MATH ECOLE

RMT, finale et 10e anniversaire

Convergence vers les chaos

A propos de la droite numérique

41e année

203

août 2002

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques!

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Carrés disposés en «spirale» dont les mesures des côtés sont les nombres de la suite de Fibonacci

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire:

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités: expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous).

Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro: CHF 7.–
anciens numéros: CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse):
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques, 11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

MATH-ECOLE
41e année, cinq numéros par an

203
août 2002

Sommaire

Editorial

Une formation bienvenue

Michel Brêchet, Delémont

En Suisse romande, l'évolution de l'enseignement des mathématiques se traduit notamment par la mise en place progressive de nouveaux moyens d'enseignement à l'école obligatoire. Comme toute innovation pédagogique, la généralisation de ces nouveaux ouvrages suscite chez les enseignants des interrogations, des demandes, des résistances parfois. Mais elle est aussi synonyme de perspectives novatrices. Certaines séquences d'apprentissage vieillissent vite. Les pratiquer à plusieurs reprises permet de repérer leurs limites. Un changement est alors souhaitable.

A la veille de leur utilisation, les ouvrages romands de mathématiques introduits dès 1997 à l'école primaire ont été eux aussi à la fois source de réserves et porteurs d'espoirs. De même, la collection *Mathématiques 7-8-9* qui arrivera dans les classes romandes en août 2003 n'échappe pas à la règle. Les réactions entendues ici et là à son égard sont fort diverses. Qu'est-ce qui va changer? Les contenus seront-ils adaptés aux élèves qui éprouvent des difficultés d'apprentissage? Y aura-t-il suffisamment d'exercices d'entraînement? Les progressions seront-elles balisées? Les options didactiques adoptées pourront-elles être concrétisées avec des classes à grand effectif? Les activités intéresseront-elles les élèves? Déboucheront-elles sur des échanges constructifs? Sur des connaissances solides? «Un renouvellement qui tombe à pic» me disait l'autre jour un collègue. Et son voisin de renchérir: «Une approche globale des notions mathématiques est une nécessité».

Pour permettre aux enseignants de mathématiques de la scolarité obligatoire d'utiliser de manière optimale ces nouveaux ouvrages (existants ou à venir), un important dispositif de formation a été mis en place. Globalement, il est axé sur la familiarisation avec les nouveaux moyens d'enseignement destinés aux maîtres et aux élèves, sur l'appropriation des conceptions didactiques sur lesquelles ils reposent, sur leur mise en œuvre dans la pratique quotidienne professionnelle, sur l'organisation de situations d'apprentissage cohérentes avec la démarche pédagogique qu'ils induisent. Fort heureusement, les contenus mathématiques et l'observation du travail des élèves font aussi partie de l'offre proposée.

La grande majorité des cours de formation ont un caractère facultatif. Les enseignants s'y inscrivent selon leurs besoins. Au-delà des objectifs spécifiques assignés à chacun de ces cours, ceux-ci constituent des lieux d'échange et de partage fort appréciés, du moins en règle générale. Et pour cause, car ils permettent précisément de s'attarder sur les multiples questions des participants, de lever des doutes, d'examiner en groupe des cheminements possibles ainsi que des stratégies pour faire face à tel ou tel problème pédagogique. Incontestablement, c'est là un des atouts de cette formation. Le dialogue entre collègues est toujours bénéfique.

Mais des atouts, elle en a bien d'autres. Un rapide tour d'horizon des thèmes proposés, forcément incomplet, permet de s'en convaincre. Ici, les participants sont amenés à analyser des productions d'élèves afin de recueillir des informations sur leurs représentations, sur leurs connaissances et sur leurs modes de raisonnement. Là, ils s'interrogent sur les avantages et les limites de tel modèle d'apprentissage et envisagent par là même différentes approches didactiques d'une même notion mathématique.

A une autre occasion, ce sont les erreurs qui sont au centre des débats. Quelles sont leurs origines? Comment aider les élèves à les éviter? Quelle(s) position(s) adopter en regard des erreurs récurrentes? Comment organiser la remédiation, lorsqu'elle s'impose? La résolution de problèmes est au cœur de l'évolution qui s'installe, d'où la mise sur pied d'un module de formation consacré à ce thème. A partir de situations concrètes, vécues en classe, on y aborde en particulier la gestion des phases d'appropriation d'un énoncé, de recherche d'une solution, de relance, de mise en commun, d'institutionnalisation. La formation de la pensée scientifique – une des missions prioritaires de l'école – est un sujet de discussion qui émerge fréquemment durant ces rencontres consacrées à l'apprentissage par le problème. Enfin, dans un autre module, les enseignants ont la possibilité de parfaire leur formation en mathématiques, en particulier pour se sentir à l'aise avec les concepts étudiés en classe et face aux questions «pointues» posées par certains élèves. La maîtrise de la matière enseignée n'est donc pas oubliée[1].

La formation qui accompagne l'introduction des nouveaux ouvrages contribue ainsi à améliorer la qualité de l'enseignement des mathématiques. Elle est donc la bienvenue. Cependant, à elle seule, elle ne permet pas de garantir le succès du renouvellement de cet enseignement. Le paysage de l'éducation scolaire est composé de multiples paramètres. Et tous ne favorisent pas la concrétisation du processus évolutif en cours. Les épreuves à visées certificatives, les examens d'orientation, certains plans d'études, voire certaines structures scolaires – pour n'en citer que quelques-uns – sont là pour nous le rappeler.

1. Pour information, voici la liste des modules du concept de formation 5-9 :

   Modules didactiques :
   - Les conceptions d'apprentissage /enseignement
   - Enseigner par le problème
   - Pilotage d'une activité : relance, mise en commun, synthèse
   - La différenciation pédagogique
   - L'erreur
   - L'évaluation
   - Apports et limites d'une enquête
   - Mathématiques et communication
   - Comment évaluer une activité de recherche ?
   - Matériel–ressource
   - Cabri–Géomètre et les nouveaux moyens d'enseignement

   Modules mathématiques :
   - Nombres et opérations
   - Géométrie
   - Grandeurs et mesures
   - Fonctions et algèbre
   - Dénombrement et probabilités

10e Rallye mathématique transalpin

Finale et fête d'anniversaire

Equipe de l'association RMT-SR

Le Rallye mathématique transalpin vient de fêter son dixième anniversaire et s'est conclu par sa finale, organisée dans 19 régions de Suisse, Italie, France, Luxembourg, Israel et République tchèque, en mai ou juin 2002.

Comme pour toutes les épreuves précédentes, les classes ont été confrontées aux mêmes problèmes, dont l'élaboration et les analyses a priori sont conduites au niveau international, après d'intenses échanges et collaborations. Les versions françaises et italiennes sont aussi proches que possibles et font l'objet de plusieurs contrôles. Les versions en allemand (Luxembourg), hébreu (Israel) et tchèque (Prague) sont à la charge des équipes régionales. Le barème d'attribution des points est le même pour tous. On est donc en mesure d'établir des comparaisons et de voir comment les classes de nos différentes régions, procèdent pour résoudre ces problèmes.

Plus de 2000 classes étaient inscrites aux deux premières épreuves, 200 à 300 seulement ont été sélectionnées pour les finales – d'une dizaine à une vingtaine par région – pour des raisons évidentes d'organisation. Pour la Suisse romande, 23 classes se sont rencontrées à Berne, le 29 mai.

La «finale des finales» se fera lors de la prochaine rencontre internationale, qui se déroulera en Sardaigne, en octobre prochain, sur le thème des apports du Rallye à la formation des maîtres.

Cette ultime confrontation n'est que virtuelle puisque le RMT n'a pas encore les moyens financiers d'inviter les classes gagnantes de chaque région en un même lieu. Alors, ce sont seulement les copies qui feront le voyage. Pour chaque problème de chaque catégorie, les 19 feuilles réponses produites par les 19 classes gagnantes de chaque finale régionale seront évaluées une nouvelle fois, selon le même barème, déjà appliqué en mai et juin, par une même équipe de correcteurs, internationale cette fois-ci. Ce sera une belle occasion de vérifier à la fois la validité des attributions de points élaborées lors de l'analyse a priori et l'écart qu'il peut y avoir entre les interprétations que les correcteurs locaux en font.

Les pages suivantes présentent tout d'abord les problèmes de cette finale du 10e RMT (A), puis leurs solutions avec quelques remarques succinctes (B), les résultats de la finale de Suisse romande (C) et, finalement, quelques reflets de la petite fête organisée à cette occasion à Berne, le 29 mai 2002 (D).

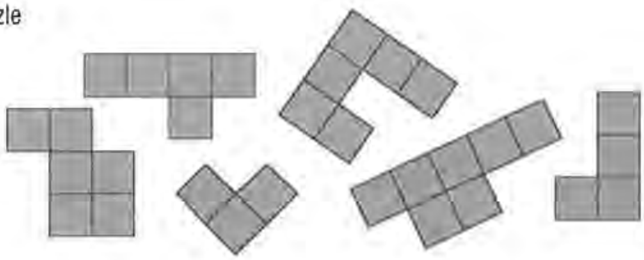
A. Les problèmes

1. Pièce en trop (Cat. 3, 4)

Aurélie a formé un carré avec les cinq pièces de son puzzle.

Malheureusement, son petit frère Théo a mélangé certaines pièces et il a encore ajouté une sixième pièce, venant d'un autre puzzle.

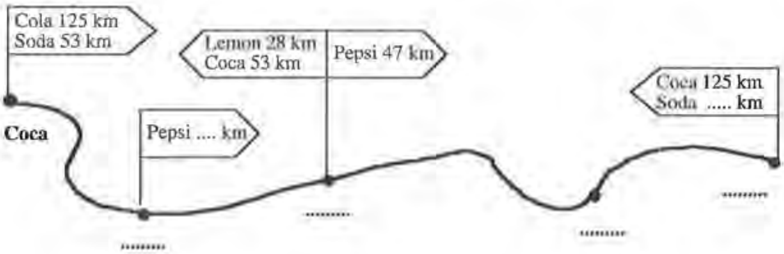
Voici les cinq pièces du puzzle
et la pièce ajoutée:



Indiquez la pièce que Théo a ajoutée et reconstituez le puzzle carré d'Aurélie avec les cinq autres pièces.
Comment avez-vous fait pour trouver la pièce en trop?

2. Les cinq villes (Cat. 3, 4)

Sur la carte du Pays de la Soif, voici la route qui relie les cinq villes du pays, Coca, Cola, Lemon, Pepsi et Soda:



On a aussi copié quelques panneaux qui indiquent les distances entre certaines villes.
(Par exemple, le panneau de gauche, planté à Coca, indique qu'il y a 125 km de Coca à Cola et 53 km de Coca à Soda).

Le nom de Coca est déjà noté à sa place.

Ecrivez à leur place les noms des quatre autres villes.
Écrivez les distances qui manquent sur deux des panneaux.
Indiquez comment vous avez trouvé les distances cherchées.

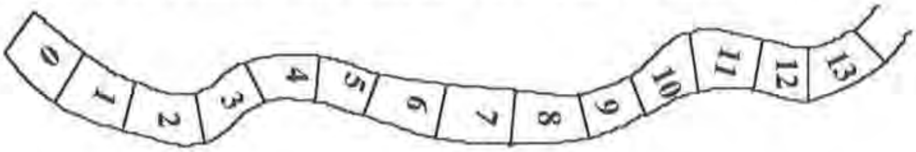
3. Bonbons aux fruits (Cat. 3, 4)

Il y a trois sortes de bonbons dans le paquet de Grand-mère: à l'orange, au citron et à la fraise.
- Il y a un nombre impair de bonbons dans le paquet.
- Les bonbons à la fraise sont les plus nombreux.
- Le nombre des bonbons à l'orange est le même que celui des bonbons au citron.
- Le produit des trois nombres est 36.

Combien y a-t-il de bonbons de chaque sorte dans le paquet de Grand-mère?
Expliquez votre raisonnement.

4. En sautant (Cat. 3, 4, 5)

Une grenouille, un kangourou et un lièvre se déplacent sur la « piste » des nombres.



Ils partent tous de la case **0**.

La grenouille fait toujours des sauts de trois cases, (elle arrive donc sur la case 3 après son premier saut), le Kangourou fait toujours des sauts de six cases et le lièvre des sauts de quatre cases.

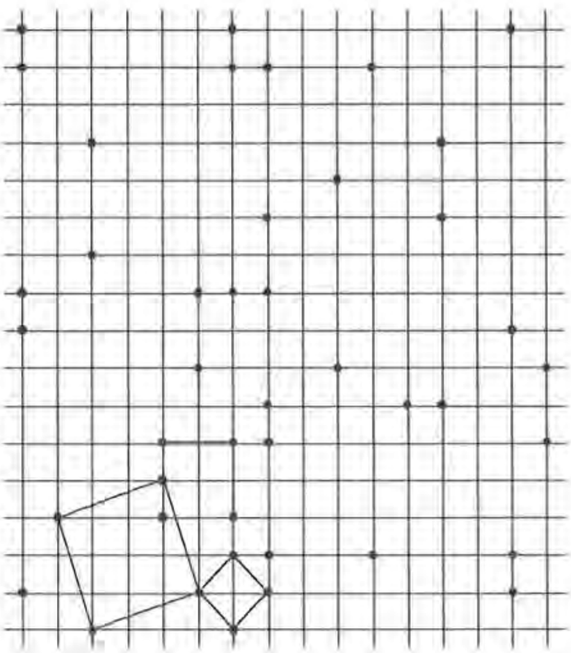
A son dernier saut, chaque animal arrive sur la dernière case du parcours.
Chaque animal laisse ses traces sur les cases où il pose ses pattes.

A la fin du jeu, il y a 9 cases qui contiennent à la fois les traces des trois animaux.

Indiquez le numéro de la dernière case de la piste.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

5. Carrés cachés (Cat. 3, 4, 5) et 11 (Cat. 6, 7, 8)

Trouvez tous les carrés dont les quatre sommets sont des points bien marqués sur cette grille.



On a déjà dessiné trois carrés, en bas à gauche.

Combien y a-t-il d'autres carrés cachés dans cette grille ?

Dessinez-les, de couleurs différentes.

6. Sports d'hiver (Cat. 4, 5, 6)

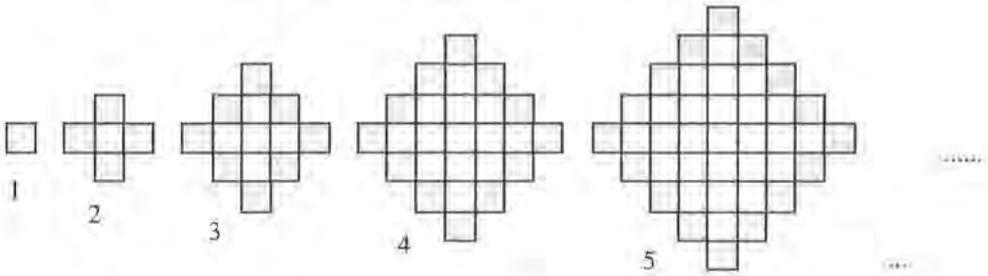
Voici les tarifs des 5 remontées mécaniques de la station de Transalpiski.

Téléski du Lac	3 points
Télésiège des Marmottes	5 points
Téléphérique de la Gentiane	12 points
Métro des neiges	16 points
Télécabine du Chamois	7 points

Dan s'est acheté un abonnement de 60 points qu'il a entièrement utilisé en une journée.
Il se souvient qu'il a utilisé chacune des 5 remontées au moins une fois, mais il ne sait plus combien de fois exactement.

Trouvez comment il a pu dépenser entièrement les 60 points de son abonnement.
Pour chaque solution, indiquez le nombre de fois qu'il a pris chacune des remontées et le détail des calculs.

7. Figures en évolution (Cat. 5, 6) et 13 (Cat. 7, 8)



Cette suite de figures est construite selon les règles suivantes :

- la première figure est un carré gris,
- dans la deuxième, le carré précédent devient blanc et est entouré de nouveaux carrés gris,
- dans la troisième, les anciens carrés sont blancs et entourés entièrement de nouveaux carrés gris,
- et ainsi de suite, pour chaque figure suivante, de nouveaux carrés gris entourent les anciens qui deviennent blancs.

Question pour les catégories. 5 et 6)
Combien y aura-t-il de carrés gris et combien y aura-t-il de carrés blancs dans la quinzième figure ?

Question pour les catégories. 7 et 8)
Quelle sera la première figure de la suite qui sera composée de plus de 1000 carrés en tout ?

Expliquez votre raisonnement.

8. Quitte ou double (Cat. 5, 6, 7)

Camille participe à un jeu-concours, de six questions.

Pour chaque question, la réponse juste rapporte un certain nombre de points :
- la réponse juste à la question n° 2 rapporte le double de points attribués à la question n° 1,
- la réponse juste à la question n° 3 rapporte le double de points attribués à la question n° 2,
- et ainsi de suite.

Si on ne répond pas correctement à une question, on est éliminé et on ne gagne rien.

Mais chaque candidat a un joker qui lui donne le droit de ne pas répondre à une question (bien sûr, il ne gagne pas les points correspondants à cette question).

Camille a utilisé son joker et a répondu correctement à cinq questions. Elle a obtenu 177 points.

Retrouvez les points attribués à chaque question du concours et indiquez pour quelle question Camille a utilisé son joker.

Expliquez comment vous avez trouvé.

9. Etiquettes (Cat. 5, 6, 7)

Anna, Bertrand, Charlotte, Daniel, Elise disposent chacun d'une feuille rectangulaire dont les côtés mesurent exactement 19 et 24 cm. Ils doivent y découper le plus grand nombre possible d'étiquettes rectangulaires, ou carrées, de mêmes dimensions.

Anna prétend qu'elle arrivera à découper au maximum 21 étiquettes de 7 cm sur 3 cm dans sa feuille.

Bertrand dit qu'il arrivera à en découper 13, de 7 cm sur 5 cm.

Charlotte, prétend qu'elle a pu faire 19 étiquettes de 8 cm sur 3 cm.

