginatives, sensibles, affectives et caractérielles. Voilà qui n'a pas toujours été observé strictement à l'école. La leçon de mathématique fut souvent un apprentissage de la docilité, de la répétition de schémas-types et de la fidélité dans les petites choses plutôt qu'une recherche passionnée impliquant toutes les composantes de la personnalité. En vertu de quoi les professeurs de littérature ou de philosophie détournaient leurs ouailles de la mathématique sous prétexte qu'elle tuerait leur imagination.
Il est évident qu'on ne caractérise que très imparfaitement l'activité du mathématicien en disant qu'elle s'exerce sur de la mathématique. L'objet transforme le sujet. Les professeurs de français et de mathématique à la recherche d'objectifs communs ont beau tomber en arrêt devant une phrase telle que: «Choisir une langue adéquate». La discussion révèle bientôt que les mathématiciens entendent par là: «Forger une terminologie cohérente, mais arbitraire; convenir de certaines locutions, de certains abus de langage autorisés en vue de traiter un problème déterminé». Les professeurs de français y voient au contraire: «S'installer dans une langue adaptée au message, que ce soit la langue livresque, celle de la famille, des enfants ou des journalistes». On voit que le mathématicien insiste sur le caractère arbitraire de son choix et que cela colore vivement son acte.
Pour mieux discerner les accents et les tonalités propres à l'activité du mathématicien, il faut revenir à ce qu'est essentiellement la mathématique, à savoir la science des systèmes formels. Il est nécessaire de cerner cette notion en quelques mots. On détermine un système formel en se donnant d'abord une collection de termes (c'est-à-dire en évoquant l'existence de ces termes) et ensuite une collection de liaisons compatibles entre ces termes, liaisons qu'on appelle souvent axiomes du système formel. C'est découvrir entre ces termes de nouvelles relations qui soient compatibles avec les axiomes. Certaines de ces propriétés sont des conséquences logiques des axiomes. D'autres sont indépendantes des axiomes avec cette réserve qu'elles n'entrent pas en contradiction avec eux. Par exemple, on détermine un groupe en évoquant l'existence d'un ensemble de termes ou éléments et d'un ensemble de liaisons entre ces éléments exprimées par une loi de composition interne associative avec élément neutre, pour laquelle chaque élément admet un symétrique. Le fait que ces conditions ou axiomes du groupe sont compatibles découle de l'existence d'exemples de groupes, ne serait-ce que celui d'un groupe à un seul élément. Il existe des propriétés vraies pour tous les groupes, qu'on peut établir en ne faisant usage que des axiomes du groupe; par exemple, tout groupe admet un

sous-groupe particulier appelé centre du groupe. Il existe aussi des propriétés qui ne sont pas des conséquences logiques des axiomes mais qui sont compatibles avec eux; ainsi, on peut exiger qu'un groupe ait douze éléments et ne soit pas commutatif.

Le terme de système formel pourrait être remplacé par celui de système semi-fermé. Par exemple, la notion de groupe est fermée en ce sens qu'on peut toucher à l'un des axiomes du groupe sans que celui-ci perde son statut de groupe. Mais elle ne l'est pas entièrement parce qu'on peut adjoindre aux axiomes des conditions nouvelles pour autant qu'elles soient compatibles avec eux, comme on l'a vu. Aux systèmes formels ou semi-fermés, on oppose les systèmes physiques ou systèmes ouverts. Le chimiste qui étudie l'atome de chlore peut dresser une liste des propriétés connues de cet atome. A partir de ces données, il inférera de nouvelles propriétés plausibles de l'atome de chlore. Au cours de cette opération, il se sert de son modèle provisoire comme d'un système formel. Si l'expérience lui montre que ses prévisions sont fausses, il échangera certaines données jugées inadéquates contre d'autres qui ne sont pas compatibles avec les anciennes. Il ne cessera pas pour autant de donner le nom d'atome de chlore au système étudié.

Cet exemple permet d'entrevoir comment l'étude d'un système ouvert peut s'appuyer sur celle d'un système formel. On convient d'appeler «codage» une mise en correspondance des éléments constitutifs de deux systèmes. Si ce codage est adéquat, la connaissance du statut d'un des systèmes permet de découvrir ou de prévoir le statut de l'autre. Rien n'empêche de coder un système ouvert par un autre système ouvert; d'exploiter, par exemple, quelque analogie entre les individus d'une population et les molécules d'un gaz. Le codage d'un système ouvert par un système formel est à la base de l'application de la mathématique à d'autres sciences ou à la technique. Le mathématicien lui-même exploite des codages impliquant des couples de systèmes formels. Par exemple, en attachant à chaque polynôme réel en x son premier coefficient, qui est un nombre réel, on établit une correspondance entre le système des polynômes réels en x et celui des nombres réels, grâce à laquelle on montre sans peine que le produit de deux polynômes non nuls est non nul. Le mathématicien qui étudie les polynômes réels en x évoque au gré de sa fantaisie une constellation de systèmes formels liés à celui des polynômes et éventuellement liés entre eux. En observant et en exploitant des analogies entre ces systèmes, il découvre et prouve des propriétés des polynômes.

La notion de système formel suggère naturellement celle de jeu et, en réalité, beaucoup de jeux ne sont rien d'autre que des systèmes formels joliment présentés. Les systèmes formels auxquels s'intéresse la mathématique ont une portée et une signification beaucoup plus générales que la plupart des jeux. Néanmoins toute l'activité du mathématicien est marquée par ce trait essentiel du jeu: une composition subtile de nécessité et de liberté, l'exigence d'efficacité liée à l'attrait de l'acte arbitraire. Dès lors le mathématicien apparaît comme un personnage capable d'éprouver de la curiosité pour un système formel: porté par le besoin de découvrir et la joie d'inventer librement, il

évoque une constellation de systèmes formels liés de diverses manières à celui qui l'intéresse puis, en jouant sur ces multiples registres, il s'efforce d'attirer au jour des propriétés cachées du système étudié.
Cette description est encore bien vague. Mais elle fait ressortir déjà quelques caractères intéressants de l'activité du mathématicien. On a noté le goût des idées générales, celui du jeu, l'acceptation d'une exigence d'efficacité et l'ouverture à la liberté. En outre, pour manœuvrer simultanément sur divers systèmes formels, il faut savoir faire alterner très rapidement une vision globale et un regard plus focalisé, c'est-à-dire faire varier à volonté la largeur de son champ de conscience. D'autre part, l'étude d'un système formel déterminé peut contraindre à une analyse imprévue, longue et pénible d'un système très éloigné. En règle générale, le mathématicien est un secondaire, c'est-à-dire un personnage capable de contenir son impulsion initiale et de s'astreindre à de patients détours sans perdre de vue son but premier.
Ce qui précède peut servir de cadre à une réflexion plus poussée sur l'activité mathématique et c'est à quoi il faut se livrer lorsqu'on désire présenter les objectifs de l'enseignement mathématique sous forme d'une liste de comportements propres au mathématicien. «Créer à volonté un vocabulaire cohérent», «inventer par analogie», «changer de convention» sont des démarches propres à développer la libre créativité. «Mémoriser pour un temps donné», «oublier à volonté», «mener de front deux opérations différentes», voilà quelques activités qui réclament une forte emprise de la volonté sur l'ouverture du champ de conscience. Il n'est pas possible de procéder ici à une telle analyse, bien qu'elle soit très intéressante et très utile.
En revanche, il faut bien garder à l'esprit que cette analyse est insuffisante en elle-même. Elle conduit à l'élaboration d'un tableau plus ou moins structuré comportant une foule de gestes propres au mathématicien, qu'il est possible de reconnaître, de nommer et d'assigner comme buts à l'enseignement. Mais le mathématicien est par-dessus tout celui qui sait grouper en faisceau ces attitudes et ces comportements et les insérer dans une pensée en mouvement. Ce qui frappe lorsqu'on observe un homme de métier, ou un athlète ou un joueur d'échecs, c'est qu'ils exécutent en quelques secondes des opérations qui, à l'analyse, se révèlent d'une complexité surprenante. Il semble que le mouvement donne le pouvoir de passer en revue d'une manière succincte une multitude d'éventualités et d'y choisir avec une étonnante économie l'une des meilleures variantes. Il en est de même en mathématique où le moindre des problèmes fait surgir tant de cheminements possibles qu'il serait vain d'en dresser un inventaire complet dans l'espoir d'y découvrir les quelques rares intinéraires gagnants. On conçoit clairement que l'enseignement mathématique ne peut se borner à «décomposer les mouvements», en laissant à la providence le soin de les recomposer. Il doit mettre les élèves en mouvement, les plonger dans des situations mathématiques motivantes où les outils et les démarches mathématiques se révèlent efficaces. Le centre de gravité de l'enseignement se déplace de l'acquisition de notions vers l'initiation à la recherche. De plus, il convient d'imaginer des procédés développant spécifi-

