MATH ECOLE

Résolution de problèmes
et évaluation

«A vos baguettes»,
un simple jeu ?

Produire ou reproduire des
compétences mathématiques ?

41e année

202

juin 2002

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques!

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

Mise en page
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Carrés disposés en «spirale» dont les mesures des côtés sont les nombres de la suite de Fibonacci

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire:

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités: expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous).

Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro: CHF 7.–
anciens numéros: CHF 3.–/pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse):
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques, 11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique: admin@math-ecole.ch
Site internet: http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

MATH-ECOLE
41e année, cinq numéros par an

202
juin 2002

Sommaire

Editorial

Concours et enseignement des mathématiques

François Jaquet
Rédacteur responsable de *Math-Ecole*

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) vient de fêter ses dix premières années d'existence. Pour marquer cet anniversaire important, le comité de l'association « RMT – Suisse romande » a invité les représentants des autorités scolaires de nos cantons à venir assister à sa finale régionale du 10e rallye, le 29 mai 2002 à l'Ecole cantonale de langue française de Berne. Ce fut l'occasion de remercier tous ceux qui se dévouent depuis de nombreuses années, de faire le point et de réaffirmer l'intérêt de cette large confrontation entre classes sur la résolution de problèmes. Ce fut aussi le prétexte d'examiner le rôle et de la place du Rallye par rapport à l'école en général et son enseignement des mathématiques en particulier

Les concours de mathématiques sont apparus il y a une vingtaine d'années chez nous comme dans les pays voisins. Leur première caractéristique est d'être supra-régionaux, internationaux. Trois d'entre eux sont bien implantés en Suisse romande : le « Championnat international des jeux mathématiques et logiques », « Mathématiques sans frontières », le « Rallye mathématique transalpin ». Leur extension géographique fait qu'ils se situent au-delà des programmes régionaux ou nationaux de mathématiques, au-delà des grilles horaires, au delà des modalités locales de l'enseignement et de l'évaluation.

Une deuxième caractéristique de ces concours est leur mode de propagation. Introduits par des maîtres ou des animateurs proches de l'enseignement des mathématiques, ils s'installent sans crier gare, ne tardent pas à faire fureur et à impliquer des milliers d'élèves. Ils deviennent ainsi des phénomènes parascolaires greffés sur les structures de l'école et indépendants tout à la fois.

Même si elles s'intitulent « concours », « championnat », « rallye »... ces confrontations mathématiques ne sont pas des compétitions, dont le but est le classement des participants. Pour leurs animateurs, l'essentiel n'est pas de gagner, mais de chercher et de trouver des solutions aux problèmes proposés. On arrive ainsi à une troisième caractéristique de ces concours, qui rejoint l'une des finalités de l'enseignement des mathématiques, postulée explicitement dans nos plans d'études de Suisse romande pour les degrés 1 à 6 : « Faire des mathématiques, c'est d'abord résoudre des problèmes ». Dans le cas des concours par classes entières, cette activité de résolution se combine avec un travail d'équipe où les interactions entre élèves sont essentielles. Le RMT va encore plus loin puisqu'il développe une analyse a priori des problèmes, prend en compte les explications et justifications des élèves, étudie, a posteriori, les procédures de résolution mises en œuvre, au profit de la formation des maîtres et de la recherche en didactique.

Une autre caractéristique, encore, est d'ordre idéologique. Tous ces concours affichent publiquement une philosophie de la jouissance et du plaisir des mathématiques. S'ils conservent les concepts d'effort et de rigueur scientifique, ils rejettent absolument ceux d'ennui, de peur et d'inhibition souvent associés à l'enseignement de cette discipline.

L'inventaire précédent permet de préciser la place et le rôle des concours, et du RMT en particulier, par rapport au curriculum institutionnel de mathématiques.

L'intrus, qui se situe au-delà des plans d'études régionaux, qui s'intéresse exclusivement à la résolution de problèmes et qui se complaît dans le plaisir des mathématiques est-il un parasite ou un hôte désirable?

Dix ans d'expérience, de pratiques, de réflexions approfondies, nous autorisent à donner quelques éléments de réponse, certes personnels, mais solidement étayés:

- Près de la moitié des maîtres participants nous disent exploiter ultérieurement, en classe, le travail initié lors des épreuves du rallye.

- Les règles de la confrontation imposent une forme de travail absolument conforme à celle que préconisent nos moyens d'enseignement pour les premières phases de leurs problèmes ouverts ou situations-problèmes: la dévolution aux élèves de toute les responsabilités dans la conduite de la résolution, en phases d'appropriation et de recherche. Combien de maîtres nous disent leur étonnement à constater le degré élevé d'autonomie que peuvent atteindre leurs élèves, lorsqu'ils ne disposent d'aucune aide extérieure.

- Les problèmes du rallye sont condamnés à la qualité. En effet, on ne peut prendre le risque de proposer un énoncé insuffisant ou ambigu qui doit permettre à des milliers de classes, en totale autonomie, de s'engager dans une résolution. Remis cent fois sur le métier au cours de leur élaboration, ils sont ensuite analysés et discutés en profondeur. Leur présence dans nos manuels témoigne de cette qualité et de la richesse des données obtenues par leur expérimentation à grande échelle.

- Les résultats du rallye sont de plus en plus utilisés dans la formation des maîtres et en évaluation. De nombreuses publications s'y réfèrent pour encourager de nouvelles pratiques et attitudes dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques.

- Réciproquement, l'institution scolaire a toujours considéré le RMT et les autres concours d'un œil bienveillant. La présence de ses représentants et leurs propos lors de la récente finale romande l'ont confirmé.

La situation est donc claire: le RMT a sa place et un rôle à jouer, complémentaire de l'enseignement des mathématiques à l'école.

Ce rôle est, certes, encore modeste car les concours ne touchent qu'une minorité de classes et d'élèves. Le chemin sera long pour convaincre chacun que les mathématiques faites en résolvant leurs problèmes participent aux constructions prévues par les programmes officiels.

Au moment où la tendance se renversera et que certains prétendront qu'il n'y a plus besoin de faire le programme mais qu'il suffit de proposer les problèmes du rallye aux élèves, on avisera et l'école prendra les mesures nécessaires.

Résolution de problèmes et évaluation

Michel Brêchet

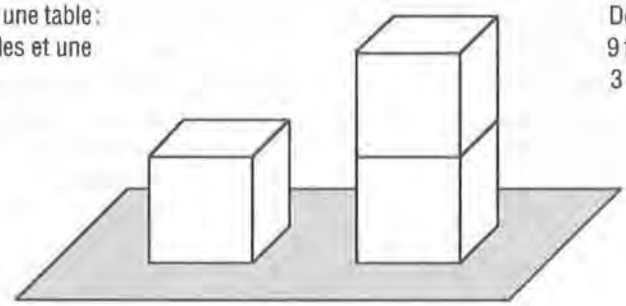
En mathématiques, l'évaluation qui porte sur l'acquisition de répertoires mémorisés, de règles de calculs, de formules ou d'algorithmes ne pose en général pas de grandes difficultés aux enseignants. Ce type d'évaluation, largement répandu, a toute sa raison d'être, puisque tout apprentissage passe par une phase de consolidation, de structuration, voire d'automatisation. Mais faire des mathématiques, c'est aussi – et surtout – résoudre des problèmes, c'est-à-dire se poser des questions, mettre en œuvre ce que l'on sait, établir des liens entre ses connaissances, élargir l'étendue d'un champ notionnel, en découvrir de nouveaux, envisager des solutions, les vérifier, les communiquer... En conséquence, l'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes mérite, elle aussi, une place de choix dans l'enseignement des mathématiques. Mais elle est assez délicate à conduire, car elle ne se réduit pas à un «simple» contrôle des performances.

A titre d'exemple, voici un problème[1] qui a été soumis, durant une période de 45 minutes, à des élèves de 7e année d'une section à niveau d'exigences peu élevé:

Faces visibles et faces cachées

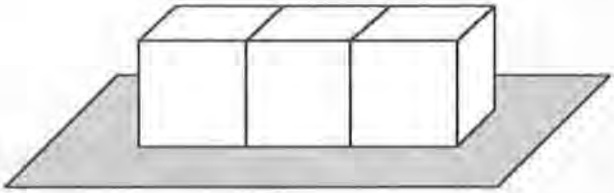
Un cube posé sur une table: 5 faces sont visibles et une face est cachée

Deux cubes empilés: 9 faces sont visibles et 3 faces sont cachées



1. Des problèmes proches de celui-ci figurent dans plusieurs moyens d'enseignement.

Trois cubes alignés sur une table : 11 faces sont visibles et 7 faces sont cachées



a) 1000 cubes empilés : combien de faces visibles et combien de faces cachées ?
b) 1000 cubes alignés : combien de faces visibles et combien de faces cachées ?

Pour le résoudre, les élèves avaient à leur disposition des petits cubes, la calculatrice, le matériel de géométrie (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et un dictionnaire de français. Ils ont travaillé seul. Cependant, ce problème aurait pu également être résolu par groupes de deux élèves et conduire ainsi à une évaluation de travaux de groupes. Un tel procédé pédagogique est par ailleurs intéressant, car il stimule les interactions entre élèves et favorise la communication.

Les travaux ont fait l'objet d'une évaluation chiffrée[2] établie sur la base de critères qui ont été communiqués aux élèves, présentés et explicités :

Présentation générale :	2 points
Précision du langage :	2 points
Clarté du compte rendu :	6 points
Résultats obtenus :	10 points

2. Dans le canton du Jura, les enseignants secondaires traduisent les compétences et les connaissances de leurs élèves par des notes allant de 1 à 6.

Reprenons ces critères un à un pour préciser – au mieux – ce qu'ils recouvrent :

• *Présentation générale*
Il s'agit d'apprécier ici la propreté, l'aptitude à rédiger correctement, la précision des tracés géométriques, la qualité des dessins...

• *Précision du langage*
Les termes utilisés sont-ils corrects ? La formation des phrases correspond-elle aux règles grammaticales en vigueur ? L'utilisation des symboles mathématiques est-elle adéquate ? Les écritures et les notations mathématiques sont-elles précises ?...

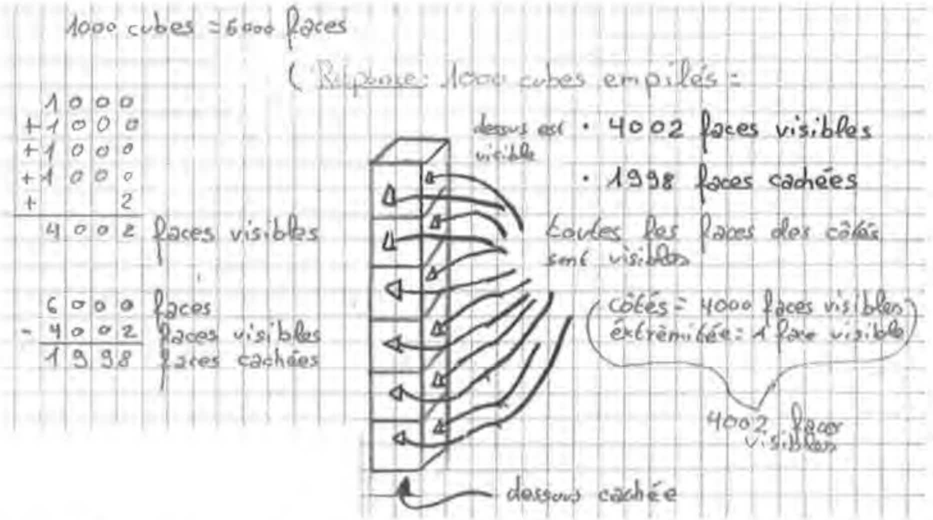
• *Clarté du compte rendu*
Plusieurs aspects relatifs à ce critère peuvent être évalués : la mise en page, la disposition des divers éléments d'information, la clarté des explications, l'aptitude à communiquer une démarche, les observations réalisées...

• *Résultats obtenus*
Dans ce problème qui touche notamment au domaine des fonctions, l'évaluation des résultats peut porter sur les essais réalisés, les méthodes mises en œuvre, les solutions trouvées, les liens effectués d'une situation à l'autre, la perception des objets géométriques en jeu...

Regards sur quelques travaux d'élèves[3]

1. S'agissant de l'empilement des cubes

A.

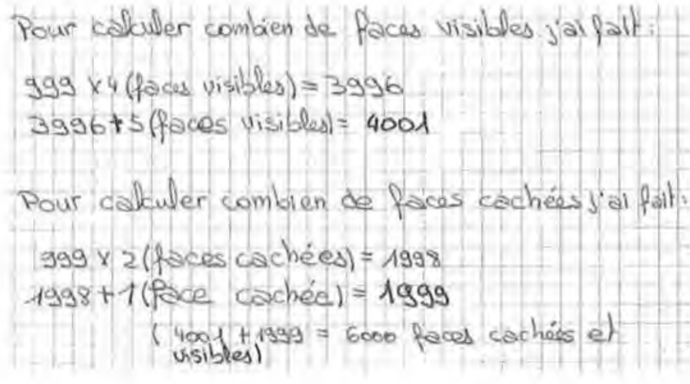


Précision du langage: A plusieurs reprises, l'emploi du signe « = » est abusif, car il ne traduit pas une relation d'égalité entre deux objets.

Clarté du compte rendu: La disposition des informations ne facilite pas la lecture du compte rendu. Il est cependant possible de saisir la démarche suivie.

Résultats obtenus: A l'exception d'une petite erreur (inattention ?), tout est juste.

B.



Précision du langage: La formulation des intentions pourrait être meilleure.

Clarté du compte rendu: Seule la justification des réponses est présente. Les différentes étapes de la résolution du problème n'apparaissent pas.

Résultats obtenus: Les solutions sont exactes. L'élève a par ailleurs trouvé un moyen de les valider.

3. Pour éviter les redondances, le point concernant la présentation générale n'est pas repris.

C.

Pour 10 cubes 41 faces visibles
19 faces cachées
Pour 20 cubes 81 faces visibles
39 faces cachées
Pour 30 cubes 121 faces visibles
59 faces cachées
Pour 40 cubes 161 faces cachées
79 faces visibles
Pour 1000 cubes 4001 faces visibles
1999 faces cachées

Précision du langage: Rien à signaler.

Clarté du compte rendu: Aucune information n'est fournie concernant la manière de trouver les résultats. Les cinq empilements considérés traduisent toutefois une parfaite maîtrise de la situation.

Résultats obtenus: Tout est juste.

D.

pour 10 cubes = 41 faces visibles

pour 1000 cubes = 4000 faces visibles plus la face du haut que l'ont compte en dernier parceque après les dizaelle vient cachée, total 4001 faces visibles

celle-ci vient cachée, parcequ'il en vient encore 990 cubes dessus donc 40 faces visibles. Celle ci vient tout en haut donc 4001 faces visibles

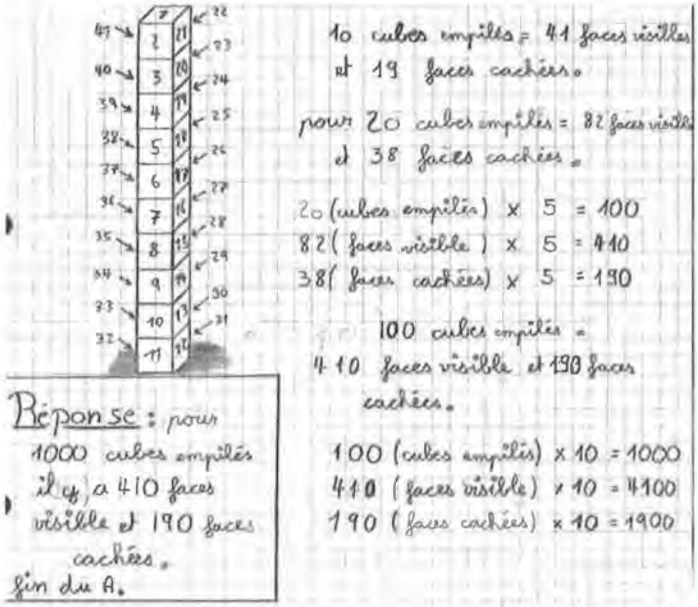
il signifie le 1 er cube

Précision du langage: La syntaxe laisse à désirer, l'utilisation du signe «=» est inadéquate.