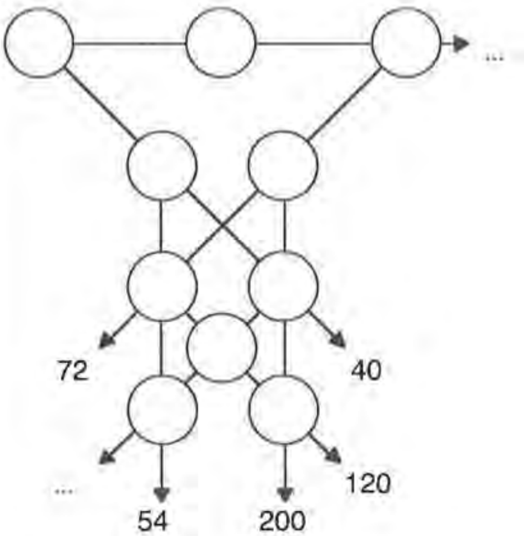
Daniel dit qu'il pourra en découper aussi 19, de 6 cm sur 4 cm.

Elise affirme qu'elle pourra découper 18 étiquettes carrées de 5 cm de côté.

Que pensez-vous de chacune de ces affirmations ? Sont-elles toutes acceptables ?
Justifiez vos réponses.

10. Produits en ligne (Cat. 5, 6, 7, 8)

Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.



Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?

Expliquez votre démarche.

11. Carrés cachés (Cat. 6, 7, 8) Voir Problème 5.

12. Rallye Mathématique Transalpin 2001 (Cat. 6, 7, 8)

Les classes (italiennes et suisses) qui ont participé à la finale des finales du 9e Rallye mathématique transalpin venaient des régions de Aoste, Belluno, Cagliari, Gênes, Foggia, Lodi, Milan, Parme, Riva, Sienne, Suisse Romande, Tessin. (Pour cette finale des finales, chaque région envoyait les feuilles réponses des vainqueurs de sa finale régionale, une classe par catégorie, sauf dans un cas).

Voici un tableau encore incomplet du classement des quatre premiers rangs:

Catégorie	Premier rang	Deuxième rang	Troisième rang	Quatrième rang
3				Sienne
4			Suisse romande	
5		Suisse romande		
6	Belluno			
7		Belluno		
8			Sienne	

Indications pour compléter ce tableau:

- Les classes de Riva, Lodi, Tessin, Cagliari et Gênes ne figurent qu'une seule fois dans le tableau.
- La classe de Lodi se place au deuxième rang, comme celle de Riva, et précède une classe d'Aoste.
- La classe de Gênes gagne dans une catégorie devant une classe de Belluno.
- Les classes d'Aoste se placent deux fois dans les catégories 6 à 8: une fois au troisième rang et l'autre au quatrième rang, derrière une classe de Parma.
- Les deux classes de Milan qui figurent dans ce tableau sont les seules d'une même région à être de la même catégorie; l'une d'entre elles a gagné, l'autre est arrivée derrière la classe de Cagliari.
- Sienne est représentée par trois classes dans le tableau; l'une d'elles est première, devant une classe de Parma.
- Belluno gagne une fois et figure trois autres fois dans le tableau, dont deux fois en catégories 3 à 5, l'une devant et l'autre derrière Suisse romande.
- La Suisse romande figure dans toutes les catégories de ce tableau. Elle gagne dans deux des catégories 6 à 8 et arrive une seule fois au quatrième rang.

Analysez les informations reçues et complétez le tableau.

13. Figures en évolution (Cat. 7, 8) Voir problème 7

14. La photo souvenir (Cat. 7, 8)

Le dernier jour d'école, le professeur de mathématiques décide de prendre une photo souvenir de ses élèves. Il les dispose en rangs parallèles contenant chacun le même nombre de personnes. Mais cette disposition se révèle trop large pour l'objectif de son appareil de photo.

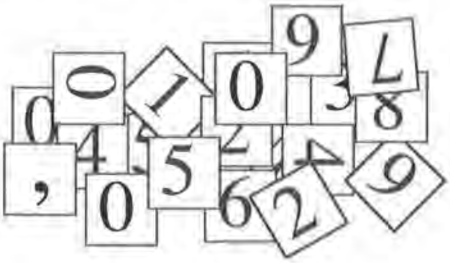
Le professeur se rend compte alors qu'il suffit de retirer un élève par rang et de les placer sur un rang supplémentaire. Mais la nouvelle disposition ne le satisfait pas encore car le dernier rang qui vient de se former compte 4 élèves de moins que les autres rangs.

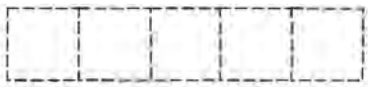
Il décide alors de retirer encore un élève de chaque rang. Il constate qu'il y a le même nombre d'élèves sur chaque rang. Il peut ainsi prendre sa photo.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe? Expliquez votre raisonnement.

15. Le nombre de Roger (Cat. 8)

Roger a devant lui des cartons «chiffres» en grande quantité et un carton «virgule».
Il utilise cinq de ces cartons: le carton «virgule» et quatre cartons «chiffres» pour afficher un nombre qui occupe les cinq cases a, b, c, d, e.





Le nombre qu'on lit dans les trois premières cases (abc) est un vingtième du nombre qui apparaît sur la dernière case (e).

Le nombre qu'on lit sur les deux dernières cases (de) est un multiple du nombre qu'on lit sur la troisième et la quatrième case (cd).

Quel est le nombre affiché par Roger?

Donnez toutes les possibilités que vous avez trouvées et indiquez votre démarche et vos calculs.

16. Pauvre octaèdre (Cat. 8)

Licia a un bel octaèdre régulier de bois massif sur sa cheminée.
Mais elle trouve qu'il prend trop de place et décide d'en scier une partie autour de chaque sommet.

l'octaèdre (les faces sont des triangles équilatéraux et les sommets sont à l'intersection de 4 faces)

premier découpage

Elle marque précisément les milieux de chaque arête.
Elle choisit ensuite un sommet (S sur le dessin) et scie selon le plan qui passe par les milieux (A, B, C, D) des quatre arêtes qui mènent à ce sommet.

Elle refait la même opération avec les autres sommets de l'octaèdre.

A la fin elle se retrouve avec des pyramides détachées et la partie centrale qui est un nouveau polyèdre tout à fait intéressant.

Combien le nouveau polyèdre de Licia a-t-il de faces? et de quelles formes?
Combien ce polyèdre a-t-il de sommets? et combien d'arêtes?

Faites un dessin de ce nouveau polyèdre.

B. Solutions et commentaires

Les commentaires qui suivent se basent sur l'examen des réponses des classes finalistes de Suisse romande. Le tableau des résultats fait apparaître les points attribués à chaque problème. Les barèmes ne sont pas reproduit ici mais proposent, en général:

4 points pour une réponse complète et juste, avec des explications ou justifications claires et détaillées;

3 points pour une réponse complète et juste, avec des explications insuffisantes;

2 points pour la réponse sans aucune explication, juste ou avec une légère erreur de calcul, parfois incomplète selon les problèmes;

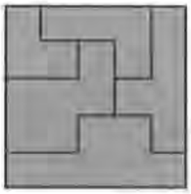
1 point pour un début de recherche organisée, avec quelques tentatives cohérentes;

0 point pour une procédure totalement inadaptée ou l'incompréhension du problème.

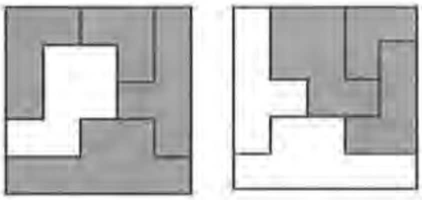
1. Pièce en trop (Cat. 3, 4)

L'analyse a priori définissait la tâche ainsi: «Chercher à reconstituer le puzzle par essais, au hasard, puis arriver à la certitude que c'est une des pièces de 6 carrés qui est en trop, par la pratique ou par un comptage de tous les carrés contenus dans les six pièces: 31, qui vaut 6 de plus que 5 x 5 = 25. » Les 8 classes ont réussi à reconstruire le puzzle (voir figure, sans retourner de pièce) et identifier la pièce supplémentaire, mais aucune n'a indiqué qu'il fallait retirer une pièce de 6 carrés. Elles ont toutes découpé les pièces et travaillé, semble-t-il, par essais successifs, sans retourner de pièce.

sans retourner de pièce;



avec une ou deux pièces retournées:



pièce supplémentaire

2. Les cinq villes (Cat. 3, 4)

Les classes engagées ont toutes trouvé la disposition des villes, avec des raisonnements souvent bien expliquées, du genre de celui qui était prévu: « l'invariance des distances permet, selon le sens de parcours de trouver les emplacement de Cola, à droite, et de Soda, en troisième position. Lemon, en deuxième position et Pepsi, en quatrième position sont déterminées par l'orientation des panneaux »

Pour déterminer la distance de Cola à Soda (panneau de droite) on part des informations: 125 de Coca à Cola et 53 de Coca à Soda, c'est à dire 72 (53 + ... = 125 ou 125 – 53 = 72).

Pour déterminer cette distance, une classe a trouvé 100 km (53 + 47) entre Coca et Pepsi, puis 25 (125 – 100) entre Cola et Pepsi et, finalement, 72 (25 + 47) de Cola à Soda.

Une classe a eu l'idée de comparer les longueurs des tracés Pepsi-Cola et Lemon-Soda avec une ficelle et les a trouvées égales. Elle en a conclu qu'il y avait 28 km de Pepsi à Coca et, par conséquent, 75 de Cola à Soda comme de Lemon à Pepsi ! De quoi animer un beau débat entre les correcteurs sur l'attribution des points à cette classe, dont la procédure n'avait pas été prévue lors de l'analyse a priori. (Comme les opérations ne figuraient pas sur la copie rendue, la classe a reçu 2 points, par équité vis à vis de ceux qui avaient indiqué tous leurs calculs.)

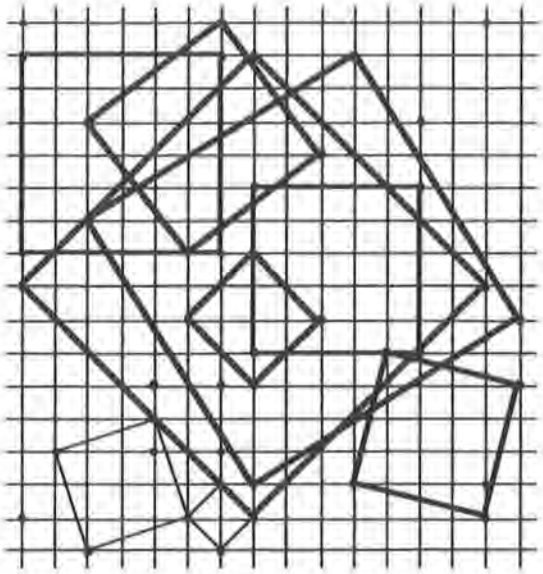
3. Bonbons aux fruits (Cat. 3, 4)

L'expression « le produit des trois nombres est 36 » n'est pas comprise de la majorité des élèves de 3e, voire de 4e année, même chez les finalistes ! Il aurait peut-être suffi de dire « lorsqu'on multiplie l'un des nombres par un autre puis par le dernier, on obtient 36 ». Un spectateur a pu le constater dans une classe de 4e année: un élève avait trouvé les nombres 2, 2 et 9 de la solution, mais il n'a pas pu convaincre ses camarades et, après l'épreuve, a avoué ne plus savoir s'il avait vraiment raison.

4. En sautant (Cat. 3, 4, 5)

Une des manières les plus simples était de noter, sur un ruban numérique ou dans un tableau, les cases sur lesquelles chaque animal laisse ses traces (par des couleurs ou des lettres) et constater que celles qui portent les traces des trois animaux sont celles des multiples de 12.(ppmc de 3, 4 et 6). En déduire que, en comptant la case de départ, la dernière case du parcours sera la case 96 (8 x 12 ou 12 + 12 + 12 + ...). C'est ainsi que les classes de la catégorie 5 ont résolu le problème, mais, sans compter la case de départ, elles sont arrivées à 108.

5. Carrés cachés (Cat. 3, 4, 5) et 11 (Cat. 6, 7, 8)



Il y a 7 carrés cachés. Les barèmes des catégories 3, 4 et 5 attribuaient les quatre points pour la découverte de 4 carrés, sans erreurs. Pour les plus grands, il fallait découvrir les 7 carrés exactement pour obtenir le maximum et 6 pour arriver à 3 points. Comme le montre le tableau des résultats, la réussite est forte pour ce problème, les groupes ayant eu la patience d'examiner systématiquement les points de la figure, avec règles et équerres.

6. Sports d'hiver (Cat. 4, 5, 6)

La plupart des classes ont constaté que, lorsqu'on a pris une fois chacun des 5 termes, on obtient déjà 3 + 5 + 7 + 12 + 16 = 43 et qu'il ne reste alors que 17 = 60 – 43 points à répartir. Les classes de 4e ont eu la patience de rechercher les quatre possibilités, alors qu'en 5e et 6e, on s'est souvent contenté d'une ou de deux solutions possibles.

Possibilités:	Lac (3)	Marmottes (5)	Gentiane (12)	Métro (16)	Chamois (7)
a)	1	2	2	1	1
b)	2	1	1	1	3
c)	1	3	1	1	2
d)	5	2	1	1	1

7. Figures en évolution (Cat. 5, 6) et 13 (Cat. 7, 8)

Les élèves de 5e et 6e ont facilement trouvé 56 carrés gris en dessinant la 15e figure ou en constatant que leur progression, de figure en figure, est celle des multiples de 4. Mais le décombrement des 365 carrés blancs a été un obstacle important. Ils sont difficiles à compter un à un sur le dessin et, bien que la figure soit de forme carrée, la «formule» habituelle ne fonctionne pas ici. Les réponses 196 (14 x 14) ou 169 (13 x 13, cohabitent avec des solutions plus vraisemblables : 2 x 196 ou 2 x 169, alors que la bonne réponse est 196 + 169. Il y a là une beau conflit entre l'aire d'une figure carrée de 14 carrés de côté, lorsque ces derniers sont juxtaposés (côtés communs) ou lorsqu'ils n'ont que des sommets en commun.

Pour les catégories 7 et 8, la première figure qui a plus de 1000 carrée en tout est la 23e, avec 1013 carrés. Plusieurs classes ont déterminé le nombre des carrés figure par figure, en écrivant la suite jusqu'à la 23e figure : 2e : 1 + 4 = 5 ; 3e : 5 + (2 x 4) = 13 ; ... 20e : 685 + (19 x 4) = 761 ; 21e : 761 + (20 x 4) = 841 ; 22e : 841 + (21 x 4) = 925 ; 23e : 925 + (22 x 4) = 1013. Cette méthode est sujette aux erreurs de calcul. Les classes qui ont trouvé la formule $n \longrightarrow n^2 + (n-1)^2$ ont eu plus de réussite.

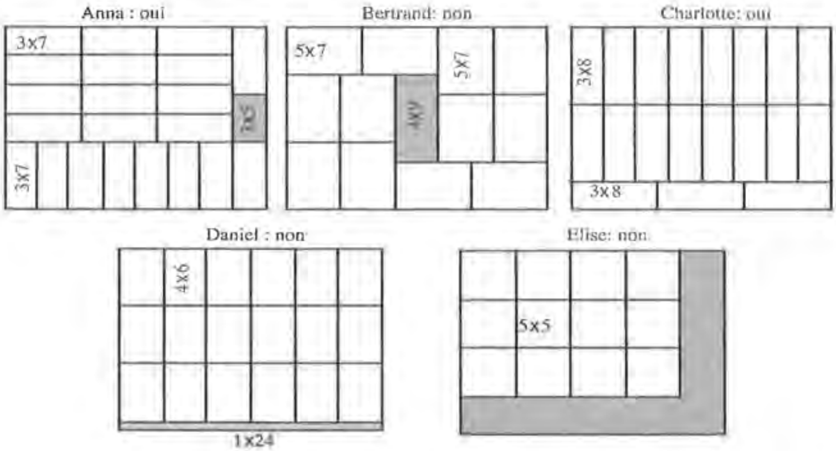
8. **Quitte ou double** (Cat. 5, 6, 7)

Pour résoudre ce problème, il faut faire des essais, en faisant une hypothèse sur le nombre de points rapportés par la première question et en déduire que seule la valeur 3 convient, puis chercher à obtenir le nombre 177 en additionnant cinq des nombres de la suite : 3, 6, 12, 24, 48, 96. La somme étant 189, c'est le 12 (3e question) qui n'a pas été utilisé : 177 = 96 + 48 + 24 + 6 + 3.

9. **Etiquettes** (Cat. 5, 6, 7)

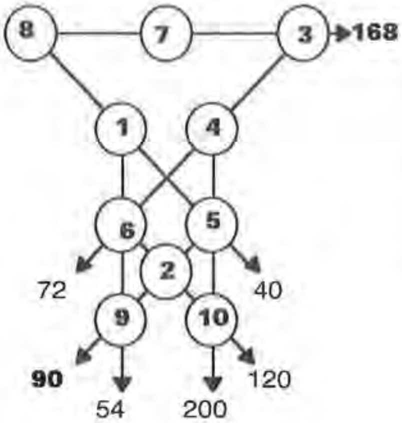
Il y a longtemps que ce problème était en attente, car certains pensaient que les vérifications prendraient trop de temps. Malgré leur expérience et leurs capacités démontrées dans les épreuves précédentes, nos finalistes romands n'ont pas pensé à aller plus loin que la vérification numérique des affirmations, à l'exception d'une classe (de catégorie 5) qui a cherché à disposer les étiquettes dans la feuille. Une autre classe (de catégorie 7), après avoir dit que toutes les affirmations étaient possibles, a tout de même fait remarquer : « nous avons tenu compte du fait qu'il était possible de découper et de recoller les formes... ».

