# MATH ECOLE

41e année

201

Rapidix, un jeu de rapidité (et de multiplication !)

Niveaux de référence en mathématiques pour des élèves de 16 ans, en Europe

*Math-Ecole*, les années septante

mars 2002

## *Math-Ecole*, pour ceux qui enseignent les mathématiques!

**Fondateur**
Samuel Roller

**Rédacteur responsable**
François Jaquet

**Comité**
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

**Mise en page**
Raphaël Cuomo

**Imprimerie**
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH-1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

**Couverture**
Carrés disposés en «spirale» dont les mesures des côtés sont les nombres de la suite de Fibonacci

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire:

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités: expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous).

Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

**Abonnement annuel** (5 numéros):
Suisse: CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
**Prix au numéro**: CHF 7.–
anciens numéros: CHF 3.–/pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
**Abonnements collectifs** (livraison à une même adresse):
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

**Adresse**
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques, 11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique: admin@math-ecole.ch
Site internet: http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

**MATH-ECOLE**
41e année, cinq numéros par an

**201**
mars 2002

**Sommaire**

# Editorial

## *Math-Ecole* quitte l'IRDP ?

**François Jaquet**
**Rédacteur responsable de *Math-Ecole***

*Math-Ecole* et l'IRDP ont de nombreuses années de vie commune: de 1971 à 1976 déjà, à l'époque où Samuel Roller, fondateur de la revue, était aussi directeur de l'institut; puis de 1992 à 2001, alors que le rédacteur responsable travaillait comme collaborateur de l'IRDP. Entre ces deux périodes, *Math-Ecole* était revenu au SRP de Genève, où Raymond Hutin cumulait aussi les fonctions de directeur et de rédacteur. Mais l'IRDP était resté présent dans la revue: directement par les articles de ses collaborateurs ou par des comptes rendus des évaluations conduites par l'institut, indirectement par la présentation systématique des nouveaux moyens d'enseignement romands et de leurs premières rééditions et par tous les articles consacrés à cette réforme romande.

Ainsi, ces proximités ont créé, dans l'esprit des lecteurs, de fortes associations entre *Math-Ecole* et l'IRDP, renforcées par les très nombreux articles sur le Rallye mathématique romand, puis transalpin. Cette large confrontation entre classes entretenait, en effet, des liens très étroits avec l'institut, au niveau de l'organisation matérielle et de la recherche en didactique.

A la suite du départ en retraite de son rédacteur actuel, *Math-Ecole* change de domicile. Son adresse ne sera plus celle de l'IRDP, mais celle de l'Institut de mathématiques de l'Université de Neuchâtel. Nous profitons ici de remercier son directeur, Alain Valette, de nous avoir offert un toit et, par là même, des possibilités de rapprochement avec une institution dont sont issus de nombreux professeurs de mathématiques, lecteurs potentiels de notre revue.

Mais un changement de domicile n'est pas une rupture, loin de là. *Math-Ecole* n'oubliera jamais les liens fructueux et les synergies développées avec l'IRDP. Elle en conserve d'ailleurs un, bien réel et efficace, en la personne de Luc-Olivier Pochon, collaborateur de l'IRDP, membre de notre comité, responsable de notre site Internet.

*Math-Ecole* est la revue de ceux qui enseignent les mathématiques en Suisse romande, l'IRDP est le centre névralgique des recherches et observations coordonnées sur l'enseignement des mathématiques dans la même région. Chacun, tant la revue que l'institut, sont les seuls à y assurer ces fonctions. Il est donc logique que les collaborations et les liens entre les deux entités se maintiennent, voire se développent.

Ce développement est souhaitable car les réformes engagées en Suisse romande il y a une dizaine d'années touchent à leur fin dans le domaine des plans d'études et des moyens d'enseignement des mathématiques et que, par conséquent, de nouvelles priorités seront déterminées par l'institution scolaire, en faveur d'autres disciplines.

Il l'est d'autant plus que la société s'intéresse actuellement de très près au «rendement» de son école. Le retentissement médiatique de l'enquête PISA n'en est qu'un indice: on veut des résultats et des places d'honneur dans les compétitions internationales – sur le podium de préférence – mais on ne se préoccupe pas beaucoup des contenus ni des savoirs sur lesquels reposent les classements.

On renvoie souvent à la Formation (avec un grand F) tous les problèmes liés à la mise en place d'une réforme, dont celui des conceptions de l'apprentissage. Certes, celle-ci doit jouer un rôle important dans les évolutions nécessaires, mais elle n'y arrivera pas seule. Elle devra s'appuyer sur des recherches, sur une réflexion permanente et sur une large diffusion des problématiques et des résultats obtenus.

Dans le domaine des décisions politiques sur la place et l'importance à accorder à l'enseignement des mathématiques, il faudra également s'appuyer sur les résultats de la recherche en didactique des mathématiques et ouvrir un débat public où pourront d'exprimer les enseignants.

Tout ceci nous ramène aux deux pôles représentés par l'IRDP et *Math-Ecole*.

Les gens qui observent, enquêtent, et analysent des phénomènes de l'enseignement des mathématiques ont le devoir de faire connaître leurs travaux et leurs interrogations. Ceux qui, quotidiennement, sont aux prises avec ces mêmes phénomènes ont besoin d'un éclairage extérieur pour mieux les comprendre et les maîtriser. Il y a plusieurs moyens d'échanges entre les uns et les autres. Une revue comme la nôtre en est un, non négligeable : vecteur d'information de la recherche vers la pratique, stimulateur d'une réflexion autonome pour ceux qui sont en classe, mais aussi, en retour, expression de problématiques et de pratiques sans lesquelles la recherche risquerait de tourner en rond.

Pour répondre à la question du titre de cet éditorial, nous dirons donc que la revue *Math-Ecole* n'a pas quitté l'IRDP, mais qu'elle a simplement changé de domicile légal. Elle reste un lieu d'échanges privilégié entre recherche et pratique, comme entre les enseignants et entre des différents niveaux de l'enseignement.

Nous remercions encore une fois l'IRDP et son directeur actuel, Jacques Weiss, pour leur hospitalité engagée de ces dix dernières années et formulons nos vœux pour les synergies futures entre cet institut et notre revue.

# Rapidix

## Un jeu de rapidité (et de multiplication !)

créé par Martine Simonet

**Compétences attendues**

- décomposer des nombres en produits
- mémoriser les produits de la table de multiplication de 6 x 6.

**Matériel**

- 4 dés numérotés de 1 à 6
- 72 cartes sur chacune desquelles figure un produit de la table de multiplication de 6 x 6 (à créer selon les indications du tableau ci-dessous)

| Produit figurant sur la carte | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 24 | 25 | 30 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de cartes | 2 | 4 | 4 | 6 | 4 | 8 | 4 | 2 | 4 | 8 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 |

Remarque : dans les 36 cases de la table de multiplication de 6 x 6, il n'y a que 18 nombres (produits) différents. Certains n'apparaissent qu'une seule fois : 1, 9, 16, 25 et 36, et d'autres 2 fois : 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30. Le 4 est présent dans 3 cases alors que le 6 et le 12 apparaissent 4 fois. Le nombre de cartes par produit doit donc être proportionnel à ces nombres de présence dans la table. Pour le matériel proposé ici, on a choisi 2 cartes par présence du nombre dans la table.

**Règles du jeu pour 4 à 6 joueurs dès 9 ans**

Mélanger les cartes. Placer 10 cartes, en 2 rangées de 5, faces visibles, au centre de la table. Le reste des cartes constitue le talon.

Un joueur lance les 4 dés.
Tous les joueurs jouent en même temps, chacun essayant d'obtenir un produit visible sur une des cartes. Pour y parvenir, il doit multiplier deux nombres choisis parmi les 4 valeurs indiquées par les dés.

*Exemple : avec 3-3-4-6, on peut obtenir les produits suivants : 9, 12, 18 ou 24 (3 x 3 = 9, 3 x 4 = 12, 3 x 6 = 18, 4 x 6 = 24). Avec 1-2-5-6, on peut obtenir 2, 5, 6, 10, 12 ou 30.*

Quand un joueur a trouvé une carte, il pose rapidement la main dessus. Chaque joueur ne peut mettre la main que sur une seule carte, même s'il a trouvé un deuxième ou un troisième produit possible. Lorsque tous les joueurs se sont emparés d'une carte, ou qu'il n'y en a plus qui conviennent, chacun montre sa carte. Si la valeur de celle-ci correspond au produit de deux des quatre nombres indiqués par les dés, le joueur garde la carte et la dépose sur sa pile de gains. S'il s'est trompé, il laisse la carte sur la table et remet sous le talon la dernière carte gagnée (non seulement il ne gagne pas de carte, mais il en perd une).

Si personne ne peut prendre de carte, on relance les dés. Si c'est à nouveau le cas, on échange les 10 cartes de la table contre 10 cartes tirées du talon.

Avant de lancer les dés à son tour, le joueur suivant complète la table avec des cartes du talon pour qu'il y ait à nouveau 10 cartes en jeu. (Pour éviter de devoir sans cesse dénombrer les cartes exposées, on peut fabriquer un tapis de jeu où les 10 emplacements sont matérialisés par des cadres au même format que les cartes.)

La partie est finie lorsqu'il n'y a plus assez de cartes pour en mettre 10 sur la table.

Le joueur qui possède le plus grand nombre de cartes a gagné.

**Variantes**

A. Ce jeu peut être adapté pour couvrir une plus grande partie de la table de multiplication. Il suffit de prendre des dés à 10 faces pour arriver à la table de 10 x 10, ou des dés à 12 faces pour arriver à la table de 12 x 12 (dont certains produits ne figurent plus dans le répertoire exigible, comme 12 x 11, mais d'autres y ont leur place, comme 12 x 5).

Il faudra alors établir un nouveau jeu de cartes, correspondant aux produits qui apparaissent dans les tables de multiplication concernées, respectant la proportionnalité entre le nombre de cartes représentant un produit et le nombre d'apparition de ce produit. Par exemple, dans la table de 10 x 10 où apparaissent 42 produits différents, il faudrait 100 cartes (ou un autre multiple de 100). A savoir: 1 carte pour le 1, le 25, le 49, le 64, le 81 et le 100 qui n'apparaissent qu'une seule fois; 2 cartes pour le 2, le 3, le 7, ... le 90, qui apparaissent deux fois chacun; 3 cartes pour le 4, le 9, le 16, le 36, qui apparaissent trois fois et 4 cartes pour le 6, le 8, le 10, ... le 40 qui apparaissent quatre fois.

B. La réduction à 3 du nombre de dés jetés simultanément réduit le nombre de combinaisons de 6 à 3 et appauvrit la recherche, en favorisant les élèves rapides.

En augmentant à 5 ce nombre de dés, on augmente sensiblement le nombre de combinaisons possibles (de 6 à 10) et il faudrait peut-être réduire le nombre de cartes exposées pour ne pas offrir trop de possibilités de gain (à régler par la pratique, cette variante n'ayant pas été testée en classe).

# 10e Rallye mathématique transalpin

# Epreuve I

### 1. Carrés de quatre cases (Cat. 3)

Dans ce tableau, on peut voir beaucoup de carrés de quatre cases:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 17 | 11 | 14 |
| 7 | 26 | 9 | 13 | 12 |
| 15 | 4 | 22 | 23 | 4 |
| 15 | 6 | 18 | 15 | 8 |
| 23 | 16 | 10 | 7 | 20 |

Par exemple, on voit en haut à gauche, ce carré de quatre cases dont la somme des nombres est 50:

| | |
|---|---|
| 3 | 14 |
| 7 | 26 |

3 + 14 + 7 + 26 = 50

Un peu plus bas, on trouve ce carré dont la somme des quatre nombres est différente de 50:

| | |
|---|---|
| 26 | 9 |
| 4 | 22 |

26 + 9 + 4 + 22 = 61

**Dans ce tableau, combien voyez-vous de carrés de quatre cases dont la somme des nombres est 50?**

**Indiquez-les tous, clairement.**

### 2. Petites et grandes (Cat. 3, 4)

Cinq amies comparent leurs tailles.

- Hélène est plus grande que Marina mais plus petite que Françoise.
- Valérie est plus petite que Françoise et que Marina.
- Camille est plus grande que Valérie.
- Françoise n'est pas la plus grande.

**Rangez les cinq amies, de la plus petite à la plus grande et expliquez comment vous avez trouvé.**

### 3. Chasse au trois (Cat. 3, 4, 5)

Isidore est en train d'écrire la suite des nombres, à partir de 1:

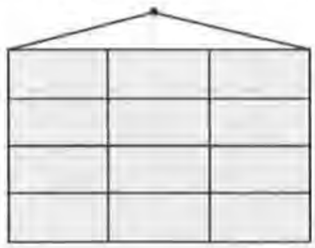
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...

À un certain moment, Isidore écrit le chiffre 3 pour la vingt-cinquième fois.

**Quel nombre est-il en train d'écrire à ce moment?**
**Montrez comment vous avez trouvé.**

### 4. Puzzle de quatre pièces (Cat. 3, 4, 5)

Marco doit recouvrir entièrement ce tableau pendu au mur par quatre pièces de papier:



Il dispose de deux pièces de cette forme:

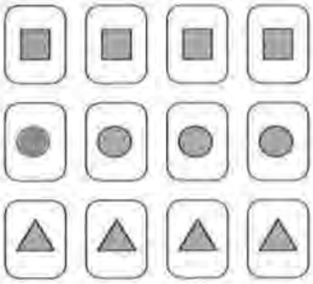
et de deux autres pièces de cette forme, qu'on peut retourner:

**De combien de manières différentes Marco peut-il recouvrir le tableau?**

**Dessinez toutes les manières possibles de disposer les pièces.**

### **5. Solitaire** (Cat. 3, 4, 5)

Lorenzo mélange ces douze cartes et les empile sur la table, retournées. Il tire une carte à la fois.



Le jeu se termine lorsqu'il a en main:

- soit trois cartes qui ont toutes le même dessin,
- soit trois cartes toutes différentes.

**Combien de cartes au minimum Lorenzo doit-il tirer pour être sûr d'avoir terminé son jeu de solitaire. Expliquez votre réponse.**

### **6. Le plus grand produit** (Cat. 4, 5)

Claire a six petits cartons:


Elle forme deux nombres avec les cartons qui ont des chiffres.

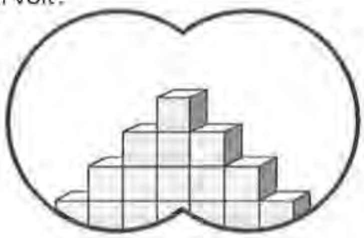
Entre ces deux nombres, elle place le carton avec le signe de multiplication.

**Comment Claire doit-elle disposer ses cartons pour obtenir le produit le plus grand possible? Écrivez tous vos calculs.**

### **7. Double escalier** (Cat. 4, 5, 6)

Sophie a construit un double escalier, bien régulier, de 1 mètre de haut, avec des cubes de 5 cm d'arête.
Son ami André, de la fenêtre de la maison d'en face, observe sa construction avec des jumelles.

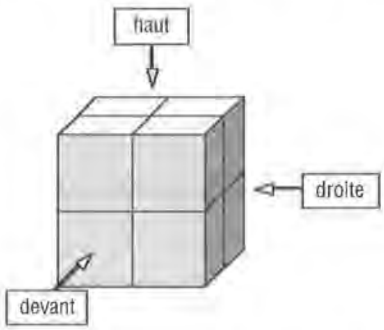
Voici ce qu'il voit:



**Combien Sophie a-t-elle utilisé de cubes pour construire son escalier? Expliquez votre solution.**

### **8. Points de vue** (Cat. 5, 6)

Le cube que vous voyez ici, est composé de 2 petits cubes rouges, 2 blancs, 2 verts et 2 jaunes.




Si on regarde ce grand cube du haut, on voit: 1 petit cube vert, 1 blanc, 1 rouge et 1 jaune.

Si on le regarde de devant, on voit : 1 petit cube jaune, 1 blanc, 1 rouge et 1 vert.

Si on le regarde de la droite, on voit : 2 petits cubes verts et 2 jaunes.

**De quelle couleur peut être le petit cube qu'on ne voit pas sur le dessin ? Expliquez votre raisonnement.**

## 9. Menteur et menteur (Cat. 5, 6, 7)

Pinocchio ment le mardi, le mercredi et le jeudi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine. Dorante ment le samedi, le dimanche et le lundi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine.

Un jour où Pinocchio et Dorante se rencontrent, Pinocchio dit : « Hier je mentais »
et Dorante dit : « Moi aussi ».

**Quel jour de la semaine se sont-ils rencontrés ?**

**Expliquez votre raisonnement**

## 10. Échanges de CD (Cat. 6, 7, 8)

Pour la fête de fin d'année scolaire, Annick, Pierre, Myriam et Franck apportent, en tout, 90 CD.

Annick remarque que :
- si elle avait apporté 2 CD de plus,
- si Pierre en avait apporté 2 de moins,
- si Myriam en avait apporté le double,
- et si Franck en avait apporté la moitié,

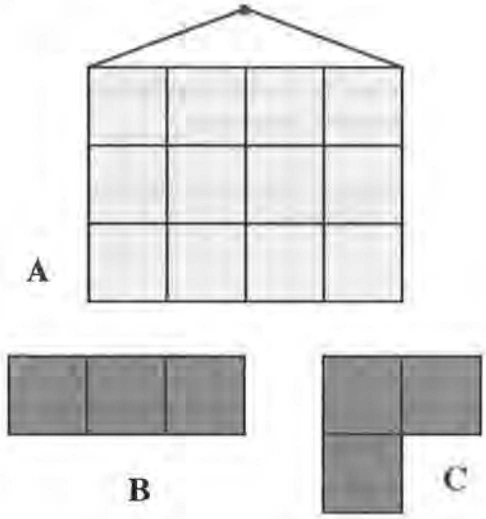
ils auraient apporté chacun le même nombre de CD.