Clarté du compte rendu: Un effort est réalisé pour décrire les différentes étapes du cheminement suivi. L'imbrication des divers éléments d'information ne facilite pas la compréhension du texte.

Résultats obtenus: La solution présentée est exacte. L'élève n'a pas abordé le cas des faces cachées.

E.



10 cubes empilés = 41 faces visibles
et 19 faces cachées.

pour 20 cubes empilés = 82 faces visibles
et 38 faces cachées.

20 (cubes empilés) x 5 = 100
82 (faces visible) x 5 = 410
38 (faces cachées) x 5 = 190

100 cubes empilés =
410 faces visible et 190 faces
cachées.

100 (cubes empilés) x 10 = 1000
410 (faces visible) x 10 = 4100
190 (faces cachées) x 10 = 1900

Réponse : pour
1000 cubes empilés
il y a 410 faces
visible et 190 faces
cachées.
fin du A.

Précision du langage: A trois reprises, le signe «=» ne correspond pas à sa signification mathématique.

Clarté du compte rendu: Malgré l'absence d'explications verbales, le raisonnement mis en place par l'élève apparaît clairement.

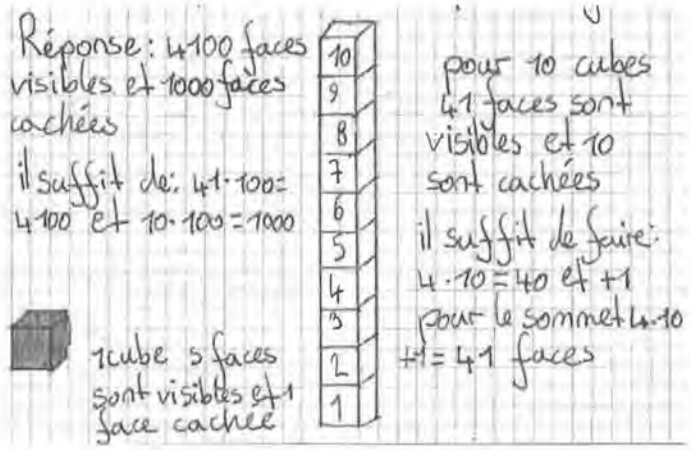
Résultats trouvés: L'élève pense que la situation relève de la linéarité. Il s'appuie alors sur la propriété du produit de toute fonction linéaire pour calculer ses solutions. Par exemple:

x 2   x 5   x 10

Nombre de cubes empilés	10	20	100	1000
Nombre de faces visibles	41	82	410	4100

x 2   x 5   x 10

F.



Réponse: 4100 faces
visibles et 1000 faces
cachées
il suffit de: 41·100=
4100 et 10·100=1000

1cube 5 faces
sont visibles et 1
face cachée

pour 10 cubes
41 faces sont
visibles et 10
sont cachées
il suffit de faire:
4·10=40 et +1
pour le sommet 4·10
+1 = 41 faces

Précision du langage: Dans l'expression «il suffit de faire: 4·10 = 40 et + 1 pour le sommet», le signe «+» pourrait avantageusement être remplacé par le mot «ajouter».

Clarté du compte rendu: La stratégie mise en place pour calculer le nombre de faces visibles est évidente. Elle est plus obscure à propos des faces cachées.

Résultats trouvés: L'élève pressent, à tort, que la situation est linéaire:

10 cubes ↦ 41 faces visibles
1000 cubes ↦ 4100 faces visibles.

Pour affirmer qu'à 10 cubes empilés correspondent 10 faces cachées, ce qui est faux, l'élève a sans doute procédé par linéarité (1 cube $\mapsto$ 1 face cachée, 10 cubes $\mapsto$ 10 faces cachées), ou peut-être a-t-il compté toutes les surfaces de contact (entre les cubes et entre le premier cube et la table).

2. S'agissant de l'empilement et de l'alignement des cubes

G.

a) on fait (4·1)+1=5 (4·2)+1=9 (3·4)+1=13 il faut faire (1000·4)+1=4001 visije fais toujours ·4+1
il y a 4001 faces visibles
1 cube: 1 face cachée 2 cubes: 3 faces cachées
1'000 cube 19'999 faces cachees

a) 1 cube = à 5 faces visi 2 cubes = à 9 faces visi 3 cubes = à 13 faces visi.

a) il y a 19'999 faces cachées

b) on fait (3·3)+2=11 (4·3)+2=14 (5·3)+2=17 il faut faire (1'000·3)+2=3'002
il y a 3002 faces visibles

b 19'999 + 1'000 = 20'999 faces cachées
il y a 20'999 faces cachées

Précision du langage: Comme dans d'autres travaux, l'utilisation du signe «=» est à certaines reprises inadéquate.

Clarté du compte rendu: Les différentes étapes du cheminement sont parfois imbriquées. La lecture du compte rendu n'est donc pas très aisée. La procédure utilisée pour calculer le nombre de faces cachées de 1000 cubes empilés n'apparaît pas.

Résultats trouvés: Les solutions concernant les faces visibles sont justes. A propos des faces cachées, le lien effectué par l'élève entre les deux situations est perceptible: l'ajout du nombre 1000, d'un cas à l'autre, correspond au nombre de faces en contact avec la table d'un alignement de 1000 cubes. Il n'y a pas de remise en question de l'ordre de grandeur des résultats trouvés.

H.

× 1000

Cubes	1	2	1000
Visibles	5	9	5000
Cachées	1	3	1000

× 1000

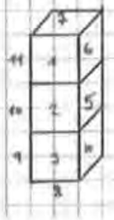
× 1000

Cubes	1	3	1000
Visibles	5	11	5000
Cachées	1	7	1000

× 1000

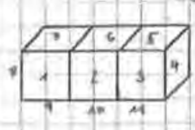
C'est la même chose Empilés ou Alignés.

Exemple : avec 3 carré



il y a 11 face con voin et 7 con voix pas.

C'est le même



il y a 11 face con voix et 7 con voix pas.

Précision du langage: L'élève n'est pas de langue maternelle française. Certaines expressions sont imprécises.

Clarté du compte rendu: Le recours à des tableaux de valeurs et à une exemplification facilite la compréhension du compte rendu.

Résultats obtenus: L'élève ne prend en compte que la première colonne de chacun de ses tableaux (cas d'un seul cube posé sur une table) pour fournir ses réponses. Il ne vérifie pas la validité de son raisonnement (fondé sur la linéarité) pour deux cubes empilés ou trois cubes alignés. Le dénombrement des faces visibles de trois cubes empilés ou alignés ne correspond pas à la réalité. Cette dernière procédure découle peut-être des résultats précédents.

I.

- On s'est amusé à chercher de combien augmente les faces visibles et les faces cachées, de toujours un cube en plus.
- avec 10 cubes il y a 41 faces visibles et 19 faces cachées
- avec 100 cubes il y a 401 faces visibles et 199 faces cachées
- avec 1000 cubes il y a 4001 faces visibles et 1999 faces cachées

Réponse : avec 1000 cubes : 4001 faces visibles et 1999 faces cachées

Explication : entre 10 cubes par exemble il y a un intervale de 9 entre les 10 cubes, alors on a fait 9 x 2 (parce qu'entre 1 intervale il y 2 faces chachées) + 1 (parce qu'il reste une face cachée dessous la tour !) facile !

Et pour les faces visibles on les a comptées ! facile aussi !

pour 10 cubes : il y a 32 faces visibles et 28 faces caches

pour 100 cubes : il y a 302 faces visibles et 208 faces cachées

pour 1000 cubes : il y a 3002 faces visibles et 2008 faces cachées

Réponse : avec 1000 cubes, 3002 faces visibles et 2008 faces cachées

Précision du langage: Dans certaines phrases, la combinaison des unités linguistiques n'est pas correcte.

Clarté du compte rendu: La méthode mise en œuvre apparaît clairement. Un bel effort d'explication est réalisé.

Résultats obtenus : Les solutions relatives à l'empilement des cubes sont justes. A partir d'un alignement de 10 cubes et de l'observation des nombres de faces visibles de 10, 100 et 1000 cubes empilés, l'élève déduit, à tort, les nombres de faces visibles et cachées de 100 et 1000 cubes alignés :

10 cubes empilés	$\mapsto$	41 faces visibles		
100 cubes empilés	$\mapsto$	401 faces visibles		
1000 cubes empilés	$\mapsto$	4001 faces visibles		
10 cubes alignés	$\mapsto$	32 faces visibles	et	28 faces cachées
100 cubes alignés	$\mapsto$	302 faces visibles	et	208 faces cachées
1000 cubes alignés	$\mapsto$	3002 faces visibles	et	2008 faces cachées

Pour conclure

L'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes prend tout son sens lorsqu'elle est répétée à intervalles réguliers. Elle permet alors de témoigner de progrès accomplis, voire de capacités mentales stables. Elle s'inscrit donc – prioritairement – dans le long terme, tout comme les apprentissages d'ailleurs. Plusieurs évaluations sont ainsi nécessaires pour esquisser une image globale du développement des compétences des élèves.

La multiplication est-elle commutative ?

De M. Bernard Lamirel, Dijon

[ndlr] *Notre fidèle fournisseur de cryptarithmes, nous offre de nouveaux casse-tête sur un thème qui lui est cher. Après voir trouvé un cas de commutativité de la multiplication en allemand VIER + VIER + VIER = ZWÖIF et DREI + DREI + DREI + DREI + = ZWÖIF, (Voir* Math-Ecole *no 195, p. 17) il a passé à l'espagnol, au français et à l'italien. Mais ce n'est pas facile, il y a des cas où ça marche pour un produit, mais de là à arriver à la commutativité, le chemin est encore long.*

Nous nous permettons de rappeler les règles de ces opérations arithmétiques à reconstituer, à l'intention de ceux qui les auraient oubliées ou qui ne les connaissent pas encore :

- *chaque chiffre est représenté par une même lettre,*
- *deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,*
- *aucun nombre ne commence par le chiffre 0.*

En espagnol il y a une solution dans un cas et aucune pour l'autre.

a)
```
  C U A T R O
  C U A T R O
  C U A T R O
  C U A T R O
+ C U A T R O
-------------
  V E I N T E
```

a')
```
    C I N C O
    C I N C O
    C I N C O
+   C I N C O
-------------
  V E I N T E
```

(suite page 41)

Jeu de dés

Martine Simonet
Neuchâtel

Ce jeu m'a été présenté par une enseignante d'une classe de deuxième primaire. Permettant d'acquérir des compétences en calcul réfléchi, notamment concernant l'addition de dizaines, ce jeu de dés a sa place au coin mathématique. Il nécessite peu de matériel; les règles et la valeur de chaque combinaison sont rapidement mémorisées par les élèves.

But du jeu
Obtenir le plus rapidement possible 500 points.

Nombre de joueurs
2 à 4

Matériel
5 dés
1 feuille de marque par joueur
1 tableau de valeur des points (voir page suivante)

Règles du jeu

Le premier joueur lance les 5 dés.

A l'aide du tableau de valeur des points, il calcule le nombre de points obtenus et note le résultat dans la deuxième colonne de sa feuille de marque.

Aux tours suivants, il devra encore additionner mentalement ce nombre à la somme des points réalisés lors des lancers précédents et inscrire ce nouveau total dans la colonne de droite.

Puis il passe les dés à un autre joueur.

Le gagnant est le premier à atteindre ou dépasser 500 points.

La validation se fait en additionnant les nombres inscrits dans la colonne de gauche (en utilisant l'algorithme en colonne ou une calculatrice).

Voici un exemple d'une feuille de marque:

Tirage	Points	TOTAL
2-2-2-3-**5**	25	25
1-2-3-**5**-6	15	40
1-1-4-4-**5**	25	65
3-3-3-4-6	30	95
1-2-2-3-**5**	15	110
3-3-3-3-6	60	**170**
	170	

Prolongements

L'enseignant peut créer des problèmes à résoudre individuellement par ses élèves. Voici quelques exemples:

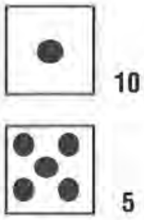
1. Jules a 140 points. C'est à son tour de jouer. Il lance les dés et note le nouveau total: 160. Combien de points a-t-il obtenus lors de ce lancer? Dessine les dés qui lui ont rapporté des points. Cherche toutes les possibilités.

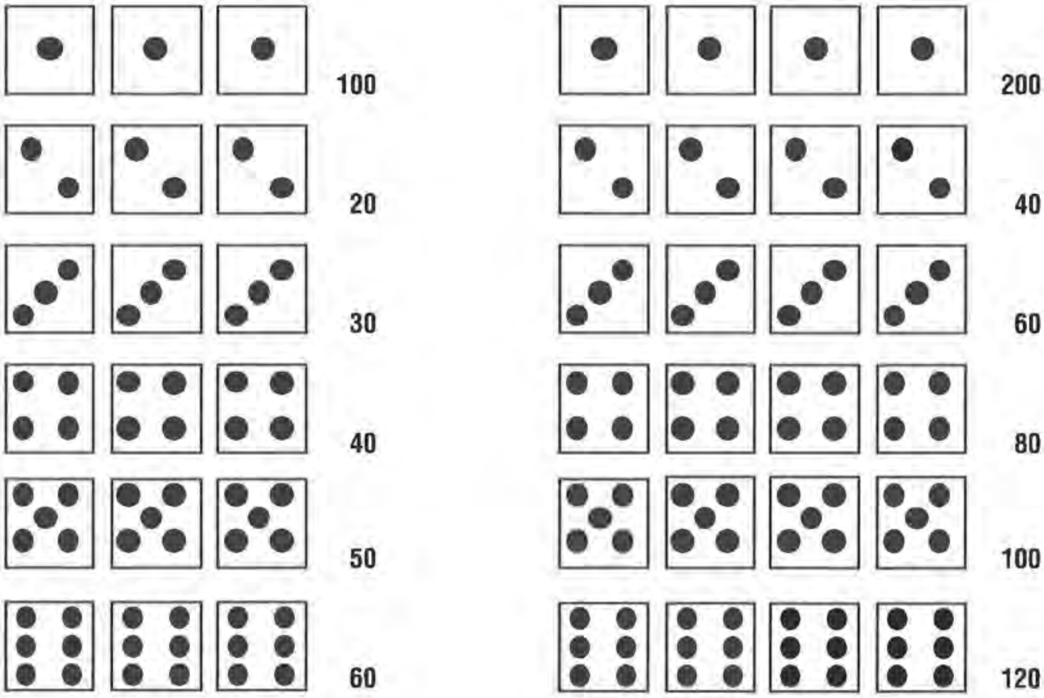
2. Aliza a 455 points. Dessine la combinaison de dés qui lui permettrait d'atteindre juste 500 points au tour suivant. Cherche toutes les solutions possibles.

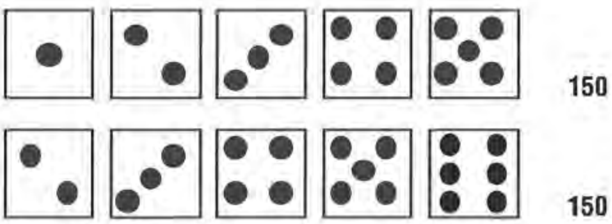
3. Emile lance les dés et annonce qu'il a fait 95 points. Ses copains prétendent que ce n'est pas possible. Qu'en penses-tu? Justifie ta réponse.

Jeu de dés

VALEUR DES POINTS







POKER
(5 dés identiques) donne immédiatement la victoire au joueur, quel que soit son résultat intermédiaire !

«A vos baguettes», un simple jeu?