Voici les réponses attendues à ce problème de géométrie révélateur, où une réponse numérique est manifestement insuffisante sans être accompagnée d'une recherche de sens[1]



1. Ce problème a été repris par les nouveaux moyens d'enseignements romands de mathématiques de 6e année.

10. Produits en ligne (Cat. 5, 6, 7, 8)



Petite recherche facile, dès la 6e année, où la décomposition des nombres en facteurs à disposition des élèves se révèle un outil efficace. Par exemple, comme aucun des nombres donnés ne contient 7 dans sa décomposition, celui-ci est obligatoirement dans le cercle du centre de la ligne supérieure, le 9 doit être dans la ligne « 54 » qui contient trois facteurs « 3 » (3 et 6 ne suffiraient pas) et, ne pouvant être dans la ligne « 120 » ni dans la ligne « 40 », il est obligatoirement dans le cercle du bas à gauche.

12. Rallye Mathématique Transalpin 2001 (Cat. 6, 7, 8)

La finale des finales du RMT de 2001 a permis de créer un beau casse-tête d'une logique implacable. Encore fallait-il trouver les informations suffisantes et non superflues, sans dévoiler celles qui pourront faire démarrer la recherche. Par exemple, voici une manière de compléter le tableau en différentes étapes de (1) à (6) :

Catégorie	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang
3	**Gênes (4)**	**Belluno (3)**	**SR (3)**	Sienne
4	**Sienne (2)**	**Parme (2)**	S R.	**Belluno (5)**
5	**Milan (5)**	S R	**Cagliari (5)**	**Milan (5)**
6	Belluno	**Lodi (4)**	**Aoste (2)**	**SR (1)**
7	**SR (1)**	Belluno	**Parme (2)**	**Aoste (2)**
8	**SR (1)**	**Riva (4)**	Sienne	**Tessin (6)**

14. La photo souvenir (Cat. 7, 8)

Il y a 24 élèves dans la classe. La réussite a été quasi totale, sans algèbre, avec des schémas bien organisés.

15. Le nombre de Roger (Cat. 8)

Ce problème était en attente depuis plus d'un an. Proposé à l'origine dès la catégorie 6, il a été repoussé en catégorie 8, et en finale. La première version parlait[2] de touches d'une calculatrice, mais les « chiffres »,

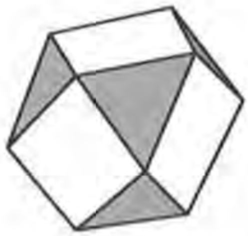
2. C'est dans cette version d'origine que le problème a été repris par les nouveaux moyens d'enseignements romands de mathématiques de 6e année

« nombres » et « touches » n'ont pas passé l'examen critique des diverses équipes régionales.

Finalement, le problème a été très bien réussi. Les classes ont trouvé facilement que les nombres affichés sur les trois premiers cartons ne peuvent être que 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ou 0,4.

Il y a trois solutions lorsqu'on essaie de trouver le chiffre de la quatrième case : 0,142 (42 est multiple de 14), 0,284 et 0,498. Une classe a aussi trouvé 0,000, écriture inhabituelle mais acceptés par les correcteurs.

16. **Pauvre octaèdre** (Cat. 8)



Une classe a taillé un octaèdre dans une pomme, puis découpé les 8 sommets pour obtenir le volume demandé, un « cuboctaèdre », assez peu appétissant après le passage des arêtes au stylo. Les autres ont imaginé la forme des faces du nouveau polyèdre et en ont déduit qu'il a 14 faces (6 carrés et 8 triangles équilatéraux), 12 sommets (communs chacun à 2 carrés et 2 triangles, c'est à dire ((8 x 3) + (6 x 4)) / 4) et 24 arêtes (somme des cotés des faces divisé par 2).

C. Résultats de la finale du 10e RMT pour la Suisse romande

no cl.	localité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	B	tot	cl
323	Porrentruy	3	3	0	0	4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		10	1
328	Valeyres/Montagny	3	1	0	3	3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		10	1
306	Corgémont	3	2	0	0	4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		9	3
423	Corsier	2	2	4	3	4	4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		19	1
409	Villars Ste Croix	3	3	0	2	4	4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		16	2
428	La Léchère	3	3	0	3	2	3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		14	3
435	ECLF Berne	3	2	3	0	4	2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		14	3
440	Bienne	3	4	3	0	0	3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		13	5
528	Monthey	x	x	x	3	4	1	3	4	1	3	x	x	x	x	x	x		19	1
523	Montagny	x	x	x	3	4	2	2	4	2	1	x	x	x	x	x	x		18	2
508	Les Verrières	x	x	x	3	4	1	4	4	1	0	x	x	x	x	x	x		17	3
517	Perrefitte	x	x	x	3	4	2	3	1	1	3	x	x	x	x	x	x		17	3
559	Genthod	x	x	x	3	3	4	2	0	1	0	x	x	x	x	x	x		13	5
625	Cossonay	x	x	x	x	x	3	3	4	1	3	3	0	x	x	x	x		17	1
637	ESRN Peseux	x	x	x	x	x	3	4	0	1	4	2	1	x	x	x	x		15	2
624	Cossonay	x	x	x	x	x	1	1	1	1	3	4	2	x	x	x	x		13	3
716	La Tour-de-Peilz	x	x	x	x	x	x	x	4	1	4	3	4	4	4	x	x		24	1
710	La Neuveville	x	x	x	x	x	x	x	0	1	4	3	4	4	4	x	x		20	2
715	Elysée Lausanne	x	x	x	x	x	x	x	4	1	3	2	2	1	3	x	x		16	3
801	ES Bas Vallon	x	x	x	x	x	x	x	x	x	4	4	4	3	4	4	4		27	1
824	Aigle	x	x	x	x	x	x	x	x	x	4	3	4	4	4	1	4		24	2
838	ES Haute Sorne	x	x	x	x	x	x	x	x	x	4	3	3	4	4	4	1		23	3
839	ECLF Berne	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	3	0	1	4	4	3		18	4

D. Reflets de la fête du 10e anniversaire du RMT en Suisse romande

Il y avait beaucoup de représentants de nos autorités scolaires romandes à la petite fête organisée durant la finale du 29 mai. Les invités ont pu tout d'abord constater l'autonomie totale des classes en travail de résolution, puis assister à une partie officielle durant le goûter des élèves et les corrections des épreuves et, finalement, se rendre compte de l'intensité sonore d'une proclamation des résultats où 500 élèves réunis dans une même salle manifestent leur joie à l'annonce de leurs succès.

Présidée par Antoine Gaggero, l'organisateur de la finale, cette rencontre d'anniversaire entre les animateurs et leurs invités a montré tout l'intérêt que représente le rallye et sa finale pour les élèves, les maîtres, l'enseignement des mathématiques et l'école en général.

M. Blaise Vuille, président de la Commission scolaire de l'Ecole Cantonale de Langue Française de Berne a souhaité la bienvenue à tous et s'est félicité que son école soit, l'espace d'une journée, le centre mathématique romand. Il a souligné l'engagement des élèves et des enseignants pour la réussite de la fête.

M. Marcel Guelat, secrétaire général du DIP du canton de Berne s'est exprimé au nom des autorités scolaires. Il a manifesté un «tripe plaisir» à assister à cette rencontre:

celui du représentant du Directeur de l'instruction publique du canton de Berne qui a l'honneur de vous apporter le salut de l'administration cantonale, sa reconnaissance et ses félicitations pour avoir choisi d'organiser la finale du rallye mathématique transalpin;

celui de l'ancien maître de math qui constate que les joutes mathématiques en général et le rallye mathématique transalpin en particulier développent la motivation des élèves pour une discipline redoutable à priori... qu'elles enrichissent la didactique des mathématiques... et qu'elles jouent un rôle important auprès des parents d'élèves et du grand public dans la mesure où ils contribuent à mieux faire connaître les mathématiques et même à susciter de l'intérêt pour cette discipline chez les plus récalcitrants. [...];

celui du fidèle abonné et lecteur de Math-Ecole, *cette magnifique revue mathématique de Suisse romande dont la réputation a largement dépassé nos frontières... à l'initiative de laquelle, en 1992, il y a dix ans, est né le Rallye mathématique romand, transformé assez rapidement en une grande compétition interclasse et internationale*

Notre collègue, Pascal Michel, président de l'association «Rallye mathématique transalpin – Suisse romande», s'est adressé aux invités en ces termes:

[...] *Son but [le RMT]: permettre aux élèves de faire des mathématiques. Avoir du plaisir à faire des mathématiques.*

Faire des mathématiques autrement: chercher, comprendre, échanger, écouter, partager. Découvrir la variété des démarches pour résoudre un problème. [...]

Il semble que les classes qui font de bons résultats sont souvent celles où les élèves qui ont de la facilité écoutent leurs camarades qui en ont moins. Ce sont les classes où tous les élèves participent. La qualité d'arriver à comprendre ce que fait l'autre est sans doute une garantie de réussite. L'importance d'une bonne ambiance de classe et d'une bonne cohésion entre les élèves sont aussi des facteurs importants.

L'autre originalité de ce concours est qu'il est préparé et animé par des enseignants «qui enseignent» des enseignants du terrain, en collaboration avec des maîtres de didactique.

Les maîtres qui travaillent à l'élaboration des problèmes, à leur correction, à leur analyse, sont conduits à s'interroger sur leur choix, à faire une réflexion pédagogique. Et comment évaluer... Les critères ne sont pas la réponse juste, mais la qualité que les enfants ont de pouvoir expliquer les démarches qui ont permis de résoudre le problème. Si la solution est unique, d'en justifier l'unicité. Ou alors de donner toutes les solutions, en décrivant comment ils sont sûrs qu'ils en ont ni trop, ni pas assez...!

Pour bien des enseignants, au début du RMT, c'était quelque chose de nouveau. Oser penser qu'il y a plusieurs stratégies, plusieurs réponses possibles ou encore découvrir la non-existence de solution.

Ces réflexions pédagogiques ont fait l'objet de plusieurs publications, en particulier dans Math-Ecole. *Nous pouvons aussi relever que plusieurs problèmes du Rallye ont été repris dans les nouveaux manuels de mathématiques romands de 3e, à 6e, car ils ont été reconnus efficaces pour l'introduction de telle ou telle notion, à la suite de l'examen des réponses des groupes d'élèves qui les ont résolus. [...]*

Pour les prochaines années, nous serons amenés à faire appel à des sponsors. A demander aussi un soutien aux départements de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse des différents cantons romands, voir à la confédération pour avoir les fonds nécessaires pour permettre à cette activité de vivre. De permettre à l'enseignement de continuer à être en mouvement, à ne pas cesser de réfléchir à ce que l'on fait. [...]

Finalement, Pascal Michel a dit sa reconnaissance à François Jaquet, créateur du Rallye qui a conclu, à son tour, par quelques réflexions sur le rôle et la place du RMT par rapport aux programmes officiels de mathématiques[3].

Parmi les nombreux remerciements, il faut relever ceux adressés aux autorités scolaires qui manifestent leur intérêt pour le RMT, ceux adressés aux animateurs qui se dépensent sans compter pour leur confrontation et, en particulier à Antoine Gaggero, ses collègues et les responsables de l'ECLF de Berne qui, comme en 2000 et 2001, ont organisé la finale de façon magistrale. Accueillir 23 classes, distribuer les épreuves, organiser une présence dans toutes les ailes de l'école, recueillir les feuilles réponses et les répartir parmi les correcteurs, commander le goûter puis le distribuer, préparer la distribution des prix, animer la proclamation des résultats, faire en sorte que tout se déroule sans incident ni retard selon un horaire très réduit et précis, ce n'est pas une sinécure.

En guise de conclusion, voici ce qu'un élève de 7e année, participant à la finale, a répondu à un journaliste qui l'interrogeait:

Nous avons cherché individuellement d'abord. Personne dans notre groupe avait la bonne solution. Nous avons alors échangé ce que nous avions fait individuellement et nous avons trouvé ensemble la bonne solution au problème.

Cela souligne à la fois la valeur du travail personnel et en groupe favorisé par le Rallye: la qualité d'écoute et la compréhension de ce que l'autre, les autres ont fait; et enfin la capacité à se mettre d'accord.

3. Ces propos ont fait l'objet de l'éditorial du numéro 202 de *Math-Ecole*.

Le Cameroun contré

Un jeu proposé par Martine Simonet

L'origine de ce titre surprenant n'est malheureusement pas expliquée dans le *Livre de tous les jeux*[1] d'où il est tiré. Mais une chose est sûre : ce titre n'a rien à voir avec les éliminatoires du Mundial de football de juin 2002 !. Ce jeu de dés est dérivé du célèbre jeu Yams.

Son intérêt, pour l'enseignant de deuxième année primaire, est en lien avec l'objectif du plan d'études romand «mémoriser la table d'addition» puisqu'il s'agit d'additionner deux nombres, de manière ludique en combinant chance et stratégie.

Compétence attendue

Calculer rapidement des sommes de la table d'addition de 1+1 à 6+6.

Matériel

4 dés
2 crayons de couleurs différentes
1 feuille de marque

Somme	Joueur 1				POINTS	Joueur 2				Somme
2					11					2
3					9					3
4					7					4
5					5					5
6					3					6
7					1					7
8					3					8
9					5					9
10					7					10
11					9					11
12					11					12
					←TOTAL→					

Figure 1

1. éditions Solar 1989

Règles du jeu pour 2 joueurs

A tour de rôle, chaque joueur jette simultanément les 4 dés (attention ! contrairement au Yams, il ne peut pas les relancer lors d'un même tour). Il groupe les dés par deux, de la manière qui lui convient, et calcule la somme de chacune des deux paires. Il trace ensuite une croix dans deux de ses cases correspondant aux sommes obtenues.

Le but est d'être le premier à tracer 4 croix dans une ligne, ce qui permet de gagner les points attribués à cette ligne. Pour indiquer que ces points lui appartiennent, le joueur entoure le nombre ou colorie la case (voir figure 2). Son adversaire ne pourra alors plus inscrire de croix dans les cases de cette ligne. Il est « contré ».

Le jeu se poursuit jusqu'à ce que tous les points soient attribués à l'un ou à l'autre des joueurs. On peut aussi décider d'arrêter la partie lorsqu'il ne reste plus qu'une ligne à remplir, en particulier s'il s'agit de la ligne 2 ou 12 (voir figure 3).

Le gagnant est le joueur qui obtient le plus grand total après avoir additionné les points récoltés en cours de partie.

Exemple d'une partie :

Au 5e tour, Martin lance les dés et obtient :
5 / 1 / 2 / 6
Il peut faire 6 (5+1) et 8 (6+2)
ou 11 (5+6) et 3 (2+1)
ou encore 7 (5+2) et 7 (6+1).

Martin choisit la deuxième solution car en traçant une croix dans la ligne 3 et dans la ligne 11, cela lui permet de compléter sa ligne 11 et de gagner les 9 points correspondants :

Somme	Joueur 1 Martin				POINTS	Joueur 2 Françoise				Somme
2					11					2
3	x				9	x				3
4	x				7	x	x			4
5					5					5
6	x				3					6
7	x	x			1	x				7
8					3					8
9	x				5					9
10					7	x				10
11	x	x	x	x	9	x	x	–	–	11
12					11	x				12
					←TOTAL→					

Figure 2

La ligne 11 est maintenant «fermée», ce qui signifie que ni Françoise, ni Martin ne peuvent inscrire de croix dans cette ligne. Si la somme 11 est à nouveau obtenue en cours de jeu, elle est tout simplement ignorée.

Voici la feuille de marque de Françoise et Martin en fin de partie :

Somme	Joueur 1 Martin				POINTS	Joueur 2 Françoise				Somme
2	x				11					2
3	x	–	–	–	9	x	x	x	x	3
4	x	–	–	–	7	x	x	x	x	4
5	x	x	x	x	5	x	–	–	–	5
6	x	x	x	x	3	x	x	x	–	6
7	x	x	x	x	1	x	–	–	–	7
8	–	–	–	–	3	x	x	x	x	8
9	x	x	x	–	5	x	x	x	x	9
10	x	–	–	–	7	x	x	x	x	10
11	x	x	x	x	9	x	x	–	–	11
12	x	x	x	x	11	x	–	–	–	12
	29				←TOTAL→	31				

Figure 3

A propos de calcul de sommes

Voici un problème tiré de *Tangente* no 82 (septembre-octobre 2001) que l'on rencontre souvent, sous des habillages légèrement différents, dans les concours pour les degrés de l'école primaire.

Clément écrit une suite de nombres. La somme de trois nombres consécutifs dans la suite est toujours égale à 29. Le deuxième nombre est 5, le septième est 8. ***Quel est le 2001e ?***

Le jeu des variables didactiques permet de modifier la somme (29), le nombre de termes consécutifs (3), les nombres connus et leur rang (2e: 5, 7e: 8) et le rang du nombre inconnu (2001)

Dans une version pour 2P, on pourrait choisir, par exemple :

...; ...; 5; ...; 8; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ?; ...

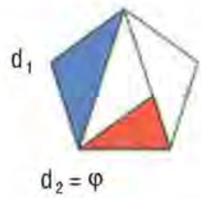
Dans cette suite, la somme des trois nombres qui se suivent est toujours 20.
Quel est le nombre marqué par le « ? »

Approche géométrique du calcul matriciel

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

Nous avons regardé lors de deux précédents articles comment illustrer géométriquement la suite de Fibonacci ou les nombres irrationnels sous forme de jeux. Nous abordons ici un aspect inattendu que nous proposent ces jeux, à savoir une illustration concrète du calcul matriciel. Notre ambition est de montrer qu'une voie ludique vers l'algèbre linéaire est tout à fait possible en assemblant des triangles isocèles.

Cas N = 5 (pentagone)

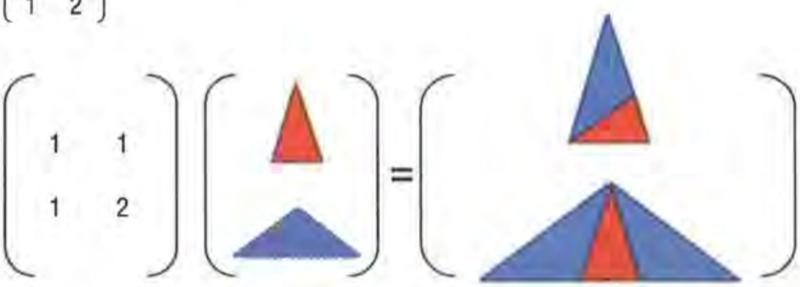


Nous considérons les 2 isotriangles du pentagone comme les composantes d'un vecteur.

