MATH ECOLE

Tabeillon, Inn et loi de Benford

Ellipse, ovale, ove

Une pomme pour la récré

41e année 204

octobre 2002

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

Mise en page
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Carrés disposés en « spirale » dont les mesures des côtés sont les nombres de la suite de Fibonacci

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous).

Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Abonnement annuel (5 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.–
anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques, 11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

MATH-ECOLE

41e année, cinq numéros par an

204

octobre 2002

Sommaire

Editorial

Math-Ecole, pour qui ?

François Jaquet,
Rédacteur responsable de *Math-Ecole*

L'offre et la demande

«*Math-Ecole, une revue pour ceux qui enseignent les mathématiques.*»

Cette affirmation est répétée, en bonne place dans chacun de nos numéros, depuis une bonne dizaine d'années. Au-delà des modalités de sa formulation, elle est une évidence depuis la fondation de la revue.

Mais qui affirme ceci et qui juge de sa véracité ?

Lorsqu'on lit sur un panneau publicitaire: «Truc, le produit pour celui qui...», la question ne se pose pas. Qui d'autre que le fabricant de «Truc» pourrait bien l'affirmer ?

Alors, disons-le et ne cherchons pas à esquiver. Oui, c'est bien la rédaction de la revue qui dit haut et fort qu'elle s'adresse à ceux qui enseignent le mathématiques.

Poussons l'analogie un peu plus loin.

Le client qui ne connaît pas le produit «Truc» n'est encore que potentiel. Il va peut-être acheter. Et s'il le fait, il pourra juger de la véracité de la publicité: pour «vrai», il reste client; pour faux, il renonce à «Truc» et achète «Machin», ou «Chose». Dans le cas de «*Math-Ecole*», la seule différence est que «Machin» ou «Chose» sont difficiles à trouver sur le marché de Suisse romande. Le plus souvent, le client/lecteur renoncera à son abonnement sans chercher de produit de remplacement.

Allons encore plus loin dans l'analogie.

Avant de concevoir ou produire «Truc», son fabricant a pris quelques précautions. Il a fait une étude de marché. Puis, il cherche à adapter son produit en permanence, en fonction de la demande et de l'évolution des besoins de sa clientèle. Pour «*Math-Ecole*», c'est la même chose!

Mais à un moment, l'analogie bat de l'aile.

«Truc» permet à son fabricant de gagner sa vie, voire de s'enrichir si les affaires marchent bien. Pour «*Math-Ecole*», sans dire que c'est tout le contraire, il faut bien avouer que ce ne sont pas les espoirs de gains qui font que les gens s'engagent dans le comité de rédaction ou écrivent des articles.

Et pourtant, malgré les insuffisances du modèle analogique, il y a un fait indéniable: la revue ne pourrait pas vivre sans ses lecteurs et ceux-ci finalement, détiennent le pouvoir, par leur droit de décider ou non de s'abonner. C'est une préoccupation permanente de la rédaction, depuis quarante ans, c'est-à-dire depuis les premiers numéros: nous sommes convaincus que *Math-Ecole* a des chose intéressantes à apporter à «ceux qui enseignent les mathématiques», mais comment ?

Alors quittons le registre économique et passons aux contenus – la description du produit – et surtout au mode de transmission.

La résolution de problèmes, un thème d'actualité

Du côté des contenus, les choix de *Math-Ecole* sont assez clairs. Il y a toujours les rubriques communes à toutes les revues destinées à ceux qui enseignent les mathématiques: informations, notes de lecture, comptes rendus d'expérimentations, tribunes libres, espace de réflexion, propositions d'activités... sans oublier un peu de culture mathématique.

Et il y a, comme thème d'époque, la résolution de problèmes. Voici bientôt vingt ans qu'on a vu paraître la formule «faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes». C'est un peu lapidaire, c'est évidemment réducteur, c'est excessif du point de vue de l'apprenant comme du mathématicien qui doivent aussi construire tout l'édifice de la discipline, mais c'est très révélateur des conceptions actuelles de l'apprentissage. Le plan d'études romand de 1996 a repris la formule sur sa première page, en la nuançant d'un «c'est aussi». La deuxième édition de nos moyens d'enseignement se caractérise par le retour des problèmes, dans une perspective constructiviste. Et les concours et jeux mathématiques, que font-ils d'autre, avec le succès que l'on sait, que de faire résoudre des problèmes? Et la didactique des mathématiques, ne s'occupe-t-elle pas d'analyser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage et la construction des savoirs dans des situations où les élèves sont confrontés à des problèmes?

Oui, *Math-Ecole* accorde effectivement, depuis plusieurs années et vraisemblablement pour de nombreux numéros encore, une place importante à ce thème. Si, dans le futur, des gens éprouvent l'envie d'étudier l'histoire de la revue, ils ne manqueront pas de s'en apercevoir.

Math-Ecole, interface entre théorie et pratique

Depuis les temps les plus anciens, l'homme s'est ingénié à se poser ou inventer des problèmes et à les résoudre de la manière la plus efficace possible. Nous poursuivons cette tradition mais en nous intéressant, au delà des sujets et des solutions, à tout ce qui se passe dans la tête de celui qui les résout. Et il s'y passe beaucoup de choses, passionnantes, mais d'une complexité inouïe et, par conséquent, difficiles à analyser, décrire et communiquer.

Ce sont les chercheurs qui ont la tâche spécifique de les analyser en profondeur, qui se forgent les outils nécessaires et acquièrent peu à peu des connaissances plus fines que ne peut acquérir, seul, l'enseignant confronté à la gestion de sa classes et au réseau de relations, non moins complexe, qui s'y tisse. Pour communiquer les résultats de leurs observations en profondeur, les didacticiens ont besoin de termes précis, de distinctions qui peuvent paraître parfois trop subtiles à celui qui ne souhaite pas aller aussi loin dans l'analyse. Les chercheurs qui écrivent pour *Math-Ecole* font un bout du chemin en utilisant la langue la plus simple possible, en cherchant à illustrer leurs propos d'exemples tirés de pratiques effectives. Mais la vulgarisation a des limites: celles imposées par la rigueur scientifique. De leur côté, les enseignants qui témoignent de leurs pratiques dans nos colonnes font aussi un pas en direction de la recherche en s'efforçant de dépasser le niveau de la simple description par des commentaires didactiques.

Dans ce numéro, par exemple, on trouvera plusieurs illustrations de cet effort mutuel de rapprochement:

- Dans *Une pomme pour la récré* (p. 30), des tableaux détaillés illustrent les relations complexes en jeu dans la proportionnalité, le relevé des dialogues permet de suivre mot à mot l'évolution des raisonnements des élèves. L'article est donc long et d'une lecture qui exige une attention soutenue. Et pourtant, on constate qu'il y a encore bien des choses qu'on aimerait savoir sur le cheminement de la pensée des élèves observés. Le lecteur praticien tirera la substance des analyses décrites tout en se rendant bien compte qu'il ne s'agit pas de propositions de gestion. La prochaine fois qu'il abordera *Une pomme* *pour la récré* dans sa classe, il le fera en fonction de ses pratiques précédentes, avec, en plus, un regard un peu plus aiguisé sur certaines erreurs de ses élèves et certains de leur propos qu'il pourra relier avec des réflexions suscitées par la lecture de l'article.

- Le jeu *Magix* (p. 19) est présenté sur un mode promotionnel par son inventeur, qui l'a largement pratiqué. Il est décrit de manière positive par l'auteur de l'article, qui, en tant qu'enseignant, y a reconnu des potentialités en calcul réfléchi et voit comment le gérer en classe. Mais on sait que, à la suite d'une réflexion commune entre chercheurs et praticiens, le jeu seul ne garantit pas que les élèves vont faire des mathématiques; il faut au préalable mettre en évidence de manière détaillée les connaissances susceptibles d'être développées pour savoir ce qu'il faudra contrôler et exploiter à la suite du jeu. Dans l'article, ces connaissances sont décrites et les précautions sont prises.

- Après la lecture de *Ellipse, ovale, ove* (p. 23), le lecteur enseignant a un élément de plus dans son répertoire d'activités pour sa classe. Mais, il a, en plus, de nombreuses considérations lui permettant de faire le lien entre ces constructions géométriques, belles et plaisantes, et les notions du programme. En en sachant un peu plus sur les concepts géométriques sous-jacents, il sera en mesure de mieux justifier les objectifs de ces manipulations et pourra répondre à ceux qui lui reprocheraient d'aborder les coniques alors qu'elles ne figurent pas au programme officiel.

La rédaction de *Math-Ecole* souhaite donc que la revue continue à faire le lien entre recherche et pratique. La tâche n'est pas aisée car l'ambition est grande: il s'agit de communiquer des problématiques complexes d'un côté comme de l'autre, entre partenaires qui ont beaucoup de choses, importantes, à se dire.

En conclusion, *Math-Ecole* a choisi une voie exigeante. La revue ne cherche pas à soutenir la concurrence de la presse des devoirs de vacances, des méthodes miracle, des programmes de répétition que l'on trouve en abondance sur Internet... En résolution de problèmes et, plus généralement, dans toutes les démarches d'apprentissage et d'enseignement, il n'y a pas de prêt-à-porter. Le lecteur le sait et confirmera, nous le souhaitons, les choix de la rédaction en faisant connaître la revue et en participant au débat qu'elle lui propose.

11e Rallye Mathématique Transalpin

Informations et inscriptions

Le 11e *Rallye mathématique transalpin* est lancé, organisé en Suisse romande par l'association RMT-SR. Comme les années précédentes les élèves des classes inscrites vont faire des mathématiques pleines de sens, apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en travail de groupe pour décider de la solution qu'ils vont choisir au nom de la classe.

Les **maîtres** évalueront les productions de leurs élèves et leurs capacités d'organisation, ils pourront exploiter largement les problèmes pour leur classe. Ils apprécieront, par les analyses des résultats d'ensemble, les différentes procédures mises en œuvre par les groupes, les obstacles rencontrés, le niveau de savoirs mathématiques en jeu. Finalement, ils pourront aussi s'engager eux-mêmes dans l'équipe des animateurs et participer à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions. (**L'équipe actuelle a besoin de renforts** pour assurer la préparation des problèmes, l'évaluation, la correction et l'analyse des résultats. Le travail est bénévole, mais gratifiant.)

Le contrat se résume ainsi:

- Pour chaque épreuve la classe reçoit, une série de problèmes à résoudre, choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte.
- En 50 minutes, en parfaite autonomie, la classe doit rechercher les solutions, en débattre, produire une solution unique pour chacun des problèmes, avec les explications et les démarches suivies.
- La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai.
- Les épreuves qui suivent les essais se font hors de la présence du maître titulaire de la classe, remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange.
- L'évaluation des copies est faite par des équipes d'animateurs. Pour chaque catégorie, un classement est établi, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation à la finale. Les critères d'évaluation et les résultats détaillés sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.
- Après chaque épreuve le maître est invité à exploiter les problèmes avec l'ensemble des élèves.

Pour la Suisse romande l'**organisation pratique** du 11e *Rallye mathématique transalpin* passera par Internet (www.rmt-sr.ch). Voici le calendrier de ses quatre étapes:

- une **épreuve d'essai**[1] d'octobre à décembre 2002, pour déterminer l'intérêt de la classe et décider de son inscription (avant le 30 novembre 2002 si possible, aucune inscription ne pourra être prise en compte après le 15 décembre)
- une **première épreuve**, en janvier 2003
- une **deuxième épreuve** en mars 2003
- une **finale**, le mercredi après midi 21 mai 2003, à Berne

Le site www.rmt-sr.ch et la revue *Math-Ecole* diffusent l'information sur le *Rallye mathématique transalpin*, en Suisse romande et au Tessin. **Les frais de participation** (prix souvenirs, certificats, travaux d'élaboration des épreuves, administration...) se montent à Fr. 45.- par classe.

Le bulletin d'inscription est à compléter sur le site www.rmt-sr.ch. Ceux qui ne sont pas connectés à Internet peuvent encore en obtenir un exemplaire auprès du secrétariat de l'association RMT-SR: Madame Catherine Dupuis, Chemin du Moulin, 1133 Lussy, tél. 021/803.28.67.

1. Pour constituer une épreuve d'essai, on peut reprendre des problèmes des épreuves des années précédentes publiées de 1997 à 2002 dans *Math-Ecole* ou utiliser une des épreuves d'essai disponible sur le site Internet: www.rmt-sr.ch

Championnat FFJM – Tangente

1/4 de finale individuels

17e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

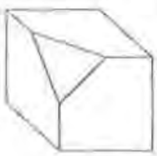
[ndlr] *Math-Ecole* invite ses lecteurs à participer aux quarts de finale individuels du 17e championnat de la FFJM et à renvoyer leurs réponses à l'aide du «Bulletin de réponse» qu'ils trouveront sur le site http://ffjm.jeux-mathematiques.org/

Début catégorie CE

1. LE DÉ COUPÉ (coefficient 1)

Un dé possède 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Mathias a scié un coin de son dé. L'objet obtenu (voir le dessin) possède maintenant 7 faces et 10 sommets.

Mais combien d'arêtes possède-t-il ?



2. CALCUL INCOMPLET (coefficient 2)

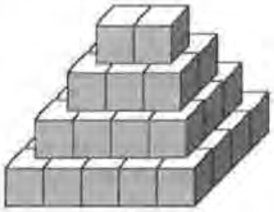
Complétez l'égalité ci-dessous avec des nombres entiers afin qu'elle soit vraie.

(23 – …) + (23 × …) = 50.

Début catégorie CM

3. PYRAMIDE (coefficient 3)

Combien de cubes Mathilde a-t-elle utilisés pour réaliser cette belle pyramide à base rectangulaire ?