quement la mobilité d'esprit des élèves. L'enseignement traditionnel favorise trop souvent la lenteur ou l'absence de réaction immédiate, le maître doublant son discours d'écritures au tableau noir, par exemple. Or, de même qu'il est impossible de sauter une haie au ralenti, beaucoup d'opérations mentales ne peuvent s'effectuer qu'à un tempo convenable. A titre de mesure concrète, il serait intéressant de constituer des séquences de clichés diapositifs projetés à l'écran durant des temps de plus en plus courts et présentant des phrases, des configurations, des consignes à suivre pour les clichés suivants, des images lacunaires ou faussées, etc., de manière à entraîner les élèves à voir vite, à voir l'essentiel, à penser instantanément.
La question posée était de caractériser l'activité du mathématicien. Ce qui précède est une réponse sans doute très décevante. Abstraction faite des imperfections supprimables, il ne peut en être autrement. Si l'on décidait d'étudier l'activité du footballeur, on pourrait rappeler les règles du football et préciser que le footballeur est un personnage qui se donne entièrement au football; on relèverait qu'en première approximation, il n'existe pas de différence majeure entre un footballeur, un lanceur de poids et un organiste, mais que le football développe particulièrement certains muscles, certains nerfs, certains traits de caractère et certains comportements sociaux. Cependant rien ne vaudrait une participation physique ou tout au moins visuelle à l'entraînement et à des rencontres de football. Il en est de même pour la mathématique, à cela près que le profane n'est pas admis dans les séminaires de mathématique, que les conférences publiques de mathématique sont des spectacles d'illusionnistes et que les souvenirs d'école qu'on peut avoir font bien peu de place à une véritable activité mathématique.
Toutefois, s'il est impossible de cerner par des mots l'activité du mathématicien, il est relativement facile de montrer ce qu'elle n'est pas. Ainsi le fait que la mathématique est la science des système formels pourrait suggérer que la formalisation est une composante de l'activité mathématique. Or si les mots ont un sens, il faut admettre que la formalisation consiste à associer à un système ouvert un système formel qui présente avec lui des analogies utilisables. Donc le mathématicien en tant que tel ne formalise jamais, car on ne saurait formaliser ce qui est déjà formel. Il convient donc de renoncer à tenir la formalisation pour l'un des piliers de l'activité mathématique.
Cela n'entraîne d'ailleurs pas que la formalisation soit supprimée des leçons de mathématique. Sans doute pourrait-on concevoir, à la rigueur, un apprentissage strictement borné à la mathématique, par l'intermédiaire de jeux, par exemple. Mais les principaux systèmes formels apparaissant en mathématique élémentaire — celui des nombres naturels, la droite réelle, le plan et l'espace euclidiens, entre autres — tirent une bonne partie de leur importance des codages où ils sont associés à des systèmes physiques très communs. Le maître doit donc consacrer une part de son enseignement à la formalisation. C'est d'ailleurs pour lui une aide, ne serait-ce qu'afin de mieux mettre en évidence les propriétés respectives des systèmes formels et des systèmes ouverts. Mais il se tromperait lourdement s'il voyait là une démarche typiquement mathéma-

tique et s'il croyait que tout fait mathématique élémentaire résulte d'une formalisation. (Il est douteux qu'on puisse découvrir la proposition «pour tout nombre naturel a, *il existe un nombre naturel strictement plus grand que* a» *en manipulant des corbeilles de vraies pommes.).*

Le jargon des mathématiciens et les souvenirs scolaires peuvent suggérer que l'action mathématique est essentiellement de l'ordre de l'opération, celle-ci étant entendue comme une transformation modifiant un objet initial de manière à construire un objet final. Le physicien qui prend un cube de glace et le pose sur une source de chaleur recueille peu après une certaine quantité d'eau. Il a transformé la glace en eau et il peut écrire une formule telle que:

$$\textit{glace} \xrightarrow{+\ \textit{chaleur}} \textit{eau}$$

Qu'en est-il pour le mathématicien? Il emploie constamment les termes d'«application», de «transformation», d'«opérateur». Aucun d'eux ne désigne une transformation au sens donné plus haut. Considérons par exemple la «transformation» qui envoie chaque nombre naturel sur son triple. Pour le mathématicien, elle est simplement l'ensemble des couple (n, 3n), où n est un nombre naturel. Elle «envoie» 8 sur 24, mais 8 n'est pas modifié; 24 n'est pas construit: il n'y a donc pas trace de transformation. De même «2+3=5» ne désigne pas une opération sur des objets mathématiques. Cette écriture nous dit simplement que «2+3» et «5» sont des signes pour un même nombre. Si l'on remplace l'égalité précédente par «3+2=5», on n'effectue aucune transformation sur les nombres, mais seulement sur les signes. Alors que le physicien transforme à la fois les choses et les signes des choses, le mathématicien ne transforme que les signes des choses sans opérer sur les choses elles-mêmes. Les termes que le mathématicien emprunte au langage courant doivent être considérés par le profane comme de faux amis. Dans le cas présent, il semble particulièrement malheureux de présenter le mathématicien comme l'opérateur par excellence.

Des considérations analogues permettent de réfuter l'affirmation maintes fois entendue selon laquelle la mathématique serait un langage. Mais les rapports de la mathématique avec la langue sont nombreux et complexes. Il faut renoncer à en traiter ici. On peut regretter le caractère à la fois trop succinct, trop imprécis et trop général de ce qui précède, ainsi que le manque d'exemples concrets inspirés de ces remarques. De nombreuses expériences sont conduites en vue de centrer l'enseignement mathématique sur l'activité de l'élève. Elles ne sont pas toujours comprises. Certaines d'entre elles s'engagent sur des voies périlleuses. Ces lignes tendent à justifier les essais entrepris et à désigner quelques écueils.

Réflexions sur le renouveau de l'enseignement mathématique

par Georges Leresche, professeur de mathématique
à l'Ecole des sciences sociales et politiques de l'Université de Lausanne

La réforme de l'enseignement des mathématiques sensibilise les esprits, c'est le moins qu'on puisse en dire, et suscite des réactions fort diverses selon qu'on est chargé de l'élaborer ou de l'appliquer, ou que l'on est parent essayant de suivre l'apprentissage de ses enfants; on ne saurait négliger non plus les réactions de tous ceux qui s'estiment utilisateurs des produits finis de l'école — c'est à dessein que j'utilise cette formule choquante, qui correspond, hélas, à une réalité, l'enseignement étant, pour beaucoup, investi de la seule mission de fournir de bonnes «machines», en fonction des besoins actuels et sans souci ni de ce qu'est la réalité «intrinsèque» de l'enfant, ni de ce que sera le monde dans lequel il vivra demain. Ainsi, chacun se sent-il le droit — et la compétence — de poser ses revendications. L'université est en bonne place, dans ce mouvement, alors même qu'une faible proportion de la population scolaire aboutira aux études supérieures; mais l'université n'est pas à l'avant-garde de la rénovation pédagogique et elle juge encore sa clientèle à l'ampleur des connaissances acquises plutôt qu'à la qualité de la formation! Il faut dire que celle-ci est plus difficile à cerner que celles-là.
Quant au maître, il est amené à appliquer des méthodes pédagogiques nouvelles à travers l'enseignement d'une matière elle aussi profondément renouvelée, sans qu'il puisse toujours reconnaître les objectifs immédiats et encore moins percevoir les objectifs à long terme. Dans le meilleur des cas, il saisira que l'activité mathématque est indissociable des autres activités pédagogiques et qu'il y a là un phénomène nouveau susceptible de le motiver fortement sans qu'il puisse toujours discerner les critères qui président au choix de tel ou tel thème, de telle ou telle matière à enseigner.

J'aimerais tenter de cerner le projet à long terme de l'apprentissage mathématique. A l'idée que j'en ai n'est pas étrangère celle que je me fais du monde de demain où chacun devra, en particulier, se remettre en question plusieurs fois dans son existence. Les changements profonds ne suivent plus un rythme séculaire et l'avènement très récent d'une ère de haute technicité, par exemple, est déjà mis en question par l'impuissance actuelle de l'homme à en dominer les effets.
Aussi l'école ne peut-elle prédire quels sont les instruments qu'elle doit mettre en mains des jeunes; en revanche, elle doit enseigner l'ouverture, la reconnaissance et l'analyse des situations nouvelles et l'adaptabilité aux changements.
Quelle est, dans ce futur, la place de l'activité mathématique, en quoi peut-elle consister et comment puis-je imaginer les racines de l'arbre dont j'aimerais

cueillir quelques fruits? Enfin, ces racines peuvent-elles nourrir les autres branches, celles où viendront cueillir, par exemple, les écoles polytechniques, dispensatrices de formations de haute technicité ou, à l'opposé, les maîtres d'apprentissage?

Sur le plan qui me préoccupe — les Sciences humaines — on a maintenant dépassé le stade de la seule description statistique, à propos de laquelle on ne peut encore parler d'activité mathématique. Aujourd'hui, le mathématicien intervient du début à la fin d'une recherche, dans un travail de type interdisciplinaire. Si la recherche doit faire appel à des méthodes quantitatives, le mathématicien doit penser à l'avance aux méthodes d'analyse des données qu'il pourra être conduit à utiliser et qui lui permettront de sortir de la description «simplette», de manière à *organiser le plan des observations* et la *prise d'information*. Prise d'information et traitement des données dans des modèles mathématiques *sont alors indissociables*. Ce premier niveau de l'investigation procède, de manière importante, de l'activité mathématique et c'est dans cette perspective que m'intéresse le plus la formation élémentaire.

Mais j'aimerais prendre un exemple plus troublant d'investigation mathématique, parce que portant sur la phase préliminaire d'une recherche pour laquelle on n'aperçoit cependant pas quelles méthodes mathématiques — au sens traditionnel — vont pouvoir ensuite être mises en œuvre.

J'ai le privilège de travailler dans plusieurs groupes de recherche en psychiatrie — ce qui ne laisse pas de surprendre certains de mes amis qui ne voient vraiment pas ce que les mathématiques viennent faire là! En effet, les éléments sûrs d'information sont trop peu nombreux — par exemple en matière de diagnostic ou de traitement — pour qu'on imagine, à l'heure actuelle, des études statistiques, à valeur prédictive, de surcroît, en ce domaine. L'un de nos problèmes est l'évaluation d'une psychothérapie de groupe. L'ambition du mathématicien, devant un tel problème, ne peut être que limitée, mais c'est délibérément que je prends la situation la moins facile. Au moment de mon intervention, la psychothérapie est engagée depuis un certain nombre de mois, et toutes les séances ont été enregistrées sur bandes, avec le dessein d'en tirer les informations qui pourront permettre de saisir toute évolution du groupe. Ce projet louable se heurte à des difficultés: il apparaît très vite impensable de transcrire toutes les informations: il faut des heures à une secrétaire pour taper une seule séance; la transcription n'est pas toujours fidèle et enfin le «relief» de la chose écrite n'est plus comparable à celui de la chose parlée. Dernier point: l'utilisation concrète de cette information déjà modifiée, mais toujours aussi abondante et touffue, apparaît impossible.

Nous décidons alors d'une approche interdisciplinaire — psychiatres et mathématicien — de ce problème. Dans une première étape, le groupe en thérapie est analysé comme un graphe de communication — autrement dit, un ensemble sur lequel on étudie *les relations de communication*. Qui parle à qui, et comment (agression, sympathie, etc.), avec quelle intensité; y a-t-il des états d'équilibre, peut-on faire apparaître des (hyper)graphes selon certains types de relations? Etc., etc.