Michèle Vernex,
Genève

Dans les nouveaux moyens d'enseignement de 1 P à 4 P de l'école primaire romande, une grande partie des activités proposées aux enseignants et à leurs élèves sont des jeux. Cela pourrait laisser penser que c'est en jouant que l'élève apprend. Or, on est maintenant convaincu que, selon les conceptions socio-constructivistes de l'apprentissage, l'enfant apprend lorsqu'il est confronté à un problème. Est-ce à dire que les concepteurs des nouveaux moyens se sont fourvoyés en proposant des jeux plutôt que des problèmes? Je ne crois pas. Il suffit d'en effectuer une analyse approfondie pour démontrer qu'ils correspondent aux critères d'une situation problème (Arsac et al., 1991) et qu'en plus, grâce à leur aspect répétitif, ils permettent soit l'entraînement de certaines notions, soit la recherche de stratégies (Gagnebin et al., 1997).

Dans la première partie de cet article, je propose d'analyser le problème «A vos baguettes», et de montrer que les savoirs mis en jeu dans cette activité sont importants. Ils peuvent être construits par les élèves, ceci pour autant que la phase de jeu «libre» soit entrecoupée de phases d'apprentissage dans lesquelles l'enseignant effectue les relances adéquates. Dans une seconde partie, je présenterai «Croisements», un problème proposé lors du 9e Rallye Mathématique Transalpin (RMT) qui montre un prolongement possible du jeu «A vos baguettes» sous forme de petite recherche.

A VOS BAGUETTES

Le problème «A vos baguettes» (voir page suivante) se trouve dans le module 4 des moyens d'enseignement de troisième primaire de Suisse Romande (Danalet et al., 1998). Dans ce module sont regroupés les problèmes pour connaître la multiplication, dans lesquels l'élève utilise les propriétés de la multiplication et différents outils de calcul en relation avec la numération.

Savoirs

Tout d'abord il faut remarquer que, dans le livre du maître, il n'y a pas de rubrique «savoirs» dans la description des activités. Ces savoirs doivent être recherchés dans les pages d'introduction du thème ou dans d'autres commentaires méthodologiques ou didactiques se rapportant à l'activité. Le module 4, d'où est tiré ce jeu, regroupe les problèmes pour *«connaître la multiplication, utiliser les propriétés de la multiplication et différents outils de calcul en relation avec la numération»*.

Le savoir contenu dans ce problème est noté dans la page «plan» du champ B, qui regroupe les activités pour «Apprendre à calculer», sous «notion»: *«multiplication et division et leurs propriétés»* et *«compétences»: «utiliser* des propriétés de la multiplication: pour décomposer *un nombre en produits de facteurs et pour développer des procédures de calcul réfléchi»*.

Dans l'introduction du module 4 sous la rubrique champ B, on peut lire:

> «‹*A vos baguettes*› *couvre l'ensemble des* objectifs de ce champ du module: apprendre *à calculer.*
>
> *On observe ici les effets de la modification d'un des facteurs: le produit augmente de l'autre facteur. Cette constatation est une illustration de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ainsi pour passer du*

À vos baguettes

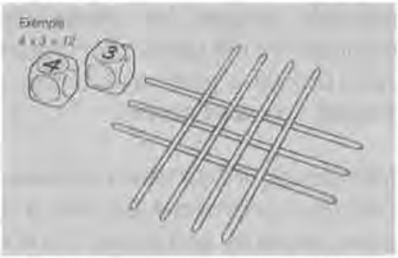
Tâche

- Passer d'un produit à l'autre en modifiant un des facteurs.

À vos baguettes

Règles du jeu pour 2 joueurs
Matériel: 15 baguettes, 2 dés à six faces, papier, crayon

- Un joueur lance les dés:
  - l'un indique le nombre de baguettes à placer verticalement,
  - l'autre indique le nombre de baguettes à placer horizontalement,
  - le produit des deux nombres correspond au nombre de croisements



- À tour de rôle, chaque joueur doit enlever ou ajouter une baguette sans obtenir un produit déjà obtenu.
Tous les produits obtenus sont inscrits.

Le but est d'être celui qui joue le dernier coup possible.

83

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 83
- MC: 2 dés à six faces
- 15 baguettes ou pailles écrasées, bâtonnets pour brochettes, ... (éviter les objets roulant trop facilement)

Mise en œuvre

- L'enseignant choisit le nombre de baguettes en fonction des possibilités des élèves et du degré de difficulté qu'il souhaite faire exercer (exemple: avec 15 baguettes, le plus grand produit possible est $7 \times 8 = 56$). Le minimum de baguettes est 12 afin de pouvoir représenter le lancer de dés correspondant au double 6.

Déroulement

Relance

- Si les élèves recourent trop souvent au facteur zéro pour mettre fin à une partie, il est possible d'en interdire l'usage.

Validation

- Les élèves contrôlent les opérations de leur adversaire.

Mise en commun

- Les élèves confrontent les démarches utilisées pour rechercher les produits ainsi que les stratégies permettant de bloquer l'adversaire.

Variable

Matériel

- L'activité peut être reprise sans les baguettes, afin de priver les élèves de la possibilité de compter les croisements. Cela les amènera à utiliser des procédures de calcul ou à recourir aux produits mémorisés.

Prolongement

- L'enseignant propose de rechercher et de noter la partie la plus longue possible à partir d'une position de départ (exemple: 3×5 et 12 baguettes au maximum).

Démarches possibles de l'élève

Concernant la recherche des produits

- Compter tous les croisements
- Trouver les produits par itération d'un des deux facteurs
  - $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5$
- Surcompter ou décompter en partant d'un produit déjà représenté
  - De $7 \times 4 = 28$, trouver 8×4 en effectuant $28 + 1 + 1 + 1 + 1$
- Passer d'un produit à l'autre en partant d'un résultat connu
  - De $5 \times 6 = 30$, trouver 4×6 en effectuant $30 - 6$
- Utiliser des produits déjà mémorisés
- Mémoriser les produits apparus en cours de jeu
- Utiliser la commutativité de la multiplication
  - Si $3 \times 8 = 24$ alors $8 \times 3 = 24$
- ...

résultat connu (6 x 7 = 42) au résultat de 6 x 8, on peut opérer de la façon suivante:

6 x 8 = 6 x (7 + 1) = (6 x 7) + (6 x 1) = 42 + 6 = 48

Une autre propriété apparaît dans ce jeu: tout produit d'un nombre par 0 est 0.

A ce travail sur les produits s'ajoute une recherche de stratégie, pour laquelle la table de multiplication peut servir de support. Par exemple: ajouter ou retirer une baguette revient à se déplacer d'une case, horizontalement ou verticalement, ou encore, les produits accessibles déterminés par *le nombre de baguettes à disposition se situent dans une zone bien précise de la table.* »

En résumé, par ce jeu les élèves devraient apprendre à connaître la multiplication, à utiliser ses propriétés (la distributivité, l'élément absorbant) ainsi qu'à utiliser la décomposition du nombre et le calcul réfléchi.

Les auteurs semblent également y voir un jeu de stratégie sur la table de multiplication qui me semble cependant hors de la portée des enfants.

Pour ma part, je pense qu'on pourrait ajouter certains savoirs abordés par le problème « A vos baguettes ». Les élèves peuvent, en effet, y découvrir la commutativité de la multiplication. Ils peuvent également arriver à une énumération partielle de l'ensemble des diviseurs d'un nombre (cf. procédures de « Croisements », pages suivantes) et, suivant comment est utilisé le jeu, il peut servir de début d'apprentissage de la table de multiplication.

Tâche

En ce qui concerne la tâche, elle explicite ce qui est demandé à l'élève d'une part, et permet, d'autre part, une approche rapide du problème pour l'enseignant selon le livre du maître. Pour « A vos baguettes » on peut lire: « *Passer d'un produit à l'autre en modifiant un des facteurs* ». Or, ce savoir attendu peut ne pas être rencontré par les élèves qui se contenteraient de dénombrer les croisements.

De plus, comme la tâche ne conduit pas forcément les élèves à utiliser la multiplication, ils ne rencontreront pas obligatoirement ses propriétés, ni, par conséquent, le savoir mentionné dans la tâche.

En fait, le savoir visé ne pourra être obtenu qu'en phase de mise en commun, par exemple lorsque les élèves expliqueront comment ils ont opéré pour trouver un nouveau produit à partir d'un ancien dont on a modifié l'un des facteurs.

Maintenant, il faut dire quelques mots sur l'énoncé du problème. En effet, la règle du jeu pose plusieurs problèmes. Tout d'abord, il dévoile le savoir « *le produit des deux nombres correspond au nombre de croisements* » alors qu'il pourrait apparaître lors de mises en commun sur les procédures utilisées pour trouver les résultats.

Ensuite, il y a un problème de vocabulaire: que signifie le mot « produit »? Est-ce la multiplication de deux nombres (3 x 4) ou est-ce le résultat (12)?

En effet, selon l'interprétation du mot « produit », la règle du jeu varie:

Si le produit correspond au résultat « 12 », on s'interdit, après le « 3 x 4 », les situations « 4 x 3 », « 2 x 6 », « 6 x 2 », « 1 x 12 » et « 12 x 1 ».

Par contre, si le produit correspond à l'opération « 3 x 4 », toutes les situations précédentes peuvent être encore proposées.

Cette ambiguïté est due à un abus de langage. Par exemple, dans les commentaires méthodologiques sur la multiplication, on dit, dans le cas 3 x 4 = 12, que «3 et 4 sont les facteurs et que 12 est le produit».

On devrait dire plutôt que «3 x 4» est le produit des deux nombres 3 et 4 (appelés «facteurs») et que, après le calcul, ce produit s'exprime aussi par le nombre 12. Dans le cas général, les mathématiciens, qui utilisent un langage algébrique, ne rencontrent plus cette ambiguïté: le produit de deux nombres naturels a et b est un nombre naturel désigné par «a x b».

Un autre point à relever est que ce jeu est mal compris, selon les observations faites lors de la mise en œuvre des nouveaux moyens.

Premièrement, on a observé que les élèves préfèrent comptabiliser une surface plutôt qu'un point (croisement) et comptent ainsi les «rectangles». J'ai également pu observer ceci lors de la mise à l'épreuve du problème «Croisements» [1] avec trois groupes d'élèves (Vernex, 2001).

Deuxièmement, le matériel utilisé semble rendre le problème ambigu. En effet, on a remarqué que les enseignants utilisent souvent les baguettes du jeu MIKADO pour effectuer le problème «A vos baguettes» et certains élèves ne s'autorisent pas à enlever des baguettes de dessous; ils suivent la règle du Mikado, jeu dans lequel des baguettes doivent être retirées sans faire bouger les autres. Dans ce cas, les élèves jouant en deuxième position sont tributaires du choix initial. En effet, soit le premier groupe ajoute une baguette, auquel cas l'autre groupe doit également ajouter une baguette pour ne pas retomber sur un produit déjà trouvé, soit ils enlèvent une baguette et le deuxième doit également enlever des baguettes pour ne pas retomber sur un produit déjà obtenu. Il est donc impossible de vérifier la commutativité de la multiplication, si les baguettes de dessous restent intouchables. Le jeu ne présente alors plus d'intérêt, car il se termine rapidement sans laisser de choix aux joueurs.

Dans d'autres cas, les élèves ajoutent des baguettes par-dessus les autres et cela n'a plus rien à voir avec la multiplication. Ils font des étages et on n'arrive plus à déterminer ce qu'est un croisement.

Enfin, même si les élèves écrivent la multiplication – ce qui se rencontre rarement car la majorité des enseignants observés, pour ne pas intervenir dans les procédures des élèves, ne s'autorisent pas à imposer la notation – les élèves effectuent alors un comptage et n'utilisent pas les produits qu'ils connaissent, ni même la suite de nombres (par ex. 3, 6, 9,...). Ceci a également été observé dans les copies des épreuves du 9e RMT[2], pour le problème «Croisements».

Mise en œuvre et déroulement

Comme nous l'avons vu sous la rubrique tâche, l'enseignant va probablement devoir définir ce qu'il entend par «produit».

Ensuite, à cause du libellé du problème, l'enseignant, doit s'attendre à ce que les élèves le questionnent pour savoir si «4 x 3 est la même chose que 3 x 4» puisque le résultat de cette opération est 12. Dans ce cas, les élèves vont rencontrer la commutativité de la multiplication. Puis ils peuvent également demander si «2 x 6 est la même chose que 3 x 4».

1. Problème proposé dans le 9e RMT

2. voir résultats des classes au problème «CROISEMENTS» lors du 9e RMT

Ici, comme précédemment, les produits sont différents, mais le résultat identique. On remarque à ce propos que ce problème peut permettre d'énumérer une partie de l'ensemble des diviseurs d'un nombre. Le tout est à discuter avec les élèves lors d'une des mises en commun.

A un moment ou à un autre, une mise en commun sera également nécessaire afin de discuter les diverses procédures utilisées par les élèves pour trouver les nombres de croisement, ceci afin de faire ressortir le savoir attendu et de l'institutionnaliser. Il faudrait également que le calcul réfléchi soit utilisé et donc proposé également lors d'une mise en commun.

La mise en commun pourra se développer sur les savoirs suivants :

- la mise en relation des deux nombres de baguettes (a et b) avec le nombre de croisements (c), par l'intermédiaire de la multiplication : le produit des deux premiers détermine le dernier (a x b = c) ;
- les liens avec la table de multiplication où, lorsqu'un des facteurs d'un produit est augmenté ou diminué de 1, on passe d'une case à une case voisine ;
- la commutativité de la multiplication (liée à la symétrie de la table et aux symétries des dispositions des baguettes) ;
- la distributivité élémentaire de la multiplication (telle qu'elle est explicitée précédemment) ;
- les suites de nombres dans une ligne ou une colonne de la table de multiplication (préparation au concept de multiple).

Le jeu, de lui-même, ne propose pas de validation. La table de multiplication peut être utilisée par exemple, ou la calculette.

Conclusion

En résumé, pour une bonne utilisation de ce problème, il me semble donc nécessaire que l'enseignant effectue une analyse a priori et distingue les consignes « matérielles » – telles que la précision de « croisement », la disposition des baguettes sur deux niveaux seulement, le maniement des baguettes avec possibilité d'en enlever « dessus » ou « dessous », le sens du mot « produit », pris comme couple ordonné du nombre de baguette d'une direction et du nombre de baguettes dans l'autre direction – du jeu mathématique où les élèves mettent en œuvre et renforcent leurs connaissances sur la multiplication.

L'appropriation des consignes peut, par exemple, se faire au travers d'une ou deux parties expliquées, en grand groupe ; on évitera ainsi des dérives « appauvries » de l'activité qui n'ont rien à voir avec les savoirs mathématiques visés.

Il faut aussi prévoir de nombreuses mises en commun. Il devrait y avoir, entre autre, une discussion sur les propriétés des opérations et une autre sur une analyse plus approfondie du nombre, de sa décomposition et des savoirs sur ses diviseurs.

En ce qui concerne la modification des variables, proposées dans le livre du maître, on peut évidemment augmenter le nombre des baguettes ou le réduire.

Pour ce qui est du prolongement de l'activité, bien qu'il soit possible de faire travailler l'apprentissage des produits par cet exercice, comme suggéré par les auteurs, il me semble que l'utilisation du « Calculora »[3] pour l'apprentissage de la table de multiplication est plus adéquate que de proposer la même activité sans les baguettes.

Une autre activité serait de travailler le calcul réfléchi pour les procédures de calcul.

CROISEMENTS

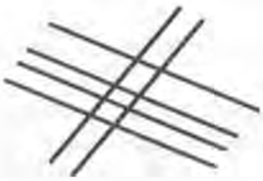
Nous avons vu plus haut que le mot « produit » peut être compris comme l'opération multiplicative ou comme la solution de l'opération. Il peut donc être intéressant de proposer aux élèves un problème recherchant les résultats de l'opération. C'est le cas du problème « Croisements » tiré du 9e RMT et dont sa création fait l'objet d'une publication séparée (Vernex, 2001). Le voici tel qu'il a été proposé aux élèves de 4e et 5e année primaire.

CROISEMENTS

David a 10 baguettes. Il place quelques baguettes dans une direction, puis il en place d'autres, par-dessus, dans une autre direction. Finalement, il compte les croisements obtenus.

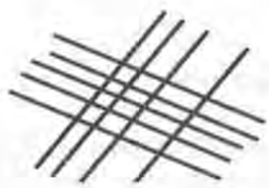
(Chaque baguette de dessus doit croiser toutes celles de dessous, comme sur les figures suivantes). Il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les 10 baguettes.