4. LES QUATRE AMIS (coefficient 4)

Mathias, Mathilde, Matthieu et Mathurine sont quatre amis. Deux d'entre eux sont des garçons. Deux d'entre eux sont blonds et les autres sont bruns. Deux d'entre eux portent des lunettes et les autres n'en portent pas. Dans le tableau ci-dessous, il n'y a pas deux colonnes identiques.

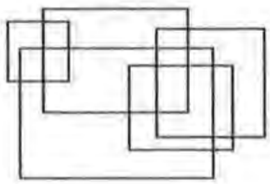
prénom	Mathilde	Mathurine	Mathias	Matthieu
sexe	fille	fille	garçon	garçon
cheveux	bruns	…	blonds	blonds
lunettes	…	non	…	oui

Complétez ce tableau.

Début catégorie C1

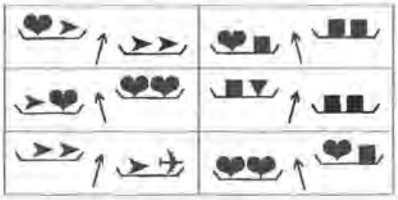
5. APPARTENANCE TRIPLE (coefficient 5)

Coloriez en noir toutes les régions du dessin ci-dessous qui sont situées à l'intérieur d'exactement trois rectangles à la fois .



Fin catégorie CE

6. LES PESÉES (coefficient 6)



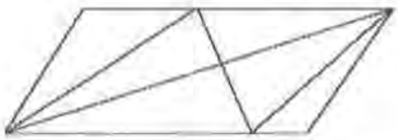
Mathias s'amuse à comparer les poids de ses 5 jouets (il possède chacun d'eux en double). Il décide ensuite de donner les quatre jouets les plus lourds à son frère et les quatre plus légers à sa soeur.

Dessinez les deux qu'il va garder.

Début catégories C1, L1, L2, GP, HC

7. LES TRIANGLES (coefficient 7)

Dans la figure ci-dessous, combien compte-t-on de triangles entièrement dessinés ?



Note: un triangle peut comporter un ou plusieurs morceaux.

8. LES BONBONS (coefficient 8)

Mathilde: – J'ai mangé moins de sept bonbons.
Mathias : – Moi aussi.
Mathilde: – Mais j'en ai mangé plus de quatre.
Mathias: – En tout cas, je suis certain d'en avoir mangé moins que toi.

Il y avait 10 bonbons dans le sachet et, à eux deux, Mathilde et Mathias ont tout mangé. De plus, chacun des deux amis a dit la vérité une fois et s'est trompé une fois.

Combien Mathilde a-t-elle mangé de bonbons ?

Début catégories C1, L1, L2, GP, HC

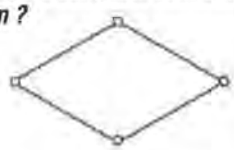
9. LA BONNE ANNÉE (coefficient 9)

L'année 2000 fut une bonne année: elle comportait 53 week-ends complets (samedi et dimanche). Quelle sera la prochaine bonne année ayant cette propriété?

10. LES LOSANGES (coefficient 10)

J'ai placé 4 points, puis j'ai tracé 4 segments qui ont formé un losange. J'ajoute ensuite de nouveaux points, puis je trace de nouveaux segments et j'obtiens un total de quatre losanges dans ma figure.

Combien la figure complète contient-elle de points, au minimum ?



11. SOUVENIR, SOUVENIR... (coefficient 11)

Hier, Mathias a mis à l'heure et remonté la vieille horloge et le vieux réveil de son grand-père. Ce matin, en se réveillant, il constate que le réveil indique 6 h et l'horloge 7 h. Or, Mathias se souvient que, d'après son grand-père, le réveil retarde de 3 minutes par heure, tandis que l'horloge, elle, avance d'une minute par heure.

A quelle heure Mathias les a-t-il remontés ?

Fin catégorie C1

12. 7 UNE CHANCE (coefficient 12)

On écrit dans l'ordre croissant les carrés des nombres entiers à deux chiffres : 10^2, 11^2, 12^2, ... Ensuite, on calcule ces carrés et, pour chacun d'eux, on ajoute les chiffres jusqu'à obtenir un nombre à un seul chiffre (par exemple, $94^2 = 8836 \longrightarrow 25 \longrightarrow 7$).

Quel est le treizième nombre à deux chiffre dont le carré aboutit à un 7 ?

13. LA VIELLE CALCULATRICE (coefficient 13)

Ma calculatrice est usée : elle calcule bien, mais elle ne fait apparaître sur son écran que les chiffres impairs et des points à la place des chiffres pairs. Je viens de taper un nombre à six chiffres, puis d'appuyer sur la touche √. Elle affiche alors : √ . . . . 7 . = ...

Quel est le résultat ?

Fin catégorie C2

14. TÉLÉPHONE AU CARRÉ (coefficient 14)

Mathilde vient de se faire offrir un téléphone portable, mais elle ne veut être appelée que par ses copains matheux. Elle donne donc son numéro de la façon suivante :
Mon numéro est constitué de cinq suites de deux chiffres, la première étant 06. Les quatre autres, considérées comme des nombres à deux chiffres, sont rangées en ordre strictement décroissant, et, si on remplace ces quatre nombres par les deux derniers chiffres de leur carré, éventuellement complétés par des zéros, mon numéro de téléphone reste inchangé.

A quel numéro appellerez-vous Mathilde ?

15. BICYCLETTE PARTAGÉE (coefficient 15)

Mathilde et son petit frère Matthieu doivent faire un trajet de 25 km, et ils ne disposent que d'un seul vélo. Mathilde marche à 6 km/h et roule à bicyclette à 18 km/h, tandis que Matthieu marche à 3 km/h et roule en vélo à 15 km/h. D'un commun accord, ils partent en même temps, Mathilde à bicyclette et Matthieu à pied. Lorsqu'elle arrive au grand cèdre (sur le chemin), Mathilde pose son vélo et continue à pied. Dès que Matthieu atteint le cèdre, il prend à son tour le vélo et termine le trajet en pédalant. Tous deux arrivent exactement en même temps.

A quelle distance du point de départ se trouve le cèdre ? On donnera la réponse en km, arrondie au millième.

16. SAUVETAGE DANS L'ESPACE (coefficient 16)

Le Vaisseau de Secours, avec son équipage, possède 95 jours d'autonomie d'oxygène lorsqu'il rencontre un vaisseau endommagé par une météorite. Il recueille alors 7 rescapés et son autonomie d'oxygène tombe à 60 jours. Six jours plus tard, il rencontre un autre vaisseau en perdition. Il accueille alors de nouveaux rescapés, et son autonomie d'oxygène n'est plus que de 38 jours.

Combien étaient les nouveaux rescapés ?

Fin catégorie L1, GP

17. LE TAPIS PERSAN (coefficient 17)

Ce motif est le centre du tapis d'Ahlemath. Il y a quatre axes de symétrie et les cercles en contact sont tangents et tangents aux côtés du carré comme on le voit sur la figure.

Sachant que le grand cercle a 1 m de diamètre, quel est le diamètre des plus petits cercles ? On donnera la réponse en mm, arrondie au dixième.

18. L'ÉTANG D'ARES (coefficient 18)

L'étang d'Ares est un quadrilatère dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers de mètres tous différents, inférieurs à 100 m et non multiples de 5. Chaque côté de cet étang est également le côté d'un terrain carré. Les quatre propriétaires de ces terrains, Matthieu, Mathurin, Mathilde et Mathias doivent les partager en parcelles de 100 m². Ils constatent qu'il leur reste à chacun la même surface inutilisée.

Quelle est, au maximum, l'aire de l'étang d'Ares ? On donnera la réponse en m², arrondie au centième.

Fin catégorie HC

Comment participer au dix-septième Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques?

1) *Repérez les problèmes que vous avez à résoudre (de 5 à 12 problèmes selon votre catégorie).*

catégorie CE :	Cours Elémentaire 2 (3e année de l'école primaire)
catégorie CM :	Cours Moyen 1 et 2 (2 dernières années de l'école primaire, CH : degrés 4 et 5)
catégorie C1 :	classes de 6e et 5e des collèges (2 premières années du secondaire, CH : degrés 6 et 7)
catégorie C2 :	classes de 4 e et 3 e des collèges (3e et 4e années du secondaire, CH : degrés 8 et 9)
catégorie L1 :	classes de 2e et 1e et Terminales des lycées (3 dernières années du secondaire, CH : degrés 10 à 13)
catégorie L2 :	2 premières années de l'enseignement post-baccalauréat
catégorie GP :	grand public (les participants à une finale internationale en 2001 ou 2002 sont en HC)
catégorie HC :	haute compétition

2) *Essayez de résoudre ces problèmes et complétez le bulletin-réponse que vous trouverez sur le site* http://ffjm.jeux-mathematiques.org/. *Pour les catégories autres que CE et CM, chaque problème peut avoir une ou plusieurs réponses ; si l'emplacement pour 2 réponses est prévu, cela n'implique pas qu'il y en ait forcément plusieurs.*

3) *Joignez le montant de votre adhésion :*

	CE/CM	**C1 / C2**	**L1**	**L2**	**GP/ HC**
Union Européenne	5	8	10	12	16
Suisse	7 CHF	12 CHF	15 CHF	18 CHF	25 CHF

4) *Répondez avant le **31 décembre 2002**.*

Sous la route

Un collègue nous soumet ce problème, tiré du Tournoi Mathématique de Saint-Michel en l'Herm, (publié dans le supplément *Education* de *Tangente* no 82, septembre-octobre 2001). Il se demande s'il existe une solution « légère » à portée de nos élèves de 8e ou 9e, qui ne mette pas en oeuvre « l'artillerie lourde », de la trigonométrie ou du théorème de la bissectrice par exemple.

Il aimerait aussi savoir comment convaincre les élèves de la nature du petit triangle découpé par la « Route N 2001 » dans chacun des deux triangles rectangles de la figure, car une construction précise au compas et à la règle laisse supposer qu'il pourrait être isocèle.

Quelle est la longueur du tunnel creusé sous la route N 2001, entre les points A et B ?

La figure est formée d'un carré et de deux triangles rectangles.

Même si l'histoire de la route et du tunnel est un peu tirée par les cheveux, la figure et la demande sont assez claires.

Nous renvoyons les questions de notre collègue aux lecteurs et attendons leurs réponses.
Les solutions les plus élégantes seront publiées dans un prochain numéro de *Math-Ecole*, avec, en prime, un ou deux abonnements à *Math-Ecole* pour 2003, à offrir, de préférence, à de nouveaux futurs lecteurs.

Tabeillon, Inn et loi de Benford

Denis Odiet
Collège de Delémont

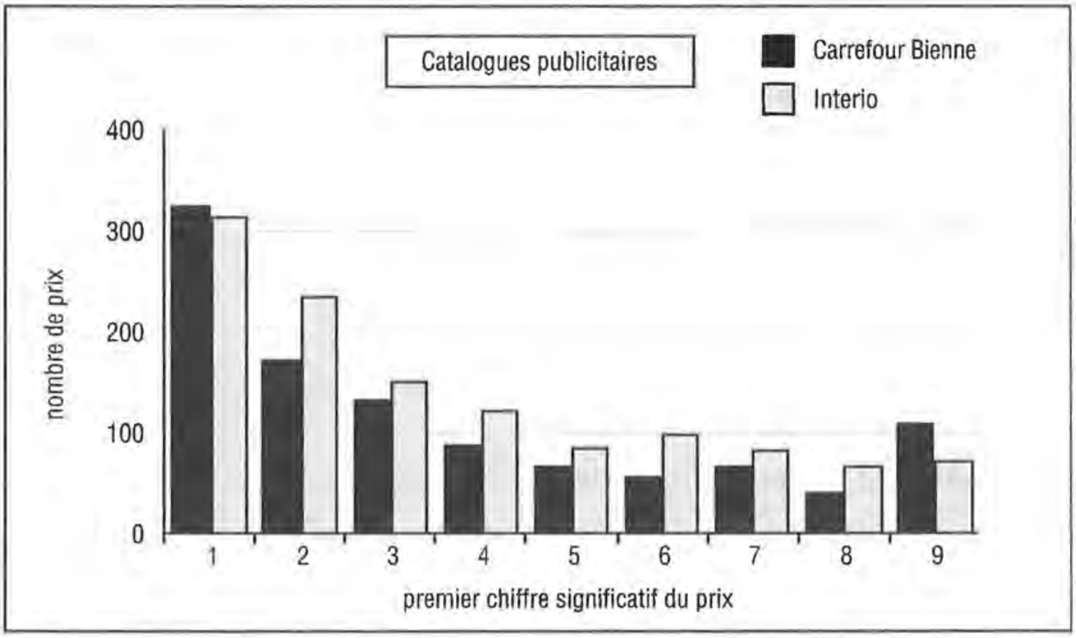
Le bucolique ruisseau du Tabeillon prend sa source sur les contreforts du plateau des Franches-Montagnes, parcourt une jolie combe en direction de la vallée de Delémont pour se jeter dans la Sorne. Sa longueur est de 14 km.

Familière des cruciverbistes, l'Inn s'écoule, quant à elle, sur une longueur de 510 km. Si l'on considère tous les cours d'eau prenant leur source sur territoire helvétique, on pourrait raisonnablement penser qu'il y en a autant dont le premier chiffre[1] du nombre exprimant leur longueur est 1 que de ceux dont le premier chiffre est 5. Or, il n'en est rien, plus que probablement. Bien que n'ayant procédé à aucune vérification, je pense pouvoir affirmer que le Tabeillon – premier chiffre significatif égal à 1 – appartient à un ensemble de cardinal nettement plus grand que celui dont l'Inn – premier chiffre significatif égal à 5 – est élément.

Afin de justifier cette affirmation, voyons ce qui se passe pour d'autres séries de nombres, pris dans des domaines variés de la vie de tous les jours.