Cette approche est purement heuristique. Rien n'est quantifiable. Qu'importe! Les premiers graphes permettent d'emblée de «visualiser» l'histoire du groupe. Ils permettent d'en dégager une structure hiérarchique qui n'est pas indifférente à son fonctionnement. Mais surtout, il y a deux conséquences capitales pour les psychiatres engagés dans cette expérience:

1. Ils découvrent des façons méthodiques d'interroger les enregistrements faits; *ce qui était magma d'informations commence à s'ordonner.*
2. Ils ressentent la nécessité, devant l'évolution visible de la communication, de s'interroger sur la nature profonde de cette communication.

Il en résultera un pas important vers la détermination des objectifs d'une telle thérapie, puis vers une façon nouvelle d'exploiter les informations fournies par les séances (recueillies sur le vif, après avoir été codifiées, ou reprises des enregistrements, dont il devient possible d'amorcer une analyse sémantique). Enfin, le genre de structure mathématique utilisée permet l'étude de *l'évolution* du modèle.
Cette description est très partielle, bien sûr, et je ne la poursuis pas car il y faudrait un long développement, en particulier sur l'instrument mathématique qui va être utilisé au-delà de cette phase exploratoire. Notons en passant un point essentiel: l'effort d'abstraction et de «modélisation» que l'on aperçoit dans ce qui précède ne doit pas faire oublier la nécessité d'un retour périodique à la réalité, nécessaire à toute critique des méthodes et de leurs résultats.

Que tirer de cet exemple? A mon avis — et bien sûr parce que j'ai une foule d'autres situations présentes à l'esprit, en mon domaine et en d'autres — que l'activité mathématique [1] se diversifie d'une manière extraordinaire et que nul ne peut dire aujourd'hui quels seront les domaines où elle sera féconde demain, ni sous quelle forme d'ailleurs.
Mais ce qui me paraît important, c'est qu'elle ne s'exerce pas sur des «problèmes fermés» où tout est donné et où l'on demande, en quelque sorte, de déterminer simplement la valeur d'une inconnue. L'activité mathématique s'exerce dans toutes les phases qui vont de l'appréhension du réel à sa compréhension dans un référentiel adéquat, sans oublier le retour au réel, qui comporte une phase de critique; souvent même, il faut *inventer* l'instrument!
De plus, toute personne qui cherche à *structurer* son appréhension et sa compréhension des situations concrètes, à voir et à formuler les problèmes, exerce déjà une part d'activité mathématique; celle-ci n'est plus symbolisée par la présence de calculs, de formules, etc.
On aura compris sans doute mon adhésion à tout renouvellement de l'enseignement mathématique fondé sur une activité des enfants qui s'exercent à

[1] Je ne parle pas ici de la recherche mathématique proprement dite.

appréhender les situations concrètes, à les organiser, à confronter leurs résultats et à constater que les approches sont multiples, qu'il n'y a pas *une* méthode a priori, ni une solution toute faite — cette fameuse solution que l'enseignement traditionnel met dans le livre du maître et qui est son oreiller de paresse, tout en contribuant à inculquer le mythe de la science *exacte*, cet obstacle épistémologique fondamental qui va figer ces cerveaux que l'école traditionnelle livre aujourd'hui à des utilisateurs tout à la crainte d'être mis en question demain.
Car enfin, que nous apporte le calcul, par exemple, avec ses processus algorithmiques que l'on *met dans la mémoire* de nos enfants, ou la règle de trois, algorithmique encore et seulement, tant qu'on n'en montre pas le caractère général, tant qu'on ne fait pas construire des abaques, par exemple, démystifiantes, puisque le même instrument permettrait de résoudre les problèmes de baignoires, de trains qui se croisent ou se poursuivent, de capitaux qui rapportent (bien sûr), etc.?
Et l'algèbre élémentaire, encore de type algorithmique, où l'on appelle x l'inconnue, et où l'on transcrit ensuite un problème «tout cuit»?
Où est l'activité mathématique en tout cela?

Mais voilà aussi où le bât blesse. La critique que je viens de faire, en passant, de l'enseignement traditionnel porte plutôt sur l'oreiller de paresse qu'il est devenu. Or, il n'est pas seul à courir ce danger. Je ne saurais assez dire combien m'inquiète la possibilité de voir l'enseignement nouveau *se figer à son tour au niveau purement formel*. A. Delessert a écrit: «La mathématique est la science des systèmes formels». Combien cette proposition me paraît dangereuse en ce sens qu'elle peut n'être comprise que trop partiellement, et conduire à n'enseigner qu'un vocabulaire et une syntaxe, relativement pauvres parce qu'on en aura évacué les significations! Je ne veux pas ramener la conception mathématique d'A. Delessert à cette seule proposition, puisqu'aussi bien il l'a développée longuement dans des articles où l'on peut voir qu'elle n'est point sommaire. Je crains cependant qu'elle ne soit prise à la lettre et qu'elle ne conduise certains à un enseignement dogmatique.

J'ai situé, en utilisateur partial, quelques aspects de l'activité mathématique de base. Mais qu'en est-il pour l'élève qui entrera demain dans une école polytechnique ou en apprentissage?
Depuis longtemps, je me procure du bois — j'aime faire de la menuiserie... — dans une grande scierie où un employé appliqué me faisait, il y a quelques années encore, des devis soignés, comportant de nombreux calculs qu'il calligraphiait sur des bouts de papier: longueur x largeur x épaisseur x prix au mètre cube et selon bois et qualité, façon, etc. Aimait-il le bois, mon contremaître, ou les calculs? Aujourd'hui, nous discutons bois — et j'ai mesuré combien il l'aimait. Il me conseille; il m'établit aussi plusieurs devis si nécessaire. Et je passe la moitié moins de temps avec lui. Pourquoi? parce que la machine à calculer qu'il a devant lui répond instantanément aux ordres

intelligents qu'il sait lui donner. Mais lui est revenu aux vraies significations de son travail. La gestion de ses stocks lui demande plus d'activité mathématique que tous les calculs qu'il avait pu faire de sa main. En outre, j'ai admiré qu'il se fût si aisément adapté à cette forme nouvelle de son activité.
Je me dispenserai d'une trop longue réflexion sur les besoins de nos écoles polytechniques. Il me paraît évident que la «haute technicité» de l'enseignement qu'on y dispense n'est rien en regard du haut niveau de réflexion auquel l'ingénieur devrait aujourd'hui être formé et auquel il doit avoir été préparé très tôt. Car les succès de la technique, immense et d'une rapidité prodigieuse, comptent peu face à l'absence de réflexion sur leurs incidences à l'échelle de l'humanité; la technique et une réflexion globale sur ses finalités sont indivisibles. Pour les futurs cadres technocratiques plus que pour tous les autres m'apparaît indispensable une préparation précoce à la réflexion sur des problèmes ouverts, à une mise en question des méthodes prétendûment infaillibles, à une interrogation permanente sur l'ensemble des objectifs à atteindre.

Voilà! Et tout cela je n'ai pas cerné, défini ce qu'est l'acte mathématique. Je crois seulement le percevoir dans les multiples activités de recherche ordonnée, structurée, modélisée de l'homme. Que l'enseignement éveille la curiosité, suscite la recherche des significations, apprenne la quête des méthodes et la prise de décision, et que ce soit dans ce contexte qu'il dispense des connaissances dont on vérifiera non la simple acquisition mais les possibilités d'utilisation, d'opérationnalisation, cela me paraît un bon projet.
Que l'on sache aussi reconnaître tout ce qui est processus algorithmiques et qu'on apprenne à les programmer — ce qui fait intervenir une activité mathématique non banale — tout cela me paraît un bon projet.
Mais un projet difficile.
Que ceux qui exploitent les réels dangers que comporte cette ambition pour mieux la contester veuillent bien cependant appliquer aussi leur méthode à l'enseignement d'hier.

Dans l'enseignement élémentaire, c'est l'activité mathématisante qui constitue la mathématique

par Walter Senft, professeur de mathématique à Zurich et
Rémy Droz, professeur de psychologie à l'Ecole des sciences sociales et politiques de l'Université de Lausanne

La mise en place d'un enseignement de la mathématique destiné aux enfants est en progrès. Mais l'objectif relatif à cette mise en place et à ce progrès demeure souvent bien vague. C'est inquiétant.

Les idées que l'on se fait de l'enseignement de la mathématique ont de la peine à se libérer d'un certain «idéal classique» qui ramenait l'enseignement du calcul et des mathématiques à une information sur des concepts et leur apprentissage à l'acquisition de savoir-faire obtenus par une sorte de dressage, et mesurés ensuite par les pédagogues.

La mathématique ou les mathématiques sont fréquemment identifiées à un édifice formel, refermé sur lui-même, achevé et constituant le savoir relatif aux structures numériques et géométriques. Enseigner les mathématiques revient alors à «présenter ce savoir et ses applications»; apprendre la mathématique revient à «assimiler ce savoir et à s'exercer à en maîtriser les applications». On peut, ici, se demander si ces enseignement et apprentissage ont leur place dans l'enseignement élémentaire, d'autant qu'ils paraissent se surajouter à l'étude traditionnelle de l'arithmétique.

Il ne saurait ni ne devrait en être ainsi. L'introduction des mathématiques dans l'enseignement élémentaire implique qu'on les comprenne d'une manière différente de jadis et que leur apprentissage ait, lui aussi, un caractère nouveau. Il ne s'agit plus de faire apprendre aux enfants ce que d'autres, avant eux, ont pensé, mais, bien au contraire, de les mettre dans des situations qui les obligent à penser par eux-mêmes. Leur penser est une activité pleinement mathématique, c'est une «activité mathématisante».