**Combien de CD chacun des enfants a-t-il apportés pour la fête ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

## 11. Formes (Cat. 6, 7, 8)

Marc doit recouvrir le panneau A, pendu au mur, avec 2 formes B et 2 forme C.




**De combien de manières différentes Marc peut-il recouvrir le tableau ? Dessinez toutes les manières possibles de le faire.**

## 12. La plaque d'immatriculation (Cat. 6, 7, 8)

Ariel, Jeanne et Sophie, observent une plaque d'immatriculation d'une ancienne voiture.

Sophie dit : le numéro de la plaque est un nombre de 6 chiffres, divisible par trois.

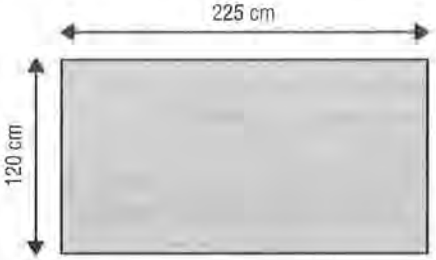
Ariel constate que, si on lit le nombre de gauche à droite, chaque chiffre forme un nombre plus grand que celui qui le précède.

Jeanne ajoute : les deux premiers chiffres, le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième forment trois nombres premiers. (Un nombre premier a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.)

**Quel est le nombre de la plaque d'immatriculation ? Expliquer comment vous avez trouvé la réponse.**

**13. Carrelage** (Cat. 6, 7, 8)

Est-il possible de recouvrir entièrement ce rectangle par 480 carrés identiques ?




**Si oui, quelle est la mesure du côté de ces carrés ?**

**Expliquez votre démarche.**

**14. Échanges de cadeaux** (Cat. 7, 8)

Anne, Claire, Françoise, Danièle et Gabrielle sont cinq amies. Pour Noël, elles décident de s'échanger leurs cadeaux de façon que chacune en reçoive deux et en donne également deux.

Elles précisent que :

- chacune d'entre elles fera un cadeau à deux amies et recevra un cadeau de chacune de deux autres ;
- aucune d'entre elles ne donnera un cadeau aux deux mêmes amies.

À Noël, Françoise offre un cadeau à Danièle et à l'amie qui reçoit un autre cadeau de Gabrielle.

Gabrielle offre son autre cadeau à une des deux amies qui en reçoivent un de Claire.

**A quelles amies Claire a-t-elle offert ses cadeaux ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

**15. Remise des prix** (Cat. 7, 8)

77 bonbons ont été distribués aux élèves de la classe qui ont terminé la course de longue durée de la fête de l'école.

Le premier en a reçu 2 de plus que le deuxième, le deuxième en a reçu 2 de plus que le troisième, qui en a reçu 2 de plus que le quatrième, ... et ainsi de suite jusqu'au dernier.

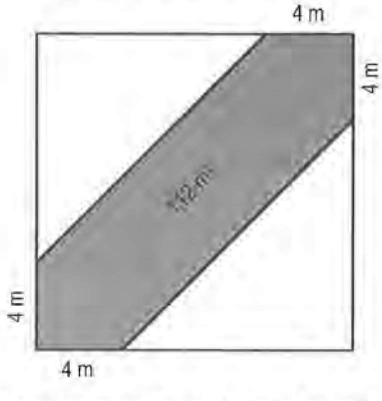
**Combien d'élèves ont terminé la course et combien de bombons le dernier a-t-il reçus ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

**16. La bannière du château** (Cat. 8)

Monsieur Tailleur doit préparer une bannière carrée égale à celle qui flotte au mât du donjon du château.

Il retrouve un croquis de cette bannière, mais il n'arrive pas à en lire toutes les mesures. En plus, il ne peut grimper au mât du donjon pour prendre les mesures de la bannière.




**Combien mesure le coté de la bannière ?**

**Expliquez comment Monsieur Tailleur peut faire pour être sûr de ne pas se tromper.**

*Solutions et commentaires en pages 19 à 22, 47*

# Niveaux de référence en mathématiques pour des élèves de 16 ans, en Europe[1]

Lucia Grugnetti
Unité locale de recherche en didactique,
Département de Mathématiques,
Université de Parme

## Introduction

Sous les auspices du «Comité sur l'enseignement des mathématiques» (Committee on Mathematics Education) de l'EMS (European Mathematical Society»[2]), l'étude «Niveaux de référence en mathématiques, en Europe, à 16 ans»[3], («Reference levels in School Mathematics Education in Europe at the age 16») projette d'identifier des niveaux de référence à propos des connaissances en mathématiques qui pourraient être partagés par tous les pays de l'Union européenne, et peut-être aussi par d'autres pays, comme le disent Bodin et Villani (*International Report*, 2001).

Le «Comité sur l'enseignement des mathématiques» de l'EMS a constitué un groupe d'experts, (professeurs d'école secondaire, chercheurs en didactique, formateurs, auteurs de plans d'études ou de manuels) sous la présidence de Vinicio Villani, de façon à ce que la plus grande partie possible des pays de la Comunauté européenne et de l'Europe en général, soient représentés.

L'IREM de Besançon a servi de centre de coordination, sous la responsabilité d'Antoine Bodin.

Pour se donner une base objective d'élaboration du projet, les membres du groupe de travail ont présenté la structure de leurs différents systèmes éducatifs par des «Rapports nationaux» en décrivant avec une précision particulière la situation en fin de scolarité obligatoire (en général vers l'âge de 16 ans).

Un des objectifs du projet est l'élaboration d'un ensemble de questions, qui ont été appelées initialement «dream questions» (questions idéales ou questions de rêve) et sont devenues ensuite «reference level questions»[4]: (questions de référence), choisies pour leurs qualités, selon des critères de culture et de formation.

## Questions de référence

Le projet s'est immédiatement révélé assez complexe, mais une volonté commune d'éviter toute proposition d'une standardisation de l'enseignement des mathématiques en Europe s'est dégagée très clairement.

1. Cet article reprend le texte d'une conférence donnée à Barcelone, en septembre 2001 sur l'invitation de la Société Mathématique de Catalogne.

2. L'auteure a fait partie de ce comité et s'est engagée dans la rédaction finale du projet.

3. International Report, Antoine Bodin et Vinicio Villani, éditeurs, (2001).

4. Des interrogations et divergences subsistent encore à propos de cette appellation. Lors de la rencontre internationale de mai 2001, à Luxembourg, où le projet a été présenté à des délégués des associations nationales d'enseignants et à d'autres responsables du secteur de la didactique des mathématiques, le nom de *Points of reference* a été proposé.

Au cours de l'étude, il est apparu clairement que la proposition aurait dû être, ou mieux, devrait être celle d'indiquer une sorte de «style de travail» dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, susceptible de se révéler, en quelque sorte, complémentaire ou en support à ce qui se fait habituellement à l'école.

65 questions ont été proposées et discutées, puis réécrites pour être présentées dans leur forme finale par Antoine Bodin et l'auteure de cet article à la rencontre internationale de mai 2001 à Luxembourg.

Pour organiser et classifier ces questions, on s'est référé aux instruments du projet PISA pour aboutir à une structuration qui tient compte des aspects suivants:

- **Domaines (Idées force, «bigs ideas»):**

  $P_1$ – Quantité
  $P_2$ – Espace et formes
  $P_3$ – Changements et relations
  $P_4$ – Hasard et probabilités

- **Niveau de mathématisation:**

  CLASSE 1: reproduction, définitions, opérations numériques,
  CLASSE 2: connections et intégration pour la résolution de problème (problem solving)
  CLASSE 3: pensée mathématique, généralisation et intériorisation

- **Compétences mathématiques**

  $C_1$ – Raisonnement mathématique
  $C_2$ – Argumentation mathématique
  $C_3$ – Modélisation
  $C_4$ – Pose et résolution de problèmes
  $C_5$ – Représentation
  $C_6$ – Symbolisme, formalisme et technique
  $C_7$ – Communication
  $C_8$ – Aides et outils

- **Population cible:**

  $T_1$ – Pour tous
  $T_2$ – Pour ceux qui sont censés utiliser les mathématiques dans des études ultérieures
  $T_3$ – Pour ceux qui ont envie de se diriger vers les mathématiques supérieures

Les questions sont proposées aussi selon une classification qui permet de les envisager comme *activité individuelle* ou comme *activité par groupes*.

D'autres caractéristiques émergent de ces questions:

- elles ne sont pas liées à des curriculums nationaux particuliers,
- elles ne mettent pas en oeuvre seulement des habiletés techniques,
- elles impliquent des stratégies différenciées,
- elles offrent des niveaux de réponses différents,
- elles ne sont pas conçues dans l'optique d'une évaluation sommative,
- elles demandent aux élèves, non seulement de fournir les solutions, mais de donner des informations sur leurs procédures de résolution,
- elles proposent un certain «style» d'activité mathématique.

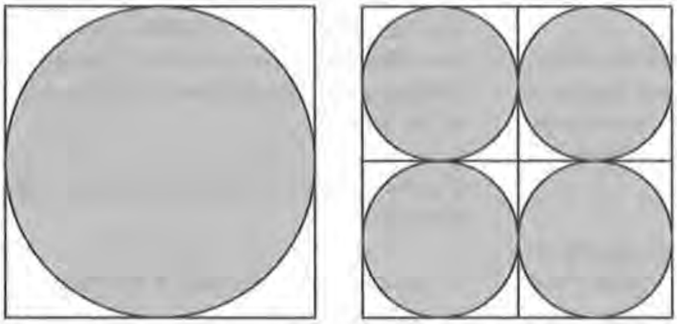
## Quelques exemples

Je commente, dans les lignes suivantes, seulement quelques-unes des 65 questions ou points de référence, de manière à donner au lecteur une idée du genre d'activités mathématiques que le Comité européen suggère. Leur présentation ne prétend pas être exhaustive, elle ne le pourrait pas. L'ensemble des questions, figure dans le document présenté à Luxembourg: A. Bodin, L. Grugnetti «Bundle of proposed reference questions, Part 2». (Voir bibliographie)

**EMS Question de référence N° 002** **Mosaïque de cercles**

Q est un carré de 1 m de côté et C en est le cercle inscrit.

Si on partage Q en carrés plus petits et que l'on y trace leurs cercles inscrits respectifs, on obtient la figure suivante:



**Augmentez, autant que vous pouvez l'imaginer, le nombre de subdivisions. L'aire de la partie hachurée (LA PARTIE COUVERTE PAR LES DISQUES) croît-t-elle, décroît-t-elle, ou reste-t-elle toujours la même?**

**Et qu'en est-il si on se pose le problème dans l'espace?**

| **EMS Question de référence** | **Carte d'identité** |
|---|---|
| **Nom et numéro de la question** | **Mosaïque de disques – EMS 002** |
| Origine de la question | Proposé par Vinicio Villani (Italy) |
| Domaine de problèmes («big ideas») | $P_2$ |
| Principaux contenus supposés abordés | Similitude qui amène à une réponse synthétique ou simple activité de calcul algébrique |
| Compétences supposées mises en oeuvre | $C_1 - C_4$ |
| Classe de complexité (mathématisation) | Classe 3 |
| Public cible | Cible 1 (pour tous) |
| Type d'organisation | Travail individuel |

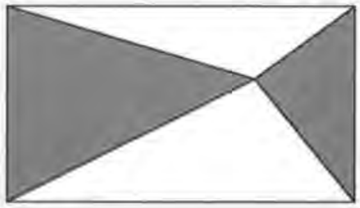
Cette question, comme les autres, donne une idée du style de travail suggéré par le projet. Elle implique des connaissances à la portée d'élèves de 16 ans qui sont appelés à les utiliser de manière problématique, et non comme une simple application de formules, afin de produire une procédure de réponse autonome. C'est l'élève qui doit mobiliser ses propres connaissances et établir une stratégie de résolution. Il me paraît aussi significatif que le passage du plan à l'espace se situe dans le même domaine de problème.

**EMS Question de référence N°009** **L'héritage**

Deux frères héritent d'un terrain de forme rectangulaire.

Pour le diviser en deux parties de même aire, un voisin leur suggère de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de le relier avec des piquets plantés aux quatre sommets du terrain.

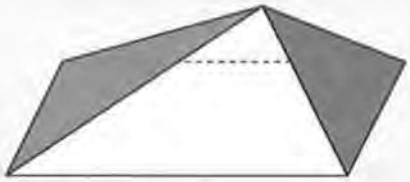
Un des frères prendra la partie en gris sur la figure, l'autre la partie restante.



**Les deux parties seront-elles vraiment égales? Justifiez votre raisonnement.**

**RMT**

Cherchez ce qu'il advient si la figure est constituée des faces d'une pyramide (par exemple, le toit d'une maison) vu de dessus.



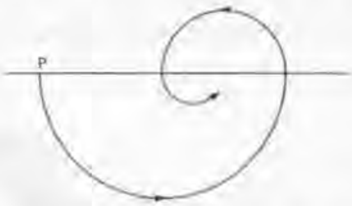
| **EMS Question de référence** | **Carte d'identité** |
| --- | --- |
| **Nom et numéro de la question** | **L'héritage – EMS 009** |
| Origine de la question | Proposée par Lucia Grugnetti (tirée du RMT 2000) |
| Domaine («big ideas») | $P_2$ |
| Principaux contenus supposés abordés | Aire du triangle – Théorème de Pythagore… |
| Compétences supposées mises en oeuvre | $C_3 – C_2$ |
| Classe de complexité (mathématisation) | Classe 2 |
| Public cible | Cible I (pour tous) |
| Type d'organisation | Travail individuel pour la première partie – travail par groupes pour la seconde |

La première partie de la question est un problème proposé aux élèves des catégories 7 et 8 (septième et huitième années de scolarité) d'une épreuve du Rallye mathématique transalpin (RMT), une confrontation de mathématiques par classes. Les élèves, dans ce cas, ont travaillé en groupes. Nous pensons que, à 16 ans un élève pourrait affronter individuellement cette question et il est intéressant, comme dans le cas du RMT[5], d'analyser les procédures de résolution utilisées par les élèves. Se contenteront-ils d'examiner le cas de la figure proposée en recourant à des vérifications empiriques ou jugeront-ils nécessaire de conduire un raisonnement «démonstratif» de type général?

La seconde partie de la question, comme dans cas précédent, concerne l'espace. Dans ce cas, le niveau de difficulté augmente considérablement en raison du passage du plan à l'espace. On conseille donc de proposer l'activité en travail par groupes, qui implique une discussion constructive au sein de la classe, pour une approche ou un approfondissement relatif au rôle de la démonstration.

**EMS Question de référence N° 010** — **Une étrange spirale**

D'un point de départ, on parcourt un demi-cercle de rayon 1, puis on continue par un demi-cercle de rayon 1/2. ainsi de suite, chaque demi-cercle a un rayon qui est la moitié du précédent.




**A quelle distance du départ se situera l'arrivée? Quelle sera la longueur du chemin?**

| **EMS Question de référence** | **Carte d'identité** |
|---|---|
| **Nom et numéro de la question** | **Une étrange spirale – EMS 010** |
| Origine de la question | Proposée par François Jaquet (Suisse) |
| Domaine («big ideas») | $P_1$ |
| Principaux contenus supposés abordés | Longueur du cercle, somme infinie |
| Compétences supposées mises en oeuvre | $C_3$ _ $C_1$ |
| Classe de complexité (mathématisation) | Classe 3 |
| Public cible | Cible I |
| Type d'organisation | Travail par groupes |

A l'origine un autre problème avait été proposé au groupe de travail international, tiré aussi du RMT, dans un domaine cognitif similaire:

5. Grugnetti, L.: 2001, «‹Dimostrazione› e prove empiriche in problemi di geometria del RMT» in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 – Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

**La Ferrari**

Depuis longtemps, Cirillo et Antonio rêvent chacun de s'acheter une belle Ferrari rouge. Mais cette voiture coûte 100000 Euros et ils n'ont pas l'argent nécessaire.

Nous sommes en l'an 2003. Cirillo vient d'hériter 50000 Euros. Il décide de mettre cette somme de côté pour l'achat de la Ferrari, d'y ajouter 25000 Euros l'an prochain, 12500 en 2005 et, ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente.

Antonio n'a pas fait d'héritage, mais il a déjà épargné 30000 Euros en 2001, la moitié de cette somme en 2002, le tiers en 2003, le quart en 2004, le cinquième en 2005 et ainsi de suite. Chaque année, il ajoutera donc une somme équivalente à 30000 divisé par le nombre formé des trois derniers chiffres de l'année.

**Qui arrivera à acheter la Ferrari ? Et quand ?**

**Donnez les détails de vos calculs.**

Le contexte du problème de «La Ferrari» a été trouvé trop spécifique de la réalité de certains pays et a été remplacé par celui de «une étrange spirale». Ce problème, proposé par un manuel scolaire (Calame, Jaquet, 1989), a fait l'objet d'une recherche didactique dans plusieurs classes et dans des cours de formation d'enseignants, comme activité problématique ouvrant le long chemin qui conduit au concept de limite (Grugnetti, Jaquet, 1996).

Un élève de 15, 16 ans peut commencer à affronter de manière autonome cette activité qui ne requiert, au début, que des connaissances élémentaires sur les fractions et la circonférence. Mais de telles connaissances ne sont pas suffisantes pour permettre la résolution du problème.

L'élève se trouve ainsi face à une situation pour laquelle le réinvestissement des connaissances préalables n'est pas suffisant, bien qu'il soit utile, évidemment.

La situation est assez riche pour susciter des conjectures suffisamment «consistantes» parce que les premières tentatives ne conduisent pas à la solution, du fait de l'émergence d'un conflit cognitif.