Commençons par un premier domaine, celui des prix indiqués dans différents catalogues publicitaires.

Il s'agit donc de relever tous les prix qui y figurent, puis de compter ceux dont le premier chiffre significatif est égal à 1, respectivement 2, 3, … 8 ou 9. Le travail a été réalisé pour les 1219 prix du catalogue de la maison « Interio » et les 1051 prix de quatre dépliants publicitaires du supermarché « Carrefour » de Bienne. Voici les résultats :



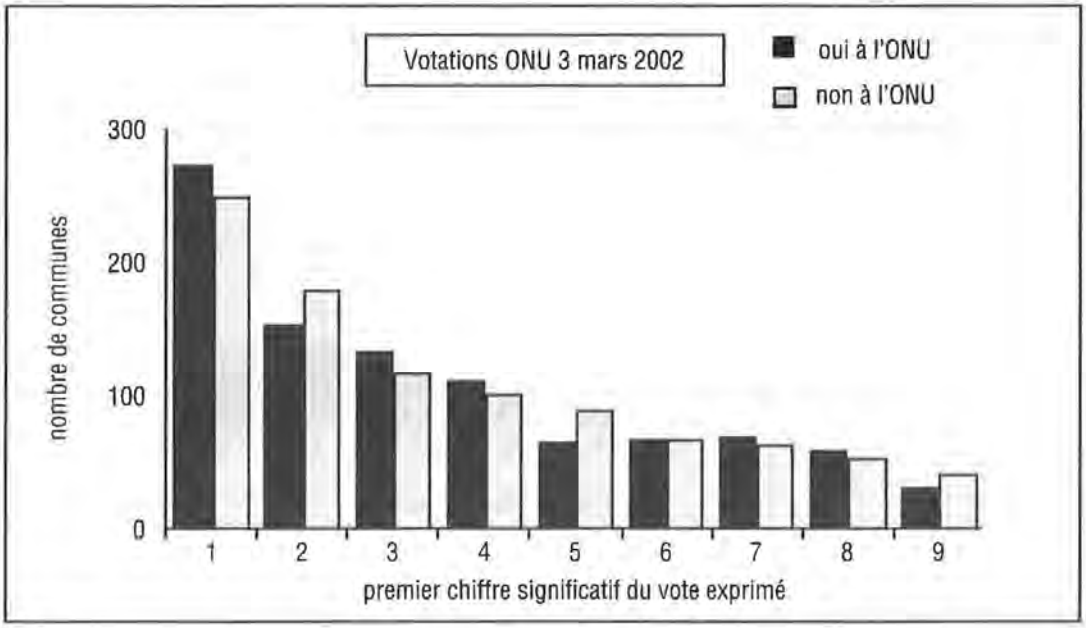
1. Par la suite, on parlera du premier chiffre significatif d'un nombre, c'est-à-dire de son premier chiffre différent de zéro.

Une première constatation se dessine: dans les magnifiques vitrines de Noël d'un magasin de votre ville, il y aura sûrement plus d'articles dont le premier chiffre significatif du prix est 1 que de ceux dont le premier chiffre significatif est 8. De même, il y en aura plus dont le premier chiffre significatif est 2 que de ceux dont le premier chiffre significatif est 3, etc.[2]

Un travail analogue a été proposé aux six élèves de neuvième année d'une classe de mathématiques pratiques dans les deux cas suivants:

1. La votation du 3 mars 2002 concernant l'adhésion de la Suisse à l'ONU.

Il s'agissait d'une part de se procurer les résultats de toutes les communes de Suisse romande et d'autre part de les dépouiller après s'être partagé le travail, l'objectif étant de compter les communes dont le nombre de «oui» exprimés commençait par 1,2, ...8 ou 9. Le même travail a été réalisé pour les «non» exprimés par les mêmes communes. Voici les résultats des 957 communes recensées:



2. Un domaine géographique.

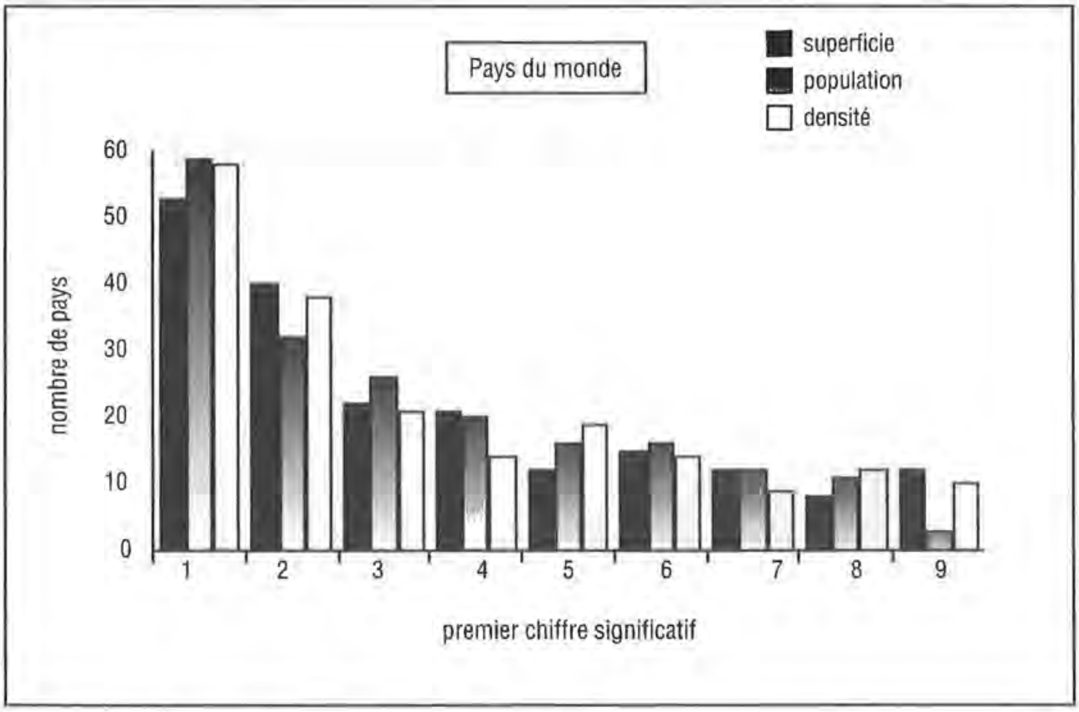
Les élèves étaient intrigués de savoir si la distribution précédente allait se répéter pour la superficie, la population et la densité des 195 pays du monde recensés à la mi-2001, en s'intéressant exclusivement au premier chiffre significatif des nombres de chacune des trois séries.

2. La relative fréquente apparition du premier chiffre significatif 9 chez Carrefour peut s'expliquer. Les dépliants publicitaires étaient constitués essentiellement d'offres promotionnelles, et l'on sait bien que psychologiquement, il vaut mieux proposer un article à FRS 9.95 qu'à FRS 10.25 par exemple.

Par exemple, pour la Jamaïque:

		premier chiffre significatif
Population:	2'5000'000 habitants	**2**
Superficie:	11'425 km2	**1**
Densité:	218 hab./ km2	**2**

Voici les résultats:



Et si la constatation effectuée précédemment devenait règle?

Nul doute que cette activité conduit les élèves à développer les mêmes attitudes que celles explicitées dans le texte introductif du domaine «Analyse de données» des futurs moyens d'enseignement de mathématiques de la Suisse romande pour les degrés 7 à 9:

«*...les élèves sont, plus particulièrement, amenés à*

- *prendre ou recevoir des informations;*
- *chercher et analyser des données;*
- *s'engager dans une recherche active individuelle ou collective;*
- *formuler, puis échanger, des constatations, c'est-à-dire...* »

Cette recherche offre aussi la possibilité de familiariser les élèves avec l'établissement de graphiques à l'aide de l'outil informatique:

Les résultats obtenus ont permis d'infirmer les croyances initiales des élèves: pour eux, dans une série de nombres se rattachant à un domaine précis, qu'un de ces nombres commence par 1, ou qu'il commence par 5, ou encore par 7, étaient des événements équiprobables.

De plus, cette activité procure l'occasion de jeter un pont vers l'histoire des mathématiques et des lois qui se sont mises en place au fil des siècles.

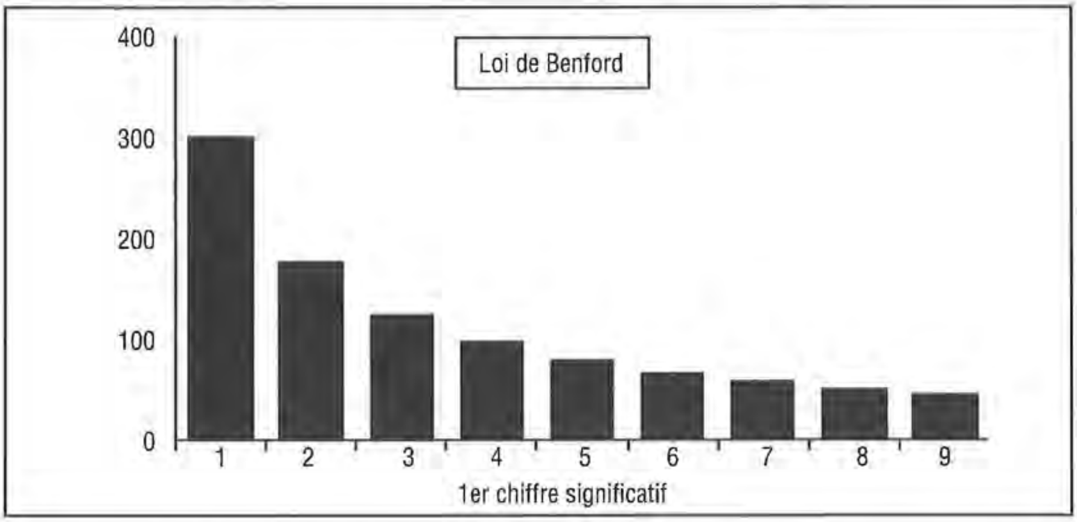
En effet, les exemples étudiés plus haut ne sont que des illustrations de la loi de Benford. En 1881, Simon Newcomb constate, en consultant différentes tables de logarithme dans des bibliothèques, que celles-ci sont plus sales dans les premières pages, correspondant aux petits chiffres. Il entrevoit l'explication suivante: les scientifiques travaillent plus souvent avec des nombres commençant par 1 que par 2, par 2 que par 3, ... mais, à l'époque, cette formule ne convaint personne.

Une cinquantaine d'années plus tard, Franck Benford refait la même observation et retrouve la même équation que celle proposée par Newcomb. La loi de Benford est née:

La probabilité p qu'un nombre tiré d'un ensemble quelconque comporte un premier chiffre significatif égal à d est donnée par la formule suivante:

$$p_d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right), d = 1, 2, \dots, 9$$

La voici sous forme graphique, appliquée à une liste de mille nombres.

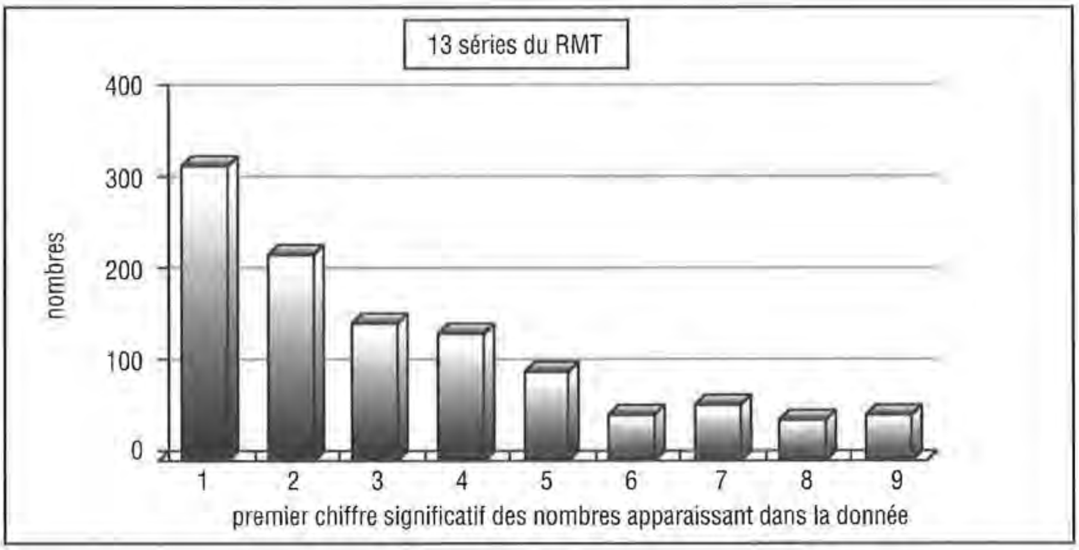


La ressemblance avec les exemples étudiés précédemment est vraiment frappante!

Pour revenir à l'Inn et au Tabeillon, sur un ensemble de mille cours d'eau, on peut donc s'attendre à ce que près de trois cents d'entre eux possèdent une longueur s'exprimant par un nombre dont le premier chiffre significatif est 1, c'est-à-dire qu'il y en aura environ quatre fois plus que ceux dont le premier chiffre significatif est 5.

Il n'est pas inutile de préciser que la loi de Benford est indépendante de l'unité choisie. Si, par exemple, on transformait en euros les prix des catalogues étudiés, on obtiendrait toujours la même distribution du premier chiffre significatif.

Pour les lecteurs encore perplexes, voici ce que fournit l'analyse de tous les nombres utilisés dans les énoncés de 13 séries du «Rallye mathématique transalpin» (1137 nombres recensés) et l'étude de leur premier chiffre significatif:



Etonnant, non?