(Rappel : les diagonales – ou leurs mesures – d_n sont issues d'un même sommet et relient tous les autres. d_1 correspond au côté du polygone régulier de longueur normalisée à 1, d_2 est la diagonale qui relie deux sommets qu'on rejoint par 2 côtés successifs...)

En lui appliquant la matrice M, ce vecteur est agrandi d'un facteur φ, nombre d'or pour les côtés (φ^2 pour les surfaces),

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



La matrice M est le carré de la matrice M_0

$$\underset{M_0}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{M_0}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

On peut calculer

$$M_0^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \qquad M_0^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_0^{-n} = \begin{bmatrix} (-1)^n F_{n+1} & (-1)^{n+1} F_n \\ (-1)^{n+1} F_n & (-1)^n F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Où les F_n sont les nombres classiques de Fibonacci

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	...
1	1	2	3	5	8	13	

Rappelons la formule : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Calculons maintenant $| M_0 - \lambda I | = 0$ pour obtenir les valeurs propres de la matrice M_0

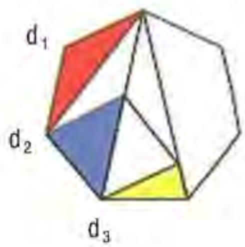
$$| M_0 - \lambda I | = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

L'équation obtenue est la relation algébrique du nombre d'or π avec les solutions :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \varphi \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618\ldots = -1/\varphi$$

Le formalisme matriciel va nous permettre d'illustrer un aspect d'algèbre linaire d'une manière géométrique pour d'autres valeurs de N. Prenons par exemple

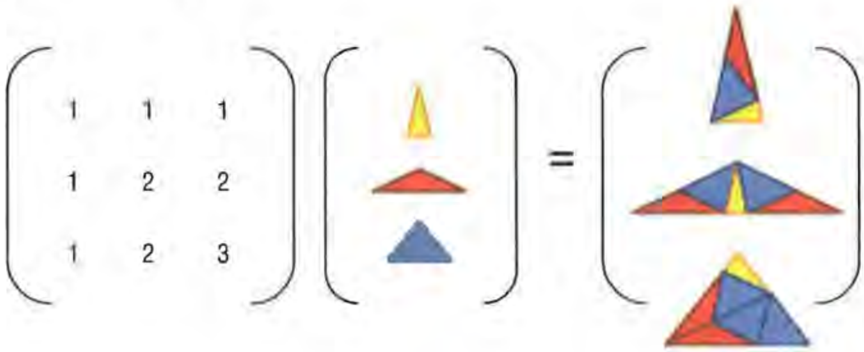
N = 7 (heptagone)



Considérons maintenant les 3 isotriangles de l'heptagone comme composantes du vecteur et appliquons lui la matrice M :

Le facteur d'agrandissement est cette fois de d_3 pour les côtés (d_3^2 pour les surfaces).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



La matrice M est le carré de la matrice M_0 suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{car:} \quad \underset{M_0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{M_0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{M}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}$$

et en calculant: $|M_0 - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

Il en sort l'équation : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

dont une des solutions est : $\lambda_1 = d_3 = 2{,}247\ldots$

La matrice inverse de M_0 est M_0^{-1}:

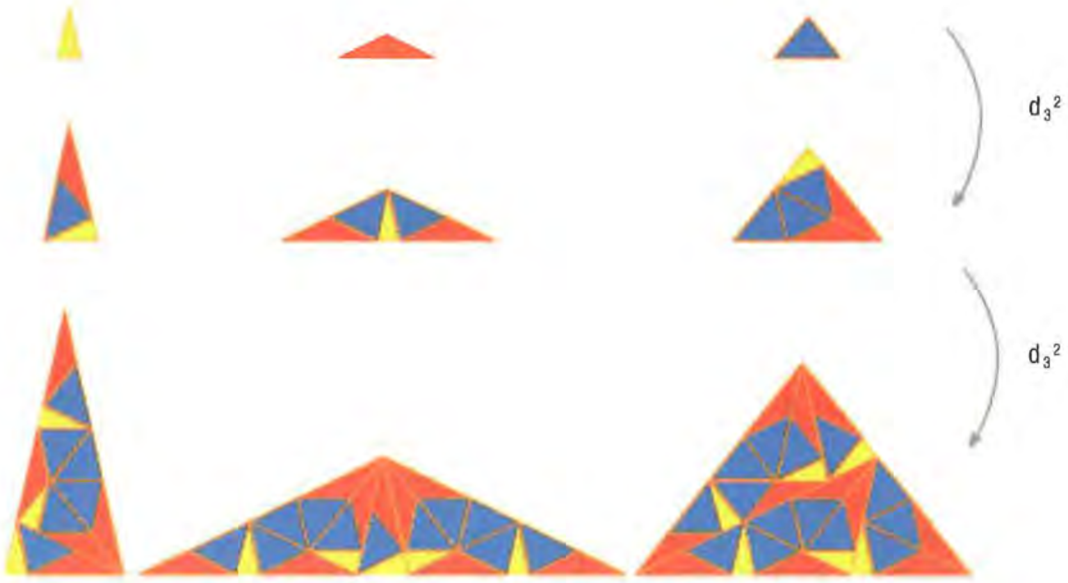
$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tel que } M_0^{-1} M_0 = I$$

en calculant le déterminant de cette matrice:

$$|M_0^{1} - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{On en tire } \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

dont une des solutions est: $\lambda_1 = 1/d_3 = 0{,}445\ldots$

Les nombres de Fibonacci étendus e_n, f_n, g_n sont donnés en comptant le nombres de triangles (lorsque l'aire est agrandie de d_3^2).



e_n f_n g_n

On peut alors considérer un tableau de 3 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 14 & 25 & 31 \\ 70 & 126 & 157 \\ 353 & 636 & 793 \\ 1782 & 3211 & 4004 \\ 8997 & 16212 & 20216 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & f_n & g_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$e_n = e_{n-1} + f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n = e_n + f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$g_n = f_n + g_{n-1}$$

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} \to \frac{f_n}{f_{n-1}} \to \frac{g_n}{g_{n-1}} \to d_3^2 \text{ si } n \to \infty$$

$$\frac{f_n}{e_n} \to d_2 \text{ si } n \to \infty$$

$$\frac{g_n}{e_n} \to d_3 \text{ si } n \to \infty$$

$$\boxed{e_n{}^2 + f_n{}^2 + g_n{}^2 = e_{2n}}$$

$$\boxed{e_n e_{n+1} + f_n f_{n+1} + g_n g_{n+1} = e_{2n+1}}$$

$$e_{n-1} e_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} + g_{n-1} g_{n+1} = e_{2n}$$

Il est possible d'exprimer les coefficients de M (pour N = 7) avec les nombres de Fibonacci étendus comme ci-dessous :

$$M_0^2 = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_0^{2n} = M^n = \begin{pmatrix} e_n & f_n & g_n \\ f_n & e_n + g_n & f_n + g_n \\ g_n & f_n + g_n & e_n + f_n + g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n & U_n & V_n \\ U_n & Y_n & W_n \\ V_n & W_n & Z_n \end{pmatrix}$$

Ainsi en assemblant des triangles isocèles dont les côtés isocèles sont identiques et dont les angles sont des multiples de π/N on arrive à illustrer géométriquement la structure nécessaire à la résolution de système d'équations linaires.

Ce sujet se trouve détaillé dans le livre « Au delà du nombre d'or » qui est à disposition sur CD-Rom, que vous pouvez vous procurer auprès de Trigam SA, Neuchâtel, CH, tél. 032 721 28 38 et qui donne de très nombreux exemples de jeux simples également à disposition permettant de faire comprendre aux élèves les multiples ponts qu'il y a entre différents domaines mathématiques.

Exposition Rivages Mathématiques

Le numéro spécial de la revue *Hypercube 32/33*, (voir p. 3 de couverture) est le catalogue de l'exposition *Rivages mathématiques* qui comprend dix expériences sur des thèmes qui, historiquement, se sont développés « autour de la Méditerranée » :

- Les poids de Babylone (bases de numération, Mésopotamie)
- La pierre angulaire (tronc de pyramide, Egypte)
- Thalès en un clin d'œil (triangles homothétiques, Grèce)
- Nombres figurés (conception du nombre, Grèce)
- Pavages magiques (carrés magiques, Islam)
- Pythagore en pièces (théorème de Pythagore, Grèce)
- Kwarizmath (équations, Islam)
- Trois carrés en un (démonstration et somme de carrés, Islam)
- L'escalier de Leonardo (suite de Fibonacci, Moyen-âge)
- Curieux carrelages (pavages, Islam)

Une exposition pour animer votre collège, un club, une fête des mathématiques...

L'exposition a été présentée dans le cadre du festival *Sciences et Cité* à Neuchâtel (Voir *Math-Ecole* no 197) puis à la *Nuit de la Science* et au Musée des sciences de Genève, en 2001 et au début de cette année. Elle est désormais à disposition des écoles ou d'autres institutions qui désirent faire connaître les mathématiques de manière dynamique.

Matériel à disposition : 5 triptyques recto-verso (15 panneaux, quadrichromie), à poser sur des tables : longueur 120 cm, largeur et hauteur 80 cm, matériel en bois, métal et plastique, représentant 10 postes de travail. Des fiches complémentaires et un « dossier pédagogique » accompagnent chaque expérience.

Les 10 postes occupent 5 grandes tables, dans un espace de 40 m² environ. Le matériel est contenu dans deux caisses de 30 kg : 90 x 15 x 65 et 80 x 37 x 60.

Location : CHF 350.- pour deux semaines + transports et assurance. Ce prix comprend un exemplaire de la revue *Hypercube 33/34*, un exemplaire des fiches, pour photocopie et 50 exemplaires du guide-visiteurs.

Réservation : SENS www.abord-ch.org/sens

Une recherche mathématique en atelier de sciences: Convergence vers les chaos

Thierry Bettosini
Collège des Forges, La Chaux-de-Fonds

Introduction

Cet article présente une recherche en mathématique, réalisée au collège des Forges de l'école secondaire de la Chaux-de-Fonds, par deux étudiants de 9ème année (15 ans) de la section «Maturité» pour leur travail d'option spécifique en «atelier de sciences». Il s'agit de **Céline Stähli** et **Yann Abbet** qui se sont littéralement immergés dans leur sujet et qui ont été la plupart du temps autonomes dans leurs déductions et leurs découvertes, ainsi que pour leurs productions informatisées qu'ils ont effectuées à domicile.

La démarche de travail que je leur ai proposée est donnée par quatre situations mathématiques réparties sur 10 périodes:

1) Itération d'une fonction (2 périodes)
Familiarisation avec le concept d'itération

2) Itération d'une fonction linéaire (2 périodes)
Familiarisation avec la notion de convergence et divergence
Découverte d'une stratégie géométrique

3) Itération d'une fonction du 2ème degré (2 périodes)
Familiarisation avec le concept d'attracteur
Recherche algébrique et géométrique

4) Convergence vers le chaos (4 périodes)
Quête et émergence du chaos
Découverte de l'augmentation du nombre de solutions de convergence

L'intérêt pédagogique de cet atelier porte sur différents niveaux:

1) J'ai proposé à mes élèves ce sujet d'étude sur le chaos, car je suis personnellement un passionné de la nouvelle géométrie fractale, ce qui m'a inévitablement conduit à m'intéresser aux systèmes chaotiques.

La relation maître – étudiants qui se construit, alors que les deux parties travaillent sur le même projet de recherche, est de haute qualité, associant motivations, échanges, plaisirs, et une reconnaissance réciproque.

2) L'itération d'une fonction est une approche particulièrement intéressante car elle sort de la perspective habituelle d'étude d'une fonction. C'est une approche relativiste, de «l'intérieur», de la même manière qu'Einstein a étudié la vitesse de la lumière en se plaçant «assis» sur un photon, image utilisée par lui-même et inspirée d'un de ses rêve d'enfance, pour illustrer le «référentiel mobile».

Avec une itération, on se place «assis» sur la valeur de départ x, et on suit la trajectoire de la valeur au travers de la fonction y. On observe le comportement de la fonction, divergent ou convergent.

Cette perspective relativiste de «l'intérieur», donne une présentation de «ce que la fonction a dans le ventre». De la même manière que l'on «scanne» les nombres naturels avec la décomposition en facteurs premiers, afin de savoir «ce que le nombre a dans le ventre», comme me l'a transmis mon maître de stage François Jaquet, lors de ma formation.

3) C'est B. Mandelbrot qui souligne le caractère «non linéaire» des systèmes chaotiques.

Cette «non-linéarité» est un objectif fondamental de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. C'est par rapport à la «non-linéarité» que peut s'individualiser le concept particulier de «linéarité» (voir à ce sujet l'article de F. Jaquet, La tentation de la proportionnalité, *Math-école* 198, p.30).

4) Il faut enseigner le chaos. Quelle que soit la perfection atteinte par la mathématique linéaire, elle abuse inévitablement l'étudiant et fausse son jugement sur le monde, terriblement non-linéaire, qui ne possède pas nécessairement des propriétés dynamiques simples, mais complexes.

Cela devrait aussi être présent à l'esprit de nos dirigents. L'économie au travers de la bourse, l'écologie au travers du climat, la politique au travers du social, sont tous des systèmes chaotiques, susceptibles de basculer suite à «la goutte qui fait déborder le vase», ne suivant plus du tout une logique linéaire, mais au contraire une logique chaotique et complexe: crises monétaires, catastrophes écologiques ou guerres sociales.

Etre conscient de la fragilité et de la sensibilité des systèmes chaotiques, ouvre des perspectives nouvelles pour le développement durable de notre planète.

Plan de l'article

Les quatre situations seront présentées, l'une après l'autre avec chaque fois l'énoncé du problème suivi d'extrait des travaux réalisés par les élèves, le tout suivi d'un bref commentaire. Un bref complément théorique termine l'article.

Situation 1 : Itération d'une fonction

Problème

Je dépose un capital de 100.- Frs dans une banque.
Cette banque m'offre le 10 % de mon capital après une année de dépôt de mon argent.
Je laisse l'ensemble de mon argent à la banque, sans y toucher, durant plusieurs années. (ITERATION)

a) Etudie en terme de fonctions la transformation du capital, année après année.
b) Réalise un graphe sur papier millimétré. (projet pour la réalisation du graphe à l'ordinateur)

Travail à l'ordinateur

A l'aide d'un «éditeur graphique», tu peux représenter ta fonction mathématique.
Imprime la formule mathématique ainsi que ton graphique, à différentes échelles, sur une feuille blanche tirée du logiciel «Word».

Recherche

En utilisant ton graphique imprimé, essaye de découvrir une stratégie géométrique pour illustrer le processus d'itération. Afin de découvrir ce processus, construis et observe le tableau de valeurs représentant la fonction de la situation problème. Note la particularité de ce tableau, cela te permettra de définir ce qu'est une itération.
(Tu utiliseras cette stratégie géométrique pour la suite de tes découvertes…)

Travail réalisé

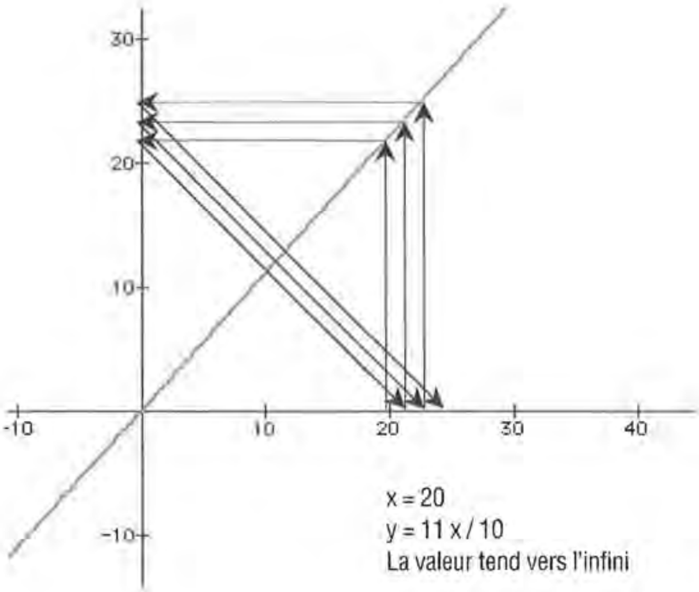
Tableau de valeurs

Année	Capital (Frs)	Ce que je reçois (Frs) avec 10%
1 ère	100.000	10.0000
2 ème	110.0000	11.0000
3 ème	121.0000	12.1000
4 ème	133.1000	13.3100
5 ème	146.4100	14.6410
6 ème	161.0510	16.10515
7 ème	177.1561	17.7156
8 ème	194.8717	19.4871
9 ème	214.3588	21.4358

Définition de l'itération

X	Capital de l'année actuelle	100	110	121	133.1	146.41	161.051	...
y	Capital de l'année suivante	110	121	133.1	146.41	161.051	177.1561	...

Définition du dictionnaire : C'est l'action de répéter, de faire de nouveau.
Notre définition : C'est une sorte de boucle continue, la valeur «x» l'année d'après devient «y» et ainsi de suite.



x = 20
y = 11 x / 10
La valeur tend vers l'infini

Commentaire

La figure montre la stratégie géométrique utilisée correspondant au calcul de l'itération, on prend une valeur de départ, ici x = 20, on cherche (ou calcule) la valeur de y correspondante (y = 22), on la reporte sur l'axe des x par symétrie (prend cette valeur comme nouvelle x) et on recommence.

A ne pas confondre, cette étude de la convergence et celle qui consisterait, par exemple, à l'étude du comportement asymptotique de la fonction.

Les élèves ont étudié ce comportement pour plusieurs valeurs initiales.

Situation 2: Itération d'une fonction linéaire: Convergence et divergence

Observation du comportement d'une fonction itérée

Définition

Convergence: On dit que «y» converge si la valeur de «y» tend vers un nombre précis et fixe durant l'itération.

Divergence: On dit que «y» diverge si la valeur de «y» tend vers l'infini durant l'itération.