Une première approche consiste généralement à recourir au dessin géométrique qui, pourtant, révèle très vite ses propres limites. Ensuite, la recherche des abscisses des points d'intersection des demi-cercles avec l'axe, à partir du point de départ, conduit à une succession «irrégulière». C'est un moment important où les allers et retours entre les contextes géométrique et arithmétique se multiplient. Le point d'arrivée se trouvera sans doute entre les points d'abscisses 1 et 2: 1 + «*quelque chose*».

A ce moment, le travail collectif et les discussions mettent en évidence l'alternance des termes positifs et négatifs. Naissent alors des interrogations, des perplexités: c'est alors le temps des essais, des conjectures. En ce qui concerne le chemin parcouru, il sera, selon certains, *aussi long que l'on veut*. D'autres, en additionnant quelques longueurs de demi-cercles, commencent à douter que le chemin *ne pourra pas être aussi long*.

L'activité, coordonnée par l'enseignant, aboutit à la somme d'une progression géométrique et à l'émergence de l'idée de «infinitésimal», «d'infini», de «convergence» d'une série, de «limite»: une première idée seulement; évidemment.

Une réponse aux deux demandes du problème peut être construite selon le parcours suivant:

1) La somme des termes de la succession «irrégulière» évoquée précédemment: 2 – 1 + 1/2 – 1/4 + 1/8 – 1/16 + 1/32 – 1/64 + … (série géométrique de raison q = – 1/2) peut se réécrire sous la forme 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + … en additionnant le premier et le deuxième terme, le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième, et ainsi de suite[6]. En appelant S cette somme, si l'on considère S/4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + … et si l'on effectue la différence S – S/4, on obtient 1. On en tire 4S/4 – S/4 = 1 ; 3S/4 = 1 et, finalement, S = 4/3. La conjecture 1 + «quelque chose» devient alors 1 + 1/3.

2) En ce qui concerne la longueur du chemin: π + π/2 + π/4 + π/8 + … , une fois écrite la somme sous la forme π (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + …) on peut appeler S' la somme entre parenthèses et en soustraire S'/2 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + … . On obtient alors S' – S'/2 = 1, dont on tire S'/2 = 1, et par conséquent S' = 2. La longueur du chemin est donc 2π.

Dans une phase successive, il s'agira de passer à «l'institutionnalisation» des connaissances, mais en tant que prolongement d'activité (de celle-ci ou d'une autre) et non une théorisation pour elle même.

**EMS Question de référence N° 018** **Le tunnel**

Quatre personnes s'apprêtent à traverser un tunnel étroit et sombre.
Elles disposent d'une lampe de poche qui a une durée de fonctionnement limitée à 18 minutes.
Il leur faut, respectivement, 1, 2, 5, et 10 minutes pour traverser le tunnel.
Sans lampe, elles ne peuvent le faire.
Le tunnel est si étroit que deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble.

**Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser le tunnel ?**

| | |
|---|---|
| **EMS Question de référence** | **Carte d'identité** |
| **Nom et numéro de la question** | **Le tunnel** **EMS 018** |
| Origine de la question | Proposé par Sandor Dobos (Hungary) |
| Domaine («big ideas») | $P_3$ |

6. Il faut cependant se rappeler que, en général, dans le cas de somme d'un nombre infini de termes, l'associativité, qui est vraie ici, n'est pas «garantie». Cette propriété est vérifiée si la série est absolument convergente, c'est-à-dire que la somme des valeurs absolues de ses termes converge. Au niveau didactique, il serait important d'envisager aussi un exemple comme la célèbre série de Grandi : 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … , qui (comme l'histoire nous le rappelle) a été considérée comme égale à 1/2, ou à 0, ou encore à 1. Le paradoxe vient du fait que les valeurs absolues de ses termes ne forment pas une série convergente.

| | |
|---|---|
| Principaux contenus supposés abordés | Raisonnement logique |
| Compétences supposées mises en oeuvre | $C_1$ |
| Classe de complexité (mathématisation) | Classe 2 |
| Public cible | Cible I (pour tous) |
| Type d'organisation | Travail individuel |

Je pense que cette question est un bon exemple de mathématiques qui vont au-delà des formules et de la technique de calcul. On demande aux élèves de comprendre et utiliser des données, non pas pour trouver un résultat numérique, mais pour analyser «logiquement» une situation et déterminer si un fait est possible ou peut au moins se vérifier.

**EMS Question de référence N° 006** **La courte paille**

Cinq personnes tirent à la courte paille.
Parmi 5 pailles, il y en a 4 de même longueur et une plus courte que les autres.
Les pailles sont présentées de manière à ce que les joueurs ne puissent pas se rendre compte de leurs longueurs.

A tour de rôle, les joueurs tirent une des pailles, sans la remettre en jeu.
Le gagnant est celui qui tire la plus courte paille.
La dernière personne, qui doit prendre la dernière paille, prétend qu'elle est défavorisée, car elle n'a plus le choix.

**Qu'en pensez-vous?**

**EMS Question de référence** **Carte d'identité**

| | |
|---|---|
| **Nom et numéro de la question** | **La courte paille** **EMS 018** |
| Origine de la question | Proposé par Michel Henry (IREM Besançon) |
| Domaine («big ideas») | $P_4$ |
| Principaux contenus supposés abordés | Probabilités |
| Competences supposées mises en oeuvre | $C_3 - C_1 - C_2$ |
| Classe de complexité (mathématisation) | Classe 3 |
| Public cible | Cible I (pour tous) |
| Type d'organisation | Travail par groupes |

Cette question est l'une des rares qui touche au thème des probabilités, les responsables du projet étant conscients du fait que ce thème ne figure pas officiellement dans les programmes de tous les pays européens. Toutefois, l'idée a prévalu d'ouvrir un débat en classe sur des questions qui appartiennent au domaine de la pensée non déterministe.

### Diffusion des questions

Le premier objectif de la rencontre internationale de mai 2001 à Luxembourg était de présenter le projet à un public allant de représentants des associations d'enseignants de mathématiques ou de mathématiciens à des personnes ayant des responsabilités ministérielles dans les différents pays européens et à des cadres du secteur de l'éducation, en vue d'une diffusion des «questions de référence» – ou «points de référence» si l'on préfère.

Au moment où les grandes enquêtes internationales connaissent un regain d'intérêt – pensons à TIMSS ou à PISA – il paraît important que d'autres modalités de confrontations se développent entre enseignants de mathématiques de régions et pays différents. Les enquêtes comparatives sur les compétences des élèves ont certes leur intérêt, mais elles portent en elles des risques : ceux des abus de leurs exploitation statistiques, ceux des biais dus aux facteurs qui influencent les résultats des élèves mais qui sont difficiles à déterminer ou à mesurer, ceux du poids trop élevé accordé aux réponses par rapport aux procédures.

Ces «questions de référence» sont une alternative, complémentaire, à cette tendance à la «mesure». Elles suggèrent, elles proposent des analyses plus fines de compétences et d'attitudes fondamentales en mathématiques, que sont le résolution de problèmes, l'argumentation et choix de stratégies...

Les auteurs du projet ont recherché, par leurs propositions, de s'approcher de problèmes assimilables à des «dream questions». Il y a une part de rêve dans cette expression, mais il y a aussi une volonté de dépasser le questionnement traditionnel des élèves en mathématiques pour entraîner, en retour, des effets positifs sur les phases d'apprentissage et enseignement où se construisent les connaissances.

Ces «questions de référence» sont à la disposition des organismes éducatifs et des enseignants qui pourront en faire un usage raisonné. Elles sont aussi là pour la formation des enseignants dans ses diverses modalités.

Le revues d'éducation des mathématiques, pourraient aussi, comme le fait ici *Math-Ecole*, être un facteur essentiel de diffusion de ces questions et du style de travail qu'elles induisent.

### Bibliographie


Bodin, A, Villani, V.: «Reference Levels in School Mathematical Education in Europe. International Report», présentées at Luxembourg meeting of EMS in May 2001.

Bodin, A., Grugnetti, L.: «Reference Levels in School Mathematical Education in Europe. Bundle of proposed reference questions, part 2», présentées at Luxembourg meeting of EMS in May 2001.

Calame, J.A., Jaquet, F.: 1989, *Mathématique 7-8-9*, Neuchâtel, Département de l'instruction publique.

Grugnetti, L.: 2001, «‹Dimostrazione› e prove empiriche in problemi di geometria del RMT» in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino*, Siena 1999 – Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

Grugnetti, L., Jaquet, F.: 1996, «Senior Secondary School Practices (chapter 16)», in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 615-645.

# Réponses aux problèmes de ce numéro (201) et du précédent (200)

**Trois carrés en un** (Fiche de l'exposition *Rivages mathématiques*, no 200 p. 72)

### Activité 1 : Méfiance

La pièce **A** est constituée de 59 carrés, comme les figures **B** et **C**. La conservation de l'aire n'est pas remise en question.

La supercherie est dans le mot «triangle» de l'énoncé. La figure **B** n'est pas un triangle, c'est un polygone concave à 5 côtés inscrit dans un triangle dont l'aire mesure 60 = 10 x 12 / 2 (en carrés unités).

Deux côtés obliques successifs de ce «pentagone» ont des pentes respectives de 7/3 et de 5/2 (ou 14/6 et 15/6). La première, de la partie inférieure, est plus petite que la seconde, de la partie supérieure. Si vous ne croyez que ce que vous voyez, agrandissez la figure.

La figure **C** n'a aussi rien à voir avec un triangle, c'est un polygone convexe à 5 côtés (avec un trou de 2 «carrés») circonscrit à un triangle de même aire que le précédent.

### Activité 2 : 13 carrés en un

Par des translations et des rotations d'un quart de tour, on voit apparaître le carré d'aire 13 (en carrés unités) de la figure 1.

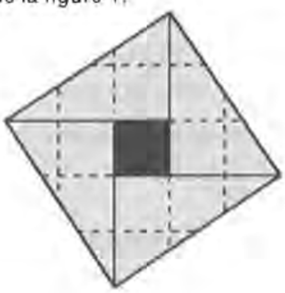


fig. 1

### Activité 3 : 26 carrés en un

On part ici de deux rectangles de 5 x 1, qu'on partage chacun en 2 triangles rectangles, et d'un carré de 4 x 4. Comme précédemment on constitue aisément le grand carré d'aire 26 (en carrés unités) de la figure 2.

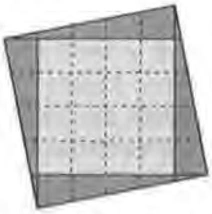


fig. 2

Si le nombre n est de la forme $a^2 + b^2$ on peut toujours le décomposer en une somme de deux produits égaux (rectangles de côtés a et b, avec a > b) et d'une puissance d'exposant 2 (un carré, de côté a – b) selon l'égalité :

$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab = (a - b)^2 + 2ab$

Dans la figure 1 : $n = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ les dimensions des deux rectangles sont 2 et 3, le côté du carré est $1 = 3 - 2$

Dans la figure 2 : $n = 25 = 25 + 1 = 5^2 + 1^2$ les dimensions des deux rectangles sont 5 et 1, le côté du carré est $4 = 5 - 1$.

**10e RMT, Epreuve I** (pages 6 à 9 de ce numéro)

### Réponses et commentaires

**1. Carrés de quatre cases** (Cat. 3)

Il y a huit solutions, trouvées par plus du tiers des classes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 17 | 11 | 14 |
| 7 | 26 | 9 | 13 | 12 |
| 15 | 4 | 22 | 23 | 4 |
| 15 | 6 | 18 | 15 | 8 |
| 23 | 16 | 10 | 7 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 17 | 11 | 14 |
| 7 | 26 | 9 | 13 | 12 |
| 15 | 4 | 22 | 23 | 4 |
| 15 | 6 | 18 | 15 | 8 |
| 23 | 16 | 10 | 7 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 17 | 11 | 14 |
| 7 | 26 | 9 | 13 | 12 |
| 15 | 4 | 22 | 23 | 4 |
| 15 | 6 | 18 | 15 | 8 |
| 23 | 16 | 10 | 7 | 20 |

**2. Petites et grandes** (Cat. 3, 4)

Il faut travailler par éliminations successives, pour arriver à la seule solution : C > F > H > M > V.
Le problème s'est révélé assez facile.

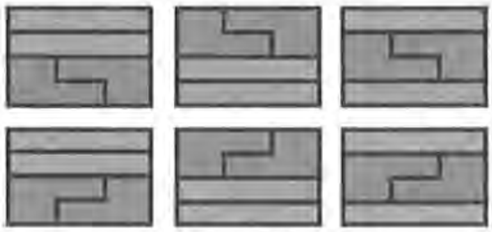
**3. Chasse au trois** (Cat. 3, 4, 5)

Il faut comprendre qu'on doit compter le nombre d'apparitions du chiffre « 3 » dans la succession des nombres, non seulement dans les unités (10 apparitions de 1 à 100, 3 apparitions de 100 à 130, mais aussi dans les dizaines (10 apparitions, de 30 à 39 et 2 apparitions dans 130 et 131), et organiser sa recherche pour la clore à 131. L'écriture de tous les nombres et le comptage un à un des « 3 » est une méthode plus élémentaire, mais qui se révèle assez efficace.

Les classes de troisième année ont eu un peu de peine à s'approprier le problème alors que la réussite est élevée en cinquième.

**4. Puzzle de quatre pièces** (Cat. 3, 4, 5)

Pour touver les six possibilités, il faut comprendre qu'il peut y avoir différentes combinaisons des quatre pièces en tenant compte des symétries.



Réussite moyenne, pour les trois degrés.

**5. Solitaire** (Cat. 3, 4, 5)

Ce problème de combinatoire exige une analyse des différentes éventualités et une succession d'éliminations :

– 3 cartes ne suffisent pas toujours pour terminer : Lorenzo peut par exemple avoir en main deux carrés et un triangle (CCT) et non forcément un brelan (trois formes égales) ou une tierce (trois formes différentes).

– 4 cartes ne suffisent pas pour terminer à coup sûr parce qu'on pourrait avoir deux paires, par exemple CCTT.

– 5 cartes (la réponse juste) donnent la certitude qu'on a terminé parce que, après le quatrième tirage avec deux paires : (CCTT, ou RRTT ou CCRR, on tire nécessairement, au cinquième, soit une autre forme que celles qui composent les paires et l'on forme ainsi une tierce (trois formes différentes), soit une même forme que celle d'un des deux couples et l'on a ainsi un brelan.

Ce problème s'est révélé trop difficile en troisième et quatrième, les règles du RMT excluant toute mise en commun intermédiaire ou relance de la part de l'enseignant.

**6. Le plus grand produit** (Cat. 4, 5)

Les produits les plus grands sont ceux dont l'un des facteurs commence par le chiffre 5 et l'autre par le chiffre 4 et dont l'un se termine par le chiffre 1. Lorsqu'on est convaincu de l'importance de la position des plus grands chiffres et du plus petit, explicitement ou intuitivement, il n'y a plus que quelques cas à examiner, avec l'aide de la calculatrice :

532 x 41 ; 531 x 42 ; 521 x 43 ; 432 x 51 ; 431 x 52 ; 421 x 53 puis 5 x 4321, 4 x 5321

et l'on peut en déduire que 431 x 52 = 22412 est la solution demandée.

Mais, si les classes ont trouvé de nombreux produits supérieurs à 20000, elles ne sont en majorité pas arrivées à trouver le plus grand, et ont souvent fait de nombreuses tentatives avec des premiers chiffres différents de 4 ou de 5.

**7. Double escalier** (Cat. 4, 5, 6)

De nombreuses classes ont fait le dessin complet de l'escalier et ont compté les carrés, après avoir déterminé le nombre d'étages (20) par une multiplication ou une division.

D'autres ont fait de longues additions du genre

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 = 400,

ou en utilisant la symétrie de l'escalier et la colonne centrale : 20 + 2 x (1 + 2 + 3 + ...17 + 18 + 19) = 20 + (2 x 190) = 400.

La réussite dépend étroitement de l'âge des élèves pour ce genre de problèmes. Les classes de sixième ont obtenu de meilleurs résultats que celles des degrés précédents qui ont souvent commis des erreurs de comptage.

Vu la richesse de ses contenus et de l'analyse des résultats, ce problème fera l'objet d'un article ultérieur.

**8. Points de vue** (Cat. 5, 6)

La majorité des classes a trouvé les deux possibilités : le cube caché peut être blanc ou rouge (indépendamment de la position des verts et jaunes).

**9. Menteur et menteur** (Cat. 5, 6, 7)

Il suffit de tester chaque jour de la semaine en prenant en compte les informations relatives au jour considéré et à la veille, en utilisant éventuellement un tableau à double entrée :

| | **lundi** | **mardi** | **mercredi** | **jeudi** | **vendredi** | **samedi** | **dimanche** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pinocchio** | faux | vrai | faux | faux | vrai | faux | faux |
| **Dorante** | faux | vrai | faux | faux | faux | vrai | faux |

Comme souvent dans ce type de problèmes, les élèves sont très futés. Au niveau 7, toutes les classes ont trouvé la bonne réponse (mardi) et ont bien expliqué leur raisonnement. En cinquième et en sixième, la réponse est presque toujours juste, ce sont parfois les explications qui laissent à désirer.

**10. Échanges de CD** (Cat. 6, 7, 8)

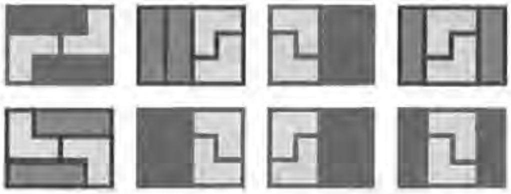
La méthode la plus fréquente, conduisant à la solution, a été de procéder par essais successifs organisés pour arriver, souvent au moyen d'un tableau à :

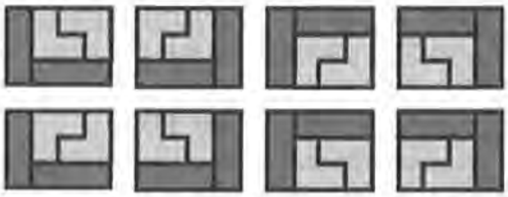
| | | |
|---|---|---|
| Annick | 18 CD | 18 + 2 = 20 |
| Pierre | 22 CD | 22 – 2 = 20 |
| Myriam | 10 CD | 10 x 2 = 20 |
| Franck | 40 CD | 40 : 2 = 20 |
| **Total** | **90 CD** | |

La réussite dépend du degré scolaire. Une majorité de classes de huitième ont résolu le problème et en ont pu décrire précisément leur démarche, mais rares sont celles qui ont travaillé par équations.