Ajoutons quand même pour terminer que la loi ne s'applique malheureusement pas aux résultats de pur hasard, comme pour la loterie à numéros par exemple...

Pour en savoir plus:

«Le premier chiffre significatif fait sa loi», par Ted Hill, La Recherche N° 316, Janvier 1999
«Fraudeurs, méfiez-vous du 6!», par Véronique Parasote, Science et Vie junior, Août 1999

Réponses aux problèmes du numéro 203

p. 21, le problème de l'encadré «A propos de calcul de sommes»:

La suite cherchée est 8 ; 5 ; 16 ; 8 ; 5; 16 ; 8 ; 5 ; .... Son 2001e terme est 16, comme tous ceux dont le numéro d'ordre est un multiple de 3.

p. 45, les deux derniers cryptarithmes:

d) BON + PIED + BON + OEIL = PECHE
e) VENIRE + VIDERE + SCIRE + AUDIRE + DUCERE = VINCERE

d)

$$\begin{array}{r} 673 \\ 1805 \\ 673 \\ +\ 7089 \\ \hline 10240 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r} 104650 \\ 163050 \\ 28650 \\ 973650 \\ +\ 378050 \\ \hline 1648050 \end{array}$$

Pour d), il y a quatre groupes de deux solutions obtenues par permutations de D et L dans la colonne des unités:

2 x 673 + 1805 + 7089 = 2 x 673 + 1809 + 7085 = 10240
2 x 873 + 1605 + 7069 = 2 x 873 + 1609 + 7065 = 10420
2 x 687 + 1502 + 8054 = 2 x 687 + 1504 + 8052 = 10930
2 x 790 + 1524 + 9258 = 2 x 790 + 1528 + 9254 = 12362

Revue des revues

HYPERCUBE

Il y a cinq ans, en 1997, dans notre numéro 176, nous présentions la revue *HYPERCUBE*, après sa fusion avec *Math & Malices*, et nous lui souhaitions alors bonne chance. Il a coulé beaucoup d'eau sous les ponts – de Paris – depuis lors et force est de reconnaître que les promesses ont été tenues.

Voici une revue qui s'affirme progressivement et a trouvé son style, après sept ans d'existence: ses destinataires sont les collégiens de langue française (de nos degrés 6 à 9), elle s'adresse à eux directement, dans une langue simple, par des articles courts et de nombreuses propositions d'activités où les découpages et les constructions ont une place de choix, elle est devenue un des principaux vecteurs d'information, avec *Tangente*, de tout ce qui se passe dans le domaine de l'animation mathématique en francophonie: concours, expositions, publications, animations...

Pour se rendre compte de la diversité de l'offre, examinons par exemple le contenu du numéro 41, d'avril-mai 2002:

- deux pages de jeux qui sont, en fait, des problèmes bien résistants;
- un article sur «Euclide le magnifique» qui, en deux pages, donne un aperçu historique du personnage, de son oeuvre, des axiomes et postulats, une démonstration tout à fait accessible de l'infinité des nombres premiers et un exemple de raisonnement géométrique des *Eléments* sur le partage d'un parallélogramme par deux droites parallèles aux côtés dont l'intersection est un point de la diagonale (parfois connu sous le nom de règle du gnomom);
- une page de courrier où des lecteurs apportent leur contribution, dont le joli cryptarithme 5 (UN + ZERO) = CINQ, à solution unique si O = 7 et U > R, dont la solution, publiée dans le numéro suivant, montre toute la profondeur de raisonnements simples sur la numération. (Voir réponse p. 18);
- une expérience, *Les faux jumeaux*, où l'on construit deux polyèdres différents de14 faces dont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux de 4 cm de côté, 12 sommets et 24 arêtes, donnés chacun par deux patrons égaux de 3 carrés et 4 triangles à la disposition près des languettes de collage;
- une page de nouvelles brèves, dont une formule étrange permettant d'optimiser l'affectation des 17585 policiers londoniens dans les différents quartiers de la capitale en fonction de leur population, du niveau de vie, de la demande et du taux de criminalité;
- une énigme logique, «Sherlock time» bien illustrée;
- deux pages d'extraits de sketches de Coluche où sa «logique» est bien mise en évidence;
- deux découpages sur le thème des *Tétraèdre et cube tronqués*;
- deux pages sur les propriétés des paraboles et leurs application pratiques;
- en rapport avec l'article précédent, une proposition de construction de parabole en fils tendus sur un canevas en hexagone;
- une des aventures de *Malice Paradoxe* avec, pour ce numéro, la démonstration suspecte que 2 = 3;

- les quatre *Quizz* traditionnels à choix multiples non exclusifs, l'un pour chaque degré de 6e à 3e (6 à 9 en Suisse romande), pour ce numéro sur le thème géométrique des droites du triangle;
- deux pages sur quatre constructions du pentagone régulier avec description détaillée des étapes, comme suite des constructions analogues proposées dans les numéros précédents sur le triangle équilatéral, l'hexagone et les autres polygones qui s'en déduisent;
- une «hyperfiche» proposant quatre méthodes de comparer entre elles deux fractions;
- un dessin-mystère à réaliser sous la forme d'une dictée géométrique;
- trois procédés de construction «point par point» de paraboles (du genre développé par l'article *Ellipse*... de A. Gaggero, dans ce numéro, en pages 23 à 29);
- deux pages de solutions des problèmes, constructions et questions posées dans ce numéro et dans le précédent;
- quelques publicités pour les ouvrages de la librairie Archimède, les numéros spéciaux de *HYPERCUBE*, les abonnements;

le tout sur papier glacé, en 32 pages de quadrichromie, parfois un peu tape à l'oeil, avec les constructions et découpages soigneusement préparés en grandeur nature, un suivi précis des réponses aux problèmes, des illustrations bien choisies.

Les numéros spéciaux et recueils d'*HYPERCUBE* sont aussi de véritables sources d'animation et de renouvellement de l'enseignement des mathématiques.

Il y a tout d'abord le numéro 32-33, *10 Expériences mathématiques* bien connu chez nous puisque c'est la présentation de l'exposition du même nom en circulation dans nos collèges (v. *Math-Ecole* 197 et 203), accessible dès les derniers degrés du secondaire I.

Il y a ensuite le numéro 39-40, de février-mars 2002, *Perspective*, avec 64 pages et plus de 40 expériences facilitées par le matériel inclus et 14 planches à découper, pour tous publics. Il y a encore *Découpages mathématiques*: 25 solides à monter, dont 6 puzzles 3D, 24 planches à découper et un livret de 32 pages pour une «promenade au jardin des polyèdres», déjà accessible en fin d'école primaire (degrés 4 et 5).

Enfin, le numéro 42-43, *Spécial Rallye*, propose de nombreux problèmes pour tous les degrés. Mais attention, il faut trier car le fait d'être proposé dans une compétition ne garantit pas toujours l'intérêt, la qualité et la rigueur du problème!

L'ensemble de l'offre d'*HYPERCUBE* est donc intéressante pour les élèves du secondaire qui y trouveront des thèmes variés, beaucoup d'expériences et de constructions géométriques, de nombreuses approches ludiques et plaisantes des mathématiques. Pour les maîtres, c'est une source d'idées et de renouvellement de leur enseignement.

L'équipe de la rédaction d'*HYPERCUBE*, Francis Dupuis, Dominique Souder, Michel Rousselet et Géraud Chaumeil, fait un beau travail. Nous espérons que de nombreux établissements et collègues de Suisse romande puissent en profiter.

Adresse de la revue:
Editions Pentaèdre, 765 Avenue des Cerfs.
F – 40150 HOSSEGOR

Abonnement à Hypercube, 1 an, 8 numéros
(4 + 2 doubles) 37.–

Autres renseignements:
fax: 0033 558 43 91 34
courriel: Hypercube@wanadoo.fr

Réponse au cryptarithme de *HYPERCUBE*, p. 16

$5 \times (UN + ZERO) = CINQ$, avec $O = 7$ et $U > R$, sans chiffre 0.
Nous sommes évidemment en base dix où l'équation précédente devient :

$5 \times (1000Z + 100E + 10 \times (U+R)+N+7) = 1000C + 100\,I + 10N + Q$

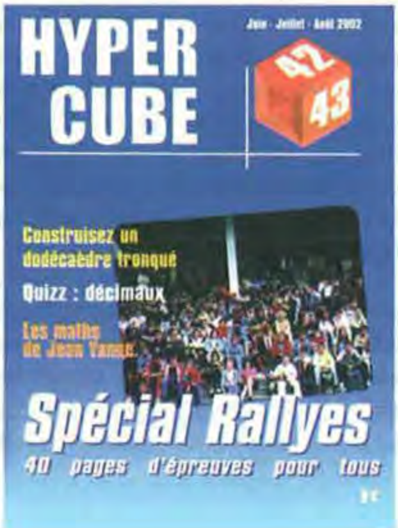
Le membre de gauche, comme celui de droite, représente un nombre de quatre chiffres, Z ne peut être remplacé que par le chiffre 1.

Le membre de droite représente un multiple de 5 , comme le 0 ne figure pas dans ce cryptatithme, on en déduit que $Q = 5$. On pourra donc diviser chaque membre par 5 :

$1000 + 100E + 10 \times (U+R)+N+7 = 200C + 20\,I + 2N + 1$
et simplifier encore en enlevant 1 et N pour arriver à:

$1000 + 100E + 10 \times (U+R)+ 6 = 200C + 20\,I + N$

ce qui permet de conclure que $N = 6$ et, après une simplification par 10, aboutir à :
$100 + 10E + U+R = 20C + 2I$
En examinant les unités, on constate qu'il y a deux possibilités :



soit $U + R = 2I$ et $100 + 10E = 20C$
ou, en cas de retenue, $U + R + 10 = 2I$ et $100 + 10E + 10 = 20C$

Il ne reste à disposition que les chiffres 2, 3, 4, 8 et 9 pour remplacer les lettres E, U, R, C et I.

Les essais sont vite faits, il n'y a que deux possibilités pour C : 8 et 9 selon les deux équations, simplifiées, où cette lettre apparaît: $10 + E = 2C$ ou $10 + E + 1 = 2C$

Selon la première hypothèse, sans retenue, si $C = 8$, $E = 6$ (déjà pris) et si $C = 9$ $E = 8$ (possible). Selon la deuxième hypothèse, avec retenue, si $C = 8$ $E = 7$ (déjà pris) et si $C = 9$, $E = 9$ (imposible).

Ainsi, la lettre C remplace le chiffre 9 et E le chiffrfe 8.

Il ne reste qu'à déterminer U, R et I, dans le cas sans retenue à partir de $U + R = 2I$, avec les chiffres 2, 3 et 4 à disposition et sachant que, selon l'énoncé, $U > R$.

La solution est immédiate et unique : 4 remplace U, R remplace 2 et I remplace 3.

Notre cryptarithme décodé devient:
$5 \times (46 + 1827) = 9365$

Magix 34

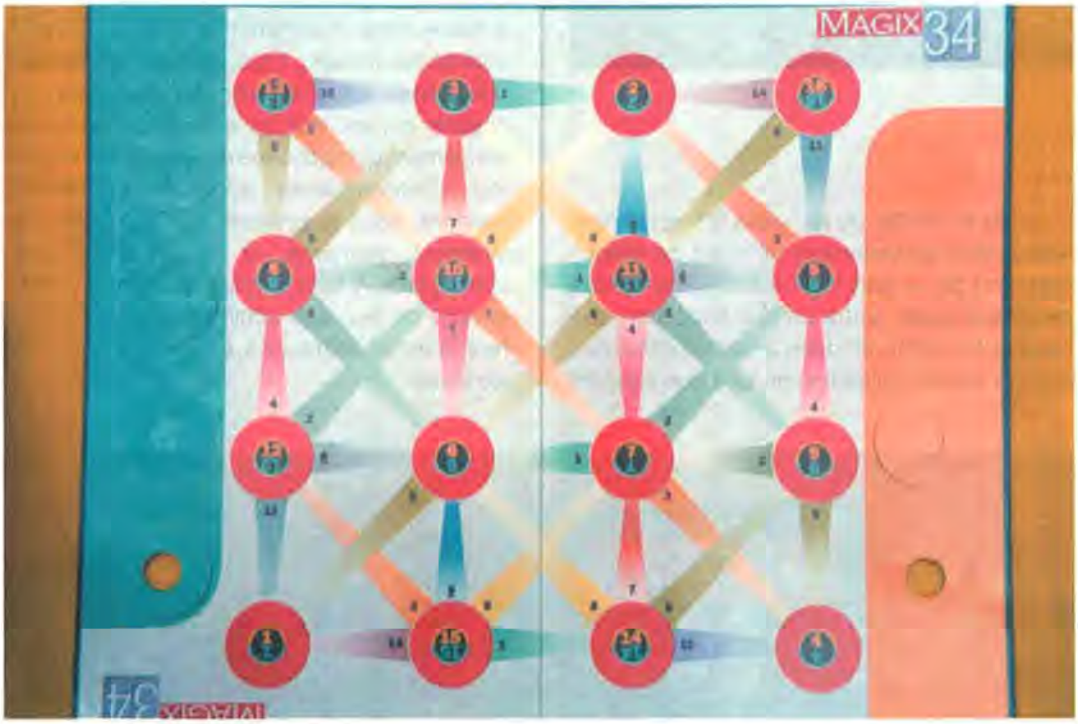
Jean-Paul Dumas

L'intérêt et le rôle du jeu dans les apprentissages sont actuellement un sujet de préoccupation de la part des didacticiens et des méthodologues. Entre un rôle important que l'on peut lui attribuer dans la construction des savoirs ou son utilisation en tant que support à l'entraînement, tous lui reconnaissent l'utilité d'inciter l'élève à appliquer ses connaissances et à favoriser ainsi leur assimilation. Les enseignants l'ont bien compris et on trouve de plus en plus dans les classes, à côté des activités proposées dans les moyens officiels de mathématiques, de nombreux jeux achetés dans le commerce ou trouvés dans différentes revues. Tous ne sont cependant pas d'égale valeur et certains ne méritent pas l'espoir qui est mis en eux. Des consignes inutilement compliquées accompagnées parfois d'interminables additions de points cachent, sous le prétexte de découvrir une stratégie gagnante, la pauvreté de leur conception. À faire miroiter aux élèves, sous le nom de jeu, des activités qui deviennent rapidement fastidieuses, on court le risque de les lasser.