Si l'on voulait enseigner aux enfants les mathématiques considérées comme la «science des systèmes formels» — et cela serait sans doute possible grâce aux techniques issues de la psychologie de l'apprentissage — il faudrait inévitablement rigidifier et simplifier cette science, la rendre concrète, en un mot la banaliser. Une telle manière de faire est visible dans un grand nombre de manuels dits «modernes». Les mathématiciens ne peuvent que s'insurger contre de telles «manipulations» qui sont en contradiction avec leur science; celle-ci ne peut être abordée de manière aussi primitive et faire l'économie d'abstractions nécessaires ainsi que de la précision formelle. Par ailleurs, une telle manière de procéder se heurte à des considérations d'ordre psychologique et

aux exigences classiques d'une pédagogie qui postule l'activité autonome de l'enfant. L'enseignement d'une mathématique purement formelle n'a été, n'est et ne sera jamais que destiné à des enfants en âge de manier les opérations formelles, et cela vers dix ou douze ans seulement.
Prise dans le contexte de l'enseignement élémentaire, la mathématique nous apparaît comme la conduite propre à l'enfant qui articule, ordonne, clarifie et comprend son univers. La mathématique coïncide avec l'activité spontanée de l'enfant. Le but de son enseignement consistera dès lors à promouvoir cette conduite spécifique, à la stimuler, à la développer.
L'école aura à offrir à l'enfant des situation concrètes, productrices de connaissances susceptibles d'être organisées et converties en «propriété intellectuelle». Il faut, pour cela, s'appuyer sur les activités des enfants. Cela est évident et conforme aux données de la psychologie génétique. Il y a activité déjà mathématisante au niveau préopératoire ou à celui des opérations concrètes pour autant qu'on prenne en compte l'activité spontanée des enfants. En revanche, cette même activité mathématisante s'évanouit si l'on contraint ces mêmes enfants à manier artificiellement des objets formels.
Il en résulte que l'étude trop précoce des mathématiques formelles met en cause une pédagogie qui se donne pour objectif le développement cognitif de l'enfant. Une autre manière de biaiser la pédagogie consisterait aussi à mettre l'enseignement des mathématiques au service de l'accélération de l'apprentissage de l'arithmétique. Le vocable «mathématique» sert alors à désigner une modernisation de l'enseignement du calcul. On se sert de concepts techniques et de modes de représentations empruntés aux mathématiques soit-disant modernes en les privant, le plus souvent, de leur véritable contenu mathématique. Cela est manifeste actuellement dans plusieurs cantons de la Suisse alémanique.
Mais revenons aux activités, aux conduites propres à l'enfant. Qu'est-ce qui leur confère leur caractère mathématique ou «mathématisant»? Comment pouvons-nous les susciter? Et tout d'abord, comment pouvons-nous les reconnaître?
Il n'est pas possible de répondre à de telles questions par un bref propos théorique. Il faut, bien davantage, essayer d'appréhender les choses dans le concret de l'enseignement, les apports de la mathématique elle-même et de la psychologie devant nous aider seulement à saisir les données de nos problèmes et à réfléchir sur elles.
En premier lieu, il s'agit de regarder faire les enfants et de les écouter pour que nous soyons en mesure de repérer leurs propres mathématisations et de centrer sur elles nos efforts pédagogiques. C'est l'expérience pratique qui doit servir de fondement à un enseignement des mathématiques susceptible à son tour de stimuler le développement cognitif de l'enfant. Partir des expériences des enfants autorise un certain optimisme quant à l'avenir de l'enseignement des mathématiques. Vouloir s'en écarter comme le fait parfois l'école commande une certaine prudence.
Vouloir définir des «activités mathématisantes» fait courir un danger très réel,

celui de limiter, de restreindre l'ouverture d'esprit que nous voulons justement assigner comme objectif à l'enseignement de la mathématique. Ce danger est perceptible dans les tentatives des théoriciens des «curriculums» qui ont fait de l'enseignement de la mathématique le champ privilégié de leurs tentatives d'opérationalisation du travail scolaire.
Essayons de poser quelques jalons.
Les «activités mathématisantes» n'impliquent pas la récolte préalable de données spécifiques et supplémentaires. Elles consistent dans la pratique d'une clarification des choses que nous offre l'environnement immédiat. Elles diffèrent de la recherche scientifique qui se donne un substrat spécifique — naturel ou social — sur lequel elle opère.
L'activité mathématisante est indépendante des données de l'expérience; elle n'existe qu'à partir de l'action qui s'exerce sur elles, à partir de leurs articulations. La mathématique invente des articulations et réfléchit sur elles. On peut dire, dans une certaine mesure, qu'elle crée elle-même son propre objet. Faire de la mathématique, c'est opérer avec des objets.
Nous distinguerons deux niveaux:

1. *Faire des expériences à partir d'une situation concrète; articuler, ordonner ces expériences; c'est-à-dire mathématiser cette situation concrète.*
2. *Opérer sur les articulations perçues et reconnues, saisir des relations, des interdépendances en vue d'articulations supérieures; c'est-à-dire mathématiser une situation modèle.*

La suite logique d'un tel processus peut conduire à des théories toujours plus générales: la mathématique se mathématise toujours à nouveau.
La mathématique de ce siècle semble se caractériser par une tendance à vouloir se comprendre et à se décrire avec des moyens nouveaux, recherchant des voies neuves et renonçant aux idées arrêtées une fois pour toutes.
D'où le paradoxe d'une pédagogie qui, se fondant sur une telle mathématique, voudrait fixer le plus vite possible et avec la plus grande rigueur le comportement intellectuel des enfants (en se donnant, par exemple, des objectifs ressortissant aux apprentissages d'adultes). La mathématisation enfantine requiert un zone de liberté qui permette le jeu de modes de compréhension et de représentation inattendus et nouveaux. Notons que ces modes peuvent fort bien être aussi précis, aussi rigoureux, aussi défendables et appropriés aux situations que ne le sont les idées courantes et les représentations toutes faites.
Lorsqu'on parle d'activité mathématique, on évoque volontiers une performance de l'intelligence appliquée à résoudre un problème. Il peut fort bien, alors, ne s'agir que d'un processus schématique et reproductif, destiné à la seule application d'une stratégie de solution longuement exercée. Or, dans la plupart des cas, la solution d'un problème implique le fonctionnement de la pensée en tant que composante productive chargée de créer du nouveau, de trouver la voie menant à un but donné. La pensée est, dès le début, foca-

lisée sur la solution; toutes ses productions y convergent. Il s'agit, somme toute, d'expliciter la solution impliquée par le problème posé, c'est-à-dire, tout uniment, de trouver la réponse. Cependant, à côté de cette recherche assez «unidimensionnelle» de la solution, on voit aussi opérer une pensée productive qui attaque des situations ouvertes, les articulant et les façonnant. Cette pensée productive est créatrice; elle se pose elle-même des problèmes, étant fascinée par ce qui n'est pas encore clair ou transparent.
Ainsi, l'activité mathématisante dans l'enseignement élémentaire surgit moins à partir de problèmes bien précis qu'en vertu du fonctionnement d'une pensée divergente et créatrice mise en branle, très souvent, par des situations de jeu. L'enseignement élémentaire sert à constituer un fonds d'expériences mathématiques. Les instruments de clarification qui seront utilisés plus tard doivent d'abord être créés, leurs effets comme leur utilité doivent être expérimentés. C'est pourquoi le fait de collectionner et d'articuler de telles expériences constitue, ici, un but en soi. Un enseignement vivant sucitera toujours à nouveau des situations fécondes provoquant un conflit cognitif commandant luimême des clarifications réalisées avec les instruments que l'enfant se sera donnés.
La liste suivante tente de profiler le contenu des activités mathématisantes qui nous paraissent essentielles au niveau de l'enseignement élémentaire.

1. Symboliser. *Ce terme est pris dans son sens le plus large. Il s'agit de développer la capacité de l'enfant à représenter ce qu'il a expérimenté, reconnu ou compris, et à expliciter ses schémas de pensée. Les moyens linguistiques ne sont pas les seuls à assurer cette symbolisation. D'autres modes de représentation, tout aussi importants, peuvent être pris en considération: l'action elle-même réalisée ou la notation graphique. Notons que la mise en place de systèmes de signes destinés à rendre claires des structures doit être très soigneusement préparée: elle occupe une place centrale en mathématique.*
2. Classifier. *Il s'agit du principe de l'articulation destiné à préparer l'abstraction. La conceptualisation, le repérage du différent, du constant et de l'équivalent suscitent de nouvelles totalités. L'articulation n'est pas autre chose qu'une interaction entre concepts individuels et concepts collectifs ou, pour parler mathématique, entre éléments et ensembles. Un ensemble n'est pas autre chose que le schéma de l'action «mettre ensemble» condensé en concept. C'est d'ailleurs un schéma fondamental de l'activité mathématique. Ce schéma de base servira toujours à nouveau pour préciser des concepts en extension: quels sont les éléments appartenant à tel ensemble? Lorsque l'articulation se fait simultanément à partir de plusieurs points de vue, cela conduit à des expériences sur les ensembles eux-mêmes et leur ordonnancement hiérarchique.*
3. Comparer. *Les comparaisons sont en étroite relation avec la classification. Elles établissent des relations multiples entre les objets. Les champs de l'expérience se structurent toujours au moyen de relations. Le mathémati-*

cien «théoricien» procède à partir d'éléments structuraux isolés qu'il réunit ensuite en formes plus complexes. On peut, tout aussi bien — et c'est souvent le cas pour les enfants — partir du multiple et se laisser fasciner par toutes les relations possibles. Ce qu'on vise, ce n'est pas telle structuration particulière, mais bien davantage l'appréhension d'un domaine d'expérience à partir de points de vue toujours nouveaux. Signalons que les enfants créent et préfèrent souvent des relations fonctionnelles (je peux mieux utiliser ce bloc-ci que celui-là). Ils peuvent même aller jusqu'à déclarer que deux plots sont de la même couleur (parce que cela est nécessaire dans le contexte de leur jeu), alors que, considérés objectivement, ils sont de couleurs différentes.

4. Systématiser des actions. *Les relations qui rendent compte de situations dynamiques sont particulièrement importantes. Elles sont reliées de manière très primitive à l'action comportant elle-même une dynamique, un devenir. La mathématique, en effet, n'établit pas seulement de simples relations, elle crée, à partir de nos actions ou de nos opérations, des* systèmes *de relations. Ainsi, aux expériences portant sur des objets, s'ajoutent d'autres expériences portant sur notre action elle-même. On s'attache à des séquences d'actions, on en observe les effets et les interactions: correspondances, substitutions, compositions.*
5. Quantifier. *Lorsque la comparaison se précisant débouche sur des quantités, il y a* activité quantificatrice. *Ainsi pouvons-nous coordonner le domaine des objets «réglettes» à celui, quantitatif, des «longueurs» et le domaine des ensembles à celui, quantitatif aussi, des cardinaux. C'est d'ailleurs dans ces domaines-là que s'enracine la notion de nombre. Les nombres, en effet, désignent une quantité par comparaison à une unité (unité de mesure, ensemble à un élément, etc.).*

Toutes ces activités sont élémentaires. Nous pouvons en observer les formes les plus primitives dans le comportement quotidien d'un enfant de deux ans. Il est cependant possible d'agir sur leur développement en permettant à l'enfant de faire des expériences approfondies dans les situations les plus diverses. De telles activités se développent, selon la psychologie génétique, de deux à onze ans d'âge, environ. Elles croissent lentement en passant par une série de stades intermédiaires que la pédadogie se doit de respecter. Nous pensons, en effet, que les systèmes de pensée et que les modes d'argumentation des enfants ont pleinement le droit d'exister et qu'il n'y a aucune raison objective de forcer l'enfant à faire usage précocement des schémas de pensée propres aux adultes.