Voici ses trois premiers essais et les nombres de croisements obtenus :



8 croisements

5 croisements



20 croisements

Cherchez tous les autres nombres de croisements que David peut obtenir.
Expliquez comment vous les avez trouvés.

Savoirs

Les domaines de connaissances de ce problème sont la multiplication[4], pour l'arithmétique, et l'organisation d'un dénombrement, pour le domaine plus général de la logique et du raisonnement.

3. Activité proposée par le SRP de Genève

4. Il faut noter que dans le problème, contrairement au problème « A vos baguettes » la multiplication n'est pas induite par l'énoncé. Les élèves peuvent alors fort bien utiliser le dénombrement ou l'addition successive si le jeu n'a pas été travaillé auparavant.

Tâche

Pour résoudre ce problème l'élève doit disposer ses baguettes selon deux directions et déterminer ensuite le nombre de croisements. Soit il les dénombre un à un, soit il se rend compte qu'il peut utiliser la multiplication (procédure qui n'est pas donnée dans la consigne).

Lorsqu'il pense avoir trouvé tous les nombres de croisements, il doit vérifier ses résultats en les ordonnant, soit du plus petit au plus grand, soit inversement de plus grand au plus petit. Ensuite il doit encore expliquer pourquoi il ne peut pas obtenir les nombres manquants.

On obtient 19 solutions différentes, soit les nombres de croisements 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, et 25.

Procédures

Lors de l'analyse a priori, trois types de procédures avaient été envisagées. Les élèves pouvaient:

- procéder par essais successifs (manipulations ou dessins) non organisés et découvrir les nombres possibles, par dénombrement;
- procéder par manipulations organisées, en utilisant par exemple 2, puis 3, puis 4,... jusqu'à 10 baguettes en respectant, pour chaque cas, un ordre donné (par exemple, pour 9 baguettes: 8 x 1, 7 x 2, 6 x 3, 5 x 4, en constatant alors que 4 x 5 et les produits suivants sont déjà pris en compte) puis dresser un inventaire de tous les nombres obtenus (en retirant les nombres répétés): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25 (il manque 11, 13, 17, 19, 22, 23);
- travailler sans manipulations, sur des écritures multiplicatives.

L'analyse des réponses des élèves à ce problème a fait apparaître quatre procédures différentes:

1) par nombre de baguettes (Nb bag):
   les élèves énumèrent tous les nombres qu'ils peuvent faire avec 1 baguette dans un sens puis avec 2 baguettes, etc.;
2) en suivant la suite des nombres naturels (Suite Nb):
   les élèves recherchent les croisements en respectant l'ordre des nombres naturels (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25);
3) en se limitant au cas où les 10 baguettes sont utilisées (10 bag):
   les élèves cherchent et trouvent toutes les possibilités pour 10 baguettes seulement;
4) en formant des dispositions au hasard (Aléatoire):
   les élèves effectuent des croisements et notent les nombres, sans ordre apparent.

	Nb bag	Suite Nb	10 bag	Aléatoire	TOTAUX
TOTAUX	45	4	2	19	70
POURCENTAGE	64 %	6 %	3 %	27 %	100 %

Lors de l'analyse a priori j'avais fait l'hypothèse que les élèves chercheraient les nombres de croisements en utilisant la procédure « Suite Nb ». Or, le tableau ci-dessus montre que seuls 6 % des groupes utilisent cette procédure.

En fait, les élèves privilégient la procédure « Nombre de baguettes » qui est la suivante :

Avec 1 baguette dans un sens et « X » dans l'autre :
0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9

Avec 2 baguettes dans un sens et « X » dans l'autre :
0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16

Avec 3 baguettes :
0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 18 – 21 – 24

Etc.

On obtient ainsi les multiples des nombres de 1 à 9 plus petits que 25.

Il faut ensuite reprendre la liste obtenue et supprimer tous les doubles pour obtenir la solution du problème proposé.

Le problème « Croisements », privilégie donc la recherche systématique des produits sous les contraintes données et les multiplications correspondantes. Il constitue un complément ou un développement du jeu « A vos baguettes ».

CONCLUSION

Comme j'ai essayé de le montrer le problème « A vos baguettes » a des contenus mathématiques non négligeables, mais il est nécessaire que le maître organise de nombreuses mises en commun afin de faire émerger ces savoirs et de les institutionnaliser.

Cette activité peut être présentée comme une introduction à la multiplication. De plus, elle peut être prolongée par le problème « Croisements » qui, lui, initierait les élèves à la recherche de l'exhaustivité d'une solution en utilisant la multiplication qui aurait été institutionnalisée lors du travail effectué avec « A vos baguettes. ».

Ce jeu peut être considéré comme un jeu « fort », selon la définition de François Boule (Boule, 2001), puisqu'il permet aux joueurs de rencontrer des savoirs différents. Il ne perd pas de sa force à long terme, car il peut éventuellement être utilisé pour travailler l'apprentissage de la table de multiplication, même si « Calculora » semble plus adéquat.

Finalement, « A vos baguettes » est une activité mathématique qui demande une grande présence du maître et nécessite de nombreuses mises en commun afin d'institutionnaliser les savoirs mis en jeu. Plus généralement, cet exemple nous montre qu'une analyse approfondie de chaque jeu devrait être effectuée, avant d'être proposé aux élèves.

Références bibliographiques

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M., *Problème ouvert et Situation-Problème*, IREM Académie de Lyon, Villeurbanne, 1991

BOULE F., « Jeu mathématiques et remédiation », Math-Ecole no 200, décembre 2001

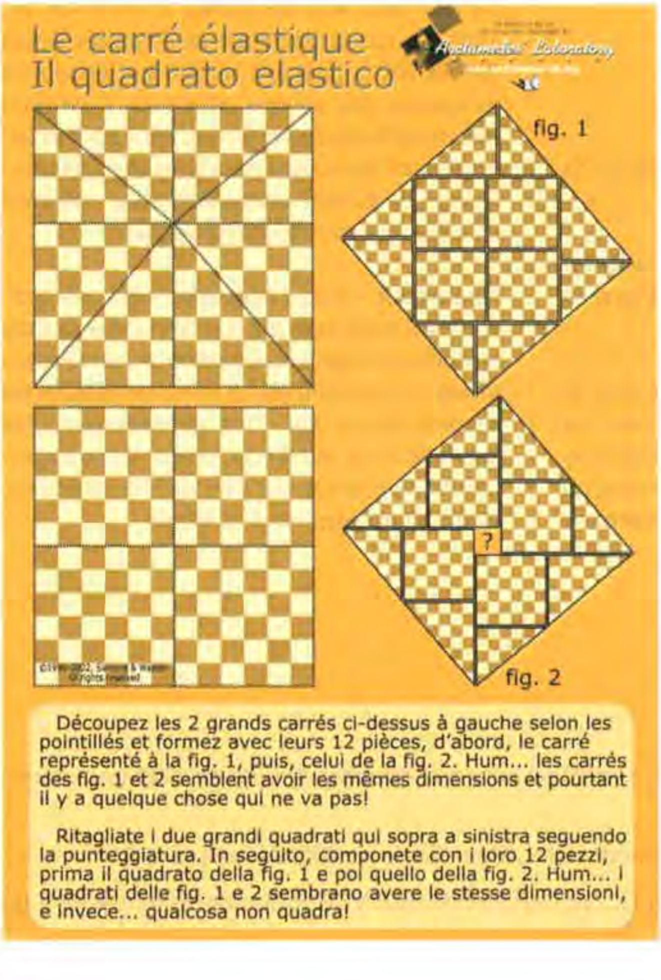
DANALET C., DUMAS J.P., STUDER C., VILLARS-KNEUBUHLER F., *Mathématiques, livre de l'élève 3P*, COROME, 1998

DANALET C., DUMAS J.P., STUDER C., VILLARS-KNEUBUHLER F., *Mathématiques, livre du maître 3 P*, COROME, 1998

GAGNEBIN A., GUIGNARD N., JAQUET F., *Apprentissage et enseignement des mathématiques – commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*, COROME, 1998

GRUGNETTI L., JAQUET F. (Eds) «Le Rallye mathématique transalpin. Quels profits pour la didactique?», *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, Brigue 1997 – 1998, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma et Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique, Neuchâtel, 1999

VERNEX M., «Croisements» et «Bar du Parc», *Création et utilisation en classe de deux problèmes de mathématiques*, IRDP, 2001



Verso du certificat, offert à chacun des 25000 élèves qui ont participé au 10e RMT, en Italie et en Suisse.

N'y a-t-il pas là un problème intéressant – un de plus – caractéristique du Rallye?

Un prix sera offert aux classes qui nous enverront une belle explication de cette étrange phénomène géométrique.

Tangram mathématique issu du dodécagone convexe régulier

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

Nous avons vu dans un article précédent les remarquables propriétés du nombre d'or φ et comment on peut les illustrer géométriquement à l'aide des triangles isocèles issus de la découpe d'un pentagone régulier.

Accessoirement nous avions illustré la suite de Fibonacci et $\sqrt{5}$.

Un raisonnement similaire avec le dodécagone régulier va nous permettre d'illustrer $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{6};\sqrt{8};\sqrt{12}$ aussi sous forme de jeux. Mais d'abord essayons de faire sentir la profonde parenté qui existe dans la famille des polygones convexes réguliers.

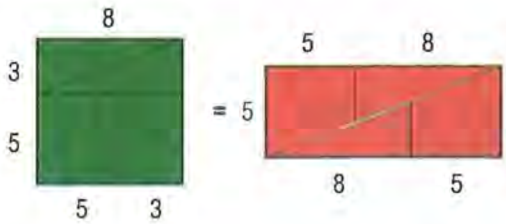
En effet tous gardent un lien avec la suite de Fibonacci, comme nous le montrons dans cet article.

Les nombres de Fibonacci ont la propriété suivante :

$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ relation qui se vérifie très vite à partir du tableau :

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	...
1	1	2	3	5	8	13	

Cette formule est à la base de paradoxes mathématiques, par exemple en utilisant une illusion géométrique (angles pas exacts) pour faire croire que 64 = 65.



Le dessin ci-contre illustre ce pseudo paradoxe, on remarquera la fente très fine de surface égale à 1 dans le rectangle rouge.

Le 1 manquant apparaît sous la forme d'un parallélogramme de surface 1 ayant pour côtés :

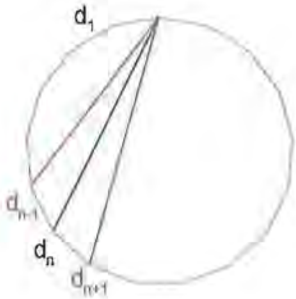
$a = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} = 8.544$ et pour angles respectifs 1.245° et 178.755°

$b = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5.385$

Cas du polygone convexe régulier :

On normalise à 1 le côté de tous les polygones convexes réguliers (ceci nous autorise à considérer les diagonales d_n issu d'un même sommet et reliant tous les autres à la fois comme des longueurs certes, mais aussi comme des nombres).

Quand on examine les diagonales successives issues d'un même sommet :



Nous avons : $d_n = d_1 \dfrac{\sin n\pi/N}{\sin \pi/N}$ qui devient $d_n = \dfrac{\sin n\pi/N}{\sin \pi/N}$

(à déduire du théorème du sinus) quand d1 est normalisé à 1

A l'aide de cette formule on déduit que :

$d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + d_1^2$ qui devient $\boxed{d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1}$

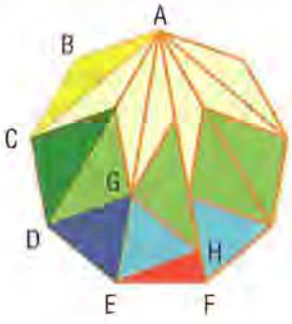
Cette formule se démontre aisément par la trigonométrie. On s'aperçoit que cette dernière relation est quasiment la même que la relation précédente reliant les nombres de Fibonacci entre eux :

$F_n^2 = F_{n-1}\, F_{n+1} + (-1)^{n+1}$

Toutefois il existe une élégante démonstration géométrique de $d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1$

Le découpage en isotriangles (triangles isocèles de côtés isocèles égaux au côté du polygone régulier et d'angles à valeurs entières de π/N) permet assez simplement de généraliser à tout N impair.

Considérons les triangles :



ACG vaut en surface (1/2) $d_2^2 \sin 2\pi/N$
ACG vaut aussi 2 triangles jaunes et un 1/2 losange vert

ABD vaut en surface (1/2) $d_1\, d_3 \sin 2\pi/N$
on a normalisé les côtés d_1 à 1
ABD vaut aussi 2 triangles jaunes + 1 triangle vert, moins le triangle BCD équivalent à un triangle jaune

A noter que 2 triangles verts issus du même losange coupé par l'une ou l'autre de ses diagonales ont même surface.

Si l'on veut montrer la formule $d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1$ il suffit de montrer que 1 triangle jaune vaut en surface (1/2) $d_1^2 \sin 2\pi/N$. Or l'angle en B du triangle ABC vaut $(N-2)\,\pi/N$, soit $\pi - 2\pi/N$, et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, donc on a bien l'égalité pour $d_2^2 = d_3 + 1$

Pour $d_3{}^2 = d_2 d_4 + 1$ on fait le même raisonnement, il manquera toujours l'équivalent d'un triangle jaune à $d_{n-1}\, d_{n+1}$ pour égaler $d_n{}^2$.

Pour $d^2_{\frac{N-1}{2}}$ on considère les 2 triangles ADE et AEF

$$ADE = (1/2)\ d_{\frac{N-3}{2}}\ d_{\frac{N-1}{2}}\ \sin \pi/N$$

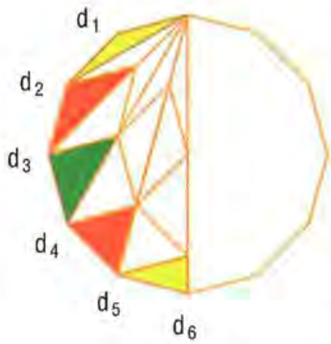
$AEF = (1/2)\ d^2_{\frac{N-1}{2}}\ \sin \pi/N$ et en différence il y a un triangle rouge.

Ce triangle est semblable à AEF, sa surface vaut : $(1/2)\ d_1{}^2 \sin \pi/N$, donc l'égalité est ici aussi démontrée.

Pour N pair, la même démonstration reste valable. A noter que pour $d_{\frac{N}{2}}$ les théorèmes de Thalès + Pythagore donnent directement :

$$d^2_{\frac{N}{2}} = d^2_{\frac{N}{2}-1} + 1$$

Tangram mathématique du dodécagone régulier



On peut découper le dodécagone en succession de triangles isocèles dits isotriangles (avec des côtés isocèles égaux au côté du dodécagone et des angles de valeur entière de $\pi/12 = 15°$).

Les théorèmes de Thalès et Pythagore donnent :

$$d_2\sqrt{2} = d_3$$

$$d_2\sqrt{3} = d_4$$

$$2\, d_2 = d_6 = \sqrt{d_5^2 + 1}$$

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= 1 + \sqrt{3} \\ d_4 &= d_2 + \sqrt{2} \\ d_5 &= d_3 + 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d_2 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} \\ d_5 &= d_2^2 \end{aligned}$$

Ces propriétés permettent avec les isotriangles issus d'un dodécagone (et en utilisant toutes les pièces) de réaliser successivement les illustrations de $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$: (démonstration similaire possible où des carrés remplacent les dodécagones)

dodécagone entier

1/2 dodécagone

1/3 dodécagone

1/4 dodécagone

1/6 dodécagone

1/8 dodécagone

1/12 dodécagone

1 carré

1/2 carré

Les pièces choisies ont des angles respectifs de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 105° et des longueurs de côtés comme indiqué entre les parenthèses.