S'il est un jeu que je désire conseiller à tous les enseignants de l'école primaire c'est *Magix 34*[1], récemment commercialisé par la

1. Magix 34, un jeu de Didier Faradji, Cité des sciences et de l'industrie, (CRDP, réseau) Centre régional de documentation pédagogique de Franche Comté 2001.

Cité des sciences et de l'industrie et le CRDP de Franche-Comté. Il se joue à deux joueurs et se compose d'un plan de jeu et de 4 anneaux par joueur. Son concepteur, Didier Faradji, propose, en option, un remarquable «Document pédagogique d'accompagnement». Sa lecture est indispensable pour apprécier ce jeu et exploiter toutes ses potentialités. Les propos qui suivent se retrouvent richement commentés et exemplifiés dans ce document pédagogique



Selon Didier Faradji, «*Magix 34 est d'abord un jeu, on s'y amuse. Un jeu dont la stratégie s'appuie sur le calcul mental. C'est avant tout un jeu qui fait compter*»[2].

Comme le relève Michel Criton, président de la Fédération française des jeux mathématiques qui a préfacé le document pédagogique, la particularité de ce jeu, c'est que Didier Faradji a eu l'idée d'exploiter le thème du carré magique (carré de 4x4), thème largement étudié par de nombreux mathématiciens depuis l'Antiquité (Fermat, Euler et d'autres).

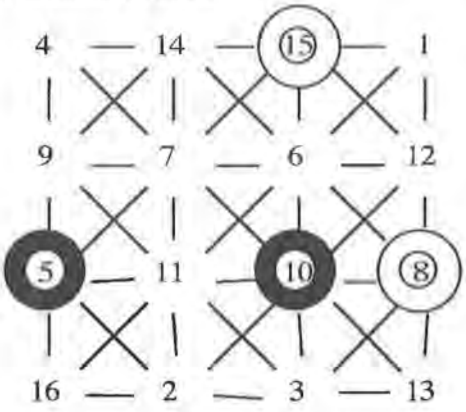
Pour la première partie du jeu, la règle est très simple: les deux joueurs placent, à tour de rôle, un anneau sur les cases noires de leur choix. Le but du jeu consiste à totaliser exactement 34, en quatre termes, tout en empêchant l'adversaire d'y parvenir.

En jouant une partie, nous pourrons découvrir quelques riches aspects de ce jeu.

Le joueur A commence. Seul celui qui commence doit poser obligatoirement son anneau (en noir sur le plan de jeu ci-dessous) sur une case périphérique. Cette contrainte équilibre

2. Magix 34, un jeu de Didier Faradji, Document pédagogique d'accompagnement, Cité des sciences et de l'industrie, (CRDP, réseau) Centre régional de documentation pédagogique de Franche Comté 2001.

les chances de gain entre les deux joueurs. La situation devient très vite intéressante. Au deuxième anneau placé par chaque joueur, on peut trouver la position suivante: noir (5 et 10) et blanc (15 et 8).



Observons les nombres en jeu: le joueur A choisit des nombres «simples», mais le calcul de l'écart à 34 (par addition lacunaire ou soustraction) est une première difficulté et le joueur doit faire également le calcul de la somme et de l'écart pour les nombres choisis par son adversaire. Pour faire 19, le premier joueur a comme possibilité les couples 13 + 6; 16 + 3 et 12 + 7 et il doit éviter le 11 et le 4 (parce que le 8 et le 15 déjà pris par l'adversaire empêcheraient de faire 19 par 11 + 8 ou 15 + 4). Pour le joueur B, la somme est de 23 et la différence de 11 ce qui donne les possibilités suivantes 2 + 9 et 7 + 4, tout en évitant le 1 et le 6 (en raison des choix noirs de 5 et 10)

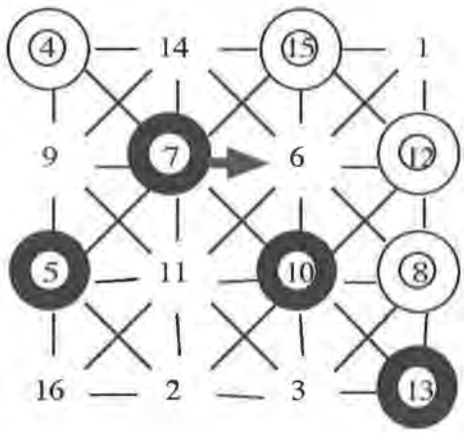
Remarquons en passant que le choix de la somme 34, somme constante du carré magique d'ordre 4 construit à l'aide des nombres de 1 à 16, débouche sur des décompositions riches et variées que détaille Didier Faradji dans le document pédagogique.

Si le joueur A choisit au coup suivant le 7, le joueur B devra impérativement prendre le 12. La somme de ses 3 cases noires sera donc de 35 et aucun joueur n'obtiendrait le 34.

D'où la nécessité pour le concepteur du jeu d'ajouter cette règle au déroulement «*lorsque les 8 anneaux sont disposés sur le plateau, si aucun des joueurs n'est parvenu à réaliser 34, ils poursuivent cet objectif en déplaçant d'une case, à tour de rôle, un à un leurs anneaux respectifs (diagonale comprise)*[3]».

Voici la situation de cette partie possible, lorsque les deux joueurs ont placé les huit anneaux.

Selon le déroulement cité ci-dessus, le joueur A peut atteindre 34 en déplaçant l'anneau du 7 vers le 6. Le joueur B aurait-il été plus inspiré d'occuper cette case 6 à la place de celle du 4 qu'il a choisie?



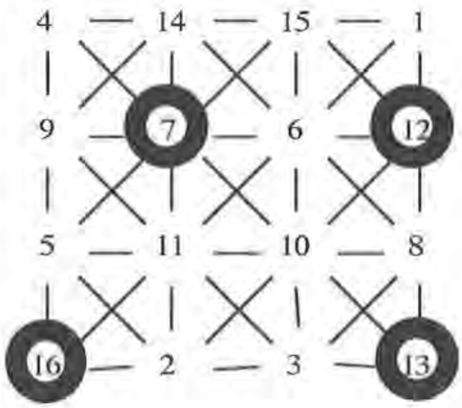
En découvrant la richesse de ce jeu, on ne peut s'empêcher de penser à des activités présentées dans les moyens d'enseignement de mathématiques (par exemple «Toujours 12»[4]) et on voit immédiatement toutes les exploitations que l'on peut tirer des différentes phases d'une partie lors d'une mise en commun ou d'une demande d'explicitation des stratégies, par exemple (je n'en citerai que quelques-uns, renvoyant le lecteur à la consultation du document pédagogique):

3. Idem, note 2.

4. Mathématiques 2P, Livre du maître p. 215, Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E., COROME, 1997.

- pour être efficace, l'élève a la responsabilité de trouver toutes les possibilités d'atteindre un nombre donné à l'aide de deux cases (par exemple atteindre 15 avec deux cases : 1 + 14 ; 2 + 13 ; 3 + 12 ; ...) et le même nombre à l'aide de trois cases (1 + 2 + 12 ; 1 + 3 + 11 ; 1 + 4 + 10 ; 1 + 9 + 5 ; 4 + 2 + 9, 4 + 3 + 8 ; 4 + 5 + 6 ; ...)

- en partant de deux, trois ou quatre anneaux placés sur des cases noires, c'est aussi à l'élève de trouver tous les déplacements d'un anneau pour atteindre une somme donnée.



Par exemple : rechercher toutes les possibilités d'obtenir 34, en déplaçant un anneau d'une case.

Lorsque l'enseignant choisit un jeu, la question essentielle qu'il doit se poser est d'identifier les domaines mathématiques qu'il désire voir développés en le donnant à ses élèves. Didier Faradji en identifie plusieurs, s'adressant aux différents degrés de la scolarité primaire. Il cite :

- l'introduction au domaine numérique,
- poser des problèmes simples relevant de l'addition et de la soustraction,
- élaboration de calculs additifs et soustractifs, sans recours aux techniques opératoires usuelles mais en utilisant le calcul réfléchi et les répertoires mémorisés,
- travail sur les nombres complémentaires,
- sensibilisation au principe selon lequel, pour une opération donnée, certains calculs sont plus simples que d'autres,
- élaboration mentale et mémorisation des résultats de calculs,
- travail sur les décompositions additives et soustractives,

Magix 34 se caractérise par une règle de jeu très simple, compréhensible par tous les élèves, même non francophones. Je n'ai constaté qu'une seule petite difficulté auprès de quelques élèves qui ont observé que la construction du jeu reprenant la forme du carré magique, ils l'assimilaient ainsi à un jeu d'alignement de quatre anneaux. Ce petit problème se résout rapidement dès l'instant où l'un des joueurs rencontre, au cours d'une partie, une des nombreuses autres dispositions qui lui permet d'obtenir 34.

Ce jeu répond enfin à la demande de nombreux enseignants recherchant des jeux qui donnent aux élèves la possibilité de travailler un ou des domaines cités plus haut.

Mais, rappelons-le, tous les apports possibles de ce jeu pour le renforcement des connaissances, voire la construction de nouveaux savoirs, ne tomberont pas du ciel. La pratique ludique, sans contrôle, sans explicitation détaillée des opérations, sans justification des stratégies, n'assurera ni les progrès des élèves ni leur évaluation. Comme tous les « jeux » de mathématiques[5], *Magix 34* ne dispense pas le maître d'une analyse a priori, de l'organisation de mises en commun ou de validations, pour juger des savoirs acquis.

5. Une Journée d'études organisée par l'IRDP sur les apports des jeux à la construction des savoirs mathématiques s'est déroulée en novembre dernier. Elle a mis en évidence le rôle prépondérant du maître dans l'organisation et la gestion de ce type d'activité pour en atteindre les objectifs mathématiques. Le rapport sur cette journée paraîtra prochainement et sera présenté dans un prochain numéro de *Math-Ecole*.

Ellipse, ovale, ove

Antoine Gaggero

J'ai abordé ce thème avec des élèves de huitième année, dans le cadre de l'option chapitres choisis de mathématiques. J'ai choisi d'étudier ces courbes particulières car elles conduisent à effectuer des pliages, à utiliser le curviligne, le logiciel cabri géomètre, à collaborer pour utiliser la méthode dite du jardinier. De plus, les courbes non constructibles avec le compas intriguent beaucoup les élèves. Ce thème est modulable selon les niveaux de compétence des élèves des différentes sections secondaires.

Je leur ai demandé de fournir un dossier contenant différents éclairages du sujet:

- Construction de l'ellipse par pliage.
- Utilisation de cabri géomètre.
- Construction de l'ellipse en utilisant la définition.
- Construction de l'ellipse par dessin technique.
- Construction de l'ellipse par la méthode dite du jardinier.
- Construction de courbes apparentées: l'ove et l'ovale.

Avec plus ou moins d'enthousiasme et de succès, tous les élèves se sont mis au travail. En voici le compte rendu.

1. Construction de l'ellipse par pliage.

Consignes:

- Découper un disque de diamètre quelconque et désigner le centre par la lettre a.
- Placer dans le disque un point b.
- Répéter le plus de fois possibles la manipulation suivante:
  Faire correspondre un point c du bord du disque avec le point b, plier et marquer le pli avec un trait au crayon.

Les élèves obtiennent cette figure. Les plis successifs font gondoler le disque en papier et la photo n'apparaît pas plane:

2. Utilisation de cabri géomètre.

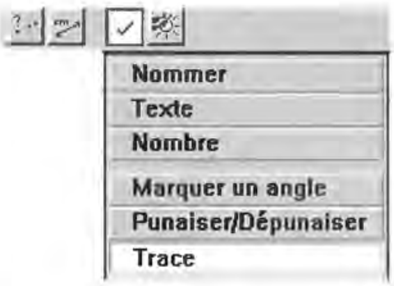
Démarche

- Dessine un cercle de centre a et de 6cm de rayon, puis place un point b à l'intérieur de ce cercle. Place ensuite un point c appartenant au cercle.

- Clique sur la quatrième icône puis sélectionne la fonction «milieu». Tu désigneras le point b et le point c avec la souris. Le logiciel place automatiquement le point milieu m de bc.

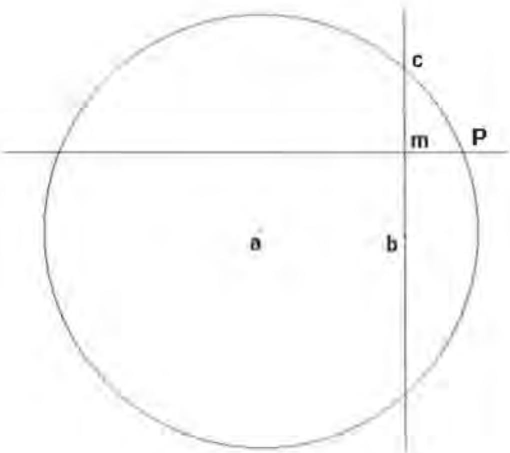
- Construis la perpendiculaire P au segment bc passant par m en effectuant la sélection ci-contre, puis clique sur m pour la dessiner.