Problème

Itérer des fonctions linéaires du type y = a x et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de a «y» diverge ou converge.

Pour cela complète un tableau de valeurs pour chaque fonction étudiée, ainsi que des représentations graphiques réalisées à l'ordinateur. Puis utilise la stratégie géométrique que tu as découverte pour voir si ces fonctions convergent ou divergent.

A partir de tes observations, essaye de formuler une loi concernant l'itération des fonctions linéaires.

Avec le logiciel Excel, programme la fonction y = a x sur une feuille de calcul, de manière à ce que si l'on donne une valeur à «a» et à «x», alors le programme nous fourni la valeur de «y».

Puis essaye de trouver un procédé de programmation simple pour itérer cette fonction.

Travail réalisé

Convergence ou divergence ?

Nous pouvons déduire de notre expérience que :

$a > 1 \longrightarrow$ Divergence
$a = 1 \longrightarrow$ Stable
$a < 1 \longrightarrow$ Convergence

a = facteur de linéarité

Nous pouvons également déduire de notre expérience que :

$a > -1 \longrightarrow$ Convergence
$a = -1 \longrightarrow$ Stable
$a < -1 \longrightarrow$ Divergence

Commentaire

Un problème de nomenclature et de notation se pose. Il faudrait introduire les itérés de x par $x_{n+1} = f(x_n)$ ce qui paraît ajouter un formalisme difficile à maîtriser. La définition a été mise au point par discussion et on a parlé de convergence et de divergence de «y».

Ici un échantillon des travaux a été présenté selon les deux méthodes : représentation sur la «carte du premier retour» et relation de la valeur de x en fonction de n, ceci pour diverses valeurs de la constante a. Pour ces deuxièmes représentations on notera que les ressources d'Excel sont utilisées pour le calcul et, à partir des résultats, pour la création du graphe (voir aussi ci-dessous).

La cas –1 pose problème puisqu'il y a à la fois non divergence et non convergence. La notion de stabilité a été introduite à cette fin !

Situation 3 : Itération d'une fonction du 2ème degré et attracteur

Problème

Itérer de nombreuses fois une fonction simple. La fonction prend un nombre à l'entrée, et en rend un autre à la sortie, puis ce nombre sortant est réintroduit dans la fonction qui va en fournir un nouveau, etc.

Exemples

a) Fonction linéaire : $y = 1{,}1\,x$ (Evolution d'un capital financier année après année)

Dans une banque, cette fonction exprime la relation entre le capital de cette année « x », et le capital de l'année prochaine « y ».

b) Fonction du 2ème degré : $y = a\,x - ax^2$ (Evolution d'une population animale année après année)

Pour une population animale, cette fonction exprime la relation entre le nombre d'individus de cette année « x » et le nombre d'individus de l'année prochaine « y ».

Tâche

Réalise la représentation graphique de la fonction $y = ax - ax^2$ pour la valeur $a = 2{,}7$ à l'aide de l'éditeur graphique et copie la formule et la représentation graphique sur une page blanche du logiciel Word que tu imprimeras à différentes échelles.

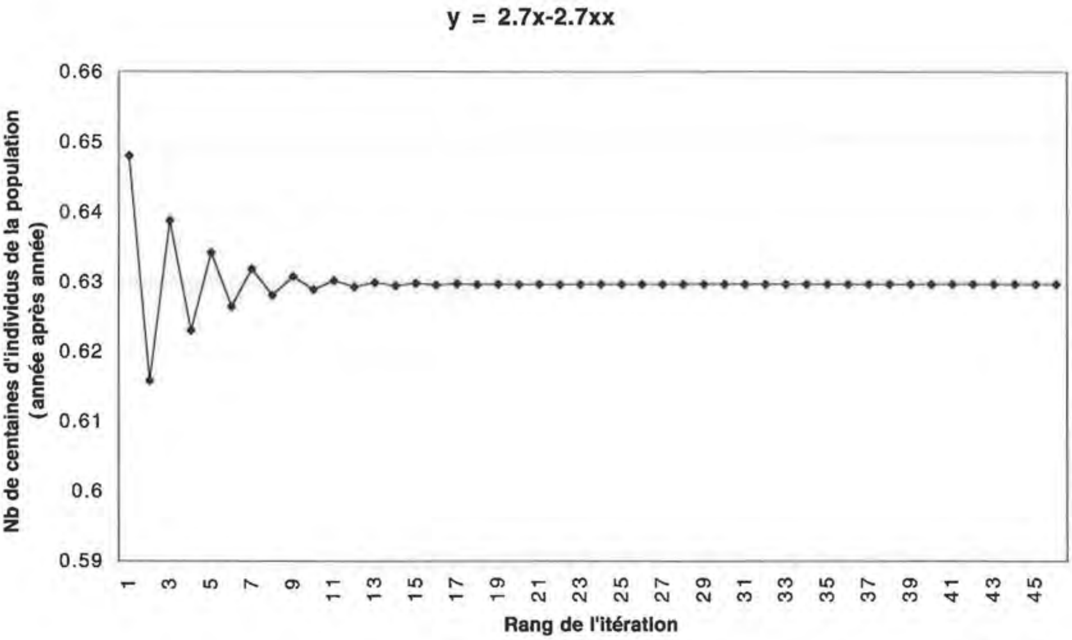
Puis, grâce à la « stratégie géométrique » que tu as mis au point précédemment, essaye de déterminer si l'itération de cette fonction converge ou diverge.

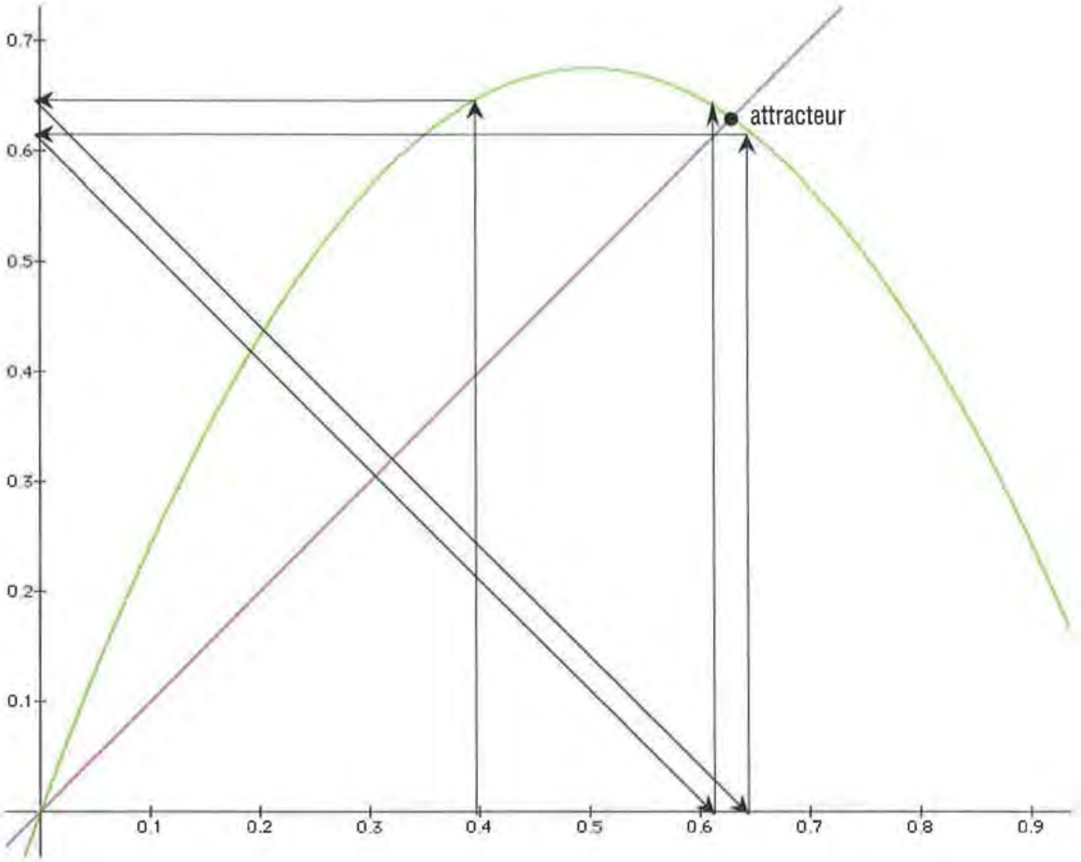
S'il y a convergence, détermine géométriquement (avec l'éditeur graphique) puis algébriquement (par résolution de l'équation) la valeur (x ; y) du point de convergence.

Ce point (x ; y) vers lequel l'itération converge est appelé un **attracteur**.

Travail réalisé

a	x	y
2.7	0.4	0.648
2.7	0.648	0.6158592
2.7	0.6158592	0.638756944
2.7	0.638756944	0.623015579
2.7	0.623015579	0.634141352
2.7	0.634141352	0.626416464
2.7	0.626416464	0.63185097
2.7	0.63185097	0.628061369
2.7	0.628061369	0.630720772
...	...	...
2.7	0.629629483	0.629629732
2.7	0.629629732	0.629629558
2.7	0.629629558	0.62962968
2.7	0.62962968	0.629629594
2.7	0.629629594	0.629629654
		Convergence


y = 2.7x-2.7xx
Nb de centaines d'individus de la population (année après année)
Rang de l'itération
0.66
0.65
0.64
0.63
0.62
0.61
0.6
0.59
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45


attracteur
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

Commentaire

Cette activité est intermédiaire, on y retrouve les caractéristiques du cas linéaire et une amorce du cas de l'équation logistique. On a représenté une partie de la feuille Excel qui permet d'obtenir les valeurs de l'inération et de dessiner le graphe de x en fonction du nombre d'itérations.

Situation 4 : Convergence vers le chaos

Problème

Etudier l'évolution d'une population animale, en terme de croissance ou diminution du nombre d'individus. (Exemple : oeufs-larves-papillons, cycle de reproduction d'une année, nourriture : feuilles et fleurs d'arbres). Avec une fonction linéaire, on aurait une population à croissance continue et illimitée, ce qui serait une aberration écologique, puisque cette population disparaîtrait en épuisant la nourriture de son environnement.

L'évolution d'une population animale est plutôt une fonction du 2ème degré du type suivant :

$$y = a\,x - ax^2$$

Cette fonction est plus réaliste, car elle a la forme d'une « bosse » faisant chuter la population lorsqu'elle devient trop importante, ce qui correspond cette fois à une réalité écologique. En effet, la diminution de nourriture, due à l'augmentation de la population, entraîne une diminution de la reproduction de cette population pour l'année suivante. L'évolution de la population dépend de manière sensible de la valeur de a.

Tâche

Réalise une **recherche mathématique détaillée**, sur les différentes situations déterminées par la valeur de a.

A chaque fois tu noteras la formule, la représentation graphique et l'attracteur (avec l'éditeur graphique sur une page blanche du logiciel Word).

Avec un ordinateur et à l'aide du logiciel Excel, programme cette fonction $y = a\,x - ax^2$ sur une feuille de calcul, de manière à ce que si l'on donne une valeur à « a » et à « x » alors le programme nous fourni la valeur de « y ».

Puis à l'aide de ta page de calcul programmée sur Excel, tu imprimeras la représentation graphique de la convergence ou de la divergence de la fonction itérée.

Enfin, tu essayeras d'interpréter en terme de biologie chacune des situations présentées.

Travail réalisé

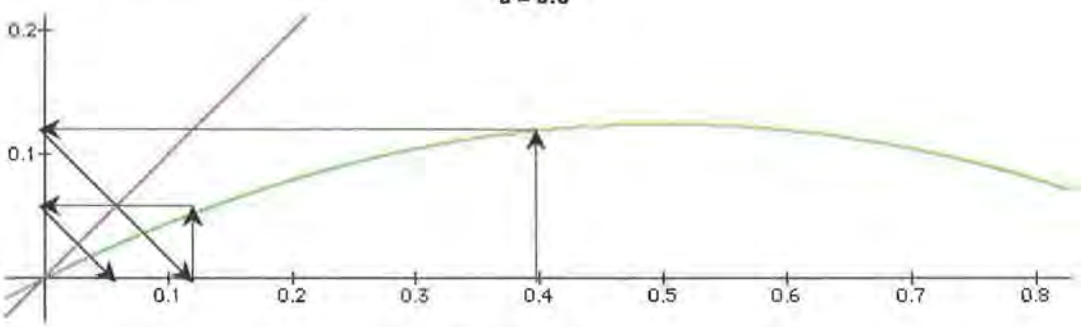
Explications pour la stratégie géométrique des graphes

Nous avons procédé de la manière suivante:

- Nous nous sommes basés sur 0,4 par centaine d'animaux (40 animaux).
- Ensuite, nous avons tracé une droite parallèle à l'axe «y» jusqu'à ce qu'on intercepte la courbe.
- Puis, nous avons également tracé une droite, depuis ce point d'intersection jusqu'à l'axe «y».
- Cela nous a donné un point.
- Puis, nous l'avons reporté sur l'axe «x» en traçant une diagonale.
- Nous avons répété cette opération plusieurs fois.

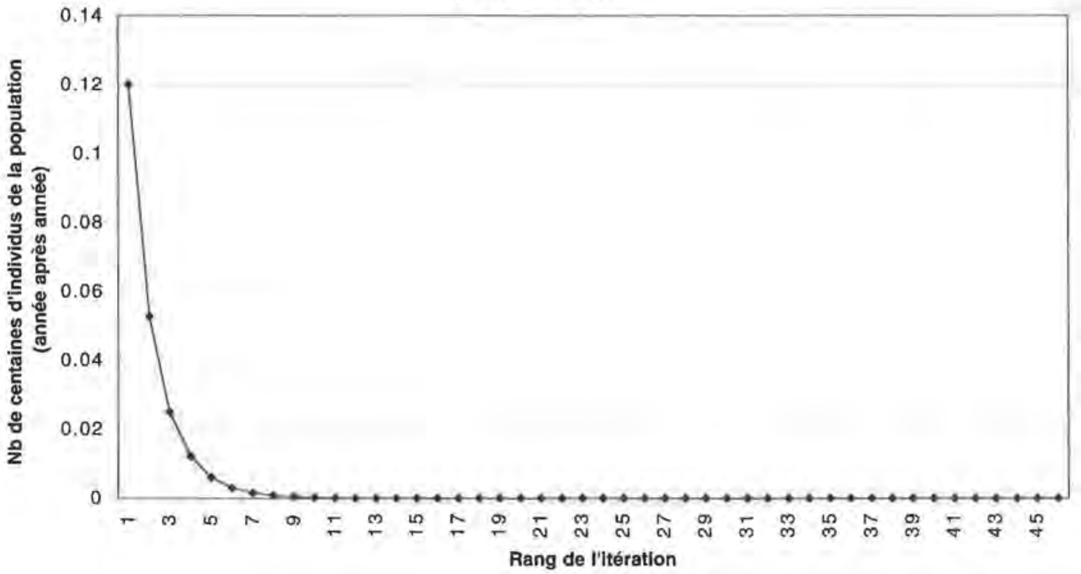
Ceci s'appelle une **ITÉRATION**.

a = 0.5

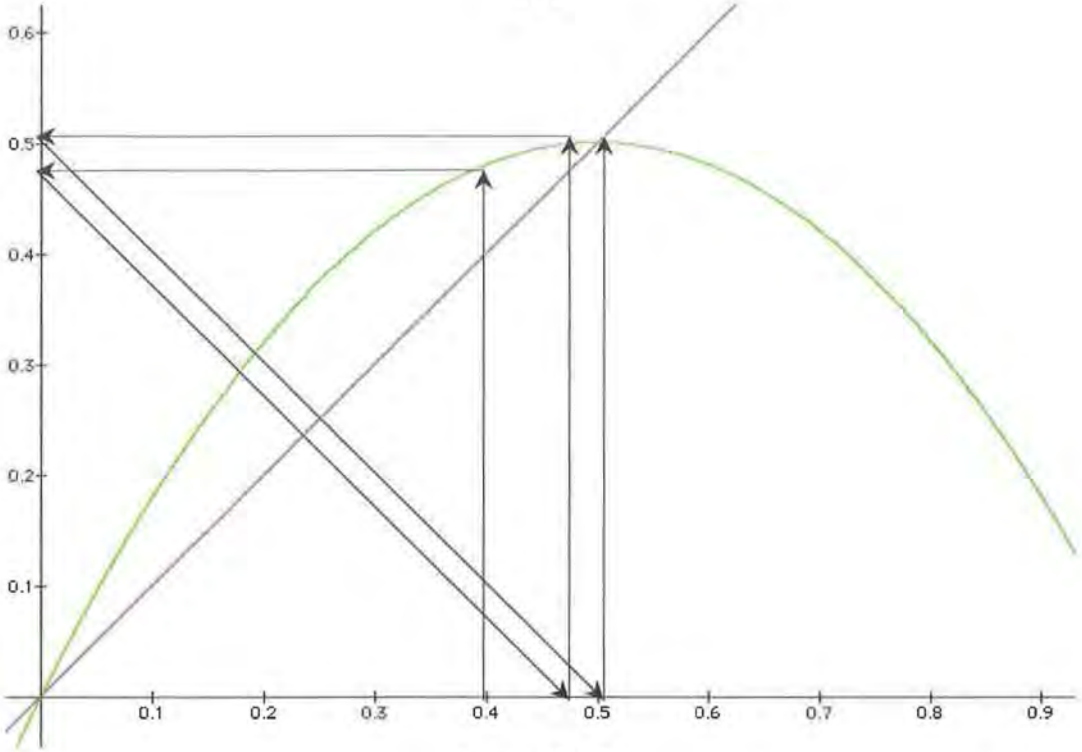


attracteur: (0; 0)

y = 0.5x – 0.5xx

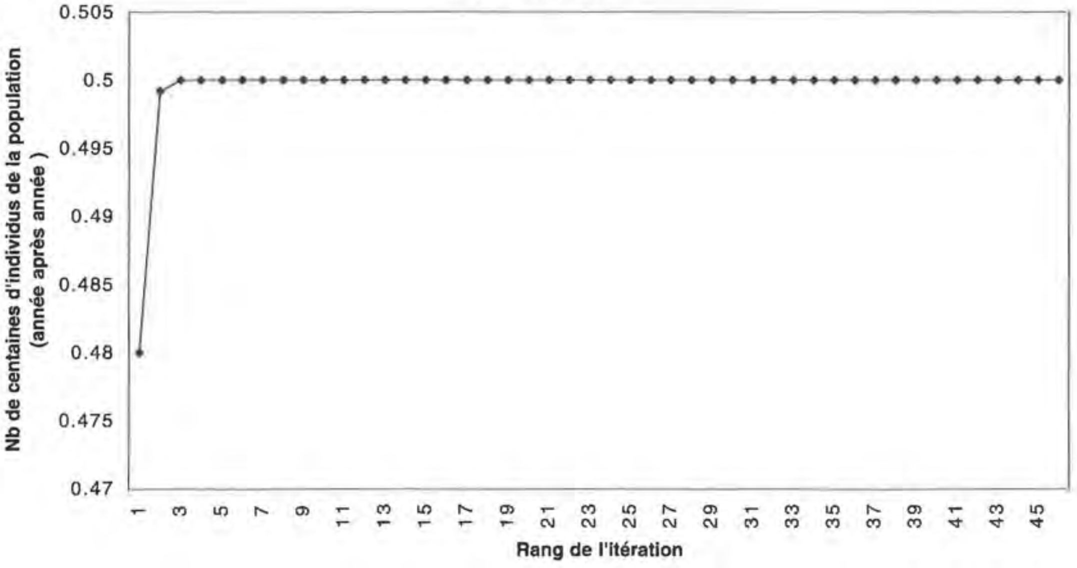


Convergence vers 0; extinction de la population a = 2



attracteur (0.5, 0.5)