(1 ; 1 ; d_2)

(1 ; 1 ; $\sqrt{3}$)

(1 ; 1 ; $\sqrt{2}$)

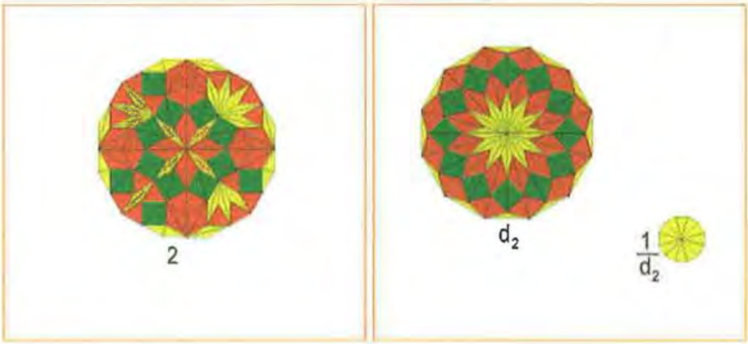
(1 ; 1 ; 1)

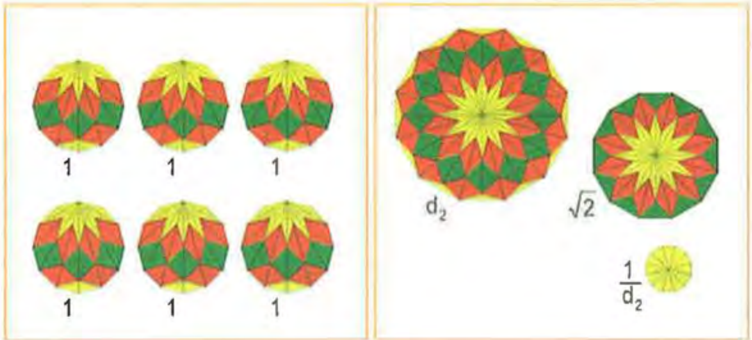
(1 ; 1 ; $1/d_2$)

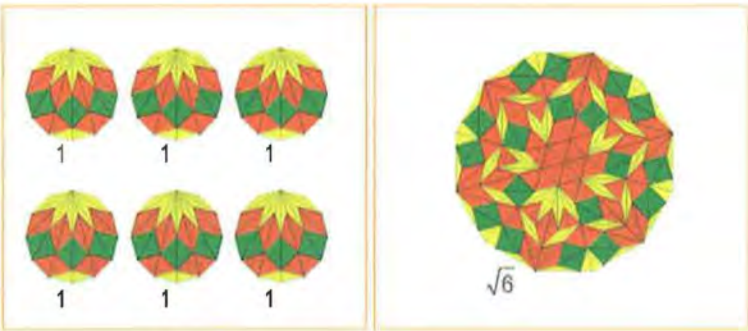
On peut découper les pièces dans du carton mais nous avons réalisé des jeux en bois et en mousse, très agréables à manipuler, fort bien illustrés par différentes énigmes accessibles à des enfants dès 8 ans, pour vous faciliter la préparation. Vous pouvez les obtenir auprès de Trigam SA, Neuchâtel CH, tél. 032 721.28.38

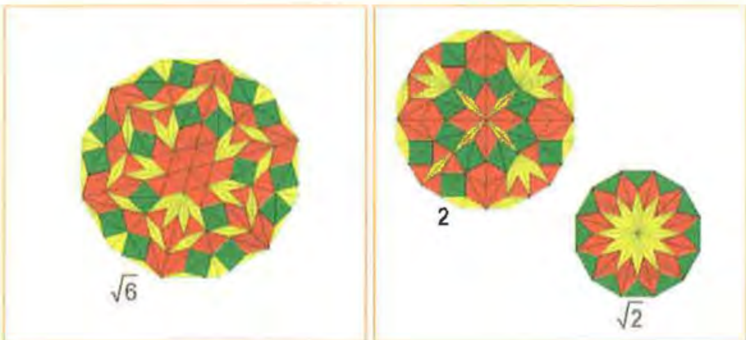
Nous verrons dans un troisième article comment généraliser cette approche des polygones réguliers par les diagonales et ceci nous permettra d'illustrer le calcul matriciel d'une manière très concrète.

Voici quelques exemples d'équivalences de surfaces: (les 2 cadres contiennent les mêmes pièces)









10e Rallye mathématique transalpin

Epreuve II

1. Pompiers (Cat. 3)

Les pompiers de Transalpie ont trois échelles:

- une courte,
- une moyenne, qui mesure deux fois la courte,
- une longue, qui mesure quatre fois la courte.

Les pompiers peuvent les accrocher les trois à la suite l'une de l'autre, pour former une très grande échelle de 42 mètres de longueur.

Combien mesure chacune des trois échelles? Expliquez votre raisonnement.

2. La maison de Violette (Cat. 3, 4)

Cinq amies, Blanche, Bluette, Noiraude, Rose et Violette, habitent dans la rue des Couleurs.

Leurs cinq maisons se suivent, sur le même côté de la rue, où les maisons sont numérotées avec les nombres impairs (1, 3, 5, 7, ...).

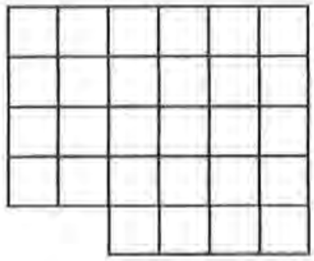
- Blanche habite au numéro 17.
- La maison de Noiraude a le numéro le plus élevé des cinq maisons.
- Bluette et Rose n'habitent pas à côté de Noiraude.
- Bluette habite au numéro 21.

Complétez l'adresse de la maison de Violette:
Rue des Couleurs no ......
Expliquez votre raisonnement.

3. Feuille de timbres (Cat. 3, 4)

Monsieur Méticulus, employé à la poste de Transalpie, a devant lui une feuille de timbres carrés, dont deux timbres ont déjà été détachés.

Il aimerait partager cette feuille en deux parties, qui se recouvrent exactement.



Comment Monsieur Méticulus doit-il faire pour obtenir deux parties de même forme, avec le même nombre de timbres?

Indiquez votre solution.

4. Un après-midi à la piscine (Cat. 3, 4, 5)

A l'entrée de la piscine du Beaupré, on trouve cette pancarte:

Entrée

Adultes: 8 Euros
Enfants: 4 Euros

La caissière a reçu 50 Euros d'un groupe de personnes entrées à la piscine.
Elle leur a rendu 10 Euros.

De combien de personnes ce groupe peut-il être formé?

Indiquez et expliquez les solutions que vous avez trouvées.

5. L'un monte, l'autre descend (Cat. 3, 4, 5)

Jean va chez Jacques.
Quand il arrive à la maison de son ami, Jean monte les escaliers par sauts d'une marche ou de deux marches à la fois, de manière irrégulière.

Jacques descend à sa rencontre en faisant toujours des sauts de trois marches à la fois.

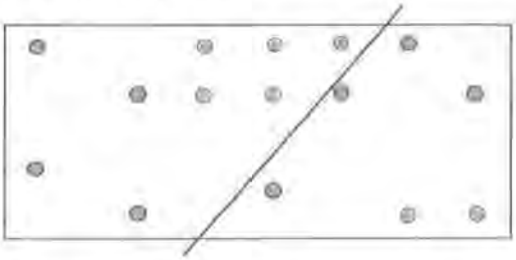
Les deux amis se rencontrent sur la huitième marche (depuis le bas), après avoir fait chacun le même nombre de sauts.

Combien de marches peut avoir l'escalier de la maison de Jacques?

Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

6. Points à isoler (Cat. 4, 5, 6)

En traçant des droites, on désire partager ce rectangle en plusieurs parties qui ne contiennent chacune qu'un seul point. Une première droite est déjà tracée.



Avec combien de droites, au minimum, arriverez-vous à isoler chaque point dans sa partie du rectangle?

Dessinez votre meilleure solution.

7. Répartition des tâches (Cat. 4, 5, 6)

Dans la classe, Elise, Marthe, Paul et Gino ont été nommés, au début de l'année scolaire, responsables des quatre tâches suivantes:

A. chef de classe
B. liste des devoirs
C. craies du tableau noir
D. bibliothèque

Les responsables changent de tâche à chacun des quatre trimestres de manière que, à la fin de l'année, chacun des quatre responsables se soit occupé de chacune des quatre tâches.

- Au premier trimestre Elise était chef de classe, alors que Paul s'occupait de la liste des devoirs.
- Au second trimestre le chef de classe était Paul.
- Au quatrième trimestre Gino s'occupait des craies.

Quelle a été la tâche des quatre responsables pour chacun des quatre trimestre de l'année?

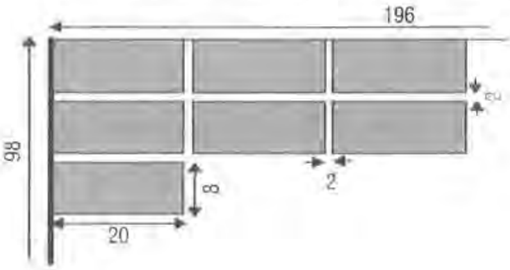
Expliquez comment vous avez trouvé.

8. Le drapeau (Cat. 5, 6, 7)

Pour les joutes sportives de l'école, l'équipe Rectangle s'est fabriqué un drapeau de la manière suivante:

Sur un rectangle de tissu bleu de 196 cm de longueur et 98 cm de largeur, elle a cousu des petits rectangles de tissu rouge de 20 cm de longueur et 8 cm de largeur, à 2 cm les uns des autres.

Ce dessin montre le haut du drapeau, après avoir cousu les 7 premiers rectangles rouges:



Combien de petits rectangles rouges entiers l'équipe a-t-elle pu coudre en tout, sur les deux faces du drapeau?

Expliquez votre raisonnement.

9. Multiplication codée (Cat. 5, 6, 7, 8)

Dans cette multiplication, chaque chiffre a été remplacé par une lettre.

Une même lettre remplace toujours le même chiffre.

Deux lettres différentes remplacent deux chiffres différents.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & D & E \\ & \times & & F & B \\ \hline & & A & D & E \\ E & D & C & D & \\ \hline E & B & D & D & E \end{array}$$

Trouvez à quel chiffre correspond chaque lettre et reconstituez la multiplication.

Expliquez comment vous avez fait.

10. Miss Troispointe (Cat. 5, 6, 7, 8)

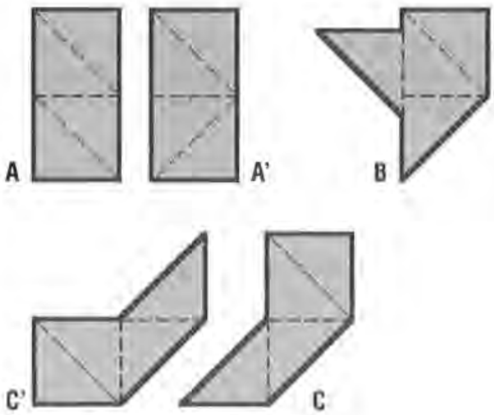
Miss Troispointe est une passionnée de puzzles.

Avec quatre triangles rectangles isocèles, égaux, elle arrive à former des polygones différents.

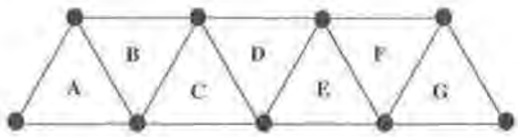
Dans les polygones qu'elle forme, les quatre triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles.

Dessinez les polygones différents que vous avez trouvés et classez-les selon le nombre de leurs côtés.

Exemples: **A** est une solution acceptable, c'est la même que **A'** car les deux rectangles sont égaux même si les triangles n'y sont pas disposés de la même manière. **B** n'est pas une solution acceptable car le triangle de gauche n'a pas de côté commun (sommets compris) avec celui d'un autre triangle. **C** et **C'** sont égaux car on peut les superposer exactement, ils ne représentent donc qu'une seule et même solution.



11. Nombres au sommets (Cat. 6, 7, 8)



Ecrivez chacun des nombres de 1 a 9 sur l'un des sommets de la figure ci-dessus, en respectant les règles suivantes:

— La somme des nombres situés aux sommets du triangle B vaut 1 de plus que la somme des nombres du triangle A.

— La somme des nombres situés aux sommets du triangle C vaut 1 de plus que la somme des nombres du triangle B.

— et ainsi de suite...

Trouvez et notez toutes les solutions possibles. Expliquez votre démarche.

12. Les 100 euros (Cat. 6, 7, 8)

L'employé de banque Bert Dago a une somme de 100 euros sur son bureau.

Cette somme est composée de 100 objets, de trois valeurs différentes :

— des billets de 5 euros,

— des pièces de 1 euro et de 5 centimes.

Combien de billets et pièces de chaque sorte Dago Bert a-t-il devant lui ?

Expliquez votre raisonnement.

13. Sac de billes (Cat. 7, 8)

Quatre amis, Marc, Serge, Fabio et Louis, essaient de découvrir le nombre de billes contenues dans un sac. Voici les informations dont ils disposent :

— Le nombre cherché est compris entre 1300 et 1500.

— Marc, qui a rassemblé les billes par 2, dit que, à la fin, il lui restait 1 bille.

— Serge, qui a rassemblé les billes par 3, dit que, à la fin, tous ses groupes étaient complets.

— Fabio, qui a rassemblé les billes par 5, dit que s'il avait eu 2 billes de plus, tous ses groupes auraient été complets.

— Louis, qui a rassemblé les billes par 7, dit que, à la fin, il lui restait 4 billes.

Quel est le nombre exact de billes contenues dans le sac ?

Expliquez comment vous avez trouvé

14. Les rubans transparents (Cat. 7, 8)

Pour décorer le dessus rectangulaire d'un paquet de fête, on colle un ruban transparent jaune de 6 cm de largeur, reliant un côté au côté opposé.

On colle ensuite un deuxième ruban transparent bleu, de 4 cm de largeur, reliant les deux autres côtés.

La figure formée à l'endroit où les deux rubans sont superposés est de couleur verte. Un de ses côtés mesure 4,5 cm.

Trouvez les mesures des autres côtés de cette figure.

Expliquez votre raisonnement.

15. Un nombre mystérieux (Cat. 8)

Un nombre de six chiffres commence par 1. Si on déplace ce premier chiffre, 1, de la première position à la dernière, à droite, on obtient un nouveau nombre de six chiffres, qui est le triple du nombre de départ.

Quel est ce nombre ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

Produire ou reproduire des compétences mathématiques ?

L'exemple de la droite numérique

P. Stegen, M. Docquier, A. Di Fabrizio et F. Renier
Equipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques, Liège

Introduction

Dans cet article et dans des publications à venir, nous comptons vous faire part des enseignements qui se construisent au travers d'un dispositif de recherche collaborative. Par recherche collaborative, que faut-il entendre? Dans le cas présent, le concept de recherche collaborative traduit une volonté de réunir, au sein d'un même dispositif de recherche, des enseignants et des chercheurs autour de difficultés que rencontrent les élèves de ces enseignants dans la construction des compétences numériques. L'objectif pour le chercheur est double : d'une part, il s'agit de favoriser le développement professionnel des enseignants et, d'autre part, de viser le développement de connaissances sur les pratiques enseignantes.

Très concrètement, les questions qui réunissent les chercheurs et les enseignants dans le dispositif de recherche peuvent être formulées de la manière suivante :

- *que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques à des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage de leurs élèves en matière de compétences numériques ?*
- *quelles conséquences en dégager pour la construction de nouveaux outils didactiques ?*

Cette réflexion sur les modalités d'association «enseignant – chercheur» s'inscrit dans le contexte particulier d'une école primaire francophone en profonde mutation. Les difficultés rencontrées par les élèves, les demandes de plus en plus fortes d'enseignants pour disposer d'outils didactiques adaptés aux exigences définies par les nouveaux programmes... ont pour conséquence d'accroître les demandes de retombées utilitaires de la recherche en didactique.

Dans le cas présent, le travail du chercheur ne consiste plus à fournir aux enseignants des propositions d'activités avec l'injonction de les mettre en application dans la réalité de leur classe. La perspective développée par la recherche collaborative contraint notamment le chercheur à créer les conditions nécessaires pour que les enseignants soient en mesure de construire avec lui une démarche susceptible de répondre à leurs besoins. L'enseignant ne doit plus être seul pour combler les vides du scénario dicté par les multiples réformes qui affectent sa profession et son rapport aux savoirs à enseigner.