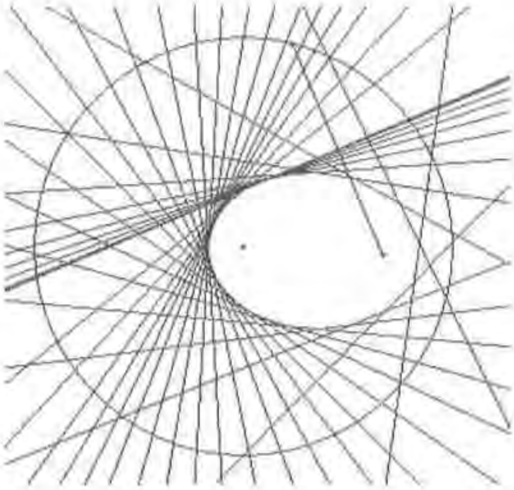
- Sélectionne trace, puis clique sur la droite P.



- Saisis le point c que tu feras tourner. Observe la trace laissée par P.

Voici la construction avant de faire tourner le point c et le résultat après rotation du point c avec la figure engendrée par la trace de la droite P. On obtient bien le même résultat que par pliage.



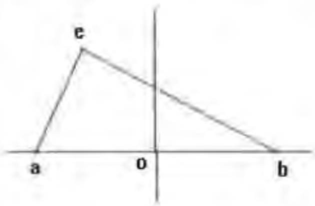


3. Construction de l'ellipse utilisant une de ses définitions.

Définition

Un point e appartient à l'ellipse s'il satisfait la condition:

ae + be = constante
a et b sont les foyers de l'ellipse

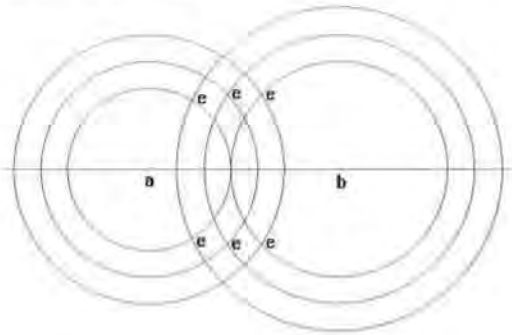


Cette définition étant acquise, les élèves ont construit l'ellipse à partir de ce problème:

Dessine sur une droite deux points a et b distants de 8 cm. Construis le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux points a et b est 12 cm. Relie ensuite ces points e avec le curviligne.

Avec cette activité les élèves découvrent que les points de l'ellipse sont formés par les intersections des cercles, mais que ces points e ne peuvent être reliés au compas.

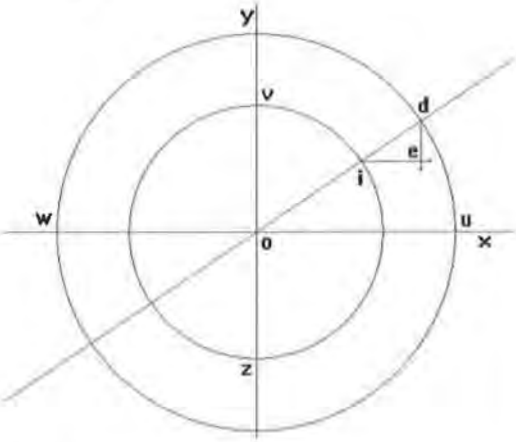
Ils découvrent et apprennent ainsi la manipulation du curviligne.



4. Construction de l'ellipse par le dessin technique.

Méthode

- Dessine deux cercles concentriques de centre o ainsi que deux axes orthogonaux ox et oy.
- Dessine des diamètres tous les 15° en partant de l'axe ox.
- Chaque diamètre intercepte le cercle intérieur en i et le cercle extérieur en d.
- Trace un segment parallèle à ox issu de i et un segment parallèle à oy issu de d. Le point d'intersection de ces deux segments est un point e de l'ellipse.
- u, v, w et z sont des points de l'ellipse. Relie ensuite tous ces points avec le curviligne.



5. Construction de l'ellipse par la technique du jardinier.

Méthode

- Sur une feuille blanche placer deux points a et b.
- Attacher les extrémités d'un fil de longueur constante à deux aiguilles que l'on plantera en a et b.
- Parcourir avec un crayon, le fil tendu, toute la trajectoire possible.

Le résultat est une ellipse.
La réaction de l'élève-informaticus fut claire et nette : à l'époque de l'informatique on n'emploie plus des méthodes aussi ancestrales !!! Il est vrai que pour obtenir un résultat acceptable, mais non parfait, il faut se concentrer, travailler à deux et ne pas hésiter à recommencer.

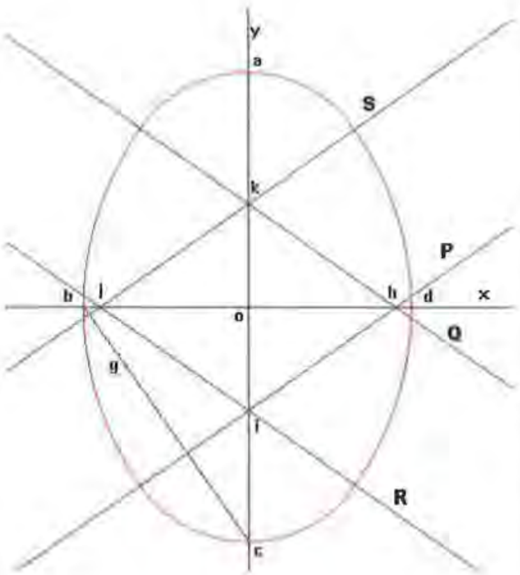
6. L'ovale

C'est une courbe souvent confondue visuellement avec une ellipse. Cependant, l'ovale est constructible avec des arcs de cercle.

Méthode

- Dessiner deux axes perpendiculaires se croisant en o. Placer les points a, b, c et d qui sont des points de l'ovale et tels que (voir le dessin ci-dessous):
  oa = oc = 5cm et ob = od = 3.5 cm
- Tracer le segment bc, puis construire le point g sur le segment bc tel que:
  bg = oa – ob = 1,5 cm
- Construire la médiatrice de gc et placer le point h sur l'axe ox et le point i sur l'axe oy.
- Le point j est le symétrique de h et k le symétrique de i par rapport au point o.
- Tracer les droites hk, kj, ji et ih.
- h, i, j, k sont les centres des quatre arcs de cercle qui forment l'ovale et les droites S, P, Q, R sont les limites de ces arcs.

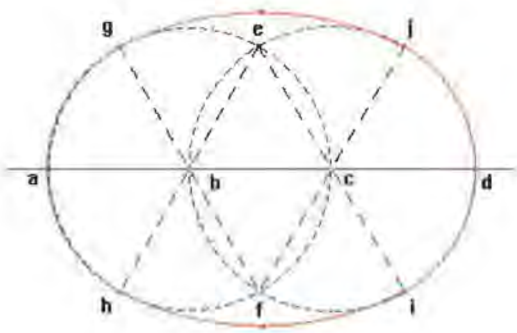
Tracer ces quatre arcs de cercle pour obtenir l'ovale.



7. Ovale elliptique

Méthode

- Tracer une droite sur laquelle on place les points a, b, c, d à intervalles réguliers.
- Tracer les deux cercles de centres b et c et de rayon bc.
- Construire par symétries centrales les points g, h, i, j:
  par la symétrie du centre b, h est l'image de e et g est l'image de f;
  par la symétrie du centre c, i est l'image de e et j est l'image de f;
- Construire les segments gf, ei, eh, jf.
- Tracer l'arc de cercle gj de rayon fg et de centre f ainsi que l'arc de cercle ih de rayon eh et de centre e.
- La figure formée par les quatre arcs hg, gj, ji et jh est un ovale elliptique.

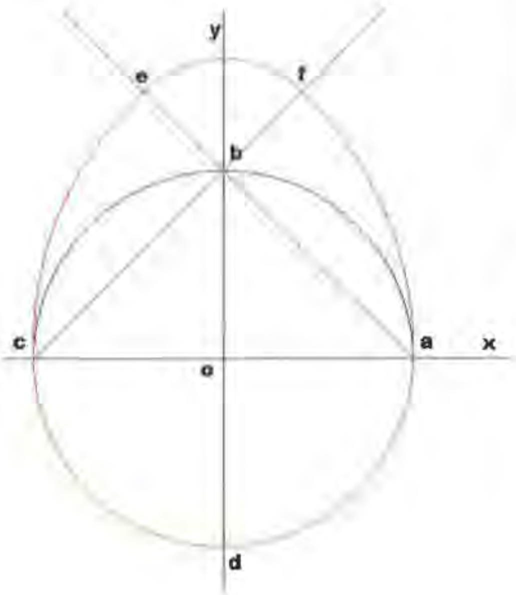


8. L'ove

Méthode

- Tracer les axes perpendiculaires ox et oy
- Dessiner un cercle de centre o et de rayon 4cm.
- Placer les points d'intersections a, b, c, d du cercle avec les axes.
- Tracer les droites ab et cb qui sont les limites des trois arcs de cercle ce, ef et fa.
- Tracer l'arc ce de centre a et de rayon ac.
  Tracer l'arc ef de centre b et de rayon be.

Tracer l'arc fa de centre c et de rayon ac.
- Le demi-cercle adc complète la figure qui se nomme ove.



9. Commentaires didactiques

A la fin de cet aperçu sur le thème de l'ellipse, qui a occupé la classe pendant 12 périodes, il me paraît important de revenir aux objectifs du travail effectué par les élèves, sous l'angle de leurs apprentissages mathématiques.

- *A propos de la méthode par pliage*

Cette première partie est une activité manuelle, où les instruments de dessin géométrique ne sont pas essentiels (le disque peut être découpé par report d'un modèle, sans utiliser de compas, les droites peuvent être marquées sans règle, à l'intérieur des plis).

Pourtant l'élève y apprend déjà des choses importantes dans le domaine du dessin géométrique, de la géométrie et des mathématiques en général:

- Il apprend à organiser ses pliages de manière systématique, au prix parfois de plusieurs essais, car il ne connaît pas encore le résultat final. Il doit donc observer sa progression pour voir dans quelle région du disque il se passe quelque chose d'intéressant. Il devra alors concentrer ses plis dans cette région et se rendre compte que le résultat ne doit rien à la magie mais qu'il y a une propriété mathématique cachée. C'est sa première approche du concept d'enveloppe de courbe en géométrie.

- Il aborde la notion d'infini au travers de questions du genre «quand dois-je m'arrêter?», «est-ce mieux si j'en trace beaucoup?», «comment puis-je arrondir ce coin?» ou encore «pourrais-je continuer sans jamais m'arrêter?».

- Il apprend, par le geste, les caractéristiques d'une médiatrice: le pli est entièrement déterminé par les deux points b et c dès qu'ils sont l'un sur l'autre, ce pli se situe exactement «entre» les deux dans une direction bien déterminée (qui sera reconnue plus tard comme perpendiculaire au segment bc), ce pli partage équitablement l'espace entre les deux points, même si les deux parties du disque qu'il détermine ne sont pas égales: le demi-plan contenant b, se rabat sur le demi-plan contenant c, ou vice-versa...

- *A propos de la construction informatique*

Le passage de la manipulation à la construction par cabri-géomètre exige un saut conceptuel très grand:

1) Le disque de papier est visualisé par un cercle.

2) Le pli est une médiatrice à l'écran.

3) Les manipulations sont traduites en instruc-

tions données dans un langage informatique exigeant un apprentissage de concepts abstraits qu'il faut relier à la réalité comme la médiatrice, le milieu d'un segment, la perpendiculaire.

4) La machine permet de générer rapidement une infinité de points c alors que manuellement ce travail serait long et fastidieux pour n'aboutir qu'à une construction approximative.

5) Grâce à la machine, même le plus maladroit peut visualiser une courbe bien faite à condition de savoir programmer ou de suivre le listing donné par le professeur!

– *A propos de la construction point par point*

Le passage de la manipulation à la construction de l'ellipse sur papier, fait appel à des notions et connaissances apprises dans d'autres thèmes: la médiatrice, le milieu d'un segment, la perpendiculaire, la tangente. C'est l'occasion pour les élèves de se remémorer des techniques de constructions avec règles et compas et de renforcer et d'enrichir des concepts géométriques en reliant les différents contextes d'où ils émergent.

Au cours de cette construction, la question de la précision et de la propreté du dessin géométrique n'est pas une exigence «externe» venant du maître, elle est en quelque sorte «interne», sous la responsabilité de chaque élève. Celui qui estime que sa «courbe» ne lui convient pas, par rapport à celle de ses camarades ou celle de la construction avec Cabri géomètre, peut recommencer sa construction en s'efforçant d'améliorer son maniement des instruments de dessin géométrique, dans les limites de ses compétences manuelles. Il est bien entendu que pour certains élèves, au comportement aléatoire, c'est le maître qui fixe les objectifs de propreté à atteindre.

– *A propos de la construction de courbes apparentées*

- Les élèves découvrent des formes qui visuellement ressemblent à une ellipse mais qui sont constructibles par arcs de cercle.
- Les élèves apprennent à lire un mode de construction.

– *Autres développements possibles*

- Certains élèves demandent si on peut construire d'autres courbes par pliage. On peut leur proposer la construction de la parabole.

- Certains élèves très curieux peuvent être orientés sur le Net pour découvrir d'autres informations sur ces courbes particulières. Le mot clé «ellipse» suffit pour découvrir des centaines d'articles sur ce sujet.

- D'autres élèves, déjà soucieux de leurs choix professionnels, peuvent être aiguillés sur des sites d'informations appropriés pour satisfaire leur curiosité ou être encouragés à faire des stages. Ce développement n'a bien sûr rien à voir avec les mathématiques, mais avec le travail quotidien du maître secondaire.