**11. Formes** (Cat. 6, 7, 8)

Le problème est le même que le « Puzzle de quatre pièces » (4), avec un nombre plus élevé de possibilités, vu que la trame de base est quadrillée. Voici les 16 combinaisons possibles.





Bonne réussite globale, élevée en huitième.

**12. La plaque d'immatriculation** (Cat. 6, 7, 8)

L'analyse a priori prévoyait une des procédures suivantes :

– Construire la suite croissante de chiffres à l'aide de nombres premiers de 2 chiffres.

– Comprendre que 0, 2, 4, 5, 6 et 8 ne peuvent occuper les places paires, que 1 ne peut pas être en deuxième position et que le numéro est donc de la forme : ? 3 ? 7 ? 9, puis que le numéro est de la forme ? 3 ? 7 8 9.

Procéder par essais – erreurs : 57 n'est pas premier donc

**Le numéro est de la forme** ? 3 4 7 8 9

Pour que le nombre soit divisible par trois le premier chiffre doit être 2

**Le numéro est** 2 3 4 7 8 9

– Ou procéder par essais-erreurs depuis le début : 1-2 éliminé, 1-3 ou 2-3 et ainsi de suite. On arrive à 1-3-4-7-8-9 (non multiple de 3) et finalement à 2-3-4-7-8-9.

Ce qu'on n'attendait pas, c'était la solution « 123456 » avec, comme explications : « Ce nombre est un multiple de 3, ses deux premiers chiffres font 3 (1 + 2), les deux suivants font 7 et les deux derniers font 11. Pour chacun des trois on obtient un nombre premier. »

De nombreuses erreurs, surtout en sixième, viennent donc de la confusion entre « le nombre formé des deux premiers chiffres » et « la somme des deux premiers chiffres ».

**13. Carrelage** (Cat. 6, 7, 8)

Il y avait plusieurs manières de procéder, prévues par l'analyse a priori :

– On calcule la mesure de l'aire du rectangle, en $cm^2$ (120 x 225 = 27000), puis l'aire d'un carré (27000 : 480 = 56,25) et l'on cherche la racine carrée de 56,25 pour obtenir la mesure du côté d'un carré (7,5 cm). Il faut ensuite vérifier que la construction est effectivement possible.

– On cherche les diviseurs communs de 120 et 225 et l'on constate que les carrés pourraient avoir 1 cm, 3 cm, 5 cm ou 15 cm de côté. Par essais successifs, on obtient 27000, 3000, 600, 120 carrés et l'on se rend compte que le diviseur cherché est entre 5 et 15 et n'est pas un nombre entier.

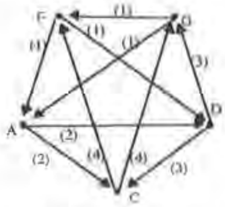
– On fait l'inventaire des possibilités de former un rectangle de 480 carrés et l'on choisit, parmi les couples de nombres entiers dont le produit est 480 (1 x 480, 2 x 240, 3 x 160, 4 x 120, 5 x 96, 6 x 80, 8 x 60, 10 x 48, 12 x 40, 15 x 32, 16 x 30, 20 x 24), celui qui est proportionnel à 120 et 225. On remarque alors que l'un des couples, (16 ; 30) est proportionnel à (120 ; 225), ce qui veut dire qu'il y aura 16 carrés dans la largeur et 30 dans la longueur.

Une majorité des classes a opté pour la première. Les classes de sixième ont rencontré l'obstacle de la racine carrée et l'ont surmonté quelquefois, mais dans tous les degrés, bien peu se sont préoccupés, après avoir trouvé 7,5 cm de côté, de vérifier que la construction est effectivement possible, ce qui n'aurait pas été le cas, par exemple, si le rectangle d'origine avait eu 200 cm de longueur et 135 cm de largeur.

Vu la richesse de ses contenus et de l'analyse des résultats, ce problème fera l'objet d'un article ultérieur.

**14. Échanges de cadeaux** (Cat. 7, 8)

C'est le diagramme par flèches qui s'est révélé le plus efficace, après avoir compris que chaque amie était en relation avec les quatre autres, à l'origine et à l'arrivée de deux flèches exactement.




– Comprendre que l'amie à qui Françoise et Gabrielle font un cadeau peut être Anne ou Claire. [flèches (1)]

– Comprendre que l'hypothèse Claire est exclue car Gabrielle offre son autre cadeau à une des deux amies qui en reçoivent un de Claire.

– Le décompte des flèches (2 origines et 2 arrivées pour chaque amie) conduit à la solution [flèches (2)]

**15. Remise des prix** (Cat. 7, 8)

La majorité des démarches procèdent par essais, du genre :

avec trois coureurs : 7 + 5 + 3 = 15   27 + 25 + 23 = 75   29 + 27 + 25 = 81   à abandonner,

avec un nombre pair de coureurs : à abandonner,

avec 5 coureurs : 19 + 17 + 15 + 13 + 11 = 75 à abandonner,

avec 7 coureurs : 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 = 77 solution correcte,

avec 9 coureurs : 17+15+13+11+9+7+5+3+1 =81 impossible

il n'y a plus de possibilités au-delà.

Réussite moyenne en septième, bonne en huitième.

*Solution du problème 16 page 47*

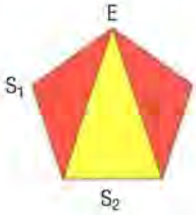
# Autour du nombre d'or φ

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

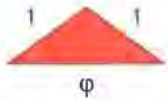
Les professeurs de mathématiques trouveront ci-dessous, sous forme de jeux, quelques idées qui les aideront à rendre très accessibles à leurs élèves, les remarquables propriétés du nombre d'or et de la suite de Fibonacci. Nous vous proposons une série de 3 articles. Le premier, paraissant dans ce numéro, est consacré au nombre d'or φ et à ses propriétés mathématiques, au travers de la géométrie du pentagone régulier, dont on sait que le rapport de la diagonale au côté vaut précisément le nombre d'or. Le deuxième présentera un jeu basé sur les propriétés du dodécagone régulier et sur ce que nous pourrions appeler la quadrature du dodécagone (et non pas la quadrature du cercle!). Quant au troisième article il généralisera les propriétés communes des rapports des diagonales aux côtés des polygones convexes réguliers à N côtés, et montrera une illustration du calcul matriciel pour tout N.

## Pentagones réguliers et nombre d'or

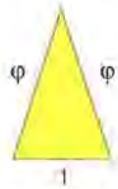
Coupons un pentagone régulier par les 2 diagonales issues d'un même sommet E, on obtient respectivement :




2 triangles isocèles



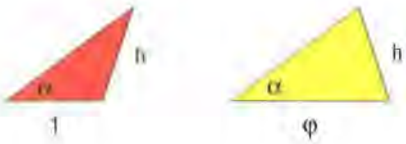

et 1 triangle isocèle



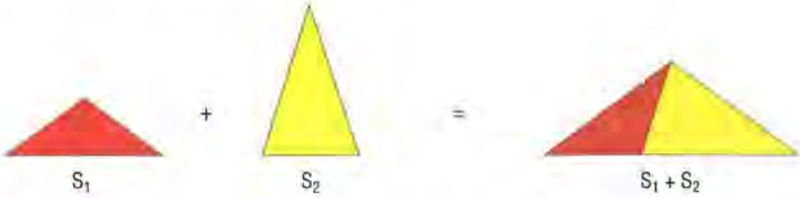

Le côté du pentagone vaut 1 cm, dans ce cas la longueur de la diagonale vaudra φ cm,
φ étant pour l'instant un nombre égal à la longueur de la diagonale (si le côté vaut 1)

$S_2 = S_1\varphi$ en effet :

Montrons que $S_2$ (surface du triangle ) = φ $S_1$ (où $S_1$ est la surface du triangle ). Ces 2 triangles ont en commun l'angle $\alpha = 36°$; ils sont isocèles. Ils ont la même hauteur h et ne diffèrent que par leurs bases qui sont respectivement de 1 et φ, donc $S_2 = \varphi S_1$



Additionnons maintenant $S_1 + S_2 = S_1 (1 + \varphi) = S_3$




On voit que par construction $S_3$ est semblable à $S_1$ (mêmes angles) et que ses côtés sont multipliés par $\varphi$. Il en résulte que $S_3 = S_1\varphi^2$. Nous avons donc:
$S_1\varphi^2 = S_1 (\varphi + 1)$ et en simplifiant par $S_1$, l'équation algébrique du nombre d'or apparaît:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

avec pour solution $\varphi = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dont seule la solution positive nous intéresse ici.

Continuons notre progression, chaque nouvelle figure est obtenue par l'addition des 2 figures précédentes:


A chaque étape nous multiplions la surface par un facteur $\varphi$. Comptons simplement le nombre de triangles au total dans chaque figure (sans les différencier), nous obtenons la suite de Fibonacci où chaque terme est bien la somme des 2 précédents.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | ... |

Or $F_n / F_{n-1}$ tend vers $\varphi$ quand $n \to \infty$ et ceci est vrai quel que soient $F_1$ et $F_2$
On peut donc sans abus assimiler $F_1$ à $S_1$ et $F_2$ à $S_2 = \varphi S_1$ ainsi dès $n = 2$ (si l'on considère les surfaces) $F_n / F_{n-1} = \varphi$.
(On montrera que à partir de $\varphi^2 = \varphi + 1$ on peut tirer $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$)

Algébriquement on peut montrer que $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$ en posant $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

mais on peut le démontrer géométriquement, ce qui est le plus plaisant, ainsi:

$\underbrace{\varphi^2 + 1}_{\varphi + 2} = \varphi\sqrt{5} \Rightarrow (\varphi + 2)^2 = \varphi^2 5$   il suffit de comparer le nombre de triangles :

$\varphi + 2$ $=$ $\varphi$

De même si $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$ alors $\varphi^2 + 1/\varphi^2 = 3$ et $\varphi^4 + 1 = 3\varphi^2$ donc :

$(\varphi + 1)^2 \quad + 1 \quad = \quad 3\varphi^2$

$\varphi + 1$ $\quad 1 \quad = \quad \varphi$

Pour vous aider il existe des jeux, sous forme de tangrams mathématiques, en mousse et en bois très agréables à manipuler et posant des énigmes bien illustrées que vous pouvez vous procurer auprès de Trigam SA, Neuchâtel CH, tél. 032 7212838, mais il est aussi tout à fait possible de découper simplement des morceaux de carton.

Remarque :

On peut trouver la relation d'Euler-Binet donnant les nombres de Fibonacci à partir des 2 relations que nous avons vues précédemment et qui se démontre facilement par induction.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi - 1/\varphi = 1 \\ \varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}\end{array}\right\} \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right]$$

Asymptotiquement on aura : $F_n = \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ (c'est ainsi qu'on trouve les grandes valeurs de $F_n$)

# Echos de la fête du numéro 200

Nous étions nombreux à Neuchâtel, le samedi 1 décembre 2001, pour fêter le numéro 200, près de 80 personnes qui avaient tenu à venir témoigner leur attachement et leur intérêt pour *Math-Ecole*.

Sept activités étaient proposées aux visiteurs du matin :

L'exposition des travaux présentés par les maîtres et élèves du Collège de Beau-Site, au Locle, dans le cadre de leur ***Fête de la géométrie***, organisée en mai 2002, a plu par sa fraîcheur et par les dimensions de ses réalisations. Notre numéro 200 y a consacré plusieurs pages (31 à 39). Marie-Claire Dreyfuss, une de ses conceptrices, a pu expliquer aux visiteurs les origines de cette entreprise remarquable au niveau d'un collège entier.

Pavage en « hérisson » réalisé par des élèves du Locle

***L'exposition-atelier 7-8-9***, destinée à nos premiers degrés de l'école secondaire et élaborée sous l'égide de COROME, est fort peu connue, bien qu'elle soit disponible dans tous nos cantons. Les visiteurs ont apprécié la qualité de ses panneaux et l'intérêt des problèmes proposés. (L'exemplaire exposé nous a été prêté gracieusement par l'ORDP de Neuchâtel, que nous remercions chaleureusement.)


Nicolas Rouche, notre conférencier de l'après-midi, fort occupé à résoudre un problème de l'exposition-atelier

***Rivages mathématiques*** propose dix expériences liées à l'histoire des mathématiques autour de la Méditerranée (présentée dans notre numéro 197, pp. 18 à 22). Un exemplaire de cette exposition, de grand format, est disponible en Suisse romande. (Pour les réservations, s'adresser à la rédaction, et pour en savoir plus, voir le numéro spécial Hypercube 32/33, en page 3 de couverture).

Notre collègue Ninon Guignard a animé un atelier sur ***Les trois petits tours***, situation bien connue en Suisse romande, mais qui réserve toujours des surprises et découvertes à ceux qui s'y lancent.

Un autre atelier, proposé par François Boule avait pour thème: ***Articulation du logique et du numérique***. Il a permis aux participants de découvrir des activités fort intéressantes pour de jeunes élèves, dès 5 ans. (Cet atelier fera l'objet d'une publication dans un prochain numéro de *Math-Ecole*.)

Carlo Marchini, de l'Université de Parme, a tenté de montrer aux participants à son atelier quelles sont les règles élémentaires de ***La logique dans les jeux mathématiques***. Nous y reviendrons aussi dans un prochain numéro.

Enfin, dans un quatrième atelier, Pierre Stegen, de l'Université de Liège a présenté les jeux de sa brochure ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5 – 8 ans.*** (Cet ouvrage avait fait l'objet d'une note de lecture de notre numéro 196, pp 35 à 38.)

Les brochures et publications diffusées par *Math-Ecole* sont toujours fort prisées.

En début d'après-midi, Nicolas Rouche, du CREM, en Belgique, sur le thème de *La géométrie et la nature des choses,* nous a tracé un tableau magistral des origines de la géométrie, en partant de la perception des objets, en décrivant les étapes de la conceptualisation puis le passage des objets mentaux à l'inférence, sans oublier qu'il faut aussi chercher en géométrie. Le contenu de cette conférence est largement développé dans un ouvrage récent de l'auteur *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie* (publication CREM, 2001, voir page 3 de couverture).

Lors de la partie officielle, Samuel Roller a lancé, avec la verve qu'on lui connaît, un vigoureux plaidoyer en faveur de la revue dont il est le fondateur et de sa mission. Selon lui, *Math-Ecole* et ceux qui s'y expriment ont encore du pain sur la planche pour que la mathématique soit au service de tous, pour qu'elle soit un outil à disposition de l'élève, lui permettant d'agir de manière indépendante et de dominer son destin de futur citoyen responsable.

Les autorités scolaires de Suisse romande, par la voix d'Olivier Maradan, et l'IRDP, par son directeur Jacques Weiss, ont apporté leur salut à *Math-Ecole*. Les textes de ces deux exposés sont publiés ci-dessous.

Finalement, le rédacteur responsable a dressé un court historique de *Math-Ecole* et a remercié tous ceux qui soutiennent la revue, les membres de son comité en particulier.

La journée du 1 décembre 2001, pour la sortie du numéro 200, a montré que les amis de *Math-Ecole* ont du plaisir à se retrouver, ont toujours des projets en tête et ont su donner un sens à la fête des quarante ans d'une revue qui nous est chère.