A propos de l'activité mathématique

par Jean-Blaise Grize, professeur de logique à la faculté des lettres
de l'Université de Neuchâtel

Il est commode de dire que l'école romande enseignera désormais la mathématique nouvelle dès la première année primaire. La formule est moderne, elle est concise, mais je la crois fort dangereuse. Elle est de nature à faire croire que l'enfant va «faire» de la mathématique dès l'âge de six ans, comme s'il allait reconstruire les fondements de l'arithmétique et jeter les bases de la théorie des ensembles. L'illusion serait aussi fâcheuse pour les maîtres que pour les élèves, pour les mathématiques que pour le développement de l'intelligence. En fait et grâce au ciel, ce dont il est question dans la réforme, c'est d'exercer certaines activités de l'enfant, c'est de l'aider à prendre conscience de quelques-unes de *ses* opérations. Mais pas n'importe lesquelles, dira-t-on. Celles qui constituent ces «actes mathématiques» dont *Math-Ecole* se demande à juste titre ce qu'ils sont vraiment. Et la question est bien alors de savoir s'il est possible «de définir si clairement l'acte mathématique, que quiconque sache le reconnaître partout où il existe».[1]

Le problème est bien posé: c'est affaire de définition et de définition seulement. Se demander à quels signes reconnaître l'acte poétique, n'a de sens que si l'on décide de la nature de la poésie. Mais l'on voit bien où se situe la difficulté. Parler des pieds et des rimes constitue un critère «objectif». Quel poète cependant l'admettra aujourd'hui comme pertinent? Il semble que, pour la mathématique, on ait à choisir entre «la science des systèmes formels» et «les transformations opératoires». Je voudrais suggérer que l'éventail est trop pauvre.

Dans ce même texte introductif, S. Roller rappelle que, pour Piaget, une opération est un acte qui transforme réellement une situation. Que cette transformation soit effectuée matériellement ou symboliquement.[2] Il s'ensuit que manger une noix, dire «j'ai mangé une noix», soustraire une unité au cardinal d'un ensemble constituent autant d'opérations. La première transforme une situation concrète, la deuxième transforme l'image que l'on a de soi et d'un certain contexte, la troisième transforme un concept. Bien entendu, la psychologie génétique ne concevrait pas la première transformation comme une véritable opération. Elle n'est ni intériorisée (même s'il s'agit ici de manger!), non composable avec d'autres, ni surtout réversible. Mais qu'en est-il des deux autres? Parler et calculer s'opposent-ils ou, d'une certaine façon, serait-ce la même chose? C'est ici que l'on a coutume de parler de codes, de symboles,

[1] Texte introductif de S. Roller, p. 4.
[2] Ibid., p. 4.

de règles, ce qui soulève toute une série de questions très complexes, dont celle de comprendre comment il se fait que, à six ans, l'enfant sache parler et ne puisse pas construire les parties d'un ensemble fini. Au fond, il ne s'en faudrait pas de grand-chose pour que l'on puisse montrer qu'il lui est impossible d'apprendre les règles de sa langue maternelle avant d'en être au niveau des opérations hypothético-déductives. Cela se prouverait et la nature aurait mal assimilé la théorie!
Ce qui semble certain, c'est que parler et calculer (au sens large du terme) ont tous deux affaire avec penser, et que toute pensée requiert des activités de représentation. Or, et même si Aristote l'avait déjà dit, il n'y a pas de représentation qui ne soit simultanément forme et contenu, qui ne relève pas à la fois d'une composante structurale et d'une composante objectuelle. Ceci conduit à examiner trois points: la notion d'objet, celle de règles et celle de la prise de conscience d'une activité.

1. Piaget a maintes fois insisté sur le fait que toute opération portait sur des objets. Si, en faisant abstraction de ce qui constitue en somme le support de l'action, on en vient à réfléchir sur l'action elle-même, alors on adopte une certaine attitude qu'il est légitime d'appeler *mathématisante*. Seulement cette visée, cette orientation n'implique nullement que l'objet ne compte plus, ni en conséquence que l'on soit en train de faire de la «science des systèmes formels». D'abord, il y a des objets qui ne se laissent pas faire. Il est très malcommode de réaliser «la synthèse opératoire des groupements de classes et de relations asymétriques» en s'exerçant sur des gouttelettes de mercure. Il se trouve aussi qu'il existe un certain nombre de problèmes qu'un adulte, en possession de toutes les opérations requises, ne parvient pas à répondre. L'objet, en tant que tel, a donc son mode d'existence et il est possible d'en distinguer de diverses sortes. Le jeune enfant auquel on donne des feuilles de hêtres peut bien les réunir, et même physiquement. La collection qu'il obtient est d'une autre nature que celle qu'il pourrait construire avec des cartes qui portent le dessin d'une feuille de hêtre et de toutes façons, on aura là des «objets» profondément différents du $\{x/hx\}$ du mathématicien, différents encore des lettres grecques minuscules d'un système formel. Dès lors, si le double aspect forme-contenu est un fait authentique, opérer sur des feuilles d'arbres, sur des dessins, sur des ensembles ou sur des lettres correspond à des opérations distinctes. On peut estimer — et les psychologues nous l'assurent — que des activités sur des feuilles préparent utilement des activités sur de purs symboles. Mais il serait faux de s'imaginer qu'en travaillant (le jargon scolaire dit: en jouant) avec des objets concrets, on travaille sur des objets de la mathématique, encore moins sur des *obs* (comme dit Curry) d'un système formel.

2. Qu'en est-il alors des règles de manipulation? On nous dit que l'enfant doit les inventer, qu'il doit les créer pour les comprendre. Rien de plus vrai, mais à condition de moduler de deux façons cette vérité. Tout d'abord, des

règles opératoires qui portent sur des objets d'un certain niveau de concrétude ne sauraient être considérés comme identiques à des règles qui portent sur des objets d'un autre niveau de concrétude. Il suffit, pour s'en convaincre, d'évoquer les fameux décalages horizontaux: la conservation de la substance précède celle du poids qui, elle-même, précède celle du volume. Ensuite et pour un même contenu apparent, il existe des règles de nature différente, les unes plus globales que les autres. Le meilleur exemple en est certainement les procédures propres à former des nœuds. Il est profondément différent de savoir — même plus ou moins «algorithmement» — faire un nœud, reconnaître un vrai nœud d'un faux et rendre compte de tout cela à l'aide de concepts topologiques.

Alors se pose la question de savoir ce que l'enfant, ce que l'adulte moyen, peuvent réellement «inventer», ce qu'ils peuvent retrouver par eux-mêmes. A une époque où l'on insiste tout autant sur la communication que sur l'activité individuelle, ce serait une erreur de laisser entendre que l'on n'a pas besoin de ceux qui nous ont précédés, qu'il est superflu, comme le disait Newton, de monter sur les épaules des géants qui ont vécu avant nous. Il faut bien comprendre, en effet que les opérations dont parle Piaget, celles qui sont l'occasion des exercices scolaires, sont à la fois très pauvres et très élémentaires.

Pauvres, elles le sont en ceci que «mettre ensemble ce qui va ensemble», sérier des baguettes préfabriquées pour cela ne permet, à soi seul, pas grand-chose. Certes, il est facile de montrer que toutes les mathématiques sont pleines de relations d'équivalence et de relation d'ordre. Mais d'une part, il s'agit là d'une banalité en ce sens que la logique ne sait guère manipuler d'autres espèces de relations et d'autre part, ce qui est réellement fécond, ce sont les multiples situations de nature mathématique où ces relations figurent, non pas même comme éléments, mais comme ingrédients. Pour la même raison, il est en revanche vrai qu'elles sont élémentaires, ce qui veut dire deux choses. D'abord que l'analyse *a posteriori* finit toujours par les retrouver et généralement s'arrête à elles. Ensuite et inversément que l'on peut faire l'hypothèse que l'enfant, par des voies encore inconnues et qui donc ne s'enseignent pas se sert d'elles pour en construire de nouvelles.

3. Reste un dernier problème qui est celui de la prise de conscience. Peut-être est-il plus visible dans l'apprentissage de la langue maternelle que dans celui de ce qu'on convient d'appeler la mathématique. Ce sont deux choses absolument distinctes que d'apprendre et même de constituer des règles d'usage et rendre compte de ces règles. Après tout, on a parlé anglais avant Chomsky et on a fait de la mathématique avant Bourbaki. Bien plus. L'anglais-avant et la mathématique-avant n'étaient nullement d'une autre essence. Cela signifie que comprendre est un terme profondément ambigu. Euclide et Hilbert ont tous deux compris la géométrie, mais ils en ont saisi d'autres aspects, ils n'ont pas compris les mêmes choses. Leurs «objets» mathématiques n'étaient pas les mêmes. Dans ces conditions, au nom de quoi soutenir qu'ils étaient tous les

deux géomètres? Je répondrai qu'ils l'étaient en ceci que, a travers des actes très différents ils témoignaient d'une attitude semblable.
Or ce qui est vrai d'Euclide me semble l'être aussi de l'enfant. Nous ne l'amènerons pas l'école primaire, à construire des systèmes formels. Nous n'avons pas à nous demander comment reconnaître l'acte mathématique. Ce qui compte c'est l'orientation de ses activités qui elles, et selon la convention ci-dessus, peuvent être dites mathématisantes.
— Vous jouez avec les mots, direz-vous. Peut-être. Mais c'est alors que je les transforme et que je serais donc mathématicien.