Le dispositif actuel implique 8 enseignants [1] et leurs élèves, 3 directeurs d'école primaire [2], deux

1. Il s'agit de : Mesdames Curckovic (E.C. du Gros Chêne – Flémalle) et Dambiermont (E.C. Ans – Cité du Lonnay); Messieurs Bastin (E.C. J. Brouwir – Heure-le-Romain), Chatin (E.C. des Champs – Grâce-Hollogne), Distrée (E.C. de Comblain-la-Tour), Graindorge (E.C. des Cahottes – Flémalle), Kristof (E.C. de Bierset) et Spineux (E.C. de Villers-aux-Tours)

2. Madame A. Liben (E.C. d'Hermée), Madame Terlicher (E.C. de Bierset), Monsieur Ramquet (E.C. de Bierset)

inspecteurs cantonaux[3], un professeur de psycho-pédagogie[4] et ses étudiants... le tout coordonné par un chercheur[5] en didactique des mathématiques.

Le dispositif a débuté en mars 2000. Pour la rentrée de septembre 2000, il était prévu de mettre en place une épreuve diagnostique[6] chargée de faire le point sur les compétences numériques des élèves de 5e et de 6e primaire[7]... afin d'anticiper les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves.

Cette épreuve porte essentiellement sur la maîtrise des nombres rationnels (fractions et décimaux). L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves lors de cette épreuve a amené l'équipe à réfléchir au mode de construction de la droite numérique, présentée souvent comme le référent indispensable à la compréhension des nombres décimaux. Comment les élèves situent-ils des nombres sur une droite graduée? L'analyse des productions des élèves nous permet d'apporter des premiers éléments de réponse à cette question.

Comment des élèves de 5e et 6e primaire situent-ils des nombres sur une droite numérique?

Pour rappel, l'épreuve diagnostique, dans laquelle s'insère l'item que nous allons vous présenter, s'est déroulée durant la seconde quinzaine du mois de septembre.

Présentation d'un item[8]

Voici une droite graduée.
Sur cette droite, le point B représente le nombre 1 ; le point C représente le nombre 4.

- Quel nombre représente la lettre D ?
- Quel nombre représente la lettre A ?
- Par quels nombres entiers, le nombre représenté par la lettre E est-il encadré ?

Présentation des réponses des élèves

Comme le montre le tableau suivant, les élèves interrogés n'éprouvent pas de grosses difficultés à identifier le nombre représenté par la lettre D.

3. Antoine Di Fabrizio et Francis Renier

4. Marcel Docquier et ses étudiants: Bailly Emilie; Dirick Geraldine; Dumarey Marjorie; Durieux Delphine; Gilson Pierre-Yves; Graindorge Isabelle; Iachini Emilie; Jadin Laurent; Marichal Joelle; More Nathalie; Mottard Amandine; Noel Severine; Pierard Arnaud; Parotte Rachel; Peeters Severine; Pirotte Virginie; Rasier Emilie; Seron Anthony; Tarantini Sabrina.

5. Pierre Stegen

6. Cette épreuve peut être téléchargée sur le site internet de la recherche à l'adresse suivante: http://139.165.54.66/recherche_collaborative/accueil.htm

7. Au total, une centaine d'élèves de 5e et une centaine d'élèves de 6e ont été interrogés. Ils se répartissent dans les 8 écoles dans lesquelles travaillent les enseignant avec lesquels nous collaborons.

8. Celui-ci est repris d'une évaluation réalisée par l'Observatoire de l'enseignement des mathématiques français (EVAPM).

Tableau 1 : ***Que représente la lettre D ?***

	% 5e	% 6e
7	*82*	*91*
Pas de réponse	5	1
5	3	1
6	3	1
8	3	5
3	1	2
Autres réponses	3	
	100	100

Il en va tout autrement pour l'identification du nombre représenté par la lettre A.

Tableau 2 : ***Que représente la lettre A ?***

	% 5e	% 6e
0	*79*	*73*
0.9	7	13
Pas de réponse	3	1
0.75	2	
2	2	2
0.5	1	3
0.1	1	3
0.7	1	
0.99	1	2
Autres réponses	3	3
	100	100

En ce qui concerne, la valeur de l'encadrement de la lettre E, on obtient les réponses suivantes :

Tableau 3 : ***Par quels nombres entiers, le nombre représenté par la lettre E est-il encadré ?***

	% 5e	% 6e
08-09	*34*	*62*
Pas de réponse	11	11
08-10	7	7
01-00	7	
08-05	7	6
07-05	3	
09	3	
07-08	2	
09-10	2	4
Autres réponses	24	10
	100	100

Premiers constats

Une première analyse de ces résultats bruts fait apparaître les constats suivants:

- La présentation et la formulation des consignes de cet item sont inhabituelles et ont peut-être entraîné des difficultés de compréhension pour les élèves.
- Les erreurs constatées se retrouvent dans toutes les classes.
- Manifestement des élèves éprouvent des difficultés à positionner le zéro sur la droite numérique. Est-ce la présence de graduations se trouvant à la gauche de A qui leur pose problème?
- Les élèves interrogés identifient difficilement les deux naturels qui encadrent un rationnel. Comprennent-ils le sens du terme «encadré»?

Quelles démarches de résolution ont été mobilisées par les élèves?

Pour tenter d'en savoir plus sur les démarches utilisées par les élèves pour produire ces réponses, nous avons mis en place un dispositif impliquant des élèves de la section primaire de la Haute Ecole Charlemagne de Liège.

Avec ceux-ci nous avons tenté d'identifier des démarches utilisées par les élèves pour produire leurs réponses. Après avoir réalisé également un travail d'analyse formative de cette épreuve diagnostique, les normaliens ont interrogé les élèves de deux classes de 5e et deux classes de 6e qui avaient participé à cette épreuve au départ du guide de questions suivant:

- Que te demandait-on de faire dans cet exercice?
- Comment as-tu procédé pour réaliser cet exercice?
- Comment ton enseignant t'a-t-il appris à le faire?
- As-tu éprouvé une difficulté? Si oui, laquelle?
- Penses-tu avoir réussi cet exercice?: très bien – bien – médiocrement – pas du tout. A quoi le vois-tu?

L'analyse de leurs rapports d'entretien fait apparaître les éléments suivants:

- Pour retrouver le nombre représenté par la lettre D, les élèves déclarent compter les graduations qui se trouvent entre 1 et 4 pour définir ainsi la valeur de l'intervalle. La formulation inhabituelle de cette question n'a, semble-t-il pas posé de problèmes aux élèves qui ont correctement identifié ce que l'exercice leur demandait de faire.

  On note toutefois que certains élèves répondent 5. Cette erreur s'est retrouvée dans les classes où les étudiants de l'école normale ont interrogé des élèves. Il apparaît, pour ces élèves, une confusion entre «lettres et chiffres». Pour eux, ce sont les lettres qui définissent la valeur de l'intervalle. Pour ces élèves, les intervalles qui séparent deux nombres ne doivent pas nécessairement être égaux.

- La deuxième partie de la question a posé de nombreux problèmes aux élèves. C'est un des rares items où les taux de réussite sont supérieurs en 5e (en soit, ce n'est pas significatif mais cela mérite d'être souligné). En fait, la plupart des erreurs produites en 6e relèvent d'une même logique: ***les élèves éprouvent de grosses difficultés avec le zéro, d'une part, et, d'autre part, ils considèrent que sur une droite numérique, les nombres entiers se situent à la droite et les nombres décimaux à la gauche du 0 ou du 1.***

Un des élèves que j'ai interviewé avait bien répondu à cette partie de la question; il avait identifié que la lettre D représentait le nombre 7 et la lettre A, le nombre 0. Comme il avait commis une erreur au niveau de l'encadrement de la lettre E, je lui demande de placer tous les nombres sur ces droites numériques. A ma grande surprise, il a placé, à la gauche de la lettre A, les nombres «0,1», «0,2»... Je lui propose de continuer vers la gauche et il ajoute les graduations tout en continuant «0,3», «0,4», «0,5»...

Je lui demande alors si, sur une droite numérique, on procède toujours de la même façon. Il me répond affirmativement en précisant que «vers la droite, on met les nombres entiers et vers la gauche les nombres à virgule».

Je lui demande alors de me dire quelle est la valeur de la lettre E. Il me répond «9». Il a précisé, sur sa copie, que la lettre E est encadrée par les nombres «8» et «10». Je l'interroge pour savoir s'il est sûr de sa réponse et après un temps de réflexion, il déclare s'être trompé. Je lui demande alors de se justifier et il me déclare que l'on doit faire plus 1 lorsque l'on progresse d'une barre et que la lettre E est placée juste au milieu entre deux barres; ce n'est donc pas «9» mais «8,5».

Je lui demande alors de me dire où se trouve le nombre «2,5». Il le situe au bon endroit. Je lui demande de situer «0,5». Il le place au bon endroit.

Je lui demande alors s'il ne s'est pas trompé car «0,5», il l'a placé tout à l'heure à la gauche du «0».

Il hésite puis me déclare qu'il s'est trompé la première fois; «0,5» se place bien juste au milieu de «0» et de «1».

Je lui demande alors quels seraient les nombres qui se placent alors à la gauche du «0». Il propose les nombres suivants: «0,9»; «0,8»...

Cet exemple n'est pas anecdotique. Comme le montrent les résultats présentés en début d'article, l'identification du nombre désigné par la lettre A pose davantage de problèmes aux élèves de 6e qu'à ceux de 5e. Quand on regarde maintenant la nature des erreurs commises par les élèves, on constate que 22 % d'élèves de 6e considèrent que la lettre A désigne un nombre décimal compris entre 0 et 1. Autrement dit, ils adoptent un point de vue tout à fait comparable à celui qui vient d'être développé précédemment.

Ce raisonnement erroné se retrouve davantage en 6e qu'en 5e... quelle que soit la classe fréquentée par l'élève. En effet, lors de nos interventions dans les classes, nous nous sommes aperçus que de nombreux élèves partageaient cette conception erronée.

- Pour la troisième partie de la question 4, il apparaît que les élèves éprouvent des difficultés à comprendre la signification du terme «encadré».

- Certains ne savent pas ce que cela veut dire; ils savent encadrer un mot dans une phrase à analyser mais ne savent pas ce que veut dire «encadrer un nombre». Ils travaillent par analogie avec l'analyse grammaticale et répondent n'importe quoi ou ne répondent pas.

- D'autres pensent que cela signifie «être juste au milieu» et produisent la bonne réponse sans avoir compris la question.

- On note aussi certains élèves qui considèrent que la lettre E désigne le nombre «9» ce qui explique qu'ils déclarent que la lettre E est encadrée par «8» et «10» ou «9» et «10» ou encore «9» selon qu'ils ont compris ou non la signification du terme encadré. A nouveau, pour ces élèves, on constate que l'échelle de graduation ne doit pas être nécessairement constante sur une même droite numérique.

Au-delà des constats, des hypothèses de travail à explorer...

L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves a conduit les membres de l'équipe de recherche à s'interroger sur la manière dont se construit la droite numérique à l'école primaire. Il est ainsi apparu que, dans les écoles concernées, la droite numérique sert de référent de base pour la construction des nombres de la première à la sixième primaire. Sur les murs de toutes les classes, on retrouve ce type de support pour situer des nombres d'un point de vue ordinal. Ce constat pourrait illustrer un bel exemple de continuité des apprentissages (un même support sert à placer des nombres entiers, puis des rationnels tout au long de leur construction par les élèves). Toutefois, les difficultés rencontrées par les élèves dans l'utilisation de ce support viennent nuancer ces propos. ***Comment se fait-il, en effet, que des élèves éprouvent autant de difficultés avec un support qui leur est familier depuis si longtemps?***

La réponse à cette question tient sans doute dans la manière dont les élèves rencontrent ce référent. En effet, si tous les enseignants de la première à la sixième l'utilisent, quel est, parmi eux, celui qui le construit réellement avec les élèves? L'enseignant du cycle 5/8? Sans doute, mais ses élèves sont-ils en mesure de comprendre notamment le pourquoi de la constance des intervalles?

Au cours de la troisième maternelle et en début de scolarité primaire, les élèves sont familiarisés avec le principe ordinal via des jeux de parcours qui préfigurent notamment une étude plus systématique au travers d'une bandelette numérique. Au delà de ce premier constat, l'équipe de recherche (enseignants et chercheurs) a travaillé au départ des questions suivantes:

- Comment l'enseignant de première année assure-t-il ce passage, cette rupture, entre deux supports fondamentalement différents: la bandelette numérique et la droite numérique?

- Pourquoi introduire si tôt la droite numérique? Est-elle vraiment indispensable?

- A ce niveau, les élèves étudient essentiellement des nombres entiers... soit des quantités discrètes. La bandelette numérique n'est-elle pas un support plus adapté au niveau de compréhension des élèves de cet âge et au type de nombres rencontrés?

- Plutôt que de leur imposer comme tel, un support dont ils ne peuvent comprendre les principes de construction, ne faut-il pas privilégier d'autres supports, comme la grille des 100 premiers nombres[9], qui va leur permettre de mieux appréhender les régularités des suites numériques et devenir un référent très appréciable pour affronter des opérations additives et soustractives?

- Un référent comme la droite numérique apparaît, dans le développement des compétences numériques des élèves, très utile et compréhensible au moment où les élèves découvrent les nombres rationnels qui vont leur permettre d'aborder des quantités continues. Ne faut-il dès lors pas aborder la construction de ce référent, en fin de cycle 8/10, lorsqu'il apparaît que les nombres rationnels ne peuvent être situés sur des bandelettes numériques... que ce support doit être abandonné au profit d'un autre?

Cette dernière hypothèse de travail a été privilégiée par l'équipe de recherche qui a décidé de poursuivre ses investigations dans deux directions:

- Comment aider les enseignants de 6e primaire confrontés à des élèves en difficultés avec la droite numérique et ne disposant pas d'assez de temps pour effectuer un long retour en arrière (re-médiation à court terme)?
- Dans une perspective plus globale, quelles activités mettre en place pour permettre aux élèves de construire, en cycle d'apprentissages, des droites numériques?

Dans le prochain numéro de cette revue, nous détaillerons un ensemble d'activités que nous avons mises en place en collaboration avec les enseignants pour répondre à cette seconde question.

Pour terminer cet article, nous vous proposons un exemple d'activité expérimentée par les enseignants de 6e pour permettre à leurs élèves de s'approprier davantage les principes de construction d'une droite numérique. Cette activité, qui demande notamment aux élèves de construire des segments de droite, peut être utilisée comme outil diagnostique pour vérifier la compréhension de la droite numérique.

Un exemple d'activité

Titre de l'activité:

Sérier, comparer des nombres à virgule[10]

Objectifs:

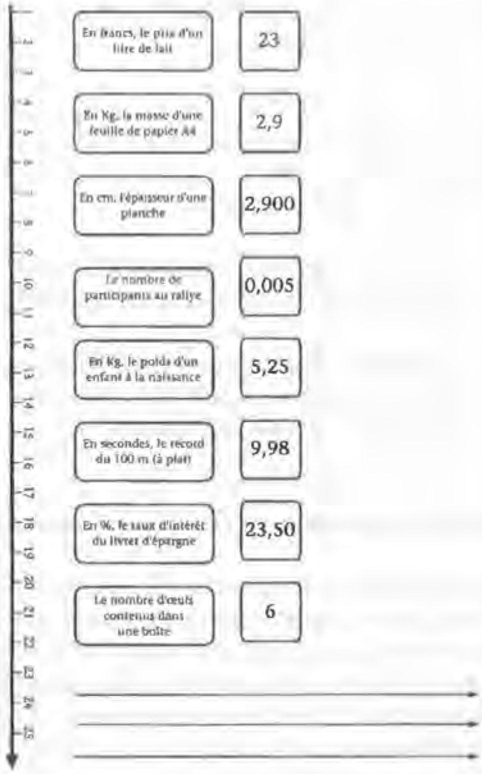
- Repérer et situer des nombres sur une droite graduée.
- Connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier ou un nombre décimal.
- Rattacher l'utilisation des «nombres à virgule» à la réalité quotidienne.