Conclusions

Les élèves aiment bien ce thème car il fait une synthèse des techniques de construction différentes et variées, comme la manipulation, le dessin assisté par ordinateur et la construction à l'aide des instruments de dessin géométrique. Ils peuvent comparer ces différents modes de travail, s'engager dans celui qui leur convient le mieux et qui leur apparaît le plus efficace comme illustration des concepts géométriques sous-jacents.

Les aspects esthétiques de ce thème participent aussi de son intérêt: les courbes qui apparaissent au fur et à mesure de la construction de leurs points ou de leurs tangentes sont harmonieuses, régulières et surprenantes.

Je prends le risque d'être ringard en prétendant qu'en ayant travaillé sur ce thème, les élèves ont amélioré leur technique de dessin, même si cette acquisition est éphémère pour certains!

Cette proposition de découverte de courbes, qu'on n'est pas encore en mesure de traiter analytiquement aux premiers degrés de l'école secondaire, est de nature à remettre à l'honneur, auprès des élèves et des maîtres, une approche expérimentale d'objets géométriques et de l'étendre à d'autres concepts mathématiques.

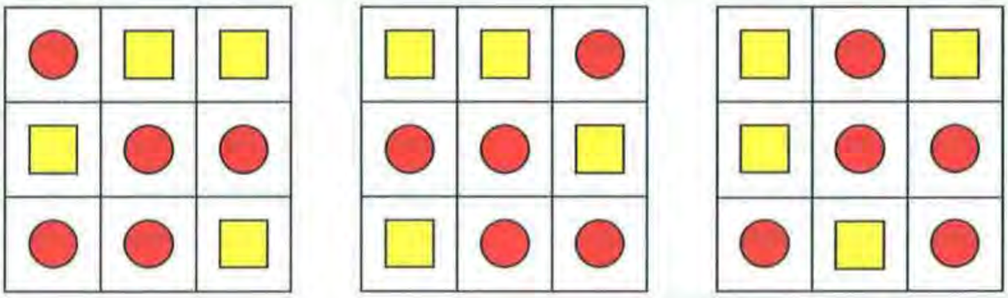
Inventaire

Combien y a-t-il de possibilités différentes, à une rotation près, de disposer 4 carrés jaunes et 5 ronds rouges, chacun dans une des cases d'une grille carrée de 3 x 3?

Exemple:
Par «à une rotation près», on entend que deux dispositions qui pourraient être superposées exactement par une rotation ne représentent qu'une même possibilité, (comme la figure de gauche et la figure de droite ci-dessous, images l'une de l'autre par une rotation d'un quart de tour par exemple).

En revanche, deux dispositions qui seraient «superposables», après d'éventuelles rotations préalables, par une symétrie axiale représentent deux possibilités différentes, (comme les figures de gauche et du centre ou comme celles de droite et du centre).

Parmi les trois figures ci-dessous, il n'y a donc que deux possibilités recherchées.



[ndlr] Si nous vous proposons aujourd'hui cet inventaire, c'est en vue du prochain numéro de *Math-Ecole*, où vous trouverez un jeu (Torticolis) qui exploitera les solutions que vous aurez trouvées. Et en attendant, il y a de quoi conduire une belle recherche exhaustive qui nécessite une «mémoire» rigoureusement organisée des possibilités trouvées.

Problème mathématique *Une pomme pour la récré* : Gros plan sur l'interprétation et le raisonnement mathématiques de quatre élèves

Lucie Mottier Lopez
Université de Genève

Rappelons que les moyens d'enseignement romands des mathématiques sont centrés sur la résolution de problèmes, avec la conception constructiviste que les élèves vont réorganiser la structure de leurs connaissances mathématiques de façon à résoudre ce qu'ils considèrent comme problématique. De plus, un grand nombre d'activités des moyens didactiques sont à réaliser en petits groupes. Cette proposition d'organisation sociale est fondée sur la conception néo-piagétienne que les interactions entre pairs stimulent le développement cognitif individuel. Ainsi, lors de la première phase de l'activité didactique, vue comme un temps de recherche, d'essais, de conjectures, de vérification, les élèves sont sensés développer une interprétation et un raisonnement mathématiques le plus souvent en interaction avec des pairs, mais sans guidage de la part de l'enseignant.

Les résultats du suivi scientifique de la mise en œuvre des moyens d'enseignement romands des mathématiques 1P-4P, assuré par l'IRDP[1], mettent en évidence, entre autres aspects, une adhésion des enseignants aux principes théoriques qui sous-tendent les moyens didactiques mis à disposition (par exemple, Mottier Lopez, 2001). Si la conception de l'apprentissage semble ainsi partagée et reconnue, l'enseignant, ainsi que toute personne intéressée par les processus d'enseignement et d'apprentissage en situation scolaire, peut légitimement s'interroger sur la façon dont les élèves travaillent en groupes. S'investissent-ils réellement dans les activités mathématiques? Quels interprétations et raisonnements mathématiques développent-ils tout au long d'une leçon? Dans quelle mesure la résolution est co-élaborée entre les élèves d'un même groupe? Quelle articulation peut-il y avoir entre des temps de recherche en groupes et des temps collectifs compte tenu de l'avancement différent des démarches de résolution des uns et des autres? etc.

Bien que l'enseignant puisse observer les interactions entre les élèves, interagir afin de prendre de l'information sur les procédures développées, organiser une mise en commun pour faire un état des lieux des différentes démarches déployées, il a rarement l'occasion de suivre de façon soutenue l'ensemble des travaux des enfants, notamment s'il souhaite que le problème reste à leur charge.

Le but de cet article est d'illustrer – et ainsi de « donner à voir » – la résolution d'un problème relativement complexe dans les conditions ordinaires d'une classe de 4P. L'objectif principal est de tenter d'analyser le type d'interprétation et de raisonnement mathématiques de quelques élèves dans des organisations et des dynamiques sociales différentes au cours d'une même leçon: un travail en dyade lors d'une première phase de résolution de problèmes, une mise en commun sous forme

1. Sous la conduite de Chantal Tièche Christinat (1999) de l'Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP).

d'interaction semi-collective[2] et une reprise de l'activité en dyade. Pour ce faire, l'ensemble des interactions entre l'enseignant et les élèves au cours d'une leçon a été enregistré et protocolé, ainsi que les interactions entre les élèves pendant les phases de travail en dyades. La leçon a été suivie d'un entretien avec l'enseignant. Les traces écrites de la résolution du problème de chaque élève et des notes de terrain complètent le corpus de données.

La typologie des classes de problèmes définie par Vergnaud (1981, 1988) a servi, d'une part, à l'analyse *a priori* de l'activité mathématique *Une pomme pour la récré* (4P; LM 179; LE 81). D'autre part, elle a fondé l'analyse du raisonnement mathématique des élèves tel qu'il s'est effectivement développé au cours des interactions dyadiques et lors de la mise en commun. Des observations complémentaires portent sur l'interprétation faite par les élèves entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques développées (Voigt, 1994).

Certaines caractéristiques et quelques constats mis en évidence par les analyses sont discutés en fin d'article,. avec notamment l'interrogation de la relation entre les processus cognitifs et sociaux dans l'activité mathématique des élèves. En effet, il est apparu indispensable au fil de l'analyse effectuée de considérer la dynamique interactive propre à chaque dyade (Gilly, Fraisse, Roux, 1988), amenant la question de la pertinence de dissocier l'activité cognitive des élèves des processus sociaux dans lesquels cette activité se développe.

1. L'activité *Une pomme pour la récré* (4P; LM 179; LE 81)

L'activité observée s'inscrit dans le module 4 *Des problèmes pour connaître la multiplication*, dans le champ *Reconnaître des problèmes multiplicatifs et divisifs*. Le livre du maître stipule que la tâche consiste à résoudre une situation de partage comportant des opérations successives. Le problème est formulé en ces termes aux élèves:

Une classe a reçu un carton plein de pommes. Quel jour de la semaine le carton sera-t-il vide ?
On dispose des renseignements suivants :

- *le carton contient 185 pommes*
- *il y a 22 élèves dans la classe*
- *la distribution des pommes commence un lundi*
- *chaque élève reçoit une demi-pomme par jour*
- *il y a 5 jours d'école par semaine*

En admettant que le problème soit interprété par les élèves en terme de situation de partage tel que le suggère le livre du maître[3], une résolution «experte» impliquerait une suite de multiplications et divisions. Mais analysons également ce problème sur la base des différentes classes de problèmes multiplicatifs définies par Vergnaud (1981, 1988).

2. Dans la leçon observée, quatre dyades sont concernées par la même activité mathématique et sont réunies pour la mise en commun.

3. Intention didactique à confronter ensuite avec les procédures effectivement déployées par les élèves.

Dans le problème *Une pomme pour la récré*, on distingue plusieurs «grandeurs»: les quantités de pommes, d'élèves, de jours, de semaines. Chacune de ces «grandeurs» est en relation, plus ou moins directe, avec les autres. Ces relations relèvent toutes de la proportionnalité. On se trouve donc en présence de quatre suites proportionnelles, chacune dans son «espace de mesures». Ces suites sont encore incomplètes; l'énoncé ne donne explicitement qu'une valeur pour chaque «espace de mesures» et les «1» sont donnés implicitement (*5 jours par semaine* doit être compris comme *5 jours pour 1 semaine* et *chaque élève reçoit une demi-pomme par jour* comme *1 élève reçoit une demi-pomme pour 1 jour*):

Tableau général[4]

Nb d'élèves	Nb de pommes	Nb de jours	Nb de semaines
1	1/2	1	
22		1	
	185		
		5	1

La relation principale en jeu implique les deux espaces de mesures «nombre de jours» et «nombre de pommes». Le tableau de correspondance suivant, partie du tableau précédent, illustre cette relation de proportionnalité entre les quatre termes-clés qui permettront d'arriver à la solution du problème:

Tableau pommes – jour

Nb de pommes	Nb de jours
?	1
185	?

Avant de pouvoir compléter ce tableau, il faut déterminer l'un des deux nombres encore inconnu. Ce sera la première étape de la résolution consistant à interpréter les données «*22 élèves dans la classe; une demi-pomme distribuée par jour à chaque élève*», afin d'établir le nombre total de pommes correspondant à 1 jour.

Tableau élèves – pommes, en 1 jour

Nb d'élèves	Nb de pommes	Nb de jours
1	1/2	1
22		1

4. Ce tableau et les suivants ne sont là que pour faciliter la lecture et mettre en évidence les relations entre les grandeurs en jeu. Ce type de représentation n'est pas un objet d'enseignement et pas nécessaire, pour les élèves, à la résolution du problème.

Il y a plusieurs manières de trouver le nombre de pommes, pour un jour, correspondant à 22 élèves:

- en utilisant la relation fonctionnelle «nb d'élèves —> nb de pommes», qui est «multiplier par 1/2» ou «diviser par 2» (passer de 1 élève à 1/2 pomme), ce qui donne 11 pommes.
- en reproduisant une opération du premier espace de mesures (les nombres d'élèves) dans le deuxième espace de mesures (les nombres de pommes) – ce que Vergnaud appelle «isomorphisme de mesures» et les mathématiciens désignent par «propriété de la fonction linéaire kf(x) = f(kx)»: pour passer de 1 à 22 élèves, on multiplie par 22. On multiple de la même manière 1/2 pomme par 22, ce qui donne 11 pommes, tout comme dans l'utilisation de la relation fonctionnelle. Il y aurait également des procédures intermédiaires consistant à insérer des lignes supplémentaires dans le tableau de correspondance, par exemple: 2 élèves —> 1 pomme, 20 élèves —>10 pommes...

Dans le cas où la «division par 2» serait choisie, on se trouve dans la situation suivante:

Division 1:

Nombre de pommes distribuées chaque jour

Dividende	22	Le nombre des élèves de la classe
Diviseur	2	Le nombre d'élèves pour une pomme
Quotient	11	Le nombre de pommes distribuées chaque jour

Une fois trouvée la valeur correspondant à 1 jour, on peut retourner au tableau laissé en suspens, complété maintenant par le «11» dans la colonne «pommes» en regard du «1» de la colonne «jours»:

Nb de pommes	Nb de Jours
11	1
185	?

Les élèves ont de nouveau la possibilité d'appliquer deux types de calcul relationnel, soit par isomorphisme de mesures – reproduction dans la colonne de gauche de ce qui se passe dans la colonne de droite – soit par la relation fonctionnelle qui fait passer d'une colonne à l'autre – une «division par 11» (passage de 11 à 1 dans la première ligne, de gauche à droite). Comme la distribution des pommes se fait jour par jour, le travail se fait sur des nombres entiers et on est dans le cas d'une division euclidienne:

Division 2:

Nombre de jours de distribution possible des pommes

Dividende	185	Le total des pommes dans le carton
Diviseur	11	Nombre de pommes distribuées chaque jour (quotient de la 1ère division)
Quotient euclidien	16	Nombre de jours de distribution possible de pommes
Reste	9	

Une des difficultés du problème est que les élèves de 4P ne connaissent pas encore d'algorithme pour cette opération et qu'ils sont par conséquent obligés de revenir au sens profond de la division euclidienne qui est en quelque sorte un «ajustement» du dividende par le multiple du diviseur qui lui est inférieur et le plus proche. Dans notre cas: 185 = ... x 11 + r (où r est un reste, inférieur à 11). Bien qu'ils aient peut être l'idée de partage, les élèves vont ainsi partir de la relation fonctionnelle «multiplier par 11» qui apparaît dans la première ligne du tableau (de gauche à droite). Le «11» étant admis comme image de «1», ils vont travailler ensuite dans l'espace de mesures des pommes (colonne de gauche) par des additions successives ou multiplications en se posant la question «Combien de fois 11 pommes pour arriver à 185 pommes?».

Une autre difficulté est que le dividende 185 n'est pas un multiple de 11, et que les élèves vont devoir considérer le reste pour pouvoir répondre à la question du problème.