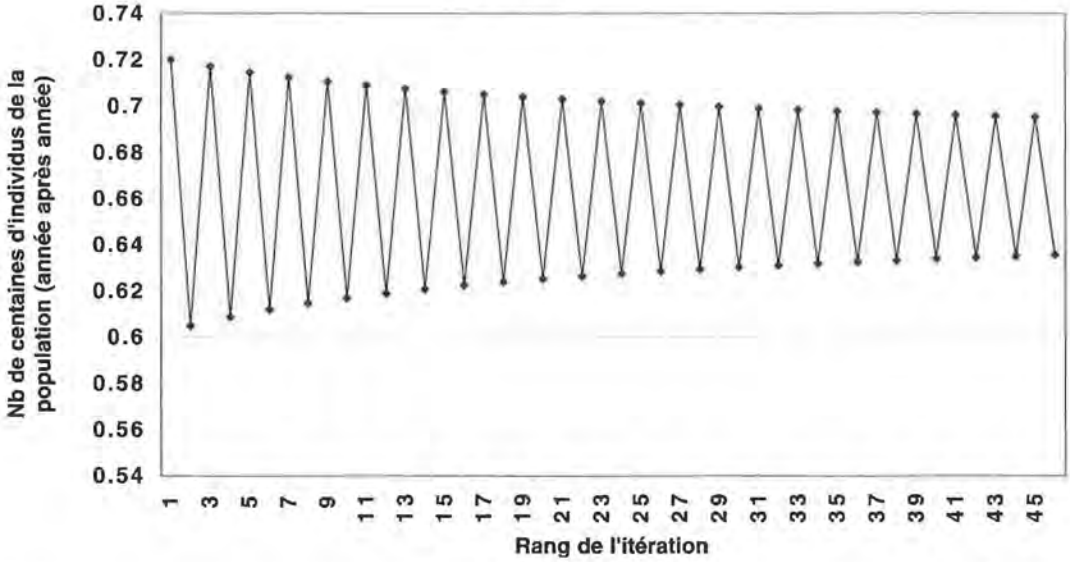
y = 2x – 2xx



Convergence vers une solution : 0.5 ; Population en équilibre qui se stabilise vers une constante

a = 3

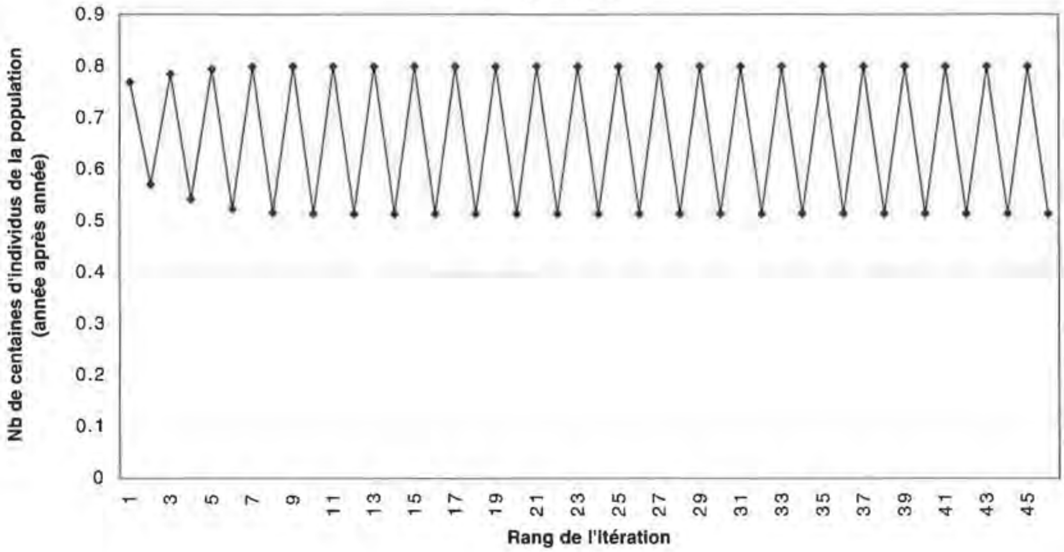
y = 3x – 3xx



Convergence lente vers une solution: 0.666...; Progression en douceur de la population vers un équilibre stable

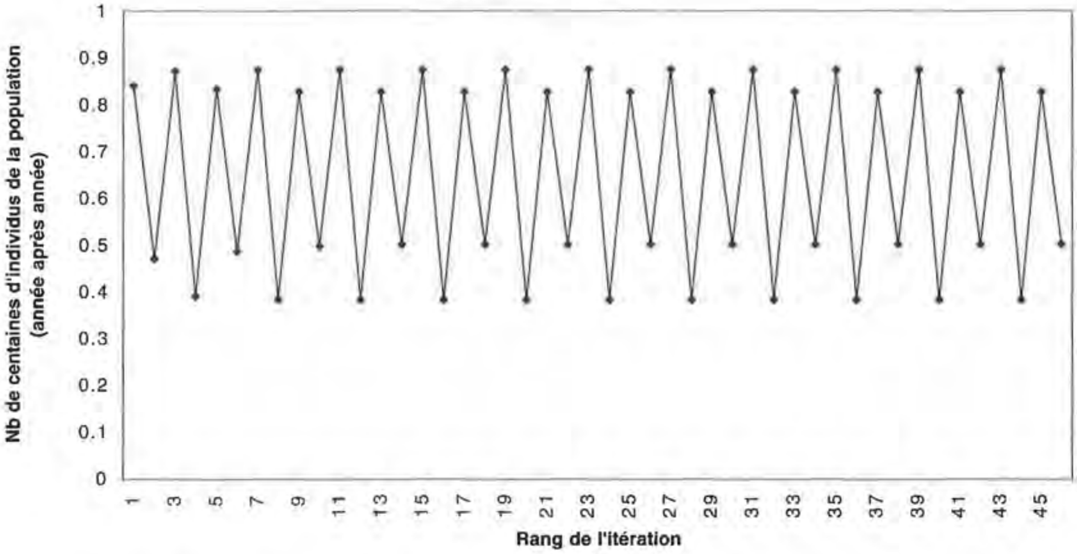
a = 3.2

y = 3.2x – 3.2xx



Convergence vers deux solutions: 0.799... 0.513...; Alternance de deux quantités de populations en équilibre stable et constant a = 3.5

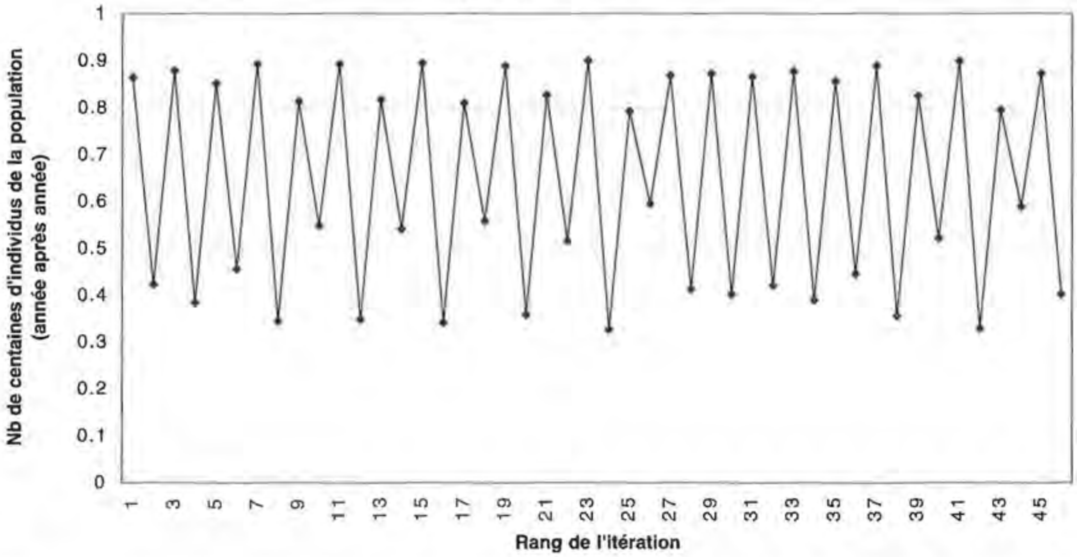
y = 3.5x – 3.5xx



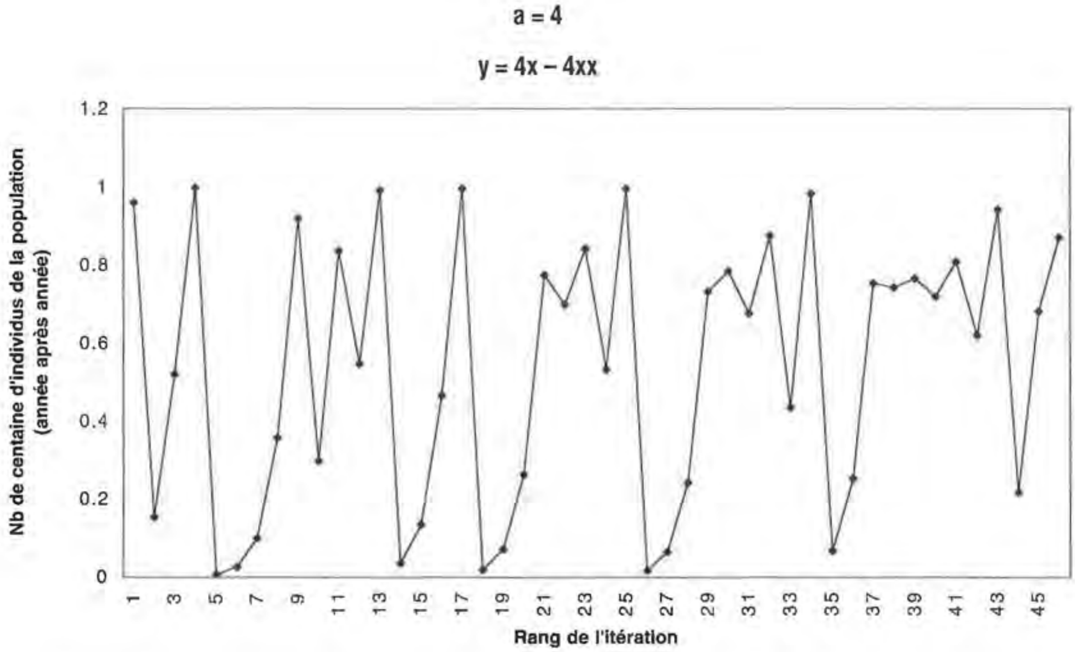
Convergence vers quatre solutions: 0.875... 0.826... 0.500... 0.382...; Cycle de quatre quantités de populations en équilibre stable et constant

a = 3.6

y = 3.6x – 3.6xx

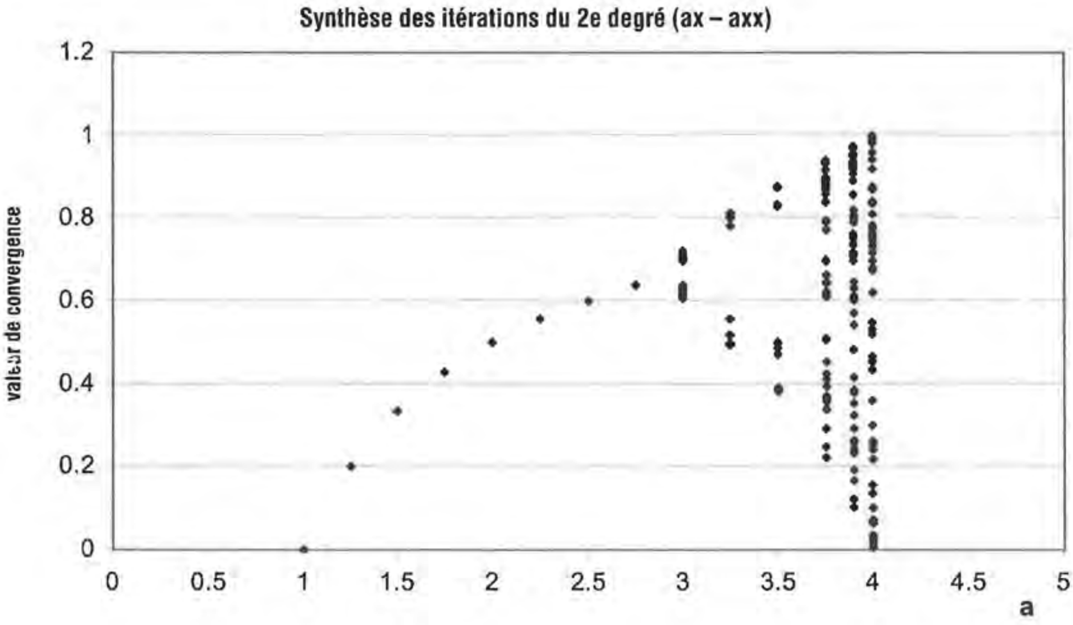


Convergence chaotique comprise entre une limite supérieure (liée aux coordonnées du sommet de la courbe) et une limite inférieure: infinité de solutions?
Variation quantitative imprévisible de la population, bornée par un maximum et un minimum



Convergence chaotique comprise entre la limite supérieur 1 et la limite inférieur 0: infinité de solutions?
Variation quantitative imprévisible de la population, bornée par le maximum 1 et le minimum 0

Résumé



Déduction

Grâce à cette simulation, nous pouvons déduire que les espèces animales se reproduisent selon différents modes :

Certaines convergent vers zéro (extinction de la population).
Ex : Panda géant

Certaines convergent vers une valeur unique (stables).
Ex : Chauve-souris

Certaines ont un cycle de 2 ou 4 ou 8 valeurs (en boucle).
Ex : «Années à campagnols»

Certains sont chaotiques, (imprévisibles) :
Ex : «Année à guêpes»

Certains divergent vers l'infini («explosion» de la population)
Ex : Criquet migrateur

Ces différences sont dues à la nourriture, au climat, aux épidémies, à la fertilité des espèces.

Conclusion

Avec les graphes que nous avons faits, nous pouvons prédire la reproduction animale, jusqu'à un certain point.

Parce que depuis une certaine valeur de «a» cela devient chaotique et nous ne pouvons plus déduire le nombre de naissances animales de la population de l'année suivante, tellement il y a de possibilités.

Commentaire

On a représenté ici qu'une petite partie des diagrammes réalisés chaque fois: «carte du premier retour» et relation de la valeur de x en fonction de n.

Les valeurs de a considérées sont: 0.5 et 1 (convergence vers 0); 2 (convergence croissante vers 0,5); 2,7 (convergence alternée vers 0.629...) ; 3 (convergence alternée lente vers 0.666...);

Pour a = 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 on a une oscillation entre deux valeurs d'attraction. Un problème de désignation apparaît; peut-on parler de convergence?

Pour a = 3.5 la période a doublé.

Avec a = 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 et 4 apparations de comportement bizzare.

Les outils à disposition ne permettent pas de voir des résurgences de cas périodiques.

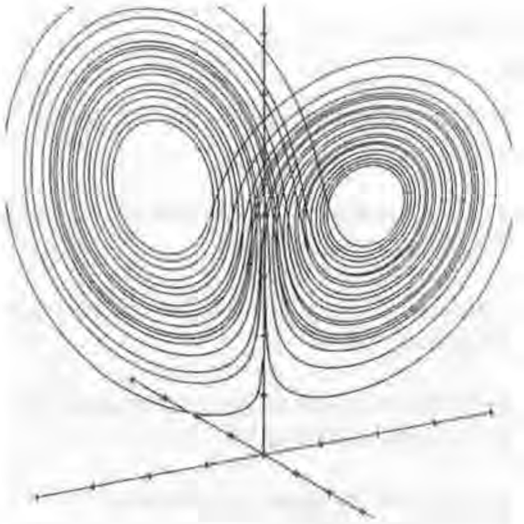
Compléments théoriques

Chaos

Selon L. Nottale, on peut définir le chaos dynamique comme le comportement aléatoire se produisant dans certains systèmes déterministes, donc rien à voir avec le sens usuel du mot chaos, confusion, désordre, absence de loi. Le chaos est une propriété de certains systèmes déterministes, lesquels sont bien décrits par des lois.