Matériel:

- Une série de cartons-nombres et de cartons-grandeurs
- Une droite graduée de 0 à 25
- Des portions de droite sans aucun repère

9. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de Sacré, A. & Stegen, P. (2000) *Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8*, paru aux Editions Labor, des exemples d'activités:
   - pour construire, avec les élèves, des bandelettes numériques,
   - pour assurer la passage de la bandelette numérique à la grille des nombres.

10. Source: Roegiers, X. (1991, 3ème éd.), *Réseau Mathématique 5*, Bruxelles: De Boeck-Wesmael



Scénario de l'activité:

Phase 1: association nombre-grandeur (Travail sur les» nombres de»)

- Présentation des deux séries de cartons à chaque élève en leur demandant d'associer chaque «carton-grandeur» à un «carton-nombre» (Phase individuelle).

- Mise en commun en groupes de 4 élèves maximum; les élèves doivent se mettre d'accord sur les hypothèses émises.

- Mise en commun générale, chaque groupe présente ses associations et les justifie.

- Discussion-réflexion sur le statut des nombres et sur la différence existant entre les nombres entiers et les nombres à virgule (Pourquoi avoir associé tel nombre plutôt que tel autre avec telle grandeur?)

Phase 2: positionnement sur la droite des nombres (en groupes)

- *Situation approximative*
  Les élèves travaillent sur une droite graduée de 0 à 25 et indiquent la situation approximative de chaque nombre. Le but est bien de situer les nombres les uns par rapport aux autres et non de les situer avec précision sur la droite numérique.

- *Vers une plus grande précision*
  Distribuer les morceaux de droite à découper en donnant la consigne suivante: «Pour chaque nombre à virgule, construis le morceau de droite qui te permet de le situer exactement».

- ***Synthèse provisoire***
  Discussion sur base des propositions de chaque groupe.

Quelques remarques sur la mise en place de cette activité

L'activité proposée doit être considérée comme une proposition de réponse, issue du champ de la recherche en didactique, à des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves. Deux remarques s'imposent:

- dans notre esprit, cette activité ne peut être considérée comme une sorte de potion magique qui va permettre de résoudre, d'un coup de baguette, les difficultés rencontrées par les élèves;

- cette activité est présentée aux enseignants sous la forme d'un canevas général qui demande à être contextualisé, singularisé en fonction de la réalité de la classe et des pratiques de référence des enseignants.

Dans un article précédent[11], nous avons déjà mis

11. voir *Math-Ecole* no 194 «La préparation, un moment-clé pour la mise en place de nouvelles pratiques didactiques»

en évidence les ruptures introduites par nos propositions d'activité dans les pratiques de référence des enseignants. Dans cette perspective, pour les aider à mettre en place de telles activités, le dispositif de recherche prévoit les phases suivantes :

- *une préparation de la mise en place de l'activité avec l'enseignant* ; cette préparation est réalisée au départ des questions que nous avons déjà abordées lors de précédente publication ;
- *l'observation, par le chercheur, du déroulement de cette activité ;*
- *une analyse a posteriori menée au terme de l'activité.*

L'ensemble des informations développées au cours de ces trois phases est repris par le chercheur qui les synthétise sous la forme d'un compte rendu. Une fois celui-ci approuvé, amendé par l'enseignant, il est communiqué aux autres partenaires du dispositif afin de permettre des échanges et des réflexions sur les pratiques didactiques expérimentées.

Très concrètement, l'expérimentation de l'activité « Sériation, comparaison de nombres à virgule » fait apparaître deux moments délicats à gérer par l'enseignant :

- la synthèse de la première activité « association carton nombre – carton grandeur ;
- la construction de segments de droite précis pour placer les nombres lors de la deuxième partie de la seconde phase.

Phase 1 : association des deux types de cartons

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'association «carton nombre» / «carton grandeur» ne va pas de soi. Les élèves semblent parfois dépourvus des connaissances sociales nécessaires à la réalisation de cet exercice. A titre d'exemple, voici les propositions obtenues dans une classe de 6e.

Nombres affichés	Propositions des duos d'élèves
23,50	En francs, le prix d'une boîte de lait En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat
0,005	En kg, la masse d'une feuille de papier
5,25	En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat Le nombre de participants à un rallye
23	Le nombre de participants à un rallye
6	Le nombre d'œufs contenus dans une boîte
2,900	En kg, le poids d'un enfant à la naissance
9,98	En cm, l'épaisseur d'une planche En francs, le prix d'une boîte de lait En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat
2,9	En cm, l'épaisseur d'une planche En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire

Comment l'enseignant va-t-il valider ces propositions d'élèves? Est-ce à lui de dire quelles sont les associations correctes ou doit-il demander aux élèves de rechercher parmi leurs référents les associations correctes? Validation externe ou validation interne?

Phase 2: positionnement sur la droite des nombres

La première partie de cette activité ne pose pas de problème aux élèves. Ils sont tous capables de positionner approximativement ces nombres sur une droite numérique graduée de 0 à 25. Dans le contexte d'une droite graduée déjà construite, ils identifient les nombres entiers qui encadrent les nombres rationnels à placer. Ils précisent, par exemple, que:

- «23,5» se place juste au milieu entre 23 et 24;
- «9,98» se place pratiquement à côté de 10...

Les choses se compliquent quand l'enseignant leur demande de situer le plus précisément possible un de ces nombres sur un segment de droite qu'ils doivent construire.

Ainsi, par exemple, après avoir constaté qu'il n'est pas possible de situer précisément «9,98», sur la droite graduée de 0 à 25, l'enseignant distribue un segment de droite «vierge» aux élèves et leur demande de placer le plus précisément possible ce nombre. Des élèves peuvent éprouver beaucoup de difficultés pour produire d'autres démarches que celle qui consiste à graduer les segments tous les cm et... reproduire, ainsi, un segment comparable à celui de l'activité précédente.

En français, il y a 9 solutions pour le premier cas mais on se rend bien vite compte qu'il est inutile de chercher de la commutativité avec 2 x QUATRE = HUIT.

b)

```
   D E U X
   D E U X
   D E U X
 + D E U X
 ---------
   H U I T
```

En italien, c'est à peu près pareil, il y a trois solutions pour le premier cas.

c)

```
     D U E
     D U E
     D U E
 +   D U E
 ---------
   O T T O
```

(Solutions dans le prochain numéro)

Atelier : Articulation du logique et du numérique

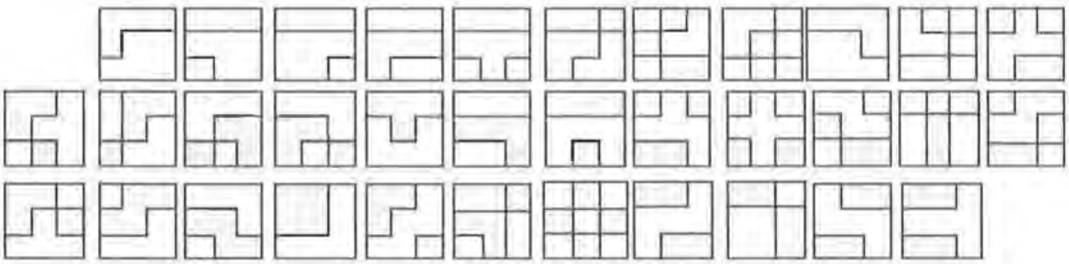
Math-Ecole, 1er décembre 2001, Neuchâtel

François Boule, CNEFEI Suresnes, France

Mon propos n'est pas théorique, l'atelier de Carlo Marchini ayant éclairé un aspect important de la Logique déductive ; c'est pourquoi je prendrai « logique » comme adjectif associé au terme « activité » ; ces activités, données ici à titre d'exemples et destinées à des enfants de 5 à 8 ans, ont sans doute pour visée de *rendre possible* la construction de la Logique.

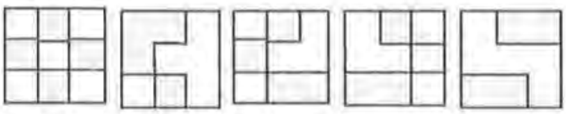
Le socle de ces activités est constitué par des classements. Aucune activité intellectuelle ne peut se dispenser de s'appuyer sur des classements, qu'il s'agisse de la vie courante ou de résolutions de problèmes plus élaborées.

Le premier exemple que je vous propose ne s'adresse pas à des enfants, mais à des adultes. Il concerne la construction des concepts, et on y reconnaîtra certainement une approche voisine de celle de Britt-Mary Barth[1]. Le matériel est dû à E. De Bono, mathématicien anglais, et composé de petits carrés de cartons de 3 × 3 carreaux ainsi construits : on a colorié quatre carreaux sur neuf de toutes les façons possibles.

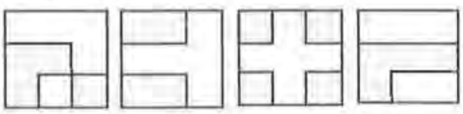


La règle du jeu est la suivante : choisir au hasard 8 pièces ; puis **trouver une règle** qui permette d'en faire une partition 4 + 4. Montrer cette partition, et faire deviner le critère qui a permis de l'établir. Exemple :

Ils sont « truc »



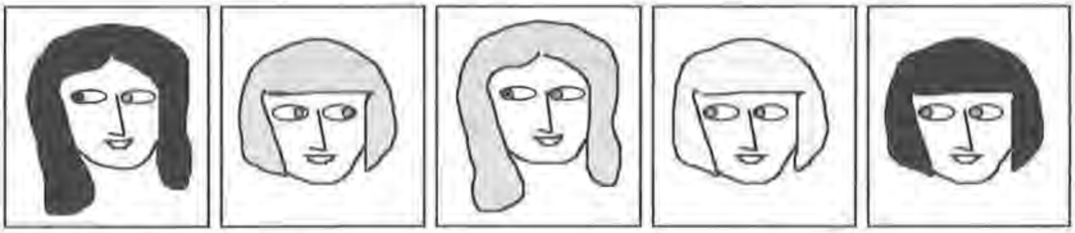
Ils ne sont pas « truc »



1. BARTH, Britt-Mary, *l'Apprentisage de l'abstraction*, Retz, Paris, 1987

Qu'est-ce qu'être « truc » ?

Une foule de critères peuvent se présenter, selon que l'on examine les parties grises ou les parties blanches, leur nombre, leur contiguité, ou bien des alignements, des coins, des bandes, le carré central, etc. C'est cette mutiplicité de regards possibles sur un même objet qui rend l'activité difficile pour un jeune enfant ; les critères évoqués font appel à du numérique, du topologique, du projectif... Mais la distinction d'un critère, et la vérification par la mise à l'épreuve de la partie complémentaire est une bonne illustration de la « construction en acte » d'un concept. Cette activité, comme beaucoup des suivantes, est d'abord *muette* (construire une partition), puis *verbale* (énoncer, vérifier un critère). Le rôle du langage est de communiquer une construction intellectuelle, mais aussi de *condenser* cette activité, de la symboliser, d'en faciliter la mémorisation (cf. Henri Wallon[2]). Il est possible que le critère annoncé ne soit pas celui qui a présidé à la partition. Cette confrontation (verbale) est enrichissante ; il reste à examiner si les deux critères sont compatibles ou non, équivalents ou non etc. D'autres exemples viendront illustrer cela.



Autre exemple de classement, accessible à des enfants de 5–6 ans

On donne une collection extraite, qui comporte un intrus, qu'il s'agit de trouver.

La recherche d'un intrus est *a priori* plus simple qu'un classement ordinaire. G. Bateson[3] définit ainsi une information : « Une différence qui fait la différence ». Il est plus facile de repérer une différence qu'une ressemblance. La disproportion (un objet/une collection) facilite le repérage intuitif qu'il s'agit ensuite d'expliciter. Cette première distinction opérée, on propose une autre situation qui mettra à jour un autre critère etc. Ainsi s'approfondit la lecture des images, par ordre d'évidence décroissante. Mais l'évidence des uns n'est pas celle de tous ; la confrontation permet l'approfondissement.

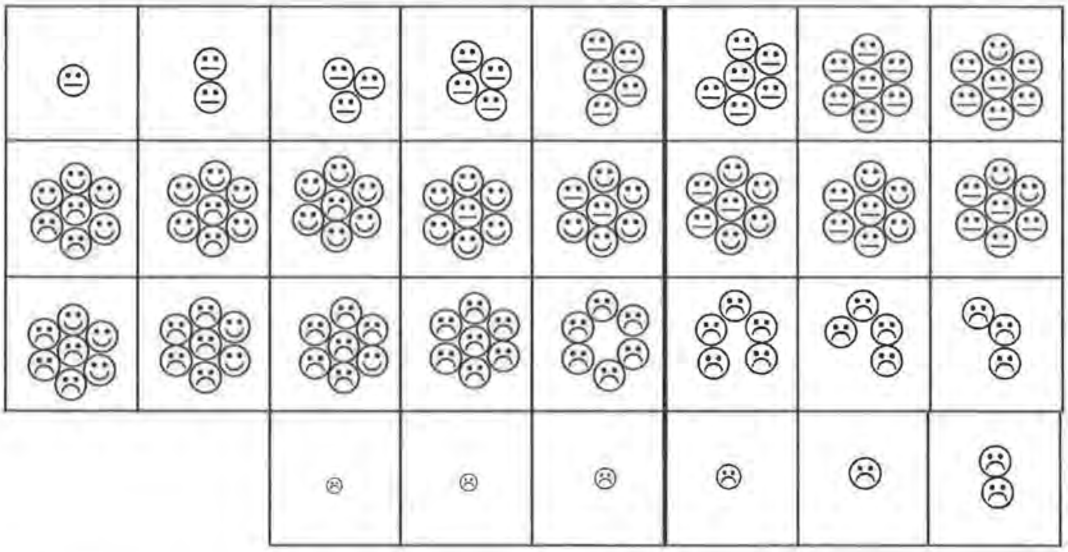
Un autre type d'activité logique est plus spécifiquement liée au TEMPS, en ceci qu'il s'agit de ranger des objets selon un axe orienté. C'est le cas des étapes d'un récit, de la suite numérique, d'une mélodie, etc. Deux régularités possibles se présentent : le phénomène est **périodique** (une période, et une répétition) ou bien il est **progressif** (c'est à dire régi par une relation d'ordre). Il faut préciser cependant qu'une relation d'ordre suppose la transitivité, alors qu'une liste (la « liste numérique » par exemple) est une structure moins riche ; on n'y dispose que de la succession immédiate. C'est ce qui se produit pour des enfants de 4–5 ans : il connaissent le nombre qui en suit immédiatement un autre, mais ne savent pas en comparer deux sans recourir aux intermédiaires.

2. WALLON, Henri, *La Vie mentale*, Editions sociales, Paris, 1982

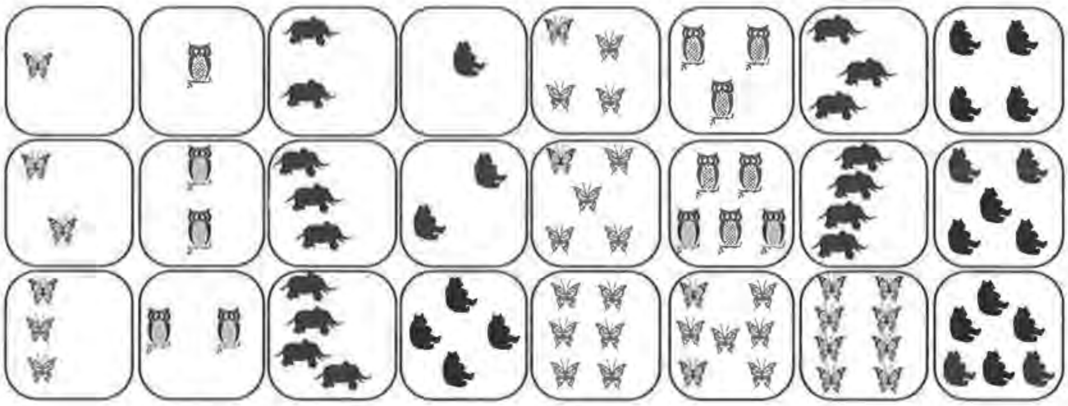
3. BATESON, Grégory, *La Nature et la pensée*, Seuil, Paris, 1979.