**Le message de J. Weiss**
directeur de l'IRDP

*Mesdames, Messieurs, chers collègues,*

Math-Ecole *et l'IRDP, c'est un mariage de près de 18 ans, fait de passion, d'infidélités, de ruptures et de retrouvailles. Née en Sion, hébergée par l'Ecole valaisanne, émigrée à*

*Genève comme nombre de valaisans,* Math-Ecole *a vécu sa jeunesse à l'IRDP avec Samuel Roller, pour repartir à Genève ensuite, rejoindre Raymond Hutin, puis pour revenir à l'IRDP, trouver François Jaquet qu'elle semble bien ne plus vouloir quitter – à moins que ce soit le contraire.*

Math-Ecole *est effectivement bien plus la revue* **d'une personne***, que celle d'une institution. C'est la revue de Samuel Roller avant d'être celle du Service de la Recherche pédagogique de Genève ou de l'IRDP au temps où il en était le directeur; c'est la revue de Raymond Hutin et non celle du SRP au temps où Hutin en était le directeur; c'est surtout, depuis 1990, la revue de François Jaquet, l'IRDP n'étant qu'une boîte aux lettres commode, une institution généreuse et bienveillante, un souk plus ou moins clandestin, et son directeur, un admirateur de l'immense travail effectué par les rédacteurs et leurs secrétaires successives, Laurence Cattin, Elisabeth Egger et Marianne Steudler.*

*L'IRDP est d'abord une boîte aux lettres commode! N'avez-vous jamais observé le papier à lettre utilisé par François? Il est révélateur du rapport que le rédacteur en chef a toujours voulu entretenir avec les institutions, quelles qu'elles soient d'ailleurs, même les plus bienveillantes.* Math-Ecole *est en effet une revue indépendante, qui ne saurait admettre ni censure ni imprimatur. L'adresse de l'IRDP, pourvu qu'elle soit discrète, est toutefois commode; elle donne respectabilité et légitimité.*

*L'IRDP, c'est ensuite une institution généreuse et bienveillante. Nous ne serons pas mesquin et n'articulerons pas de chiffres, ce qui peut paraître curieux en la circonstance. Nous avons en effet trop vu François se dépenser – sans compter – un comble pour un mathématicien – pour tenir ici la comptabilité des frais de l'IRDP.*

*L'IRDP, c'est aussi un souk, comme l'appelle lui-même François. Combien de trafics en effet entre Paris et Neuchâtel pour François; la Renault 5 de Lucia métamorphosé en 40 tonnes? Combien de livres, cahiers et fascicules et autres Kangourous expédiés aux quatre coins de la Romandie par Marianne?*

*L'IRDP, mais surtout son directeur actuel, est un admirateur de l'œuvre accomplie. L'admirateur, c'est moi en effet; rejoint assurément par beaucoup d'autres ici et ailleurs. Car pour en venir au contenu de cette revue, quel travail, quel dévouement, quel engagement, quelle compétence il a fallu tout au long de ces années, à Samuel Roller, à Raymond Hutin, à François Jaquet et aux membres du comité de rédaction pour répondre aux attentes des enseignants qui trouvent là, dans un langage claire, réflexions, idées, propositions d'activités, de jeux et de problèmes divers. Ils ont fait de cette revue, le chantier des nouvelles méthodologies de l'enseignement des mathématiques, des Réglettes Cuisenaire aux Situations-problèmes. Ils en ont fait l'atelier des prototypes des activités aujourd'hui proposées dans les moyens officiels de la Suisse romande.*

*Bravo donc à* Math-école *et à ses rédacteurs successifs. Le 200e numéro est sorti. Félicitations!*

*...Mais voilà, j'entends Samuel Roller nous dire, et il me l'a dit: « Très bien, très bien, jeune homme, cela est bel et bon. Mais, ce qui m'intéresse, c'est le numéro 201 ».*

*Oui, le 201e numéro! Pour sa réalisation, nous venons de voir qu'il fallait d'abord un homme providentiel, puis une institution discrète. L'homme, nous l'avons, plus dynamique, plus compétent et plus libre que jamais puisqu'il a pris une retraite anticipée pour se consacrer, davantage encore à* Math-école *et à son fruit dérivé, le RMT. L'éditorial du 200e nous donne d'ores et déjà cette garantie. L'Institution discrète, ce pourrait être, dans un proche avenir, une de ces institutions nouvelles où vont éclore et s'épanouir les didacticiens des mathématiques et les futurs enseignants de la*

*Suisse romande; je désigne ici, et François Jaquet avec moi dans son éditorial, les Hautes Ecoles Pédagogiques.*

*L'histoire de cette revue montre qu'elle aime changer de niche. Peut-être voudrait-elle retourner, à 40 ans, à son canton d'origine et se rapprocher de son fidèle imprimeur sédunois, la maison Fiorina. Et quel merveilleux clin d'œil à l'histoire en effet, si la HEP valaisanne l'accueillait en ses murs. J'imagine le bonheur que pourrait ressentir Léo Biollaz.*

*Bon vent à* Math-Ecole *et à son 201e numéro, et merci à tous ceux qui se sont engagés en faveur de cette revue et à tous ceux qui, avec François, rédacteurs et abonnés, la feront vivre encore.*

**Le message de M. Olivier Maradan**
Adjoint du secrétaire général de la CIIP

*Messieurs les rédacteurs en chef,*
*cher Samuel Roller, cher Raymond Hutin, cher François Jaquet,*
*Mesdames et Messieurs les fondateurs, parrains, auteurs, lecteurs et sympathisants,*

*Les personnes qui font et ont fait* Math-Ecole *ont un amour certain des chiffres, c'est bien évident. De là à nous poser une bien difficile résolution de problèmes! J'ai pu lire en effet dans l'invitation à cette journée l'équation suivante: 40 ans, 200 numéros, 2000 articles et 6000 pages; des nombres entiers et ronds (c'est bien le propre des grands anniversaires) à partir desquels calculer le nombre d'heures consacrées par les divers capitaines – des Roller, Hutin et Jaquet qui ne comptent pas leurs heures! – et par leurs nombreux membres d'équipage, à tenir le gouvernail, et plus souvent encore la plume, dans cette longue traversée, soutenue par l'IRDP, armateur éclairé durant toutes ces dernières années...*

*Autant vous l'avouer d'emblée: si je fus bon en maths à une certaine époque, mes compétences se sont bien émoussées depuis. Plutôt qu'une réponse, cette accumulation de chiffres impressionnants m'inspire avant tout admiration, respect et félicitations pour le travail accompli au service d'une revue pédagogique, d'un profil et d'une constance uniques, je le crois, sous nos latitudes.*

*Ce sont donc des félicitations et des remerciements que je vous apporte, de la part de Mme la Conseillère d'Etat Martine Brunschwig Graf, présidente de la CIIP, et de M. Jean-Marie Boillat, secrétaire général, tous deux empêchés de vous rejoindre aujourd'hui.*

*L'enseignement / apprentissage a besoin, notamment, de didactique; d'un discours organisé sur les pratiques, sur l'amélioration des pratiques, sur le perfectionnement de la discipline...*

*La didactique a besoin d'un débat, de nombreux débats, qui se construisent par l'argumentation, la construction rationnelle, l'exemplification... Et ce débat doit laisser des traces, des marques...*

Math-Ecole *assure ainsi, depuis 1961, la trace écrite, facilement accessible au profane comme à l'expert, des débats et expériences des enseignants, des formateurs et des didacticiens des mathématiques, dans nos frontières romandes et bien au-delà chez nos voisins.*

*Comme le disait pour la géométrie votre précédent orateur, il s'agit – et* Math-Ecole *s'en occupe constamment – d'aider à percevoir, à concevoir, à inférer et à chercher.*

*Publiant ces jours-mêmes un dossier bien de circonstance, pour les cantons romands également, la revue française «Sciences Humaines» se demande «Quels savoirs enseigner?». Citant Gérard Vergnaud, les rédacteurs retiennent des questions essentielles:*

« L'idée que les mathématiques sont indispensables pour développer autant l'imagination que la rigueur, chère aux tenants d'un enseignement de haute volée, n'est niée par personne. Mais de nombreux travaux ont montré qu'elles étaient aussi, pour beaucoup d'élèves, objet de souffrance et d'échec.

Comment faire tenir ensemble les diverses conceptions des mathématiques ? Celle d'une discipline permettant la conceptualisation du réel et la formation de l'esprit scientifique en même temps que la transmission de compétences opératoires pour tous ? »

*(Sciences Humaines, n° 121, novembre 2001, p. 33)*

*Telles sont bien également les questions qui vous préoccupent de longue date déjà.*

*Aujourd'hui, au moment de souffler quarante bougies, divers éléments prennent progressivement une place importante dans notre paysage :*

- *l'achèvement désormais tout proche d'un édifice mathématique romand complet, en termes de moyens d'enseignement ;*
- *le lancement des travaux d'expression des fondements essentiels de la discipline, de sa contribution à l'ensemble de la scolarité obligatoire et de balisage des étapes d'apprentissage par la définition d'attentes de fin de cycles ; soit le projet PECARO ;*
- *la reconstruction de la formation des enseignants dans des institutions partiellement différentes – partie en continuité, partie en rupture – dans lesquelles la nécessité d'un regard méta sur l'enseignement, l'apprentissage, la socialisation, la didactique des disciplines, l'évaluation et la gestion de la classe répond à un mandat officiel et déterminé ; soit les HEP ;*
- *la nécessité d'une formation des formateurs dans les didactiques disciplinaires également, qui interpelle en premier lieu les universités ; soit un approfondissement scientifique ;*
- *mais également l'arrivée et l'installation dans nos habitudes quotidiennes de nouveaux moyens d'échanges et de publication qui favorisent et accélèrent l'information, l'échange, mais sans doute aussi, moyennant certains aménagements techniques, le débat ; soit les ICT.*

*Je ne sais comment les responsables de* Math-Ecole *se situent dans ce contexte, face à ces quelques lignes de force, d'ailleurs loin d'être les seules et d'être tout à fait nouvelles…*

*Je ne sais comment les rédacteurs et les lecteurs de* Math-Ecole *se situent par rapport aux questions plus transversales qui se posent encore, toujours et de plus en plus, sur les relations entre les disciplines, la nature de la culture commune apportée par l'enseignement, la conception de l'apprentissage par cycles, les questions liées à l'évaluation-orientation…*

*Ceci s'ajoutant à la nécessité permanente des approfondissements épistémologiques et de l'expérimentation concrète dans la discipline même.*

*Aucun doute qu'il y a du pain sur la planche.*

*On peut sans doute dire de l'avenir de votre revue ce qu'exprimait Jules Renard à propos de la littérature : « Quand je vois tout ce qu'il me reste à lire, je suis certain de vivre heureux longtemps ! »*

*Heureux anniversaire* Math-Ecole, *qui n'a finalement, et c'est arithmétique, que deux fois vingt ans !*

# *Math-Ecole*, les années septante[1]

François Jaquet

En janvier 1972, **le numéro double, 50/51**, de *Math-Ecole* est entièrement consacré aux matériels dans l'enseignement de la mathématique: ceux qui sont fabriqués par les enfants ou fournis par l'environnement, proposés par N. Picard; les matériels plus structurés de Dienes; les blocs de la Maison des Petits de M. Audemars et L. Lafendel; les réglettes Cuisenaire...

La conclusion du numéro est reprise d'un ouvrage de W. Servais. L'auteur y précise le rôle de ces moyens dans l'apprentissage de la pensée mathématique et le situe dans le débat entre les maîtres qui, au nom de la rigueur logique, ne tolèrent *aucune promiscuité compromettante avec un empirisme approximatif et ceux qui, à l'opposé, veulent le concret pour le concret et remplacent les démonstrations par des monstrations, croyant que le concret est immédiat, qu'il a un pouvoir magique et contient la mathématique.* Il distingue deux niveaux: celui de l'expérience concrète où l'on est attentif à la réalisation matérielle qui résulte des actions sur les objets physiques et celui de l'expérience mathématique virtuelle où les imperfections des modèles sensibles sont ignorées par rapport *aux êtres mathématiques dont ils servent de substituts*.

W. Servais va plus loin dans la synthèse lorsqu'il parle des moyens matériels isomorphes du point de vue mathématique:

*... Une fois l'isomorphisme reconnu, nous pouvons déléguer à un matériel concret le rôle de servir de support à une activité mathématique qu'il peut doubler automatiquement. C'est la fonction des machines mathématiques conçues en sens inverse pour matérialiser l'abstraction. Ainsi le terme modèle est employé dans les deux acceptions complémentaires, correspondant aux deux sens de l'interaction du physique et de la mathématique:*

- *le matériel physique est modèle concret d'une relation mathématique qu'il illustre;*
- *la structure mathématique est modèle abstrait d'une situation physique qu'elle explique.*

*[...].*

Ces propos illustrent bien l'une des problématiques de l'introduction des mathématiques modernes en Suisse romande, mais qui n'apparaîtra pas toujours d'une manière aussi explicite.

Toujours dans ce numéro 50/51, L. Jeronnez et I. Lejeune présentent le matériel Cuisenaire largement utilisé en Belgique depuis plus de quinze ans. Ils lui trouvent une place naturelle dans l'enseignement des mathématiques qui vient d'être réformé dans leur pays. Les rapprochements avec le contexte romand sont nombreux et il nous a paru intéressant de reproduire cet article dans les pages suivantes (pp. 35 à 41).

Les années septante, c'est la mise en place d'une coordination romande, avec l'élaboration de plans d'études et de moyens d'enseignement

1. Suite de l'article «*Math-Ecole*, les années soixante» et de ses compléments, parus dans le numéro 200, (décembre 2001, pp. 53 à 63)

2. Willy Servais. Concret-abstrait dans Le matériel pour l'enseignement des mathématiques. Editions Delachaux & Niestlé, Neuchâtel (1970)

communs à tous nos cantons. Tous les regards sont tournés vers les mathématiques, première discipline scolaire principale à être coordonnée. Et l'événement n'est pas seulement politique, il se double d'une réforme fondamentale: celle des «mathématiques modernes».

*Math-Ecole*, placée sous l'égide des «Nombres en couleurs» au cours de ses cinq premières années d'existence, doit progressivement adopter d'autres priorités. Il ne s'agit pas d'un reniement car ce changement d'orientation était annoncé clairement, dès sa fondation: *la revue entend demeurer ouverte et ambitionne de pouvoir se situer dans la grand ensemble de la mathématique moderne et des travaux qu'elle suscite* (S. Roller, éditorial du numéro 2). Il s'agit d'accompagner les maîtres, lecteurs, dans une autre innovation, décidée cette fois-ci au plus haut niveau administratif et scientifique.

***Et Cuisenaire dans tout cela?*** C'est le titre de l'éditorial du numéro 57, en mars 1973, sous la plume de S. Roller. Le fondateur de la revue a décidé de consacrer entièrement ce numéro aux «réglettes», sous la forme «d'exercices» (nous dirions aujourd'hui «activités») présentés comme appuis pour les quatre avenues du nouveau programme romand: les ensembles et relations, la numération, les opérations et la découverte de l'espace. Comme l'avaient montré Jeronnez et Lejeune, cités précédemment, les auteurs de ce numéro, Arlette Grin et une dizaine de collègues ayant largement pratiqué la méthode Cuisenaire, n'ont aucune peine à trouver des activités fort intéressantes de comparaisons, classements, sériations, équivalence... qui utilisent les réglettes au profit des nouvelles matières à enseigner.

Mais la tentative sera la dernière et *Math-Ecole* ne publiera plus d'articles en faveur d'une intégration des réglettes dans le nouvel enseignement des mathématiques. Samuel Roller le regrettera toujours, comme en témoigne la conclusion de l'hommage qu'il a publié à l'occasion de la mort de Georges Cuisenaire, en janvier 76:

*... La vague de la «math moderne» a suscité, en certains endroits, quelque méfiance à l'égard des réglettes. Jamais cependant on a fait la démonstration qu'elles fussent mauvaises. Matériel elle le sont; matériel, elles demeureront. Panacée, elles ne seront jamais. Leur grande simplicité est pourtant ce qui en assurera le mieux la pérennité. Elles sont «éléments» et avec eux tout se peut construire et se combiner, comme avec les lettres de l'alphabet, comme avec les dix premiers nombres...*

S. Roller n'est pas mathématicien, mais il a très bien compris le rôle que pouvaient jouer les réglettes dans la construction du nombre. Il a tenté de les faire survivre en Suisse romande par l'intermédiaire de *Math-Ecole*, mais il n'a pas reçu les appuis qu'il cherchait chez les psychologues et les pédagogues ou didacticiens des mathématiques. Il n'a plus reçu de réponse de Piaget qui, pourtant, avait donné son point de vue une dizaine d'années plus tôt, en 1964, dans une préface du petit ouvrage *Avant le calcul*[3], de B. Beauverd (membre du comité de rédaction de *Math-Ecole*) en ces termes:

*...On appréciera enfin les remarques judicieuse de l'auteur (B. Beauverd) sur les mathématiques modernes à l'école enfantine et l'emploi du matériel Cuisenaire, excellent lorsqu'il est utilisé dans une perspective à la fois active et opératoire, beaucoup moins efficace lorsqu'on laisse les données perceptives et figuratives l'emporter sur les combinaisons opératives. (Je crois être d'accord sur ce point avec mon collègue et ami S. Roller.)...*

3. Berthold Beauverd. Avant le calcul. Cahiers de pédagogie expérimentale et de psychologie de l'enfant – No 21. Delachaux et Niestlé. Neuchâtel. (1965)

Laurent Pauli était membre du comité de *Math-Ecole* à cette époque. Il avait développé, lorsqu'il enseignait la psychopédagogie des mathématiques à l'Ecole normale de Neuchâtel, un matériel très proche des réglettes de Cuisenaire, de dimensions plus grandes avec, en plus, les marques de la décomposition en unités. Mais il ne s'est pas exprimé à ce propos dans les colonnes de la revue. Gattegno, toujours en voyage, qui s'était engagé pour «Les Nombres en couleurs», n'a pas non plus répondu aux questions de S. Roller.

La vague des «maths modernes», internationale, soutenue par les plus grands mathématiciens et les psychopédagogues de l'époque, était trop forte. Elle a tout balayé sur son passage. Les rédacteurs des plans d'études romands[4] parus en 1972 (CIRCE I) et 1976 (CIRCE II) et les auteurs des moyens d'enseignement conduisaient une réforme fondamentale, novatrice pour les contenus disciplinaires et pour ses conceptions pédagogiques, qui faisait table rase du passé et ne pouvait par conséquent pas intégrer une méthode et un matériel soupçonnés de provoquer des biais ou des confusions d'ordre didactique. Comme la plupart des membres du comité de *Math-Ecole* étaient engagés directement dans les grands travaux de la réforme, il paraît encore plus évident que le moment n'était pas propice à l'ouverture d'un débat. On avait besoin d'unanimité, voire de «vérités», pour emporter l'enjeu, qui était de taille.

C'est peut-être l'avenir qui donnera une réponse à S. Roller. La nouvelle réforme des années nonante qui, à son tour, a balayé les excès de celle des années septante, permettra peut-être aux maîtres de se sentir plus libres et de ressortir les réglettes des armoires où elles dorment depuis trente ans bientôt. Car, en fait, pourquoi de pas utiliser ce matériel, là où il peut servir de modèle opératoire, là ou sa puissance peut être exploitée dans la construction de savoirs mathématiques fondamentaux?