C'est H. Poincaré qui découvrit qu'« un système décrit par des lois déterministes peut avoir un comportement relevant du hasard ». Le chaos se caractérise par une haute sensibilité aux conditions initiales. C'est « l'effet papillon » découvert en 1963 par le météorologue E. Lorenz. L'écart final peut atteindre rapidement des proportions énormes. Un système chaotique est donc limité par un horizon temporel de prédictibilité. Une prédiction à long terme est illusoire et une prédiction à court terme s'exprimera à l'aide de probabilités. C'est ce qui fait que l'on peut parler d'ordre dans le chaos. Le climat est un système chaotique, et l'on connaît l'imprédictibilité des prévisions météorologiques à long terme. Par contre on peut davantage se fier aux prévisions à court terme, mais la sensibilité aux conditions initiales du climat ne permet pas d'assurer une prévision météorologique certaine, on recourt alors à une prédiction en termes de probabilité.

Un système chaotique évolue toujours vers son attracteur (parfois qualifié d'étrange). De tels attracteurs sont souvent fractals, comme l'attracteur étrange fractal de E. Lorenz (Voir le graphique). Le climat est un système chaotique. Sa convergence correspond à un processus de convection atmosphérique qui produit au hasard, des successions de différents types de climat relativement similaires, évitant les changements climatiques extrêmes.



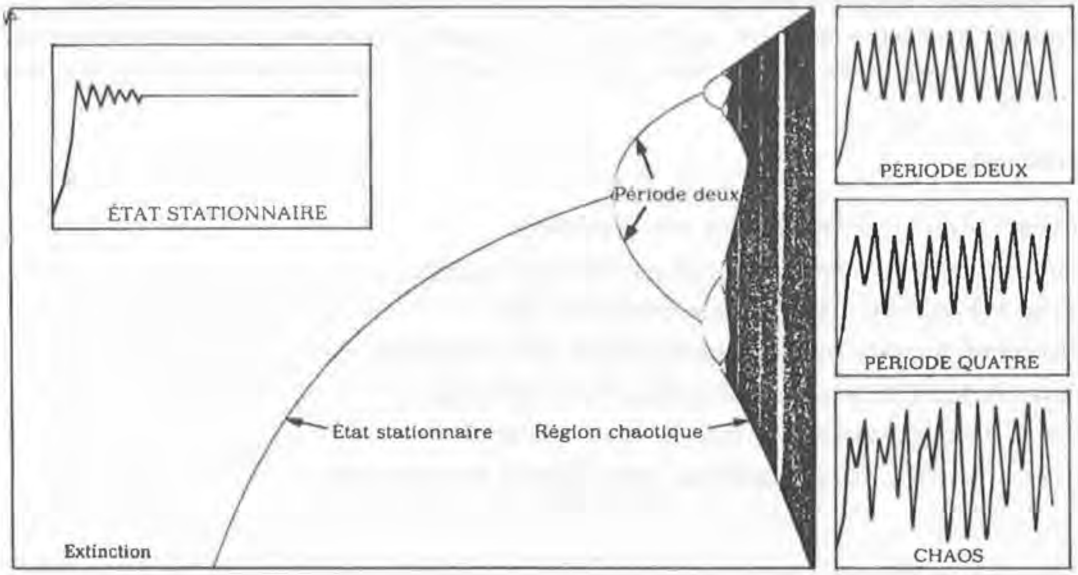
Historique de la science du chaos

La fonction **y = a x (1 – x)** (pour les valeurs de a comprises entre 0 et 4) est nommée **fonction logistique** par les biologistes. Il s'agit d'un modèle de croissance de population qui est chaotique pour certaines valeurs de **a**.

En fait, c'est environ à partir de la valeur a = 3,57 que se produit une bifurcation entre deux dynamiques très différentes (Lehning, 2000).

C'est Robert May, biologiste américain, qui découvre les bifurcations (voir le graphique) ainsi que la sensibilité aux conditions initiales de la **fonction logistique**. Une toute petite variation des paramètres a ou **x** produisent des explosions démographiques de populations ou des extinctions massives, d'où la difficulté de faire des pronostics à long terme concernant l'évolution démographique d'une population.

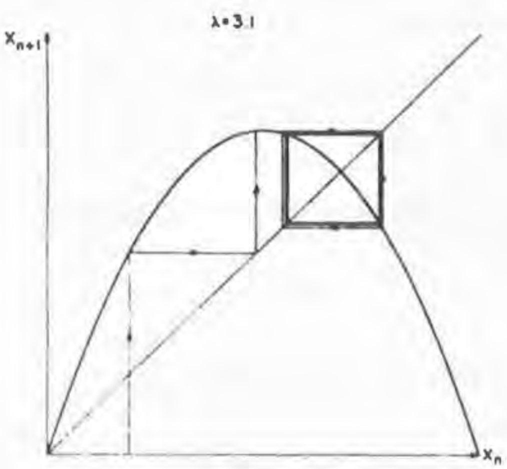
La formule de la **fonction logistique** correspond à une « virtualité écologique » plutôt qu'à une « réalité biologique ». L'informatique permet de jouer avec les paramètres de la formule

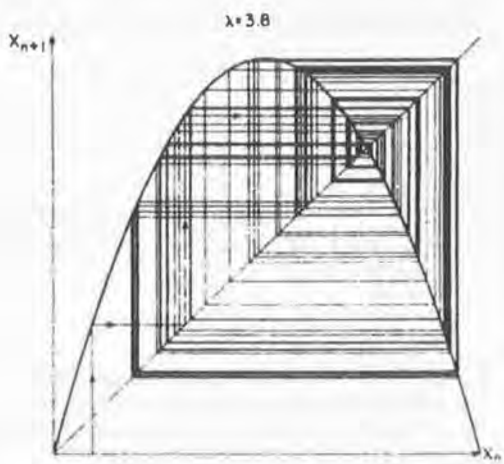


afin de découvrir la nature de l'évolution de la population en interaction avec son environnement.

C'est une simulation de la réalité d'une population (la biocénose) se développant dans un habitat (le biotope) dont les ressources alimentaires (l'énergie) sont naturellement limitées.

C'est Mitchell Feigenbaum, mathématicien américain, qui découvre et explore le chaos au moyen de la fonction logistique. Il décrit le chaos qui succède aux bifurcations, dans lequel il découvre quelques éléments d'ordre comme les attracteurs étranges. Il démontre aussi que tout système chaotique converge vers son attracteur (voir graphiques).





Feigenbaum a élaboré la théorie du chaos qui présentait pour la première fois la transition d'un comportement périodique régulier vers le chaos. Elle nous enseigne aujourd'hui comment des systèmes simples, telle que la fonction logistique, peuvent avoir des comportements imprévisibles.

Références

Gleick, J. (1987). *La théorie du chaos.* Paris: Flammarion.

Nottale, L. (1998). *La relativité dans tous ses états.* Paris: Hachette.

Bergé, P. & t al. (1997). *Des rythmes au chaos.* Paris: Opus.

Mandelbrot, B. (1997). *Fractales, hasard et finance.* Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1968). *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion.

Bak, B. (1996). *Quand la nature s'organise.* Paris: Flammarion.

Lehning, H. (2000). *Nouvelles tendances: chaos.* Tangente, Hors série n°10.

Cryptarithmes

Voici les solutions des quatre cryptarithmes[1] de M. Bernard Lamirel, Dijon, proposés dans notre numéro 202 (p. 11 et 41):

a)

```
   C U A T R O
   C U A T R O
   C U A T R O
   C U A T R O
 + C U A T R O
 -------------
   V E I N T E
```

a')

```
     C I N C O
     C I N C O
     C I N C O
 +   C I N C O
 -------------
   V E I N T E
```

Il n'y a qu'une seule solution pour la première addition (ou multiplication par 5) en espagnol. On se convainc vite que **E** est 5, que **C** est 1 et que **A** ne peut être que 0.

a)

```
   1 7 0 4 6 9
   1 7 0 4 6 9
   1 7 0 4 6 9
   1 7 0 4 6 9
 + 1 7 0 4 6 9
 -------------
   8 5 2 3 4 5
```

Il n'y a pas de solution pour la deuxième, en raison des colonnes des **I** et des **N**.

1. Les cryptarithmes sont des opérations arithmétiques à reconstituer selon les règles suivantes:
   – chaque chiffre est représenté par une même lettre,
   – deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,
   – aucun nombre ne commence par le chiffre 0.

b)

	D	E	U	X
	D	E	U	X
	D	E	U	X
+	D	E	U	X
	H	U	I	T

En français, il y a 9 solutions. Pour les trouver, il faut constater que **D** ne peut être que 1 ou 2, puis essayer les différentes valeurs de **U**, ce qui donne, dans cet ordre:

1507	**1508**	**1324**	**1824**	**1835**	**1839**	**1492**	**1493**	**2176**
...	...	...	...	...	...	...	...	...
6028	**6032**	**5296**	**7296**	**7340**	**7356**	**5968**	**5972**	**8704**

c)

		D	U	E
		D	U	E
		D	U	E
+		D	U	E
	O	T	T	O

En italien, les trois solutions sont assez faciles à trouver car **O** ne peut être que 2 (pair et inférieur à 4). Il n'y a donc que deux possibilités pour **E**: 3 et 8. Il en découle que **T** est impair. En outre, comme **D** ne peut être que 5, 6 ou 7, il ne reste qu'une trentaine d'essais à conduire:

693	**638**	**748**
...	...	...
2772	**2552**	**2992**

Entre temps, M. Bernard Lamirel nous a encore envoyé quelques-unes de ses inventions:

d)

			B	O	N
		P	I	E	D
			B	O	N
+		O	E	I	L
	P	E	C	H	E

e)

		V	E	N	I	R	E
		V	I	D	E	R	E
			S	C	I	R	E
		A	U	D	I	R	E
+		D	U	C	E	R	E
	V	I	N	C	E	R	E

La première a plusieurs solutions symétriques, il n'y en a qu'une seule pour la deuxième. Dans tous les cas, il faut de l'ordre et de la rigueur pour ces jolies recherches logiques.

(Solutions dans le prochain numéro)

Une séquence d'activités pour construire la droite numérique au cycle 10/12

Pierre Stegen,
Serge Chatin[1], Jean-Pierre Distrée[2],
Raymond Kristof[3] et Bernard Spineux[4]
Equipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques
Service de Didactique générale (ULg)

*Dans le numéro précédent[5], nous avons évoqué les difficultés rencontrées par des élèves dans l'utilisation de la droite numérique. A cette occasion, nous nous sommes interrogés sur la manière dont les élèves rencontraient ce référent. Pour illustrer cette réflexion, nous avons présenté une activité «**Sérier, comparer des nombres à virgule**». Celle-ci peut être utilisée par l'enseignant du degré supérieur pour vérifier le degré de maîtrise de ce référent par les élèves.*

Nos allons cette fois vous présenter une séquence d'activités[6] dont l'objectif est de permettre aux élèves de construire personnellement leur propre droite numérique. Dans un premier temps, nous présenterons le canevas général de l'activité tel qu'il a été proposé aux enseignants de l'équipe de recherche collaborative. Dans un second temps, nous détaillerons des éléments mis en évidence par les enseignants lors de l'analyse a posteriori des activités expérimentées. Ces éléments sont regroupés sous l'intitulé «analyse a priori» qui suit la présentation du canevas de la séquence.

Dans le prochain numéro, nous détaillerons une suite d'activités destinées à aider les élèves du cycle 8/10 à construire le passage de la bandelette numérique à la droite numérique.

Activité 1: construire et utiliser une droite numérique

Objectif:

Construire et utiliser une droite graduée pour situer des nombres entiers.

Organisation:

Phase de travail individuel ou en duo.

Matériel:

Une demi-droite tracée au tableau sur laquelle les nombres 0, 1 et 2 sont déjà placés.

Chaque élève (ou chaque duo d'élèves) reçoit une bandelette de papier sur laquelle la même droite numérique est représentée.

1. Ecole communale des Champs de Grâce-Hollogne
2. Ecole communale de Comblain-la-Tour
3. Ecole communale de Bierset
4. Ecole communale de Villers-aux-Tours
5. P. Stegen, M. Docquier, A. Di Fabrizio et F. Renier (2001). Produire ou reproduire des compétences mathématiques? L'exemple de la droite numérique. *Ecoles des années 2000*, repris dans *Math-Ecole* no 202, juin 2002, pp 32-41
6. Cette séquence est une adaptation de celle développée par ERMEL (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2*. Paris : Hatier.

Consignes:

- Demander aux élèves de placer, sur leur droite numérique, les traits correspondant aux nombres 3 et 4 *sans mesurer*.

Mise en commun:

- Confronter les différentes productions des élèves au départ de la question: «comment avez-vous procédé?»
- Valider les démarches appropriées (pliage, utilisation du compas, ...).

Possibilité de prolongement:

Pour vérifier le degré de compréhension de ses élèves, l'enseignant peut donner comme consigne complémentaire de situer, sur la droite numérique représentée sur le tableau noir, les nombres 3 et 4.

Analyse a priori

Cette situation oblige les élèves à recourir au pliage pour situer précisément des nombres entiers sur une droite numérique. Cette stratégie n'est pas habituelle pour eux; ils n'y pensent pas spontanément. Dans un premier temps, il est vraiment important de laisser les élèves chercher seuls (ou à deux) et de ne pas intervenir pour valider ou invalider des stratégies d'élèves (tout en maintenant l'interdiction du recours au mesurage). C'est lors de la phase de mise en commun que l'enseignant et les élèves doivent confronter la pertinence et la validité des démarches utilisées.

Pour faciliter l'organisation et la gestion de cette phase, il peut être plus intéressant de fonctionner comme suit:

- Dans un premier temps, demander aux élèves de travailler seuls pour situer le plus précisément possible les nombres 3 et 4;
- Dans un second temps, regrouper les élèves en duos et leur demander de confronter leur démarche et de se mettre d'accord sur une proposition.

Cette façon de procéder permet de diminuer le nombre de propositions d'élèves à gérer lors de la phase de mise en commun.

Au niveau des ***variables didactiques***[7] de cette situation, il convient de remarquer que le 0 n'est pas placé exactement au bord de la droite numérique. Les élèves doivent tenir compte de cette contrainte avant d'effectuer le pliage qui définit la valeur de l'intervalle à reporter pour situer 3 et 4.

Le choix des nombres à situer sur cette droite numérique définit également les variables didactiques de cette situation. Dans la description de l'activité, nous proposons de placer les nombres 3 et 4. Il est possible de modifier ces variables didactiques pour différencier les tâches des élèves en les adaptant

7. Pour rappel, une variable didactique se définit comme un élément de la situation qui peut être modifié par l'enseignant. Cette modification a pour conséquence d'affecter la hiérarchie des stratégies de solutions que l'élève doit mettre en place.

à leur degré de maîtrise des compétences numériques. Ainsi, on peut demander à certains élèves de placer les nombres 3 et 4 et, à d'autres, les nombres 6 et 7 ou 8 et 9 ou, encore 4 et 9.

Même si cela peut paraître tentant, nous proposons à ce niveau de ne pas situer des nombres décimaux (du type 3,5 ou 4,5) afin de ne pas anticiper sur la suite des apprentissages. En effet, la séquence d'activités est construite sur la progression suivante: situer des nombres entiers, situer des fractions décimales puis seulement des nombres décimaux.

Si des élèves ont rapidement accompli cette consigne de placer les nombres 3 et 4, l'enseignant peut leur demander de placer des nombres plus grands comme 5 et 8 par exemple de manière à gérer au mieux les rythmes de travail de ses élèves.

L'***activité de prolongement*** oblige les élèves à changer de stratégies; ici, il n'est pas question de plier le tableau pour reporter la valeur d'un intervalle. D'autres stratégies doivent être proposées par les élèves comme l'utilisation d'une bandelette étalon, d'un compas...

Activité 2: construire et utiliser une droite numérique (suite)

Objectif:

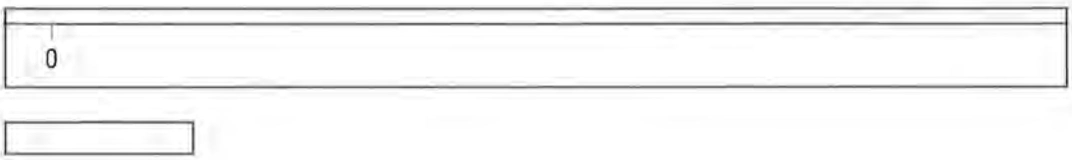
Construire une graduation en reportant, un dixième de l'unité.

Organisation: phase de travail en duo.

Matériel:

Chaque duo reçoit:

- une bandelette de 2 mètres sur 3 ou 4 cm (un morceau de rouleau de calculatrice ou des bandes de papier listing de 4 cm de large) sur laquelle le zéro est déjà placé;
- une bandelette (étalon) de 5 cm sur 1 cm.



Consigne:

Demander aux élèves de situer 1 sur cette droite numérique en précisant que la longueur de la petite bandelette vaut 1/10. Placer cette dernière au tableau en écrivant à côté sa valeur.

Mise en commun:

La phase de mise en commun doit permettre de faire apparaître que pour placer le nombre 1, il s'agit de reporter dix fois la petite bande (dans le sens de la longueur) car dans une unité, il y a 10 dixièmes.

Possibilité de prolongement:

Demander aux mêmes duos de placer le nombre 2.

Analyse a priori

Pour situer le nombre 1 sur la droite numérique, les élèves doivent, cette fois, reporter 10 fois la valeur de l'étalon fixée à 1/10.

Les ***variables didactiques*** sont définies par ces deux nombres (1 et 1/10). Il importe de bien présenter le dixième aux élèves en le mettant dans le sens de la longueur (en l'affichant au tableau, par exemple). Lors de la phase d'expérimentation, il est apparu que certains élèves reportaient dix fois la hauteur de la bandelette étalon.

A nouveau, il convient ici aussi de laisser les élèves travailler seuls et d'observer les démarches qu'ils utilisent en ne les corrigeant pas (c'est le rôle de la phase de mise en commun). Certains risquent de confondre le dixième avec l'unité: ils ne reportent qu'une fois le dixième. La plupart des élèves reportent 10 fois le dixième pour obtenir l'unité. On note aussi, parfois, certaines stratégies plus économiques et plus expertes: des élèves reportent 5 fois le dixième puis reportent une seconde fois cet intervalle de 5/10.