Exemple de liste à construire: ***Histoire en trente épisodes***. On donne les deux premiers éléments; il faut construire l'histoire complète.

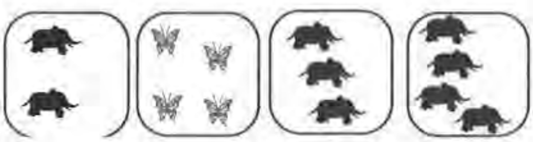
La consigne ne fait nullement allusion à du numérique. Néanmoins le dénombrement intervient implicitement (spontanément).



C'est ici que se présente l'articulation du logique et du numérique. Comment procéder avec des enfants en grande difficulté pour intégrer la quantité au-delà de trois ou quatre? Voici une proposition.



Le matériel ci-dessus se prête à divers jeux d'intrus. Exemple 1:



Quelle est la carte-intrus?

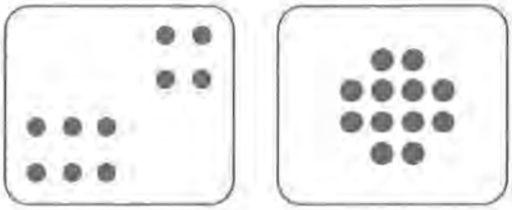
Il semble s'agir des papillons. Exemple 2 :

Quelle est la carte-intrus ?

Les papillons n'ont pas plus de raison d'être choisis que les oursons. S'il n'y a qu'un intrus, ce ne peut être non plus les éléphants, à moins qu'il ne s'agisse de la carte comportant *moins* d'éléphants. Cette fois-ci, le critère n'est plus celui de la nature des objets, mais de leur quantité. Il n'est pas nécessaire de savoir désigner cette quantité pour repérer « de la différence ». C'est la désignation de cette quantité (« deux »), ensuite, qui permettra d'approfondir les comparaisons.

Le matériel « GRENOUILLES » (en annexe) permet non seulement des classements de même ordre, mais aussi des sériations.

Voici maintenant un exemple numérique mais qui relève de l'organisation de la perception. On propose de faire observer pendant quelques secondes une carte comme l'une de celles-ci (matériel complet en annexe).

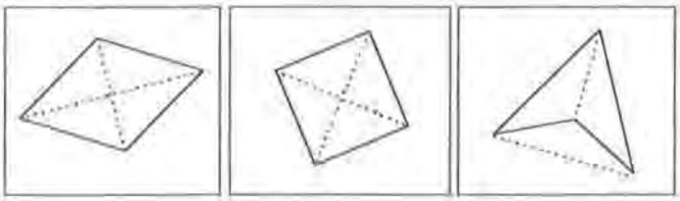


Combien de points ?

On lit aisément (subitizing) sur la première carte la constellation « six » et la constellation « quatre », qui sont bien distinctes ; puis l'on rappelle en mémoire le résultat « six plus quatre égale dix ». A moins qu'on ne dénombre les points un à un ou deux à deux. Mais cette lecture est peu compatible avec une exigence de rapidité. L'exercice vise à entraîner une décomposition rapide de l'image en fonction des résultats arithmétiques enregistrés en mémoire. Dans le second cas, cette décomposition n'est pas évidente : on peut « lire » 2 + 8 + 2 ou 3 + 3 + 3 + 3 ou d'autres encore. C'est ici qu'intervient un aspect stratégique qui convoque déjà du calcul.

Classification de quadrilatères

Cette situation n'est pas numérique, mais classificatoire et géométrique. Elle est de même nature que les précédente. Elle met en jeu un ensemble de cartes portant chacune un quadrilatère et ses diagonales, comme celles-ci :



Toutes les cartes sont en double exemplaire. Deux cartes (non identiques) sont distribuées à chaque élève. Le but du jeu est de déterminer, à l'aide d'une description effectuée par un élève, qui est détenteur du même quadrilatère. La description est libre, mais peu à peu sont favorisés les énoncés faisant intervenir les côtés (longueur, parallélisme, perpendicularité) les angles, ou les diagonales (égales, perpendiculaires, se rencontrant en leur milieu, etc.). On aboutit ainsi à un *répertoire commun* de propriétés possibles.

La phase suivante consiste à **classer logiquement** ces propriétés. Les unes sont liées (3 angles droits —> quatre angles droits), d'autres incompatibles etc. Ce classement hiérarchisé conduit à la typologie des quadrilatères, mais aussi à des problèmes comme celui-ci: choisir au hasard trois propriétés dans le répertoire et essayer de construire un quadrilatère ayant ces propriétés. Il peut y avoir des solutions variées, ou bien d'un seul type, ou encore aucune si les propriétés sont incompatibles.

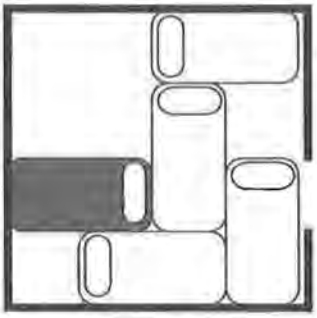
Construction de problèmes

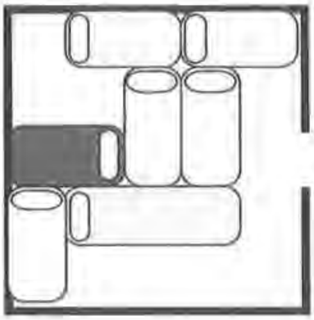
La situation suivante est proposée à des enfants de 8–9 ans et concerne la résolution de problème, ou plutôt la lecture réfléchie d'énoncés de problèmes.

Le matériel est composé de languettes de carton portant chacune une phrase. Les unes sont des questions (A), les autres non (B). On tire au hasard une question, que l'on lit. Puis on tire au hasard une languette B, que l'on peut soit conserver, soit éliminer, puis une autre, etc. Le but est de *construire* (non de *résoudre*) un énoncé de problème. On doit donc, à chaque pas, se demander si la nouvelle information peut contribuer à répondre à la question, et si elle est compatible ou non avec les précédentes. On souhaite ainsi exercer une *lecture réfléchie* des énoncés de problème, au détriment de lectures partielles ou insuffisantes, comportement scolaire fréquent chez les enfants de 7 à 10 ans (cf. «Age du Capitaine»).

(Répertoire des languettes en annexe)

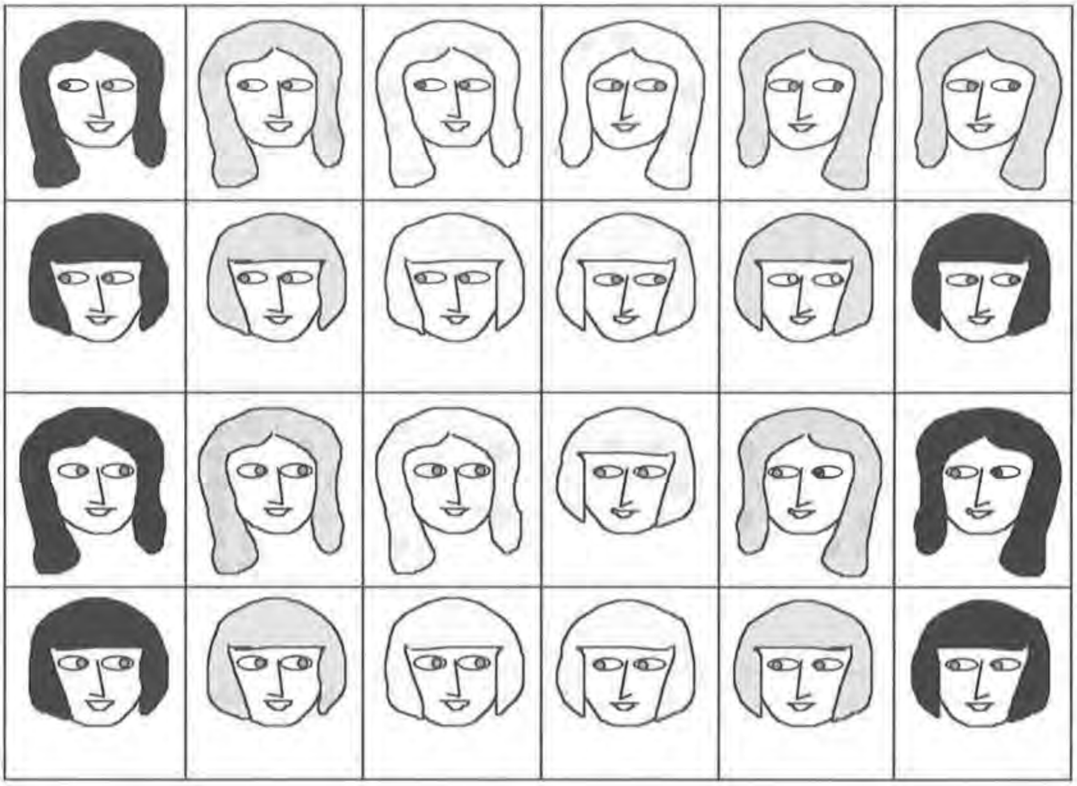
Les situations qui concluent cet atelier sont (seulement) logiques, et peu numériques. Elles ont pour objectif *l'anticipation* et la *planification* d'actions, c'est-à-dire la gestion temporelle d'une séquence d'activité (algorithme). L'une emprunte partiellement à une situation familière — et pourquoi pas neuchateloise? – la sortie d'un parking. L'autre, quoique ressemblant à un puzzle, est plus logique que spatiale et a été décrite dans *Math-Ecole* 192 (juin 2000).



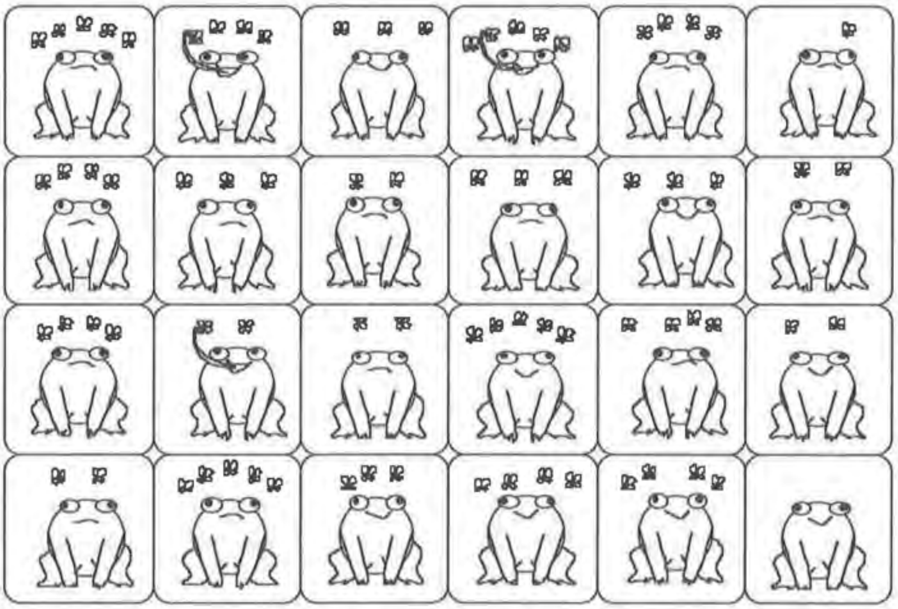


Il faut faire sortir la voiture foncée du parking. Les voitures peuvent se déplacer, en marche arrière ou en marche avant (mais pas latéralement). Quelles voitures faut-il déplacer, dans quel ordre et comment?

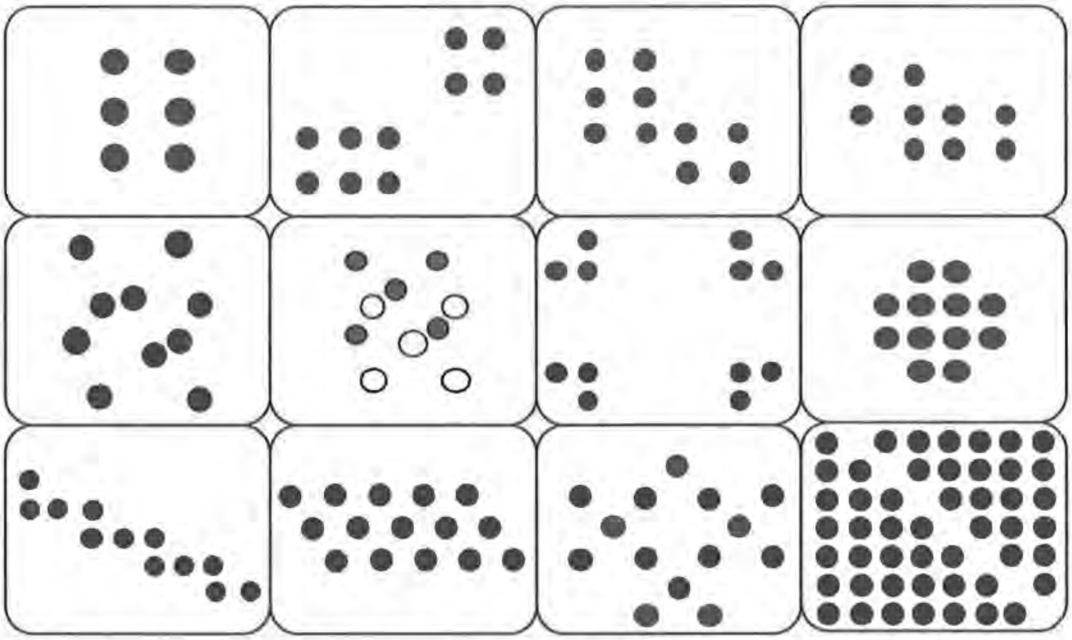
Annexes



Filles



Le jeu des grenouilles



Combien ?

Pierre a 6 billes	**Combien de billes a-t-il après la partie ?**	Jacques joue deux parties de billes. A la première, il perd 5 billes.
Pierre joue une partie et perd 7 billes	Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 8 billes.	Bertrand joue une partie de billes
Il a 7 billes. Après la partie, il a 3 billes	Didier joue deux parties de billes. A la première, il perd 7 billes.	Claude a 5 billes Il joue une partie de billes
Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 4 billes.	**Que s'est-il passé à la deuxième partie ?**	Après la partie, il a 9 billes
Paul joue deux parties de billes A la première, il gagne six billes	Michel joue deux parties de billes. Il joue une première partie puis une deuxième	A la deuxième, il perd 4 billes
A la deuxième partie, il perd 7 billes. Après ces deux parties, il a gagné en tout 3 billes.	Laurent joue une partie de billes	**Que s'est-il passé à la première partie ?**
A la première partie, il perd deux billes A la deuxième, il perd 5 billes	Laurent joue deux parties de billes. A la première il gagne deux billes.	A la première, il gagne 4 billes
Il joue une deuxième partie. après ces deux parties, il a perdu en tout 2 billes.	A la deuxième, il perd 6 billes	**Quelle est la taille des billes ?**
Que s'est-il passé en tout ?	**Quel est celui qui a gagné le plus ?**	

Problèmes à construire : les billes

Un dossier contenant ces planches (et quelques autres, format A3) est disponible contre l'envoi de 5 € sur demande à l'auteur (fboule@wanadoo.fr).

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** (tarifs en page 2 de couverture).

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL ... (ex à Fr. 29.-)
Histoire de Maths, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Faites vos jeux! ACL ... (ex à Fr. 18.-)
La magie du calcul, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Pliages et mathématiques, ACL ... (ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL ... (ex à Fr. 25.-)
100 défis mathématiques du «Monde», POLE ... (ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33) ... *(ex à Fr. 20.-)*
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS ... (ex à Fr. 30.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM ... (ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM ... (ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM ... (ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (*Tangente* HS 10) ... (ex à Fr. 20.-)

Problèmes de rallyes et concours:

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98) ... (ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00) ... (ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 18.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...) ... (ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5, 6...) ... (ex à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...) ... (ex à Fr. 16.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ....
Adresse (rue et numéro): ....
Code postal et localité: .... Tél.: ....
Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à:
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

Monsieur Nfac 1290 **1**
BERTONI Maurice
Sous-Mont 14
1008 Prilly

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à
Math-Ecole,
Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand,
2007 Neuchâtel

sommaire