Il y a quelques mois, en décembre 2001, à Bruxelles, une cérémonie célébrait le 110e anniversaire de la naissance de Georges Cuisenaire. Samuel Roller, invité, s'y est fait représenter par Yvonne Savioz, une animatrice infatigable des premières heures des «Nombres en couleurs» en Suisse romande. Voici des extraits de son message, révélateur d'une certaine fracture entre les pédagogues et ceux qu'on appellera «didacticiens» dès la fin des années septante:

*Une chose me paraît certaine: son œuvre* [de Georges Cuisenaire] *s'inscrit dans la mouvance éducationnelle qu'ont connue les écoles de l'Occident après la victoire des Alliés en 1918. Désormais l'écolier devait être résolument actif. Alfred Binet n'avait-il pas dit: «L'enfant ne sait que ce qu'il a agi». A Genève, Pierre Bovet lançait le terme «d'école active». chez vous, en Belgique, Ovide Decroly demandait une école pour la vie, par la vie.*

*L'œuvre de Jean Piaget s'inscrit dans la même mouvance... Le nombre, dans cette perspective fait l'objet d'une construction, d'où le mot de constructivisme qui caractérise l'œuvre du psychologue genevois.*

*L'œuvre de l'instituteur de la communale de Thuin va dans le même sens. Cette action constructrice se fait sur deux plans, le cardinal et l'ordinal...*

*La couleur n'est jamais chez Cuisenaire, génératrice du nombre.*

*Les réglettes permettent de donner à ce dernier une réelle concrétude. Les unités répétées montrent le cardinal. La réglette qui leur correspond fait apparaître l'ordinal. Et désormais, le nombre se trouve édifié...*

4. Commission Interdépartementale Romande de Coordination de l'Enseignement (CIRCE I, pour les degrés 1 à 4, CIRCE II pour les degrés 5 et 6)

*... Les réglettes cependant, permettent plus que cela. Chacune d'elles peut se comparer aux neuf autres. On est alors entré dans l'ensemble des nombres rationnels...*

*Les réglettes... suscitent par les actes qu'elles stimulent la prise de conscience du nombre. Leur emploi permet à l'élève de «faire ses gammes» en calcul. Ainsi s'installe dans les cerveaux une compétence qui en renforce les pouvoirs, compétence elle-même libératrice. Qui est compétent en calcul est maître d'un pouvoir. Il maîtrise la calculatrice et de ce fait n'en deviendra jamais l'esclave.*

*[...]*

Depuis 1973, donc, *Math-Ecole* a tourné la page des réglettes. Devenue **auxiliaire précieux de la formation continue et permanente des maîtres** dans la périlleuse réforme des «maths modernes», la revue s'accorde toutefois des pauses, pour prendre du recul et aborder des sujets de «haut vol», dirons nous. L'article de J. Piaget, par exemple, reproduit dans les pages suivantes (pp. 42 à 47) apporte un appui non négligeable à la conception structuraliste du nouvel enseignement. Il est publié en mai 1973, quelques mois avant que l'ensemble des classes romandes de première année se confrontent aux ensembles, aux relations et aux groupes de déplacements en géométrie.

Un an plus tard, un numéro double, 60/61, permet à d'éminentes personnalités de l'époque de se prononcer sur «l'acte mathématique» ou sur ce que pourrait signifier «faire des mathématiques». Les contributions de A. Revuz, G. Walusinsky, Z.P. Dienes, A. Delessert, J.-B. Grize et autres font apparaître une grande diversité des approches et l'intérêt d'une confrontation de points de vues entre mathématiciens, psychologues et logiciens sur les finalités de l'enseignement des mathématiques.

Un autre article caractéristique des problématiques de l'époque est l'éditorial du numéro 70, de novembre 1975, où Théo Bernet, membre du comité de *Math-Ecole*, par ailleurs figure de proue de la réforme en Suisse romande, montre avec sobriété que les nouvelles notions enseignées ne doivent pas l'être pour elles-mêmes mais surtout dans leur utilisation, pour rendre compte de la réalité. (voir page 48 )

Au niveau des faits historiques, un événement important de cette époque est le départ à la retraite de Samuel Roller, ce qui signifie son remplacement à la rédaction de *Math-Ecole*. Raymond Hutin, directeur du Service de la recherche pédagogique (SRP) de Genève, prend le relais en janvier 1977. La revue retourne ainsi dans sa ville d'origine après un séjour neuchâtelois, à l'IRDP, de six ans. La route était tracée, mais encore fallait-il relever le défi de remplacer le «père fondateur» tout en maintenant le cap. Le nouveau rédacteur y est arrivé, avec aisance. Les collaborateurs du SRP sont alors mis particulièrement à contribution. En compagnie d'autres auteurs, eux aussi proches du terrain car engagés directement dans l'élaboration des moyens d'enseignement, ils ont nourri les pages de *Math-Ecole* de comptes rendus ou de propositions d'activités pour la classe.

Les différents cantons romands avaient mis beaucoup de moyens dans la formation initiale des maîtres, au moment de l'introduction du nouveau curriculum romand de mathématiques. *Math-Ecole* a, en quelque sorte, assuré le suivi de l'innovation durant la fin des années septante. On verra, dans un prochain article que cette fonction a été maintenue dans les année quatre-vingts.

# Les réglettes Cuisenaire et la mathématique moderne[1]

par Louis Jeronnez et Isabelle Lejeune
(Waterloo)

## I. Evolution de l'enseignement de la mathématique

La mathématique dite moderne est née au siècle dernier avec entre autres les travaux d'Evariste Galois (1811-1832), de Cayley (1821-1895), de Cantor (1845-1918) et de Félix Ydein (1849-I925)...

Mais si des ouvrages classiques comme les «Leçons d'Algèbre» d'Emile Borel destinés aux élèves de polytechnique des années 1880 contiennent déjà une introduction à la théorie des ensembles, il n'en reste pas moins que là mathématique moderne est venue à la connaissance commune des professeurs du secondaire à partir des années 1950, avec les congrès de mathématiciens et des cours de niveau universitaire comme par exemple celui de Gaston Choquet.

Ainsi vint progressivement une *réforme de l'enseignement secondaire*, réforme qui est toujours en cours de réalisation et qui se propage dans le monde entier. Les problèmes pédagogiques que pose cette réforme ne sont pas tous résolus. La Belgique a en tout cas, une place de choix dans cette révolution de l'enseignement mathématique.

En ce qui concerne l'enseignement primaire, il y a eu une sorte de préréforme commencée elle aussi à partir des années 50. Pourtant, la création par Georges Cuisenaire en 1953/54 de ses *Nombres en couleurs* n'avait pas reçu des pédagogues un accueil enthousiaste. Notre illustre compatriote rappelait d'ailleurs en juillet dernier, au Congrès annuel de l'*Association Cuisenaire-Belgique*, qu'il avait eu, à cette époque, *l'impression d'être seul dans le désert*.

Ce n'est pas tout-à-fait exact. Les professeurs de mathématique avaient décelé, dès le premier contact, les possibilités extraordinaires des réglettes. Ceux qui passèrent à Thuin dès 1954 furent enthousiasmés par les *Nombres en couleurs*. Ils eurent le sentiment d'être mis en présence d'une découverte géniale et ce, dans la perspective de la mathématique moderne. Il ne faut pas oublier que Gaston Choquet fut l'un des premiers à défendre avec vigueur l'idée d'une réforme radicale de l'enseignement mathématique à tous les degrés. Il pressentait le rôle que le matériel Cuisenaire allait jouer, tant au point de vue de la formation mathématique des enfants de l'école primaire qu'au point de vue de la formation de la pensée calculatrice.

Ce fut Caleb Gattegno qui partit, une boîte de réglettes sous le bras, et répandit les *Nombres en couleurs* dans les cinq continents, créant sociétés et associations Cuisenaire, promouvant une pédagogie de situations merveilleusement adaptée au matériel. Ce fut alors cet admirable ouvrage de Madeleine Goutard: «Les Mathématiques et les Enfants», livre de pédagogie authentique basé principalement sur une expérience vécue au Québec et qui révéla au monde du primaire une nouvelle méthodologie de l'enseignement mathématique.

Ce qui est remarquable, c'est l'étonnante simultanéité de la naissance des *Nombres en couleurs* et la venue à la connaissance des professeurs d'une nouvelle mathématique: c'est ce qui explique cette impulsion que reçut l'enseignement primaire dès 1954 et qui prépara la réforme actuelle.

1. Article publié dans *Math-Ecole* no 51, mai 1973 pp. 30 à 38

*Les Nombres en couleurs*, c'est un matériel structuré, le seul qui ait résisté au temps, qui n'ait pas disparu dans la tourmente actuelle. Regardez cette boîte de réglettes, regardez-la avec les yeux du mathématicien qui y voit un ensemble muni d'une relation d'équivalence (avoir même couleur), et de deux ordres naturels; un ensemble dans lequel on peut définir une opération notée + qui jouit des propriétés que la mathématique met en évidence dans certaines structures.

Nous y reviendrons plus loin.

## II. La réforme du primaire

### *1. Les objectifs*

Dès septembre 1971, de nombreuses écoles belges ont adopté de nouveaux programmes de mathématique en première année. Pour certaines d'entre elles, ce sera une transformation importante qui n'est pas sans danger et qui demande beaucoup de savoir et de savoir-faire: on ne s'improvise pas professeur de mathématique, même à des enfants de six ans.

Pour d'autres écoles, il n'y aura que peu de changements. C'est que, depuis 1954, cette préréforme dont nous avons parlé s'est accomplie grâce aux *Nombres en couleurs*, matériel qui a introduit un esprit nouveau dans l'enseignement et lui a donné plus d'efficacité.

Mais efficacité à quel point de vue? Il faut donc définir les objectifs de notre réforme. C'est bien là que gît la difficulté. Dans le programme belge, on n'a pas cru bon d'insister suffisamment sur l'un des buts essentiels de la mathématique: la formation de la pensée. Et il s'agit aussi, bien sûr, d'apprendre la mathématique, mais l'acquisition de connaissances et de techniques doit céder le pas à la formation de l'esprit en général, et à la formation de l'esprit mathématique en particulier. Il faut apprendre aux enfants à raisonner de façon déductive. Il faut surtout les habituer au travail personnel de recherche.

Dans les expériences multiples que nous avons réalisées depuis plusieurs années, nous avons été comblés lorsque nos visiteurs décelaient l'aptitude de nos élèves à aborder une situation nouvelle avec un souci de réflexion (L'enfant qui a travaillé avec les réglettes ne dit plus: «Je ne sais pas»; il essaye de résoudre le problème proposé.).

Les élèves d'aujourd'hui seront, dans quelques années, confrontés à des situations nouvelles et imprévisibles, ils devront s'y adapter et créer sans cesse du nouveau, ce qui implique des méthodes d'enseignement variées à partir de situations diversifiées et des programmes d'étude en perpétuelle transformation. La mathématique moderne est une matière riche de substance qui est susceptible de donner à notre enseignement une efficacité plus grande au point de vue de la formation de la pensée. Encore faut-il que l'on bannisse les méthodes stéréotypées qui ont parfois sclérosé l'enseignement traditionnel.

### 2. *Mathématique d'aujourd'hui et d'hier*

Si nous assistons à un bouleversement en ce qui concerne les fondements de la mathématique (ensembles, relations, structures...) nous constatons en outre un regroupement de matières jadis éparpillées dans des directions diverses, ce qui provoque une sorte de décantation de la mathématique traditionnelle. Des points considérés comme importants deviennent sans intérêt ou découlent de théories plus générales. Par contre, des matières déjà anciennes et bien connues ont pris une importance nouvelle et ont parfois été projetées dans l'enseignement élémentaire. Nous en avons de nombreux exemples. L'étude des systèmes de numération de position dans des bases autres que 10 figurait jadis en bonne place au programme de seconde scientifique. Les nombres négatifs, la notation exponentielle s'introduisaient jusqu'il y a deux ou trois ans en classe de cinquième du secondaire. L'analyse indéterminée (résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$) et l'analyse combinatoire étaient réservées aux classes de seconde (et c'est encore vrai aujourd'hui). Les équations du premier degré apparaissaient timidement en cinquième. Et cette liste est loin d'être exhaustive.

Il serait intéressant de faire le relevé des matières (jadis réservées aux classes du secondaire) qu'abordent aujourd'hui les enfants de six ans avec une réussite et un profit évidents et qu'on a tendance à classer dans la mathématique moderne.

A l'entrée du primaire, le rythme des acquisitions est beaucoup plus élevé que dans la suite. A sept ans, les enfants calculent dans le binaire sans avoir été drillés. Ils manient les puissances entières des naturels. Ils écrivent des équations. En troisième année, ils résolvent des équations à une et deux inconnues, des problèmes d'analyse indéterminée et de programmation linéaire. Et il n'est pas question, répétons-le d'acquisition de techniques mais bien de formation de la pensée…

Dans la réforme actuelle du primaire, il y a aussi une chose nouvelle, c'est l'accent mis sur l'étude des propriétés des opérations. Et cela, nous le faisons depuis plus de quinze ans dans nos classes Cuisenaire de première et de deuxième années.

**III. Les réglettes Cuisenaire**

1. *Les réglettes Cuisenaire se sont répandues dans le monde entier* et ont fait réaliser des progrès tangibles à l'enseignement primaire. Une pédagogie dans l'optique de la mathématique moderne est née du maniement de ce matériel, pédagogie que nous avons mise au point par un travail d'équipe dans les classes expérimentales de l'Athénée Royal de Waterloo. Les résultats obtenus avec les enfants de six et sept ans nous ont amenés à raconter cette expérience dans un de nos ouvrages*. L'introduction du plan d'études nouveau ne vient que confirmer la justesse de nos vues.

Si nous l'examinons, nous y trouvons deux volets :

- formation de la pensée mathématique ;

- formation de la pensée calculatrice.

Permettez-nous de citer à nouveau quelques extraits du nouveau plan d'études des écoles de l'Etat (juillet 1971) : « Dans le monde d'aujourd'hui et, plus encore dans celui de demain, il apparaît que les forces à mettre en oeuvre pour que s'accomplisse le destin de l'homme sont celles qui orientent dès l'enfance vers l'initiative, vers la créativité ».

« … Le nouveau programme veille à introduire un équilibre entre la pensée mathématique et l'activité calculatrice ; ce serait mal l'interpréter que de centrer toute l'action éducative sur un de ces deux objectifs aux dépens de l'autre… »

« … En un mot, pas de mathématiciens qui ne sachent pas calculer… »

Pour nous, et compte tenu de notre expérience qui se poursuit en quatrième année, il ne fait pas de doute que *la formation de la pensée calculatrice doit essentiellement se faire en première année primaire*.

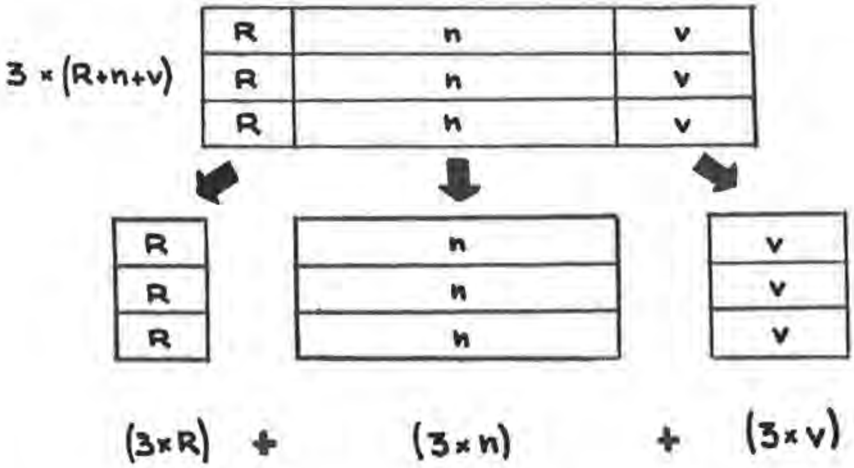
Dans le plan d'études, il y a les nombres et les opérations sur ces nombres. Ici, l'efficacité des nombres en couleurs n'est mise en doute par personne. L'introduction de l'addition dans

* *A la découverte de la mathématique et les réglettes Cuisenaire.* L. Jeronnez et I. Lejeune, Editions Calozet, Bruxelles.

le qualitatif, puis dans le quantitatif, avec les trains construits par les enfants, avec les propriétés de commutativité et d'associativité introduites dès le début de la première année est une des plus belles choses qui soient.

Et puis, il y a la multiplication par un nombre entier positif, la construction de rectangles, de croix, de tours. Ces constructions introduisent simplement et rigoureusement les produits de plusieurs facteurs et leurs propriétés (associativité et commutativité).

Il faudrait parler de la distributivité de la multiplication sur l'addition introduite dès le qualitatif comme le montre le dessin ci-dessous:




La propriété d'associativité est connue depuis très longtemps. Seulement, l'expression ne se trouvait pas dans les plans d'études. On parlait bien, par exemple, de multiplier un produit par un nombre ou d'ajouter un nombre à une somme. Jamais, on n'attirait l'attention sur la propriété qui était utilisée. C'est pourtant ce qu'on fait avec le Cuisenaire depuis plus de quinze ans. La propriété d'associativité est, par ailleurs, *fondamentale dans la structure de groupe*.

Quant à la distributivité de la multiplication sur l'addition, elle est nécessaire pour l'explication de certaines règles de calcul écrit. *Elle conditionne aussi les structures d'anneau et de corps*.

Mais revenons aux tours Cuisenaire qui nous ont conduits aux produits de plusieurs facteurs. Ceux-ci nous amènent aux puissances des nombres (avec des tours dont tous les étages ont la même couleur). L'étude de ces puissances doit être faite en première année. C'est le moment idéal. L'enfant est capable de manier la notation exponentielle avec sûreté. Des milliers, d'instituteurs l'ont expérimenté depuis des années.

Quant aux *bases de numération*, elles sont introduites de différentes façons. On a d'ailleurs souvent confondu dans bien des écoles: «bases de numération» et «mathématique moderne». Ce fut souvent la «tarte à la crème» de l'enseignement primaire. On a parfois aussi infantilisé leur présentation. Nous croyons de plus en plus que les réglettes complétées par les carrés et les cubes Cuisenaire sont encore l'outil idéal pour introduire les «bases». Avec les élèves ayant une première idée des puissances, cela devient un jeu. C'est la manière la plus intelligente de s'y prendre. Quand l'enfant écrit 121 en base trois, il sait:

– que le chiffre de gauche représente un carré vert clair (ou $3^2$ ou 3 x 3);

– le chiffre du milieu représente 2 réglettes vert clair (ou 2 x 3);

– que le chiffre de droite représente 1 «petit blanc» (ou 1).