A propos d'activités mathématiques au niveau primaire

par André Calame, professeur au Gymnase et à l'Université, Neuchâtel

Il y a quelques années, on pouvait poser sans crainte à un père de famille la question: «A quoi reconnaissez-vous que votre enfant fait ses devoirs de mathématiques?» Les réponses se ramenaient à quelques activités précises: «Mon enfant fait des mathématiques quand il effectue des calculs, quand il résout des problèmes, quand il récite la table de multiplication, quand il apprend une démonstration de géométrie». Posez aujourd'hui la même question à des parents dont l'enfant suit un enseignement modernisé de mathématiques; votre question prend aussitôt l'allure d'un piège et risque fort de déboucher sur une longue discussion sur les mérites des réformes récentes.

Au moment où, en Suisse romande, on introduit de nouveaux programmes dès la première année primaire, il est naturel de se demander en quoi l'activité des élèves sera plus proche qu'autrefois de la «vraie mathématique». Dans les commentaires annexés au Projet de programme romand de mathématique (CIRCE [1], janvier 1971) on lit: «Il est en effet impensable d'introduire la mathématique moderne à l'école primaire, de remplacer un langage traditionnel par un langage nouveau, plus général et souvent plus utile, sans influer également sur la didactique. De même, il serait regrettable de ne pas profiter de ce renouveau, qui a été favorisé en partie par les psychologues, sans offrir à l'enfant la possibilité de se livrer à un travail de recherche et de découverte dès qu'il aborde une notion mathématique». Les intentions sont claires: donner à l'enfant la possibilité de développer sa créativité, le rendre capable de mieux comprendre ce qu'il fait. Tous les nouveaux programmes y insistent, qu'ils soient d'ici ou d'ailleurs. L'enfant doit pouvoir dépasser le stade de l'exécutant et prendre conscience de ses possibilités. Mais, ne nous y trompons pas, des modifications de programmes n'y suffisent pas; il faut un changement beaucoup plus radical au niveau des relations maîtres-élèves. N'a-t-on pas critiqué avec raison certains exercices de mathématique (moderne) dont la formulation: «Prouver que...», «Vérifier que...» étouffe d'avance l'imagination!

Favoriser l'activité mathématique de l'élève suppose au préalable qu'on puisse cerner cette activité, la reconnaître quand elle s'exerce, l'encourager quand elle se manifeste. Tentons une approche très grossière de ce que sont les activités mathématiques, à la manière dont on définit un ensemble.

On pourrait essayer de définir globalement «l'acte mathématique» par ses propriétés caractéristiques. Je ne m'y risquerai pas ici, de peur d'en rester à des propos trop vagues. Toute définition en compréhension risque, en effet, de ne pas cerner d'assez près son objet.

[1] Commission interdépartementale romande de coordination de l'enseignement.

Une définition en extension consisterait à dresser une liste exhaustive des activités mathématiques. Enumérons quelques-unes d'entre elles d'après une liste d'objectifs parue dans le troisième volume des «Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique» (Unesco, 1972):

1. *Retenir ou rappeler des définitions, des notations, des opérations ou des concepts.*
2. *Manipuler et calculer rapidement et exactement.*
3. *Interpréter des données symboliques.*
4. *Traduire des données sous forme symbolique.*
5. *Suivre des preuves.*
6. *Construire des preuves.*
7. *Appliquer des concepts à des problèmes mathématiques.*
8. *Appliquer des concepts à des problèmes non-mathématiques.*
9. *Analyser et déterminer les opérations qui doivent être appliquées.*
10. *Créativité mathématique et généralisation.*

Bien que non exhaustive, cette liste est très riche en comparaison des objectifs de l'enseignement traditionnel de l'arithmétique.
En fait, je ne crois pas qu'on puisse définir les activités mathématiques comme un ensemble, autrement que par approximations, qu'il s'agisse d'une définition en compréhension ou en extension. Si les activités mathématiques formaient un ensemble, on devrait pouvoir décider si telle activité est oui ou non une activité mathématique. Par exemple, une démarche intellectuelle basée sur l'analogie est-elle une activité mathématique? Et l'organisation des données, la rédaction des solutions, l'estimation des résultats? Au lieu de se représenter intuitivement les activités par un diagramme de Venn, mieux vaudrait s'en tenir à une plage aux contours imprécis. Cette plage recouvrirait partiellement des plages voisines correspondant à d'autres activités intellectuelles faisant appel au raisonnement. Tant qu'on reste bien à l'intérieur de la plage, les activités sont de type nettement mathématique: calculs, démonstrations, etc. Dès qu'on s'éloigne par trop du «centre», l'aspect spécifiquement mathématique s'estompe. On peut au mieux approcher la plage des activités mathématiques par des ensembles, les uns englobant la plage entière — définitions en compréhension, mais imprécises — les autres étant entièrement contenues dans la plage — définitions en extension non exhaustives. L'apport des spécialistes de la recherche mathématique et des psychologues devrait permettre d'enserrer la plage de façon plus étroite par approximations successives.
Bornons-nous à esquisser le rôle que peut jouer l'analogie dans un enseignement élémentaire modernisé. Il ne fait aucun doute que l'analogie intervient dans la découverte, même au niveau le plus élémentaire. Celui qui reconnaît l'analogie entre la table d'addition de «pair» et «impair» et la table de multiplication de la «règle des signes» progresse vers la notion de groupe. Il s'agit là d'une analogie forte: un isomorphisme. D'autres analogies sont plus faibles.

Par exemple, un examen comporte l'exercice suivant:

Continue l'exercice en imitant l'exemple:

Phrases			infinitifs
Tu cherches des champignons	☆	☆	*parler*
Le train arrive en gare	☆	☆	*chercher*
Ces élèves parlent beaucoup	☆	☆	*tailler*
Nous marchons dans la forêt	☆	☆	*marcher*
Il taille son crayon	☆	☆	*arriver*

(Neuchâtel, 2e primaire, juin 1973)

Un élève s'exclame spontanément: «C'est comme en mathématique». Cette élève sait qu'il fait de la grammaire, mais il a conscience d'un lien avec les relations étudiées en mathématique, en particulier avec les bijections.

Toujours en suivant cette piste de l'analogie, on s'accordera certainement pour dire que l'enfant qui a maîtrisé une structure devrait être capable d'en donner des modèles ou de créer une structure analogue. On sait avec quelle richesse d'imagination certains élèves inventent des problèmes à l'intention de leurs camarades. Robert Deltheil écrivait: «Le mathématicien, lorsqu'il extrapole par analogie, s'expose à voir les faits lui donner un démenti; mais le risque ainsi couru ne saurait lui interdire cette forme d'exploration, pourvu que la logique ne perde jamais ses droits. L'exploration analogique conduit du reste dans certains domaines à des perspectives d'ensemble dont l'harmonie constitue un élément essentiel de la beauté des mathématiques» (in «Les grands courants de la pensée mathématique», Cahiers du Sud, p. 50).

Devant l'éventail des situations, des choix s'imposent. On en vient naturellement à se poser la question de l'évaluation. Le nouvel enseignement de la mathématique doit être évalué. Il est légitime de contrôler les expériences en cours et d'utiliser à cette fin des méthodes objectives. Le souci de définir l'acte mathématique n'est sans doute pas étranger à cette évaluation. On va donc se servir de tests et en tirer des mesures. Mon vœu serait le suivant: qu'on ne réduise pas artificiellement les activités mathématiques aux seuls comportements qui sont mesurables. On devrait pouvoir tenir compte de la réaction affective des élèves, de leur plaisir à découvrir, de leur enthousiasme, de leur joie. Il y a des qualités de vie, au niveau mathématique, qui se traduisent mal en quantités, en mesures. Qu'on ne les écarte pas de l'évaluation!

En résumé, deux aspects complémentaires se rencontrent dans les activités mathématiques. Il y a des moments, même dans un enseignement modernisé, où les élèves doivent s'astreindre au calcul, à l'utilisation des techniques, ce qui suppose un réel effort et souvent une lutte serrée. Mais une fois ce travail effectué, qu'on garde du temps et assez de temps pour jeter un regard reposé et neuf sur les résultats obtenus, sur leur signification, sur les méthodes employées. C'est le moment de la réflexion imaginative où naissent des associations d'idées, des rapprochements inattendus, où le rêve n'est pas interdit. Cette phase contemplative, trop négligée dans l'enseignement traditionnel, est la plus propice à une approche de l'aspect esthétique de la mathématique.

Sur l'acte mathématique

par François Bonsack, Institut de la méthode, Bienne

On peut d'abord se poser des questions sur ce qu'on entend par acte mathématique, sur ce qu'on attend de lui, sur les conditions qu'on impose à quelque chose pour qu'il ait le droit de s'appeler acte mathématique. Car, si je comprends bien, il s'agit de le faire valoir, d'en faire sinon un acte-roi, du moins un acte noble. Un acte, dont le mathématicien — et l'apprenti mathématicien qu'est l'élève — sera fier, dont il dira avec une certaine satisfaction: j'ai réussi, j'y suis arrivé, c'est moi qui l'ai créé.
Ceci étant posé, il est clair qu'on ne pourra pas conférer à n'importe quoi la dignité d'«acte mathématique». Et quand M. Roller pose la question: «Si l'activité mathématique est synonyme de cette opération...», je ressens une certaine inquiétude: est-ce que faire une multiplication, ou une intersection, ou encore une déduction, c'est vraiment faire «acte mathématique»? La dignité de l'acte mathématique réside-t-elle vraiment dans ce maniement de formalisme qu'un ordinateur ferait beaucoup plus vite et beaucoup plus sûrement que nous? Suffit-il de savoir appliquer des règles avec rigueur pour être bon mathématicien? M. Roller ne le pense finalement pas et il suggère qu'il faudrait laisser une place à l'invention.
On est donc conduit à une situation paradoxale: ce qu'il y a de noble, d'humainement valable dans l'acte mathématique, ce n'est justement pas son aspect spécifiquement mathématique. Le mathématicien novateur n'est jamais fier d'avoir appliqué correctement les règles mais au contraire d'avoir trouvé le moyen de traiter un problème qui ne se posait pas immédiatement en termes mathématiques. Le génie du mathématicien réside dans son aptitude à mathématiser une situation concrète, à créer un modèle qui lui permettra d'appliquer certaines méthodes existantes ou qu'il a créées ad hoc. Et c'est encore vrai au niveau de l'élève: le «fort en math» n'est pas ou ne devrait pas être celui qui applique avec bêtise et discipline des règles apprises par cœur, mais celui qui, mis en face d'un problème, trouve un moyen de le résoudre en s'aidant des structures qu'on a mises à sa disposition ou encore mieux en en imaginant de nouvelles. La vertu qu'il faudrait cultiver, c'est peut-être moins le souci de rigueur — qui a certes son importance — que l'*imagination mathématique* et l'agressivité en face d'un problème.
Ce n'est pas dans la mesure ou l'on a renseigné l'élève sur les grandes structures de la mathématique moderne qu'on le fera participer à l'effort mathématique de notre temps, c'est au contraire en lui proposant des situations à sa mesure, dans lesquelles il puisse appliquer les notions qu'il a apprises en leur ajoutant quelque chose qu'il n'a pu trouver qu'en lui-même et par lui-même. C'est en gardant à l'esprit cet objectif qu'on devrait choisir les matières — nouvelles ou anciennes — qu'on décidera de lui enseigner.