Lors de la ***phase de mise en commun***, les élèves explicitent leurs démarches (comment avez-vous procédé ?»). Il est important à ce moment de leur demander de mathématiser leurs manipulations au travers d'écriture du type « $1 = 10 \times 1/10$ ou $1 = (5 \times 1/10) \times 2$ » et de noter ces mathématisations au tableau. Elles servent de support au raisonnement des élèves et permettent de leur faire prendre conscience des possibilités de communication offertes par le formalisme mathématique.

Si nous recommandons à l'enseignant de ne pas intervenir au cours de la phase de recherche des élèves, il importe pour lui de bien repérer les démarches utilisées par les élèves et l'ordre dans lequel il va demander aux élèves de venir expliquer leur démarche.

La validation se fait par comparaison des différentes productions des élèves (affichage au tableau).

Au terme de cette première phase de mise en commun, l'enseignant demande aux élèves de placer le nombre 2 sur cette droite. Cela lui permet d'analyser le degré d'expertise des procédures développées par les élèves: vont-ils à nouveau reporter 10 fois le dixième au départ du nombre 1 pour situer 2 (procédure la plus simple mais la moins économique) ou, au contraire, vont-ils directement reporter la mesure de l'écart entre 0 et 1, par pliage, pour situer 2 ? Si cette dernière stratégie est utilisée par les élèves, il faut à nouveau noter que le 0 n'est pas situé au début de la bandelette; cela risque d'induire les élèves en erreur dans le travail de pliage et de report de la valeur de l'intervalle compris entre 0 et 1.

Activité 3: utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux dixièmes)

Objectif:

Placer des fractions décimales (exprimées en dixièmes) sur la droite graduée construite lors de l'activité précédente.

Organisation:

Phase de travail en duo (cf. activité 2).

Matériel:

Le matériel est identique à celui de la phase précédente sauf que cette fois les élèves ont gradué leur droite et que les nombres 0, 1 et 2 sont placés.

Consignes:

Placer sur la droite la fraction 8/10.
Placer sur la droite la fraction 25/10.

Mise en commun:

Lors de la phase en commun, demander aux élèves de justifier leurs démarches et mathématiser les démarches utilisées au travers des expressions suivantes:

$8/10 = 1 - 2/10 = 8 \times 1/10$

$25/10 = 2 + 5/10 = 3 - 5/10 = 25 \times 1/10$

Analyse a priori

Il s'agit cette fois de placer des fractions décimales sur la droite numérique. La technique reste identique; les élèves ont à leur disposition la bandelette étalon valant un dixième. Toutefois, le choix des nombres à placer 8/10 et 25/10 n'est pas le fruit du hasard et il importe, pour l'enseignant de bien observer les stratégies développées par ses élèves. Pour placer 8/10, les élèves ont le choix de reporter 8 fois la bandelette étalon ou de partir d'une unité et de soustraire 2 dixièmes.

Pour 25/10, les stratégies sont encore plus diversifiées: il se peut que des élèves procèdent en pliant en deux l'intervalle existant entre 2 et 3 ou, au contraire, ils reportent 5 fois la bandelette 1/10 entre 2 et 3. Lors de la phase d'expérimentation, on a même vu un élève qui reportait trois fois, par pliage, la valeur de l'intervalle compris entre 0 et 8/10 puis ajoutait un dixième.

Dans cette perspective, il est sans doute plus intéressant de procéder à une phase de mise en commun après avoir placé 8/10, puis de proposer de placer 25/10.

Lors de ces phases de mise en commun, il est important à nouveau de mathématiser les stratégies des élèves sous la forme des équivalences reprises dans la description du canevas de l'activité.

Activité 4: utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux centièmes)

Objectif:

Placer des fractions décimales (exprimées en centièmes) sur la droite graduée construite lors de l'activité précédente.

Organisation:

Cf. phase précédente.

Matériel:

Cf. phase précédente.

Consigne:

Vous avez trouvé des moyens pour placer exactement 8/10 et 25/10. Placez maintenant exactement 135/100.

Mise en commun

Faire préciser par les élèves les différentes démarches qu'ils ont utilisées et les comparer.

Prolongation:

Pour s'assurer de la bonne compréhension des élèves, on peut leur demander de placer des fractions telles que 205/100 et 40/100 à l'aide des instruments ainsi construits.

Analyse a priori

Toujours au départ du même matériel, les élèves doivent cette fois positionner une fraction décimale exprimée en centièmes. Le matériel à leur disposition ne leur permet pas de réaliser cette tâche; la bandelette étalon représente un dixième. Toutefois, la variable didactique « placer le nombre 135/100 » a été définie de manière à rendre possible cette tâche au départ de deux stratégies différentes

- établir que 135/100 se trouve juste au milieu de l'intervalle compris entre 13/10 et 14/10. L'élève doit donc repérer sur la droite numérique l'intervalle compris entre les bornes 13 dixième et 14 dixièmes et partager cet intervalle en deux. Pour effectuer ce positionnement, il doit avoir établi que 13/10 est égal à 130/100 et 14/10 à 140/100.
- Plier en deux, la bandelette étalon, de manière à obtenir 5/100 (et établir ainsi que 1/10 = 10/100 et que 1/10 : 2 = 5/100) puis positionner cette demi bandelette au départ de 13/10 ou de 14/10 après avoir également établi que 13/10 est égal à 130/100 et 14/10 à 140/100.

Cette démarche de positionnement est très importante. Elle permet aux élèves de prendre conscience de ruptures existant entre les entiers et les rationnels:

- ***l'idée de succession***: un naturel a un successeur (le successeur de « 7 » est « 8 »). Cette idée n'a évidemment pas de sens pour les décimaux. Ainsi, quel est le successeur de « 21/10 » ? « 22/10 » ou « 211/100 » ?
- ***les problèmes d'intercalation***: entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il existe une infinité de décimaux.

Lors des phases de mise en commun qui suivent le positionnement de 8/10 et de 25/10, il importe de mathématiser les différentes relations construites par les élèves sous la forme

1 = 100/100

1/10 = 10/100

1/10 : 2 = 5/100

135/100 = 1 + 35/100 = 13/10 + 5/100 = 14/10 – 5/100 ...

35/100 = 4/10 – 5/100

L'activité de prolongement permet de conduire aux nouvelles égalités suivantes:

205/100 = 2 + 5/100

40/100 = 4/10

Au terme de ces activités, l'enseignant peut institutionnaliser le savoir ainsi construit sous la forme suivante:

Dans une unité, il y a 10 dixièmes: 1 = 10/10

Dans une unité, il y a 100 centièmes: 1 = 100/100

Dans un dixième, il y a 10 centièmes: 1/10 = 10/100

A l'issue de cette étape, l'enseignant demande aux élèves de tracer sur la droite graduée des élèves tous les dixièmes compris entre 0 et 2 et de graduer, à l'aide d'une latte, l'étalon d'un dixième en 10 centièmes.

A ce moment, les élèves ont construit un référent qui va leur permettre de situer des fractions décimales et des nombres décimaux.

Activité 5: placer des nombres décimaux sur une droite numérique

Objectifs:

Etablir un lien entre écriture en fractions décimales et écritures à virgule.

Savoir situer des nombres décimaux sur une graduation, les décomposer en somme de partie entière et de fractions décimales.

Passer de l'écriture à virgule à des écritures à l'aide de fractions décimales et inversement.

Connaître la signification des chiffres dans une écriture à virgule, l'utiliser pour lire des nombres décimaux.

Organisation:

Phase de travail individuel puis en duo.

Matériel:

Les élèves disposent de leur grande bande graduée en dixièmes et d'une bande d'un dixième graduée en centièmes (construites précédemment).

Consignes:

- Demander aux élèves de placer 1,7 sur cette graduation (d'abord individuellement puis comparaison en duo).
- En fonction des réponses produites par les élèves, leur demander de placer 2,03 et 1,235.

Mise en commun

La mise en commun doit permettre:

- d'utiliser la notation fractionnaire pour donner du sens aux chiffres des écriture à virgule et pour traduire les relations entre le millième et l'unité; le centième et l'unité, le dixièmes et l'unité:

  1,7 = 1 + 7/10
  2,03 = 2 + 3/100
  1,235 = 1 + 235/1000
  1,235 = 1 + 2/10 + 3/100 + 5/1000
  1 = 1000/1000
  1 = 100/100;

- de donner du sens au terme millième;
- de donner un sens précis à la lecture des écritures à virgule («deux unités trois centièmes» et non «deux virgule zéro trois»).

Prolongements:

Les élèves reçoivent le tableau ci-dessus qu'ils vont devoir compléter ligne par ligne. Le maître précise que la partie entière d'un nombre est le nombre d'unités contenues dans ce nombre et qu'une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000...

Ecriture avec les mots unité, dixième, centième, millième	Ecriture à virgule	Somme de la partie entière et de la fraction décimale	Fraction décimale
	2,22		
Sept centièmes			
		203 + 8/1000	
			275/100
	92,120		

Autres exercices de prolongement

1. Ecrire avec une virgule les nombres suivants: 3/100; 23/10; 75/100; 108/100; 1/1000; 1/2...
2. Ecrire avec une fraction décimale: 12,7; 0,7; 1,03; 63,142...
3. Ecrire en utilisant les mots dixième, centième, millième: 9,05; 70,103; 502,25; 0,5; 0,75; 0,001...

4. Ecrire à l'aide d'une somme comportant la partie entière et une ou plusieurs fractions décimales: 2,27; 1,5; 91,25; 632,50; 632,05...

5. Jeux de portrait...
   J'ai un dixième de plus que 2,35; qui suis-je?
   J'ai un centième de moins que 142,375; qui suis-je?

Analyse a priori

Il s'agit donc cette fois pour les élèves de placer des nombres décimaux sur la droite graduée. L'objectif est de les amener à établir des liens entre écriture fractionnaire et écriture décimale d'un rationnel. Ce passage peut être source d'erreurs:

– ainsi, certains élèves peuvent interpréter 1,7 comme 1,07 (soit la décomposition suivante: 1 + 7/100).

– D'autres traduiront 1,235 par 3,35 (soit la décomposition 1 + 235/100).

Pour placer ce dernier nombre, les élèves doivent adopter une stratégie semblable à celle développée précédemment lorsqu'il s'agissait de passer des dixièmes aux centièmes. Ce travail permet de poursuivre la réflexion sur les phénomènes d'intercalation définis précédemment: 1,235 = 1 + 2/10 + 3/100 + 5/1000. Pour trouver 5/1000, on partage 1/100 en deux parties égales.

Toutes ces manipulations doivent être soutenues par une écriture mathématique au tableau. Au terme de cette activité, la première possibilité de prolongement permet de systématiser cette mise en relation entre écriture fractionnaire et écriture décimale.

La correction doit se faire ligne par ligne et faire apparaître, si possible, que dans certaines cases, on peut obtenir plusieurs réponses.

Au terme de cette activité, l'enseignant peut procéder à une institutionnalisation du savoir sous la forme:

$$2,15 = 2 + 15/100 = 2 + 1/10 + 5/100 = 215/100$$

2	,	15
partie entière de 2,15		partie décimale de 2,15

Notes de lecture

FORMES ET MOUVEMENTS
Perspectives pour l'enseignement de la géométrie *

Luc Lismont et Nicolas Rouche, coordinateurs CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) B-1400 Nivelles. 2001
(format A4, 316 pages)

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER
Un aspect de la géométrie de la maternelle à 18 ans *

Luc Lismont et Nicolas Rouche, coordinateurs CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) B-1400 Nivelles. 2001
(format A4, 402 pages)

Dans leur collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, nos collègues du CREM viennent de publier deux gros ouvrages, qui complètent opportunément leur précédente publication de 1995, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, déjà présentée dans les colonnes de *Math-Ecole* et fort appréciée de ses lecteurs.

L'esprit et l'ouverture sont maintenus, comme le signale une remarque en première page de chacun de ces livres: «Cet ouvrage a été conçu comme source d'idées et base de discussion. Souhaitons que personne n'en fasse un dogme».

* diffusion en Suisse par *Math-Ecole*, voir page 3 de couverture

La géométrie figure en bonne place dans nos moyens d'enseignement, dès l'école primaire. Elle y a acquis droit de cité et plus personne ne conteste son existence dans les programmes de mathématiques. Mais, paradoxalement, ses finalités restent encore floues et ses contenus fluctuent sensiblement. Il faudra encore du temps et de nombreux échanges pour que chacun sache vraiment pourquoi on enseigne la géométrie et quelle est son importance dans la formation de l'élève. Les deux dernière publications du CREM sont, incontestablement, des repères bien étayés pour ce débat.

Le premier des ouvrages, ***Formes et mouvements,*** est organisé en six parties, dans l'optique d'un enseignement en spirale où chaque notion, chaque théorie, vue une première fois à un niveau élémentaire, est reprise et approfondie plus tard, à des niveaux plus élevés et dans des contextes de plus en plus élargis pour arriver à maturité en établissant les connexions naturelles avec les notions et théories voisines.

La première partie examine les *origines de la géométrie* dans les perceptions et les mouvements (on y retrouve l'essentiel de la conférence donnée par Nicolas Rouche à Neuchâtel, lors de la fête pour le 200ème numéro de *Math-Ecole*). Elle présente la formation des concepts à partir des objets géométriques et de leur constitution mentale, elle examine ensuite les étapes de leur conceptualisation, des plus simples aux plus complexes, puis elle aborde le stade de l'inférence et de l'induction, jusqu'à la théorie, sans oublier que, «faire de la géométrie c'est aussi chercher».

La deuxième partie propose une *géométrie naturelle* à partir des premières implications évidentes issues des perceptions et actions quotidiennes pour arriver à quelques propriétés non évidentes de géométrie plane. Elle est construite à l'écart des contextes familiers, pour mettre en évidence la logique de cette géométrie intuitive et informelle capable de faire émerger les mêmes propriété que la géométrie axiomatique.

La troisième partie propose des *activités pour faire de la géométrie en classe à douze ans* selon deux thèmes d'activité: *assembler des figures* et *figures en mouvement*. Elle montre comment on peut éveiller la curiosité des élèves des premières années du secondaire et les amener à construire des éléments de théorie répondant à cette curiosité.

Après l'émergence de la géométrie, des perceptions et intuitions aux premières argumentations, les trois dernières parties de l'ouvrage sont consacrées à la présentation de trois fils conducteurs qui, pour les auteurs, semblent susceptibles d'inspirer un enseignement cohérent de la géométrie de l'école maternelle à la fin du secondaire, à savoir: les représentations des objets selon différentes perspectives; la séquence grandeurs-mesures-proportionnalité-vecteurs-transformations linéaires, et enfin l'orientation, depuis l'avant et l'arrière, le dessus et le dessous, la droite et la gauche en passant par les horloges et les tire-bouchons, jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

Le second ouvrage, ***Construire et représenter***, accompagne et illustre le précédent. Il propose des situations-problèmes, par leurs descriptions, leurs enjeux, le matériel nécessaire, des propositions de gestion, des réactions significatives relevées dans des classes expérimentales, des prolongements possibles et un regard sur l'avenir des notions abordées dans la suite du programme et pour la culture mathématique de l'élève.

Les auteurs partent du principe que les activités qui consistent à assembler, construire et représenter des objets nécessitent des connaissances géométriques, mais que, réciproquement, en assemblant, construisant et représentant, on acquiert de telles connaissances sur le tas.

La première partie de l'ouvrage propose aux enfants de deux ans et demi à dix ans, de modeler des objets, de créer et reconnaître des ombres, d'interpréter des photographies, d'assembler des cubes et de représenter ces assemblages, de construire des boîtes en carton, de dessiner des solides vus du dessus et de côté.

La deuxième partie propose des activités de même nature pour des élèves de dix à quinze ans, à un niveau plus avancé de complexité et avec de nouvelles exigences dans l'exécution. Elle débouche sur des notions de géométrie dans l'espace, de perspective cavalière, de géométrie affine plane (Thalès) et sur un aperçu relatif à la perspective en peinture.

La dernière partie s'adresse aux élèves de quinze à dix-huit ans, elle les initie à la géométrie affine de l'espace et aux sections coniques à travers des expériences d'ombres au soleil et la pratique des projections parallèles. Elle se termine par un chapitre réservé aux étudiants les plus avancés, qui les amène à expérimenter les ombres à la lampe, ce qui les fait faire un bout de chemin vers la géométrie projective et, en particulier le théorème de Desargues.

L'un comme l'autre, ces deux volumes ne sont pas destinés à être exploités de bout en bout par tous les lecteurs, qu'ils enseignent en maternelle, au primaire ou au secondaire. Avec les auteurs, nous pensons que chacun pourra y trouver matière à réaliser que l'apprentissage de la géométrie forme un tout cohérent de la prime enfance à l'âge adulte: ce qui se fait à un âge donné s'appuie sur des acquis antérieurs, tant psychomoteurs qu'intellectuels, et importe beaucoup pour ce qui est appris par la suite.

Destinataires: les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens, personnes s'intéressant aux questions d'épistémologie de la géométrie

Mots-clés: mathématiques, géométrie, enseignement de la géométrie, construction et représentation géométriques, épistémologie de la géométrie

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** (tarifs en page 2 de couverture).

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL ... (ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL ... (ex à Fr. 29.-)
Histoire de Maths, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Faites vos jeux! ACL ... (ex à Fr. 18.-)
La magie du calcul, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL ... (ex à Fr. 19.-)
Pliages et mathématiques, ACL ... (ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL ... (ex à Fr. 25.-)
100 défis mathématiques du «Monde», POLE ... (ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33) ... *(ex à Fr. 20.-)*
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS ... (ex à Fr. 30.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM ... (ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM ... (ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM ... (ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (*Tangente* HS 10) ... (ex à Fr. 20.-)

Problèmes de rallyes et concours:

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98) ... (ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00) ... (ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9) ... (ex à Fr. 18.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...) ... (ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...) ... (ex à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ... (ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ... (ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...) ... (ex à Fr. 16.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ...
Adresse (rue et numéro): ...
Code postal et localité: ... Tél.: ...
Date: ... Signature: ...

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à:
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à
Math-Ecole,
Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand,
2007 Neuchâtel

sommaire