En base dix le nombre vaut:

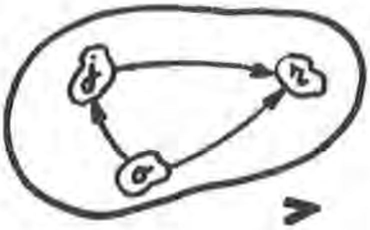
(1 x 9) + (2 x 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16.

Ainsi, quand nous parlons de la formation de la pensée calculatrice, nous pensons calcul dans différentes bases de numération, mais aussi étude des nombres et des propriétés des opérations sur les nombres, mais encore introduction des nombres négatifs, et enfin application au réel, au monde physique. Et nous ne parlerons pas de la fraction-opérateur, si fondamentale dans les domaines pratique et théorique. Chacun sait que le matériel Cuisenaire constitue, à ce point de vue, le matériel idéal.

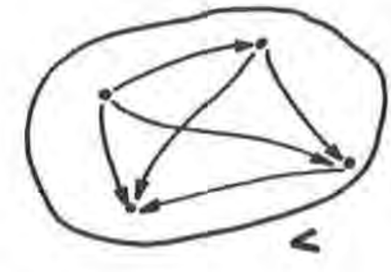
Au premier degré primaire, il y a aussi l'introduction des ensembles et des relations. Nous construisons, dès les premiers jours de classe des ensembles d'élèves, d'objets classiques, d'objets familiers, d'objets pris dans des matériels structurés, de nombres.

Le matériel Cuisenaire conserve sa place * pour introduire de nombreuses notions sur les ensembles, les relations et les structures. Donnons-en des exemples bien précis:

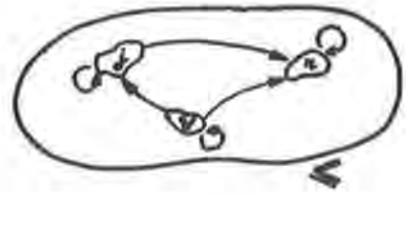
N. B. – Dans les exemples suivants, nous considérons uniquement des ensembles formés de réglettes de couleurs différentes:




– Les réglettes sont représentées par des points munis de taches (pour les tout-petits qui n'écrivent pas encore le nom des réglettes). Les taches indiquent les réglettes représentées. *Les enfants tracent les flèches* qui disent: «est plus grand que».

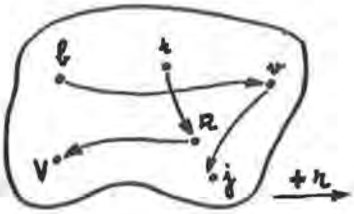



– Graphe muet: *Les élèves doivent placer des taches de couleur* près des points représentant les réglettes (plusieurs solutions).

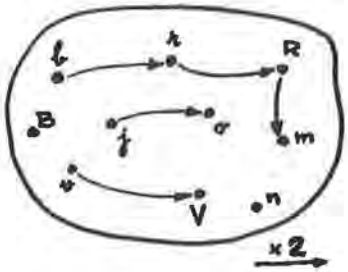



– Les réglettes sont représentées par des points munis de taches. Les élèves dessinent les flèches de la relation: «est inférieur ou égal à».

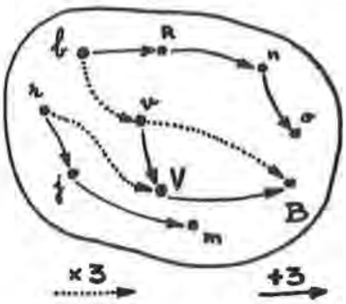
* Voir aussi notre brochure *Ensembles, Relations, Structures avec le Matériel logique Jihel-Set*, par L. Jeronnez et I. Lejeune, Editions Calozet, Bruxelles.



– Les réglettes sont représentées par des points munis de lettres. Les élèves dessinent les flèches de la relation : « augmenté de r ».

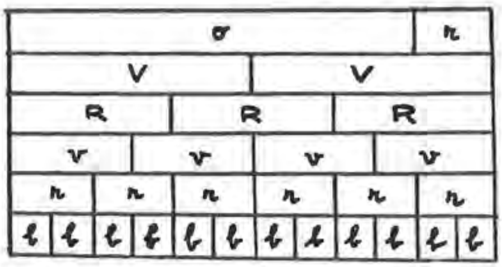


– Les réglettes sont représentées par des points munis de leur nom. Les enfants tracent les flèches rouges qui disent : « a pour double ».



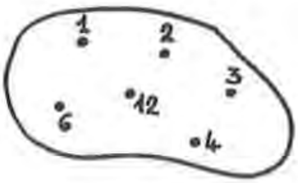
– Voici l'ensemble des réglettes différentes : (b. r. v. R, j, V, n, m, B, 0).

Les enfants tracent : les flèches pleines qui disent : « augmenté de 3 », les flèches pointillées qui disent : « a pour triple ».



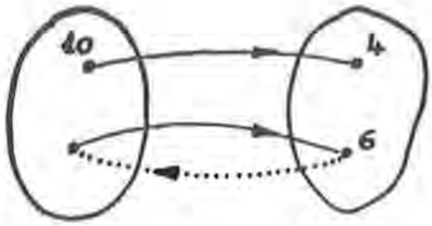
12 = 1 x 12 = 2 x 6 = 3 x 4 = 4 x 3 = 6 x 2 = 12 x 1

– L'ensemble des diviseurs de 12 est obtenu en construisant le « tapis 12 ». Représentons cet ensemble par un diagramme.



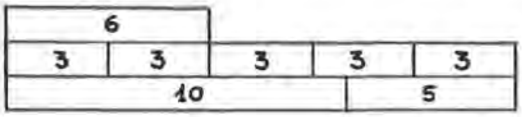
– Représenter l'ensemble formé par les réglettes b, r, v, V, B par un dessin (un diagramme). Tracer les flèches rouges qui disent : « x 3 ».


– On forme l'escalier vert clair: pour passer d'une marche à la suivante « on fait + 3 ». On va aussi loin qu'on peut… Représentons cette situation par un graphe…

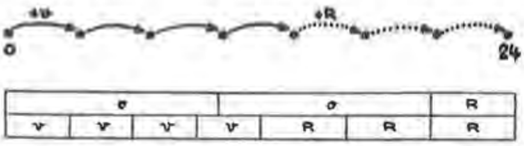



– Un ensemble de prix d'achat et un ensemble de bénéfices. Le bénéfice vaut 40 % ou les 2/5 du prix d'achat. Si j'achète un chocolat pour 10 F, je gagne… 2/5 x 10F = 4F. Si j'ai gagné 6 F…

Que dit la flèche pointillée?
Trouver la réponse avec les réglettes!




6 = 2 x 3 et 5 x 3 = les 5/2 de 6.
3 = 1/2 x 6




– Formons un train 24 avec des réglettes vert clair et des réglettes roses (plusieurs solutions). Représentons par un graphe. Exemple de solution:

– Formons un train 21 avec des réglettes 2 et des réglettes 5. Représentons par un graphe (plusieurs solutions).

*2. Conclusion*

Il s'agit maintenant de conclure. La réforme actuelle du primaire, en ce qui concerne la mathématique, est souvent passée par les réglettes.

Dans la formation de la pensée mathématique, elles ont joué jusqu'ici un rôle important. Nul doute que leur utilisation au degré primaire conserve toute sa valeur.

Le nouvel enseignement de la mathématique, même s'il nous paraît difficile, est très attrayant pour nos enfants qui adorent vaincre des difficultés et se plaisent dans une certaine abstraction. Ils forment des ensembles, réalisent des inclusions et éprouvent une grande joie à réfléchir a propos de situations mathématiques prises dans la vie de la classe ou suscitées à l'aide de matériels structurés.

Nos enfants rejetteront alors l'apprentissage du calcul à l'aide de méthodes et de matériels surannés, tels que capsules, boutons, pions…

Nous devons leur donner là encore un matériel structuré qui puisse assouvir leur besoin de réfléchir et de créer: le matériel Cuisenaire est pour cela irremplaçable, sans vouloir prétendre que ce sera là le matériel unique pour l'enseignement de toute la mathématique. Il lui reste un domaine d'application si important, si dense qu'il n'est nul besoin de vouloir à tout prix le mettre à toutes les sauces.

# Remarques sur l'éducation mathématique *

par le professeur Jean Piaget

*Ce texte a été lu, pour le compte de Jean Piaget, au «Congrès international pour l'enseignement des mathématiques» à Exeter en septembre 1972. Le professeur Sir James Lighthill de l'Université de Cambridge, président du Congrès, en a aimablement autorisé la publication dans* Math-Ecole *qui lui exprime sa reconnaissance.*

1. L'orientation que l'on compte assigner à l'éducation mathématique dépend naturellement de l'interprétation que l'on adopte de la formation psychologique ou de l'acquisition des opérations et des structures logico-mathématiques, mais elle dépend tout autant de la signification épistémologique qu'on leur attribue, les deux questions de leur psychogenèse et de leur épistémologie étant d'ailleurs liées de près. Si le platonisme est dans le vrai et que les êtres mathématiques existent indépendamment du sujet, ou si le positivisme logique a raison en les réduisant à une syntaxe et une sémantique générales, dans les deux cas il sera justifié de mettre l'accent sur une simple transmission des vérités du maître à l'élève et d'utiliser le plus tôt possible le langage du maître c'est-à-dire le langage axiomatique, sans trop se soucier des idées spontanées des enfants.

2. Nous croyons au contraire qu'il existe en fonction du développement de l'intelligence en son ensemble, une construction spontanée et graduelle des structures logico-mathématiques élémentaires et que ces structures «naturelles» (au sens où l'on parle de nombres «naturels») sont beaucoup plus proches de celles qu'utilisent les mathématiques dites modernes que de celles dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il y a donc là un ensemble de réalités en général peu connues de l'éducateur, mais dont, avec une meilleure connaissance psychologique, il pourrait largement tirer parti, ce qui faciliterait sa tâche au lieu de la compliquer et ce qui surtout favoriserait l'éclosion de vocations créatrices au lieu de faire des élèves de simples récepteurs conformistes.

3. Mais, pour en arriver là, il importe avant tout de réviser nos notions quant aux rapports entre le langage et l'action. Il semble, en effet, psychologiquement clair que la logique n'est pas issue du langage mais d'une source beaucoup plus profonde, qui est à chercher dans les coordinations générales de l'action. En effet, avant tout langage et à un niveau encore purement sensori-moteur les actions sont susceptibles de répétition et de généralisation constituant ainsi ce que l'on peut appeler des schèmes d'assimilation. Or ces schèmes s'organisent selon certaines lois auxquelles il est impossible de refuser une parenté avec celles de la logique: deux schèmes peuvent être coordonnés ou dissociés (réunion), l'un peut être partiellement emboîté en un autre (cf. l'inclusion), ou ne présenter avec lui qu'une partie commune (intersection), les parties d'un schème ou la coordination de deux ou plusieurs schèmes peuvent comporter un ordre de succession invariant ou certaines permutations (types d'ordre), de même que des correspondances terme à terme, un à plusieurs ou plusieurs à un (bijections, etc.) et lorsqu'un schème impose un but à l'action il est contradictoire pour le sujet de s'orienter en sens contraire.

* Article publié dans *Math-Ecole* no 58, mai 1973 pp. 1 à 7

Bref, il y a là une logique de l'action conduisant jusqu'à la construction de certaines identités dépassant la perception (permanence d'un objet caché) et à l'élaboration de certaines structures (groupe pratique des déplacements déjà décrit par Poincaré en ses essais épistémologiques).

4. Ce serait donc, même en pédagogie mathématique, une grande erreur de négliger le rôle des actions et de s'en tenir toujours au plan du langage. Chez les jeunes élèves l'action sur des objets est au contraire indispensable à la compréhension des relations arithmétiques aussi bien que géométriques (comme c'était le cas au niveau de la mathématique empirique des Egyptiens). Or la répugnance des maîtres de mathématique à l'égard de toute action ou expérience matérielles est très compréhensible: ils y voient une sorte d'appel à des propriétés physiques et craignent que les constatations empiriques ne nuisent au développement de l'esprit déductif et purement rationnel qui caractérisent leur discipline. Mais en fait il y a là un malentendu fondamental et l'analyse psychologique permet de le dissiper et de rassurer les mathématiciens quant à leur exigence essentielle d'une éducation de l'esprit déductif et formel. Il existe, en effet, deux formes bien différentes d'expériences liées aux actions matérielles du sujets. Il y a, en premier lieu, les expériences physiques (au sens large), qui consistent à agir sur les objets pour en découvrir des propriétés qui existaient en eux avant que le sujet ne les manipule: par exemple comparer des poids ou des densités, etc. Mais il existe aussi, et on l'ignore généralement, ce que l'on peut appeler des expériences logico-mathématiques, car elles tirent leur information non pas des objets particuliers en tant que physiques, mais des actions elles-mêmes (ou plus précisément de leurs coordinations) que le sujet exerce sur les objets, ce qui n'est nullement équivalent. Je suis lié d'amitié avec un mathématicien bien connu qui fait remonter le début de ses intérêts mathématiques à une expérience de ce second type, qu'il a faite aux environs de 4 ou 5 ans: assis dans son jardin il s'est amusé à mettre des cailloux en une rangée linéaire et à les compter, par exemple de 1 à 10 en procédant de gauche à droite. Après quoi il les a comptés de droite à gauche et à son grand étonnement il a retrouvé le nombre de 10. Il les a alors mis en cercle et, avec enthousiasme, il a de nouveau obtenu 10, dans l'un des sens de rotation comme dans l'autre! Il a continué avec d'autres figures et a fini par se persuader que la somme 10 était indépendante de l'ordre. Or, il est évident que ni la somme ni l'ordre n'appartenait aux cailloux avant que le sujet ne les range ou ne les réunisse en un tout: ce que l'enfant a découvert c'est donc que l'action de réunir donne des résultats indépendants de l'action d'ordonner et c'est ce qu'il aurait pu constater sur des solides quelconques, sans que les propriétés physiques des cailloux jouent de rôle particulier (sauf qu'ils se sont «laissé faire» en tant que se conservant mais la conservation elle aussi donne lieu à des expériences logico-mathématiques).

5. Or, ce rôle initial des actions et des expériences logico-mathématiques, loin de nuire au développement ultérieur de l'esprit déductif, en constitue au contraire la préparation nécessaire et cela pour deux raisons. La première est que les opérations mentales ou intellectuelles qui interviennent dans ces déductions ultérieures dérivent précisément des actions: ce sont des actions intériorisées et lorsque cette intériorisation, avec les coordinations qu'elle suppose, sera suffisante, les expériences logico-mathématiques, en. tant qu'actions matérielles deviendront inutiles et la déduction intérieure se suffira à elle-même. La seconde raison est que les coordinations d'actions et les expériences logico-mathématiques provoquent en s'intériorisant la formation d'une variété particulière d'abstraction qui correspond précisément à l'abstraction logique et mathématique: contrairement à l'abstraction ordinaire, ou aristotélicienne, qui part des propriétés

physiques des objets et que nous appellerons pour cette raison une «abstraction empirique», l'abstraction logico-mathématique peut être désignée du terme d'«abstraction réfléchissante» et cela selon deux significations solidaires: d'une part, elle «réfléchit» (au sens d'un réflecteur ou d'une projection) ce qui est tiré d'un plan inférieur (par exemple des actions) pour le projeter sur un plan supérieur de pensée ou de représentation mentale; d'autre part, elle est une «réflexion» au sens d'une activité mentale de réorganisation puisqu'elle reconstruit sur ce plan supérieur ce qui est tiré des coordinations de l'action.

6. Mais entre l'âge où l'action matérielle et les expériences logico-mathématiques sont nécessaires (avant 7-8 ans) et l'âge où la pensée abstraite commence à devenir possible (vers 11-12 ans et encore par paliers successifs jusqu'à 14-15 ans) il faut distinguer une étape dont les caractères sont intéressants pour le psychologue et utiles à connaître pour l'éducateur: entre 7 et 11-12 ans, en effet, on assiste à un important développement spontané des opérations déductives, avec leurs caractères de conservation, de réversibilité, etc., ce qui permet l'élaboration d'une logique élémentaire des classes et des relations, la construction opératoire de la série des nombres entiers par synthèse de l'inclusion et de l'ordre[1], la construction de la mesure par synthèse de la partition d'un continu et du déplacement ordonné de la partie choisie comme unité, etc.

Mais ces progrès logiques en un sens considérables demeurent néanmoins assez limités: à ce niveau l'enfant ne parvient, en effet, pas encore à raisonner sur de pures hypothèses, exprimées verbalement, et, pour parvenir à une déduction cohérente, il a besoin de l'appliquer à des objets manipulables (en réalité ou en imagination). C'est pourquoi nous ne parlons à ce niveau que d'«opérations concrètes», par opposition à formelles, et l'on voit qu'elles demeurent en fait en une situation intermédiaire entre les actions préopératoires des débuts et la pensée abstraite dont la possibilité reste plus tardive.