En forme de conclusion...

par Raymond Hutin,
directeur du Service de la recherche pédagogique, Genève

Est-ce bien nécessaire, n'est-ce pas outrecuidance que de prendre la plume après lecture de tant de prestigieuses contributions? Peut-on se risquer à une tentative de synthèse de textes qui eux-mêmes représentent la synthèse d'une réflexion approfondie et d'un labeur incessant?
Nous tenterons néanmoins, avec l'espoir d'aider le lecteur dans la poursuite de sa réflexion personnelle, de réunir les points essentiels de chaque contribution et d'en tirer notre propre conclusion.

G. Walusinski *attire notre attention sur la distinction entre la mathématique considérée comme science et l'enseignement de cette mathématique. Il met en évidence le fait que la diminution de l'écart entre la science vivante et la science enseignée implique* ipso-facto, *une modification des processus pédagogiques: «... rien ne sert de fournir à l'élève des mathématiques toutes faites... il est beaucoup plus fructueux de mettre l'apprenti en situation de mathématiser...».*
Cette action mathématisante se développe selon un schéma en forme de boucle qui part de l'observation du réel pour en abstraire un modèle mathématique. La déduction conduit à l'élaboration d'une théorie du modèle qui sera vérifiée par son application sur la situation réelle initiale.
Relevons encore que réduire l'activité mathématique à la démonstration, c'est l'amputer, c'est la priver de tout ce que l'action mathématisante peut apporter sur le plan de l'observation et de l'imagination et retenons: «...une conception de la mathématique qui en fait réellement la servante de la pensée créatrice, un apprentissage de l'action réfléchie et par conséquent un apprentissage de la liberté...».

A. Revuz *apporte une contribution fort utile à notre objet puisqu'il définit précisément qu'elle est la condition nécessaire pour qu'un acte soit mathématique.*
«... on n'est à même d'agir mathématiquement que si l'on s'est placé dans le cadre d'une théorie, c'est-à-dire si un certain nombre de principes ont été admis...» en d'autres termes il n'y aura acte mathématique que si l'on a défini les règles du jeu et décidé de ne les transgresser d'aucune manière. Pour Revuz comme pour Walusinski, mathématiser c'est, à partir de l'observation, bâtir un modèle que l'on substitue à la réalité pour mieux l'étudier. On n'entre véritablement dans l'acte mathématique que si l'on est à même de distinguer clairement ce qui est situation concrète de ce qui est modèle rationnel. Cependant ceci n'implique pas, comme on le rencontre parfois dans un enseignement

qui en devient stérile, que l'analyse des modèles puisse s'effectuer sans recours à la confrontation avec la situation réelle. L'acte mathématique commence donc lorsque le sujet prend un certain recul par rapport à son action, en d'autres termes lorsqu'il commence à réfléchir sur les règles et les contraintes qui le font agir.

La contribution de L. Jeronnez, *permet de citer quelques exemples, tirés de l'enseignement élémentaire, qui disent où est l'acte mathématique et où il n'est pas. «... L'enfant qui prend conscience de la notion cardinale du nombre à partir d'ensembles équipotents fait aussi de la mathématique. Mais l'enfant... qui dit 3+2=5, ne fait pas de la mathématique... Si le calcul numérique n'est pas de la mathématique, la découverte des propriétés des opérations est bien de la mathématique».*

Chez Z. P. Dienes, *la ligne directrice est plus nettement encore d'ordre didactique. Pour lui, dans un acte, il faut distinguer l'acte lui-même, ce qui le provoque et ce qui en résulte. Prenant comme image l'idée de machine avec son entrée et sa sortie, Dienes estime que, dans l'acte mathématique, «... l'entrée c'est l'ensemble des situations qui conduisent à l'acte...». Cela signifie que, si les situations dans lesquelles évolue l'enfant sont bien choisies, il devrait y avoir alors création spontanée d'actes mathématiques définis comme «...la création de certaines structures mentales qui résultent de l'appréhension et ensuite de la compréhension de l'ensemble des stimuli qui nous arrivent de l'extérieur...». Mais pour que cet acte mathématique se réalise, il faut libérer l'élève des contraintes inhérentes aux programmes et aux structures scolaires habituels. Il faut le laisser vivre à l'école avec la même liberté qu'il avait avant d'y entrer de façon qu'il puisse créer de lui-même des actes mathématiques: «... nous devons penser à l'acte mathématique comme à un acte qui se produit à l'intérieur d'un laboratoire. Dans ce laboratoire, il faut «... un grand nombre de matériels structurés et non structurés, des objets de tous les jours...» toutes sortes de matériels de construction pour que l'enfant puisse se poser des problèmes dans une situation libre...». Le recours aux jeux permet d'introduire dans ces situations libres des contraintes qui conduisent à la construction des structures mathématiques souhaitées et au développement des compétences mathématiques définies comme «... le processus d'abstraction... la généralisation... l'étude des conditions nécessaires et suffisantes... l'apprentissage des systèmes de codage et... du processus de décodage...».*
Comme Revuz, Dienes insiste sur la relation qui doit être maintenue entre la mathématique, abstraite par essence, et l'application des structures mathématiques pour l'interprétation de situations de la vie quotidienne.
Il attire enfin notre attention sur ce qui compte: «... ce n'est pas le contenu mathématique, mais les habitudes de penser que nous pouvons développer chez l'enfant...»; il importe «... qu'en apprenant la manipulation d'idées mathématiques, il acquière certaines des compétences dont il aura besoin sa vie durant.».

*De la contribution d'*A. Delessert, *nous retiendrons tout d'abord sa définition de l'activité du mathématicien qui s'appuie, bien sûr, sur des démarches telles que la classification des données, la réduction du complexe au simple, la substitution de la définition au terme défini mais qui prend «... un caractère global en ce qu'elle implique la totalité de la personne pensante. Les actes méthodiques... opèrent sur des plans d'images qui se présentent, des idées qui viennent d'une manière apparemment anarchique... La sensibilité se manifeste constamment... L'affectivité intervient... Le caractère du mathématicien joue un rôle...» Que nous voilà loin de la pensée purement rationaliste que l'on reproche parfois au mathématicien.*
Nous retiendrons aussi une certaine convergence avec les idées exprimées par Dienes en ce qui concerne l'activité de l'élève «... l'élève... agira en mathématicien dans la mesure où il investira la totalité de ses ressources conscientes, imaginatives, sensibles, affectives et caractérielles... La leçon de mathématique fut souvent un apprentissage de la docilité, de la répétition de schémas-types et de la fidélité dans les petites choses plutôt qu'une recherche passionnée...».
Convergence encore sur le plan de la relation existant entre la notion de système formel et le jeu et sur l'importance de ce dernier dans l'activité mathématique, convergence toujours en ce qui concerne le rôle de l'environnement «... il (l'enseignement mathématique) doit mettre les élèves en mouvement, les plonger dans des situations mathématiques motivantes où les outils et les démarches mathématiques se révèlent efficaces...».
En revanche, on constate une divergence de vue très nette sur deux plans, celui de l'opération et celui du langage. Pour Delessert, il n'est pas possible d'associer l'action mathématique à l'idée de machine telle que la présente Dienes car la transformation a, sur le plan mathématique, un sens très particulier: «... Alors que le physicien transforme à la fois les choses et les signes des choses, le mathématicien ne transforme que les signes des choses sans opérer sur les choses elles-mêmes...». Divergence encore, tant avec Leresche qu'avec Grize, quant à la définition de la mathématique comme une «science des systèmes formels».
Divergence enfin, non seulement avec Dienes mais avec de nombreux auteurs, sur le terrain du langage. A. Delessert refuse brièvement que la mathématique soit un langage, mais il renonce à développer son point de vue à ce sujet. Il serait bon que Math-Ecole l'interroge ultérieurement à ce sujet.

L'intervention de G. Leresche *nous rappelle l'ambivalence du rôle de l'école qui doit à la fois promouvoir le développement de la personne et livrer des «produits finis» utilisable dans l'économie de demain. Elle montre aussi, par un exemple fort éclairant, que les détracteurs de l'évolution récente de la mathématique seront bientôt situés sur le même plan que les hommes de sciences qui, jadis, ont nié toute valeur à l'invention du chemin de fer ou ont déclaré que la machine à écrire resterait à tout jamais un gadget amusant. Nous retrouvons une fois de plus dans cet article que: «...l'effort d'abstraction* *et de modélisation... ne doit pas faire oublier la nécessité d'un retour périodique à la réalité...».*

G. Leresche, en critiquant les processus algorithmiques que l'on «met en la mémoire» des enfants, attire notre attention sur le risque que le nouvel enseignement ne se fige lui aussi à un niveau purement formel. Son appel doit être entendu. Aujourd'hui déjà, nous rencontrons de nombreuses classes dans lesquelles on «met en mémoire» certains concepts de la mathématique moderne sans fournir aux élèves le moindre lien avec l'expérience vécue et sans leur donner l'occasion, sous le faux prétexte que le temps manque, d'agir de manière que «... l'enseignement éveille la curiosité, suscite la recherche des significations, apprenne la quête des méthodes et la prise de décision et que ce soit dans ce contexte qu'il dispense des connaissances dont on vérifiera non la simple acquisition, mais les possibilités d'utilisation, d'opérationalisation...».