7. Or, une fois rétablie ainsi la continuité entre les actions spontanées de l'enfant et sa pensée réflexive, on s'aperçoit du fait que les notions essentielles caractérisant les mathématiques nouvelles sont en réalité beaucoup plus proches des structures de la pensée «naturelle» que les concepts dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il faut d'abord signaler à cet égard le rôle spontané considérable que jouent les opérations de mise en correspondance entre ensembles, donc la construction de morphismes, en particulier lorsqu'on peut les combiner avec des suites récurrentielles. Nous avons, par exemple, demandé avec B. Inhelder à des enfants de 4-5 à 7-8 ans de mettre d'une main une perle dans un bocal transparent, et de l'autre main (et simultanément) une autre perle dans un second bocal mais masqué par un écran; les questions étaient de savoir si les deux ensembles ainsi constitués étaient équivalents ou non, et, d'autre part, si, en continuant indéfiniment, cette égalité se conserverait ou non. Or, tous les enfants interrogés admettaient l'égalité au cours même de l'action, mais les plus jeunes se refusaient à généraliser pour

1. Plusieurs auteurs (Freudenthal, etc.) m'ont compris comme si je regardais le nombre ordinal comme plus primitif que le cardinal, ou l'inverse. Or je n'ai jamais rien dit de pareil et ai toujours considéré ces deux aspects du nombre comme indissociables dans le fini et comme s'appuyant psychologiquement l'un sur l'autre en une synthèse qui dépasse à la fois l'inclusion des classes et l'ordre sérial des relations asymétriques transitives. Si l'ordre est nécessaire c'est que les unités, rendues équivalentes par l'abstraction des qualités ne se distinguent plus alors les unes des autres que par leur ordre d'énumération. Mais l'ordre des unités élémentaires est lui-même relatif au nombre (cardinal) de celles qui précèdent chacune des unités ainsi ordonnées.

ce qui est de la suite. Par contre, dès 5-6 ans, ils admettaient cette généralisation et un petit garçon de cinq ans et demi a même trouvé cette jolie formule: «Quand on sait pour une fois, on sait pour toujours». Or, ce même sujet, pour 10 jetons rouges posés sur la table en correspondance terme à terme avec 10 jetons bleus, niait encore la conservation de cette équivalence lorsque l'on espaçait quelque peu les éléments de l'une des deux rangées et que la correspondance cessait ainsi d'être optiquement constatable. On voit en cet exemple le rôle constructif de la mise en correspondance combiné avec la récurrence.

8. Un exemple frappant de convergence entre la théorie et le développement spontané est celui des intuitions géométriques. Historiquement celles-ci ont débuté par les formes euclidiennes, les structures projectives n'ayant été dégagées que plus tardivement et la topologie au XIXe siècle seulement. Or psychologiquement les enfants de 3-4 ans qui ne savent pas encore dessiner des carrés et les assimilent comme les cercles, rectangles, triangles, etc. à de simples courbes fermées, marquent au contraire soigneusement la différence entre celles-ci et des figures ouvertes et dessinent avec le même soin un petit cercle à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière d'un grand. De ces intuitions topologiques précoces dérivent ultérieurement et simultanément les notions projectives (ponctuelles avec vérification par visée, etc.) et euclidiennes, selon un processus qui est donc plus proche de la théorie que de l'histoire.

9. Une autre convergence intéressante tient au fait que l'on retrouve, à partir du niveau des «opérations concrètes» de 7-8 ans, un équivalent élémentaire des trois «structures mères» distinguées par les Bourbaki, ce qui montre leur caractère «naturel». On relève d'abord la construction de structures de caractère algébrique, en ce sens que leurs lois de composition comportent des opérations inverses et un élément neutre $+ A - A = 0$. On les observe notamment dans les systèmes de classes (classifications, etc. avec quantification des inclusions $A \subset B$ si $B = A + A'$ non nulles). On trouve en second lieu des structures d'ordre dont les lois de composition reposent sur la réciprocité et qui caractérisent les systèmes de relations (sériations), etc. On distingue enfin des structures topologiques fondées sur le continu, les voisinages et séparations, etc. Or de telles structures élémentaires peuvent se combiner dans la suite. En particulier les inversions ou négations (-A) et les réciprocités, qui ne se composent pas entre elles au niveau des opérations concrètes, se combinent dès le niveau de 11-12 ans, en un groupe de quaternalité rendant possibles de telles compositions: c'est le cas lorsqu'aux structures élémentaires de classes et de relation se superpose un début de logique des propositions avec la combinatoire (ensemble des parties) qu'elle suppose. Le sujet devient alors capable de manipuler des systèmes comportant quatre transformations, par exemple $p \supset q$ maintenue identique I, son inverse N = «p et non-q», sa réciproque $R = q \supset p$ et sa corrélative C = «non-p et q». En ce cas RC = N, RN = C, NC = R et NRC = I, ce qui assure enfin la coordination en un système unique, des inversions et des réciprocités.

10. On pourrait citer bien d'autres exemples, en particulier la construction de formes élémentaires et triviales de catégories». Mais il convient surtout de montrer maintenant ce que l'éducateur peut tirer de ces convergences entre la pensée spontanée de l'enfant en son développement «naturel» et un certain nombre de notions théoriques fondamentales. Il peut arriver, en effet, que l'on cherche à enseigner à de jeunes élèves les «mathématiques modernes» avec des méthodes pédagogiques archaïques, exclusivement fondées sur la transmission verbale du maître à l'enfant et avec un emploi prématuré de la formalisation. Il en est résulté quelques échecs qui expliquent le scepticisme affiché par certains grands mathématiciens, comme J. Leray. Mais la faute n'est

pas alors à chercher dans le caractère «moderne» du programme mathématique lui-même : elle tient uniquement au caractère archaïque de la pédagogie et de la psychologie utilisées en de tels cas. Il est, en effet, particulièrement difficile à un maître de mathématiques, dont l'esprit est professionnellement abstrait, de se placer dans la perspective essentiellement concrète qui est celle de ses jeunes élèves, alors que du point de vue du développement et de l'assimilation progressive des structures en jeu, il n'y a aucune contradiction (comme on l'a vu plus haut) entre les phases concrètes initiales et leur aboutissement abstrait; mais c'est à la condition (et c'est là qu'est la difficulté pour le maître) de bien connaître les détails et le mécanisme de ces structurations spontanées successives. En un mot, le problème pratique difficile à résoudre est de greffer des notions de type général, que le maître conçoit dans son propre langage, sur des cas particuliers de ces mêmes notions, construits et utilisés par les enfants, mais sans qu'ils soient encore pour eux des objets de réflexion ni des sources de généralisation.

Pour opérer cette jonction nécessaire entre les structures logico-mathématiques du maître et celles de l'élève aux différents niveaux de son développement, il convient alors de se rappeler quelques principes psycho-pédagogiques très généraux. Le premier est que la compréhension réelle d'une notion ou d'une théorie implique sa réinvention par le sujet. Certes, celui-ci peut souvent donner une impression de compréhension sans remplir cette condition de réinvention, lorsqu'il devient capable de répétition et de quelques applications dans les situations apprises. Mais la vraie compréhension, c'est-à-dire celle qui se manifestera par de nouvelles applications spontanées, autrement dit par une généralisation active, suppose bien davantage : elle exige que le sujet ait pu trouver par lui-même les raisons de la vérité qu'il s'agit de comprendre, donc qu'il l'ait au moins partiellement réinventée pour lui-même. Cela ne signifie naturellement pas que le maître soit inutile, mais son rôle doit moins consister à donner des «leçons» qu'à organiser des situations provoquant la recherche et à la favoriser par des dispositifs appropriés. En cas d'erreur de l'élève au cours de ses tâtonnements, les procédés propres aux méthodes actives» consisteront non pas à la corriger directement mais à susciter des contre-exemples tels que les nouveaux essais de l'enfant le conduisent à se corriger lui-même.

Une seconde considération doit demeurer constamment présente à l'esprit du maître : c'est que, à tous les niveaux jusqu'à l'adolescence y compris, et de façon d'autant plus systématique que le niveau est plus élémentaire, l'élève est capable de «faire» et de «comprendre en action» bien davantage que ce qu'il parvient à exprimer verbalement. Autrement dit une bonne partie des structures que l'enfant met en oeuvre lorsqu'il cherche à résoudre activement un problème demeure inconsciente. C'est, en effet, une loi psychologique très générale que la prise de conscience est toujours en retard sur l'action elle-même, autrement dit, que le sujet possède bien plus de pouvoirs que ceux dont il parvient à faire la théorie ou simplement à décrire l'exercice[2]. Dans la mesure, par conséquent, où le maître, une fois renseigné par les travaux psychologiques mentionnés plus haut, connaît les structures sous-jacentes dont l'enfant dispose, il pourra l'aider à en prendre conscience, soit par des discussions appropriées entre l'élève et lui-même, soit par l'organisation de travaux en équipe où les partenaires du même âge ou d'âges voisins (un aîné agissant comme meneur et un petit groupe dont il est responsable) discutent entre eux, ce qui favorise la verbalisation et la prise de conscience.

Une troisième remarque s'imposait au temps de l'enseignement traditionnel des mathématiques, lorsque l'on obligeait les élèves à

2. Euclide lui-même n'avait pas conscience de toutes les structures opératoires dont il se servait en réalité, par exemple du groupe des déplacements.

résoudre quantités de problèmes souvent absurdes, supposant de nombreux calculs sur des données numériques ou métriques. En ces cas, la seule manière de réussir avec les élèves non particulièrement doués était de procéder en deux étapes (mais on l'oubliait trop souvent): une étape purement qualitative portant sur la structure logique du problème, puis ensuite seulement, l'introduction des données métriques, avec les difficultés supplémentaires que le calcul comportait. Avec les programmes de mathématiques modernes la question est bien moins aiguë, puisqu'elles sont essentiellement qualitatives. Mais elle se retrouve sur un autre plan, lorsque le maître est tenté de présenter trop tôt les notions et opérations en un cadre déjà formalisé. En ce cas la procédure qui me semble indispensable consiste à partir du qualitatif concret, autrement dit de représentation ou modèles correspondant à la logique naturelle du niveau considéré des élèves, et de réserver la formalisation pour plus tard, à titre de couronnement et de systématisation de notions déjà acquises. Cela revient certes à faire appel à l'« intuition » avant toute axiomatisation et nous connaissons bien le mépris des logiciens pour toute pensée intuitive ou « naïve ». Mais lorsqu'on se rappelle que l'intuition mathématique est essentiellement opératoire et que le propre des structures opératoires est de dissocier la forme du contenu, la formalisation finale apparaît alors comme préparée et rendue progressivement nécessaire par la construction elle-même de ces structures initialement intuitives. Nous ne croyons donc pas avec Pasch que la formalisation s'engage en sens contraire des tendances de la pensée naturelle, mais, pour qu'il n'y ait pas conflit entre celles-ci et celle-là, il faut qu'elle se constitue à son heure et non pas en vertu de contraintes prématurées.

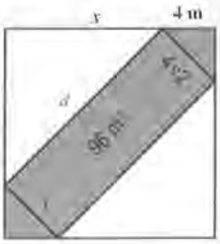
*...suite de la page 22*

**16. La bannière du château** (Cat. 8)

Ce problème a été bien réussi dans l'ensemble des classes de huitième, avec recours au théorème de Pythagore, du genre:

– L'aire du rectangle est ainsi de $112 - 16 = 96$ m², sa largeur est la diagonale d'un carré de 4m de côté: $4\sqrt{2}$ et par conséquent, sa longueur est (en mètres) $96/4\sqrt{2} = 24/\sqrt{2}$

Puis trouver $x$ d'après la relation $x = d/\sqrt{2}$



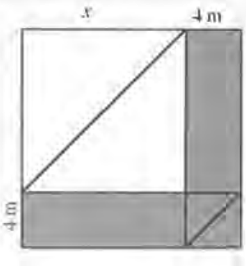

(en mètres) $x = (24\sqrt{2})/\sqrt{2} = 24/2 = 12$

et finalement en déduire la mesure du côté: $12 + 4 = 16$ (mètres)

Une autre méthode consiste à former un carré avec les deux triangles qui n'appartiennent pas à la bande et de transformer ainsi celle-ci en une figure d'aire équivalente, constituée d'un carré de 4 m de côté et deux rectangles de 4 m de largeur.

La longueur de chacun des deux rectangles se calcule ainsi immédiatement:

$2(4x) + 16 = 112 \longrightarrow x = 12$



# Mathématique appliquée[1]

**par Théo Bernet**

Il est facile, malheureusement trop facile de ridiculiser les problèmes d'arithmétique classiques. N'ont-ils pas été imaginés dans le but louable d'apprendre aux enfants à utiliser les mathématiques ?

Cela dit, je me permettrai tout de même d'en faire ici la critique. «Un étang rectangulaire est long de 25 m et large de 10 m. Quelle distance doit parcourir Pierre pour en faire le tour ?» Un tel problème n'est pas de ceux qui se présentent réellement. Sa résolution ne peut apprendre aux élèves à appliquer les mathématiques à la réalité. En effet, la description verbale de la situation présentée dispense l'élève de se poser toute une série de questions qu'il devrait se poser dans un cas réel. Par exemple : cet étang peut-il être assimilé à un rectangle ? (Au fait : comment s'y prend-on pour s'assurer qu'une pièce est vraiment rectangulaire, au moment de commander un nouveau tapis de fond ?). Ou : à quelle distance du bord Pierre marchait-il ? Le périmètre du rectangle donné est-il une bonne approximation du chemin vraiment parcouru par Pierre ?

Il faut se rendre à l'évidence. Un tel problème se réfère à un monde conventionnel. Tout se passe comme si l'on demandait aux élèves une réaction automatique aux mots «long», «large» et «tour», réaction qui consiste à se rappeler que le périmètre d'un rectangle s'obtient en additionnant deux fois sa longueur et deux fois sa largeur, puis à faire le calcul. Le réel lui-même n'intervient pas dans le raisonnement. En voici une autre illustration, citée il y a quelques années par C.F. Landry : «Ton papa te donne 2 lapins, et ton parrain t'en donne encore 3. Combien en as-tu maintenant ?» Dans l'esprit du maître cet énoncé était à peu de choses près l'ordre d'additionner 2 et 3. Mais l'élève a répondu «6»... car il en avait déjà un !

Je crois que l'apprentissage de l'application de la mathématique au monde réel est l'un des buts principaux de notre enseignement. On vient de voir que les problèmes qu'il pose n'ont pas été vraiment résolus dans le cadre de l'arithmétique traditionnelle. Le nouvel enseignement réussira-t-il mieux ?

Il semble bien qu'il faille encore beaucoup réfléchir à la question. Certains signes annoncent un progrès. De plus en plus, les petits élèves ont l'occasion de manipuler des objets. Dans les cas favorables, ils peuvent de la sorte exercer la démarche de base du travail scientifique : expérimenter, observer, émettre une hypothèse, en déduire des conclusions et les vérifier par l'expérience. On note une tendance à fournir des données graphiques, ce qui est déjà une façon d'éviter certains des inconvénients liés aux énoncés verbaux. On rencontre des données relativement vagues ou incomplètes, qui amènent les élèves à les discuter, à les préciser ou à se renseigner. Dans la méthodologie romande figurent des mesurages[2] qui, comme dans la réalité, donnent une «fourchette» et non pas un nombre bien déterminé.

Les nouveaux programmes tendent à munir les élèves d'outils de pensée particulièrement puissants, comme les notions de fonction, de relation d'équivalence, les divers types de représentations graphiques, le calcul bien sûr. Il ne s'agit pas seulement de faire étudier ces matières pour elles-mêmes, mais surtout d'exercer les élèves à les utiliser pour coder la réalité, en vue de la décrire et de faire des prévisions à son sujet.

1. Article publié dans *Math-Ecole* no 70, décembre 1975 p. 1

2. Le mot est dans le dictionnaire

## Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** (tarifs en page 2 de couverture).

**Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :**

*Encyclopédie du kangourou*, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
*Mathématiques du kangourou*, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
*Exos-malices*, ACL ... (ex à Fr. 29.-)
*Histoire de Maths*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Faites vos jeux!* ACL ... (ex à Fr. 18.-)
*La magie du calcul*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Pythagore et Thalès*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Le monde des pavages*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Les maths & la plume*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Jeux et découvertes mathématiques*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Jeux mathématiques pour tous*, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
*Pliages mathématiques*, ACL ... (ex à Fr. 17.-)
*Apprivoiser l'infini*, ACL ... (ex à Fr. 25.-)
*100 jeux mathématiques du «Monde»*, POLE ... (ex à Fr. 27.-)
*10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)* ... *(ex à Fr. 20.-)*
*Jeux mathématiques du «Scientific American»*, ADCS ... (ex à Fr. 30.-)*
*Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM ... (ex à Fr. 24.-)
*Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans)*, CREM ... (ex à Fr. 32.-)
*Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie)*, CREM ... (ex à Fr. 29.-)
*Mille ans d'histoire des mathématiques*, (*Tangente* HS 10) ... (ex à Fr. 20.-)

**Problèmes de rallyes et concours:**

*Actes des rencontres internationales du RMT* (Brigue, 97, 98) ... (ex à Fr. 18.-)
*Actes des rencontres internationales du RMT* (Siena, 99, Neuchâtel 00) ... (ex à Fr. 25.-)
*Fichier Evariste I, APMEP* (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 20.-)
*Fichier Evariste II, APMEP* (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 25.-)
*Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL* (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 10.-)
*Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL* (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 18.-)
*50 Enigmes mathématiques pour l'école* (degrés 4, 5...) ... (ex à Fr. 14.-)*
*52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école* (degrés 4, 5...) ... (ex à Fr. 16.-)
*52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles* (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
*7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles* (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
*50 Enigmes mathématiques pour tous* (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)*
*52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école* (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
*7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous* (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
*50 Enigmes mathématiques pour lycéens* (degrés 10...) ... (ex à Fr. 16.-)
*52 Nouvelles énigmes mathématiques pour lycéens* (degrés 10...) ... (ex à Fr. 16.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ...........................................
Adresse (rue et numéro): ...........................................
Code postal et localité: ...........................................
Date: ................................ Signature: ...........................................

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à:
*Math-Ecole* p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

Monsieur N81 **1**
CALAME Jacques-André
6 Chemin de Fresens, La Savoyée
**2026 Sauges**

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à
Math-Ecole,
Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand,
2007 Neuchâtel

## sommaire