R. Droz et W. Senft *apportent la voix de la psychologie et opposent, eux aussi, l'acquisition de connaissances toutes faites à l'activité mathématisante: «... la mathématique nous apparaît comme la conduite propre à l'enfant qui articule, ordonne, clarifie et comprend son univers. La mathématique coïncide avec l'activité spontanée de l'enfant... Elles (les activités mathématisantes) consistent dans la pratique d'une clarification des choses que nous offre l'environnement immédiat.». Les deux auteurs nous mettent en garde contre les dangers d'un recours trop précoce à des mathématiques formelles et aussi contre une tendance à croire que le nouvel enseignement de la mathématique a pour seul objectif une modernisation de l'apprentissage des techniques de calcul dont nous avons déjà vu, avec Jeronnez, qu'elles ne sont qu'un à côté de la mathématique.*

Nous retrouvons chez les psychologues, et sous une forme quelque peu différente, le schéma présenté par Walusinski: organisation des expériences effectuées à partir de situations observables puis opérations sur les articulations, les relations reconnues, c'est-à-dire élaboration d'un modèle.

On retiendra encore de ce texte que «... l'enseignement élémentaire sert à constituer un fond d'expériences mathématiques. Les instruments de clarification qui seront utilisés plus tard doivent d'abord être créés, leurs effets... doivent être expérimentés... le fait de collectionner et d'articuler de telles expériences constitue... un but en soi. Le contenu de ces activités mathématisantes peut être défini comme la symbolisation, la classification, la comparaison, la systématisation des actions, la quantification. Une fois de plus apparaît le fait que la réduction de l'activité mathématisante au domaine numérique telle qu'elle apparaît trop souvent n'est pas compatible avec les objectifs généraux définis, par exemple, par le plan d'études romand.

La contribution du logicien J. B. Grize *est intéressante à plus d'un titre. Elle met tout d'abord en garde contre l'illusion qui consisterait — et le danger est réel si l'on en juge par la publication de certains manuels — à vouloir sous*

prétexte de mathématique dite moderne, inculquer les rudiments de la théorie des ensembles à l'école primaire.
Elle montre aussi que la mathématique ne peut se réduire à un choix entre la science des systèmes formels d'une part et les transformations opératoires d'autre part. En effet, «... toute pensée requiert des activités de représentation...» et «... il n'y a pas de représentation qui ne soit à la fois forme et contenu, qui ne relève à la fois d'une composante structurale et d'une composante objectuelle». Il s'agira donc de distinguer les différents niveaux d'abstraction que peuvent prendre les représentations et de tenir compte du fait que les mêmes activités mentales, portant sur des contenus différents, n'atteindront pas forcément le même degré de développement.
Et nous retiendrons encore, dans la conclusion de Grize: «... Nous ne l' (l'enfant) amènerons pas, à l'école primaire, à construire des systèmes formels. Nous n'avons pas à nous demander comment reconnaître l'acte mathématique. Ce qui compte c'est l'orientation de ses activités qui, elles, ... peuvent être dites mathématisantes».

A. Calame *montre que le nouveau programme romand donne la possibilité d'introduire à l'école primaire une véritable activité mathématique pour autant que le maître soit conscient du radical changement de point de vue qu'elle exige. Rejoignant Grize, il estime que les activités mathématiques ne se réduisent pas à une définition simple mais recouvrent un ensemble d'éléments difficile à cerner d'une manière précise. Il pose enfin l'un des problèmes-clés du renouveau pédagogique, celui de l'évaluation. Un changement d'objectifs est indissociable de la création d'instruments permettant de mesurer les nouveaux objectifs et le risque est évident de parler abondamment des grands objectifs de la mathématique, mais de les voir rapidement disparaître parce que l'institution, avec ses exigences de notes et de critères de promotion, ne saurait pas les faire apparaître dans les examens de toutes natures.*

Enfin le texte de F. Bonsack *met lui aussi en doute le fait que l'acte véritablement mathématique puisse résider dans certains algorithmes où on a toujours voulu le voir. Ce qui importe, c'est que l'élève «... mis en face d'un problème, trouve un moyen de le résoudre en s'aidant des structures qu'on a mises à sa disposition ou encore mieux en en imaginant de nouvelles. La vertu qu'il faudrait cultiver, c'est peut-être moins le souci de rigueur — qui a certes son importance — que l'imagination mathématique et l'agressivité en face d'un problème».*

Au terme de cette lecture, il apparaît que nous ne sommes pas en mesure de répondre à la demande de S. Roller et de définir l'acte mathématique avec assez de clarté pour que «... quiconque sache le reconnaître partout où il existe...». Nonobstant les difficultés de cette définition, il semble cependant que celle-ci puisse faire l'objet d'une assez bonne approximation.

Il faut tout d'abord retenir — et c'est capital pour les enseignants de l'école primaire— que l'acte mathématique ou mieux l'«action mathématisante» ne se trouve pas dans l'apprentissage des algorithmes des opérations arithmétiques ni dans l'entraînement à un calcul mental ayant pour objet la mémorisation des tables d'addition et de multiplication. Ceci ne veut pas dire que le calcul numérique doive être considéré comme domaine négligeable ou inutile mais, toutes proportions gardées, il pourrait être à la mathématique ce que l'orthographe est à l'expression écrite, c'est-à-dire un instrument de travail au service de la pensée mathématique.

Cette distinction explique le fait que, dans certains plans d'études, il soit prévu d'une part des heures consacrées à la mathématique et, parallèlement, un programme d'entraînement au calcul numérique. A l'école primaire, où l'enseignement est global par nature, une telle dissociation n'est pas souhaitable mais il est indispensable que le maître soit très conscient des deux aspects de son activité, qu'il sache quand il fait l'un et quand il vise l'autre, que leurs parts respectives soient clairement déterminées, que le passage de l'un à l'autre (en général l'exploitation de l'activité mathématisante en vue de l'acquisition des tables numériques) s'effectue en toute connaissance de cause.

Cette distinction sera cependant d'autant plus malaisée que, dans ce domaine, la frontière entre action mathématisante et acquisition d'algorithmes est parfois fort difficile à cerner, tant il est vrai que certaines notions, l'addition ou la multiplication par exemple, passeront, à un moment déterminé, d'une catégorie dans l'autre. Ainsi la première approche de l'addition par un enfant de six ans peut être une véritable action mathématisante tandis que l'apprentissage de l'addition en colonnes n'aura plus du tout ce caractère.

Si l'on admet que l'action mathématisante part du réel pour aller vers la construction d'un modèle, elle implique que l'enfant dispose de systèmes de représentations lui permettant de «modéliser» le réel et de comparer les modèles issus de réels divers. Il convient d'insister avec Grize sur le fait que le même modèle mathématique peut s'appliquer à des réels fort différents — nous trouvons ici la source des décalages horizontaux observés par Piaget — et que le choix des situations dans lesquelles l'enfant aura l'occasion de «mathématiser» constitue l'une des clés de la réussite pédagogique. Il suffira en effet que le matériel proposé dépasse quelque peu le niveau de développement intellectuel de l'enfant pour que celui-ci, au lieu de conduire une vraie activité mathématique, agisse par imitation, par répétition, et élabore un algorithme n'ayant aucune vertu «mathématisante». Il n'existe aucun matériel pédagogique miracle; quels que soient sa qualité ou son prix, ce qui n'est pas toujours synonyme, l'emploi d'un seul matériel risque fort de leurrer et de faire croire qu'il y a eu action mathématisante alors que la réussite des élèves ne tient qu'à la mémorisation de quelques procédures algorithmiques. Nous rejoindrons donc Dienes lorsqu'il préconise la mise à la disposition de l'enfant d'un grand nombre de matériels afin qu'il puisse se poser des problèmes, élaborer des modèles en fonction des règles du jeu qu'il se sera données, confronter le *modèle construit avec d'autres matériels pour en dégager les similitudes et les différences.*

Nous dirons donc — et le lecteur en verra tout de suite les implications d'ordre pédagogique — qu'il ne peut y avoir acte mathématique que pour autant que l'enfant n'ait pas encore trouvé la solution du problème. Le maître qui cherche des procédures, des «trucs», pour que l'assimilation d'une notion soit plus rapide, munit peut-être ses élèves de connaissances (dont il conviendrait encore de déterminer dans quelle mesure elles sont généralisables) mais il les empêche de développer une véritable activité mathématique. Certes, un certain nombre de connaissances, peu nombreuses, sont nécessaires à la fin de la scolarité obligatoire, mais ces connaissances ne sont rien si l'adolescent, parce qu'il n'a pu bénéficier en de très nombreuses occasions de la confrontation avec des situations sollicitant une activité de mathématisation, n'est pas capable de les situer et de les utiliser dans les problèmes nouveaux que la vie lui réservera.

Nous voilà bien loin des vaines querelles entre tenants et détracteurs des mathématiques modernes. La mathématique, comme toute science, évolue et s'enrichit à chaque génération; rejeter les découvertes récentes sous des prétextes qui sont parfois fort éloignés de considérations d'ordre mathématique ou pédagogique n'a pas de sens. Ce qui importe, c'est que l'enfant et l'adolescent, au lieu d'être exclusivement gavés de procédés, de formules, de démonstrations à imiter servilement comme le voudrait un enseignement qui n'accordait guère de valeur formative aux mathématiques et réservait à l'enseignement du latin et de la philosophie le droit de développer le raisonnement et le jugement de l'individu, aient la possibilité de bénéficier très largement de ces activités de mathématisation qui contribueront à lui donner l'ouverture d'esprit et les méthodes d'analyse indispensables à qui veut aujourd'hui comprendre et agir sur un monde de plus en plus marqué par la science et la technologie.

Aux lecteurs

Le numéro 65 de Math-Ecole (novembre 1974) sera consacré aux *réactions* suscitées par le contenu du présent numéro sur l'acte mathématique.
Des remarques, des objections, des inquiétudes, des questions, des propositions..., tout cela sera reçu et offert à chacun.

Ecrivez-nous.

Math-Ecole; 43, fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel.

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

SOMMAIRE

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

On peut obtenir ce numéro séparé de «Math-Ecole» au prix de Fr. 5.—.
Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311