Nb de Jours	Nb de pommes
1	11
...	...
16	176
16*	185
17	187

* avec un reste de 9

Cela se traduit dans le tableau de correspondance par les multiples de 176 et 187 qui «entourent» 185.

Les élèves doivent encore interpréter les 16 jours de distribution possible de pommes en termes de semaines de 5 jours. Comme précédemment, ils ont le choix entre plusieurs méthodes, dont l'une serait l'application de la relation fonctionnelle qui fait passer de l'espace de mesures des jours à celui des semaines par la «division par 5».

Tableau jours – semaines

Nb de jours	Nb de semaines
5	1
16	

Division 3:

Nombre de semaines de distribution de pommes

Dividende	16	Nombre de jours de distribution possible (quotient de la 2ème division)
Diviseur	5	Semaines de 5 jours
Quotient euclidien	3	Nombre de semaines de 5 jours
Reste	1	

Comme précédemment, en l'absence d'algorithme, cette division euclidienne s'effectue par la relation fondamentale 16 = (3 x 5) + 1.

Mais comme l'analyse des procédures des élèves le montrera par la suite, cette recherche du nombre de semaines peut être déjà incluse dans la recherche du nombre de jours, lorsque le tableau «pommes/jour» est développé par des tranches de «55 pommes en 5 jours».

Il est à noter que les quotients des divisions 1 et 2 jouent des rôles importants et différents dans l'interprétation et la résolution du problème. L'interprétation des données *«il y a 22 élèves dans la classe; chaque élève reçoit une demi-pomme par jour»* implique une première division dont le quotient sert ensuite de diviseur à la division du nombre total de pommes. Quant au quotient de la division 2, il permet d'identifier le dividende de la division 3 visant à calculer le nombre de semaines de distribution de pommes.

Les restes ont également toute leur importance dans l'interprétation du problème. Le reste (1) de la division euclidienne 3 «16⌊ 5» permet de dire qu'il y a encore un jour de distribution après les 3 semaines de 5 jours. Autrement dit, il s'agit du lundi de la 4ème semaine en considérant que *«la distribution des pommes commence un lundi»*. Le reste (9) de la division 2 «188⌊ 11» indique, quant à lui, qu'il y a encore 9 dernières pommes à distribuer le mardi de la quatrième semaine, tout en précisant que ce jour-là, 4 élèves ne recevront pas de pommes.

Bien que l'intention didactique du problème *Des pommes pour la récré* vise à «partager des collections selon des règles plus ou moins complexes» (Danalet, Dumas, Studer, & Villars-Kneubühler, 1998), on peut s'attendre à des procédures diverses de résolution, telles que par exemple:

- une suite d'additions réitérées, plus le reste: 11 + 11 + 11 ... + 9
- des combinaisons d'additions en fonction des valeurs «quantité de pommes/jour» et «quantité de pommes/semaine»: 55 + 55 + 55 + 11 + 9
- une multiplication suivie de l'addition du reste: (16 x 11) + 9 (relation fondamentale de la division euclidienne)
- une combinaison de multiplications et d'additions: (3 x 55) + (1 x 11) + 9
- des soustractions successives:
  185 – 11 – 11 – 11 ... – 9;
  185 - 55 - 55 - 55 - 11 - 9
- ...

Compte tenu de cette analyse du contenu mathématique de l'activité, observons maintenant comment deux dyades résolvent le problème au cours de la leçon.

2. Déroulement de la leçon de mathématiques

L'enseignant a choisi de partager la classe en trois groupes de base de 8 élèves. Chaque groupe réalise une activité mathématique différente sur le temps d'une leçon d'environ 50 minutes. Un «tournus» est organisé sur plusieurs séances. Le groupe de base concerné par l'activité Une pomme pour la récré est subdivisé en quatre dyades. L'article porte plus particulièrement sur les activités de deux dyades:

- Sylvie (niveau scolaire élevé[5]) et Anna (niveau scolaire faible)
- Jean (niveau scolaire faible) et Béatrice[6] (niveau scolaire moyen à faible).

5. Qualification des niveaux scolaires des élèves en mathématiques sur la base de l'évaluation de l'enseignant.

6. Prénoms modifiés.

Phases du déroulement de la leçon

Organisation du travail par l'enseignant	Première phase de résolution en dyades	Mise en commun semi-collective	Reprise de l'activité en dyades
2 minutes (temps arrondi)	16 minutes	10 minutes	26 minutes

Une fois le «tournus» terminé, l'activité *Une pomme pour la récré* s'est poursuivie lors d'une séance qui concernait tous les élèves de la classe. Une phase de clôture sous forme de mise en commun collective a eu lieu, servant à discuter les caractéristiques des différentes procédures de résolution.

3. Première phase de résolution de problèmes

Une analyse qualitative et détaillée des interactions entre les élèves et de leurs traces écrites a été effectuée, dans le but d'inférer l'interprétation et le raisonnement mathématiques des élèves dans l'élaboration de la procédure de résolution de problèmes lors du travail en dyades.

3.1 Dyade de Sylvie et Anna

D'emblée, la situation est identifiée par les deux élèves comme une situation de partage. Anna énumère plusieurs possibilités de diviseur de 185 en citant les données chiffrées présentes dans l'énoncé du problème. Elle n'argumente pas ses propositions. Sylvie, quant à elle, énonce la division «185 : 11», témoignant qu'elle a déjà effectué mentalement soit la division de 22 par 2, soit la multiplication lacunaire «2 x ... = 22», permettant de connaître le diviseur de 185. Sans tenir compte des propositions multiples de sa camarade, Sylvie poursuit en suggérant de rechercher le nombre de pommes mangées dans une semaine de 5 jours. Elle formule d'abord l'interprétation mathématique «5 x 11» puis explique son raisonnement à Anna: *«On va faire quelque chose fois quelque chose pour arriver à 185»*. Anna collabore à la proposition de Sylvie en formulant la réponse intermédiaire 55.

Les deux élèves poursuivent en multipliant par deux le nombre de pommes mangées par semaine: «55 x 2 = 110». Sylvie propose ensuite une addition: «110 + 55». Anna reformule par la multiplication: «55 x 3». Sophie acquiesce. On observe ici une alternance d'interprétation entre une suite d'additions réitérées «55 + 55 + 55» et sa correspondance multiplicative «3 x 55».

«Cela fait déjà 3 semaines» commente Sylvie. Cet énoncé montre les liens qu'elle effectue entre les opérations mathématiques développées et son interprétation des données du problème. Anna ne comprend pas la remarque de sa camarade. Sylvie lui explique: *«Oui, 3 semaines. 55, c'est si on mange des pommes en 1 semaine. La classe consomme des pommes en 1 semaine. Alors après, on fait x 3. Ça fait 3 semaines»*. *«Mmm»* répond Anna.

Sylvie poursuit en signalant qu'il ne sera plus possible d'ajouter encore une fois 55. Elle propose en conséquence de ne plus raisonner en terme de semaine, mais en terme de jour: *«Si tu rajoutes encore 55, ça fera trop gros [...] alors il faut rajouter jour par jour»*. Anna cherche à comprendre: *«Alors tu veux dire que si on fait 4 x 55, ça serait déjà trop gros?»*. Sylvie confirme: *«Ouais, il n'y aura pas assez de pommes [...] donc il faut prendre 11 pommes»*. *«Pourquoi 11 pommes?»* demande Anna. Sylvie explique: *«Si tu veux, on peut* *toujours faire + 11 [...] On ne peut pas ajouter 1 semaine de plus, mais on peut rajouter quelques jours de plus. Tu vois?»*.

Le calcul «165 + 11 = 176» est formulé. Sylvie demande à Anna d'énoncer la suite de la résolution. Anna propose de rajouter un jour, témoignant ainsi qu'elle a compris le raisonnement de Sylvie. Elle objecte toutefois: *«Ce sera sûrement trop gros»*. Sylvie admet. Après un long moment de silence, les deux élèves constatent qu'il reste 9 pommes. Sylvie verbalise son raisonnement: *«Attends, tu as déjà 3 semaines [...] Il faudrait mettre la 4ème semaine avec 176 [...] Le lundi on va manger 176 pommes, il en reste 9. Alors le jour d'après, on va manger ces 9 pommes et ce sera donc terminé [...] Et il n'y aura même pas une pomme pour tous les élèves»*. Tout au long de ce raisonnement, Anna acquiesce régulièrement: *«Oui, mm»*. L'enseignant annonce la mise en commun.

Procédure de résolution de Sylvie et Anna

22 : 2 = 11 185 : 11	Identification du diviseur (la valeur correspondant à 1 dans la relation «nombre de jours» «nombre de pommes»), afin de trouver le nombre de pommes consommées par jour.	Calcul de la valeur «quantité pommes/jours» et de la valeur «quantité pommes/semaine».
11 x 5 = 55	Calcul du nombre de pommes consommées par semaine; ou calcul d'un «paquet» qui permet d'arriver plus rapidement à la solution.	
2 x 55 = 110 110 + 55 = 3 x 55 = 165	Additions réitérées; multiplication de la quantité pommes/semaine.	Additions successives de différentes quantités de pommes pour atteindre 185 et interprétation des quantités en terme de nombre de semaines et jours.
165 + 11 = 176	Addition de la quantité pommes/jour	
176 + 9 = 185	Addition du reste, quantité pommes < quantité pommes/jour.	

Bien que la situation de partage soit identifiée par les élèves, ces derniers choisissent une résolution par additions successives des quantités de pommes «semaine», «jour» et «reste». La multiplication formulée remplace la suite d'additions réitérées de la quantité pommes/semaine. On observe que les élèves développent une procédure «par isomorphisme de mesures», dans le sens qu'elles réfléchissent en terme de «nombre de fois» d'une quantité de pommes définie. Le dénombrement de chaque quantité permet ensuite d'interpréter le nombre de jours et semaines pour répondre à la question du problème. On note que la relation entre les mesures «nombre de jours et semaines» et «quantité de pommes distribuées» reste à l'esprit de Sylvie qui ajuste la valeur des nombres à additionner pour atteindre 185 au fur et à mesure de la résolution.

Globalement on observe encore que Sylvie fait régulièrement une interprétation entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques successives effectuées au cours de la résolution du problème (Voigt, 1994). Anna semble, quant à elle, éprouver des difficultés à établir des liens entre les calculs effectués sous la guidance de Sylvie vue comme l'autorité mathématique du groupe (Cobb, 1995) et les données du problème.

3.2 Dyade de Jean et Béatrice

Les vingt premiers tours de parole servent à nommer les différentes variables du problème, sans un établissement explicite d'une relation mathématique entre les données. Ensuite, Jean formule une première proposition: *«On va faire combien pour aller jusqu'à 185»*. Béatrice précise: *«Ouais, combien de x 22»*. *«Dans 185»* approuve Jean qui poursuit néanmoins en objectant: *«Tu divises 22 plutôt [...] parce que chaque élève reçoit une demi-pomme par jour»*. *«Ben tu fais 11 pommes»* répond Béatrice qui accepte l'argumentation de son camarade. Ainsi, initialement, Jean et Béatrice semblent partager la même interprétation du problème: il faut diviser 22 par 11, compte tenu que les élèves mangent une demi-pomme par jour. Toutefois, l'ensemble des interactions suivantes va porter sur cette première assertion qui sera finalement réfutée et qui donnera lieu à des interprétations et raisonnements différents entre les élèves. En effet, Jean se fixe sur le fait qu'il y a 22 élèves dans la classe:

Jean	*Chaque élève reçoit une demi-pomme par jour.*
Béatrice	*Ouais. Alors attends, tu fais 11 (silence) 11 pommes (silence) 11 pommes.*
Jean	*Ah ! Parce que si tu partages par la moitié, ben tu donnes à un élève et puis à un autre. Après, on reprend une pomme et puis on la partage par la moitié. C'est comme si c'était la pomme entière. (silence)*
Béatrice	*Ben ouais effectivement. Si on la coupe par la moitié, ça fait* ***11*** *pommes par jour, donc ça fait 11, + 11, + 11, + 11, + 11. (silence)*
Jean	*Il faut 22 élèves.*
Béatrice	*Oui, mais comme il est dit qu'il faut la* ***moitié*** *d'une pomme...*
Jean	*Alors si tous les élèves veulent une pomme, ça doit pas faire 11. Ça va faire 22. (...) Si c'est une demi-pomme, si c'est une moitié, ben ça va faire 1 élève, 1 élève, 1 élève, 1 élève, comme ça jusqu'à 22. Un jour, ils reçoivent une demi-pomme, le 2ème jour, encore une demi-pomme, le 3ème, le 4ème jusqu'à ...*

Une hypothèse possible est que Jean éprouve des difficultés à identifier une des deux mesures de la relation multiplicative, à savoir le nombre de pommes distribuées par jour. Jean reste centré sur la quantité d'élèves dans la classe, vue comme la valeur à réitérer pour atteindre 185. D'ailleurs plus tard, il demandera encore: «*Bon alors on fait combien pour aller jusqu'à 185? Combien de 22 pour aller jusqu'à 185?*».

Les arguments de Jean parviennent à déstabiliser Béatrice, bien qu'elle ne semble pas comprendre le raisonnement de son camarade. Elle propose une nouvelle interprétation:

Béatrice	*Mais c'est une pomme ? Une demi ? Ou la moitié d'une pomme ?*
Jean	*J'ai dit une **demi**-pomme.*
Béatrice	*Ça fait une pomme et puis la moitié.*
Jean	*Ben oui.*
Béatrice	*Ah ! Moi je croyais que c'était la **moitié** d'une pomme. C'était tout. (...) Alors là il faut calculer, à chaque élève, combien ils prennent de pommes. Alors là c'est un peu plus difficile. (...) Parce que tu fais plus un et demi. Donc plus un et demi, ça fait trois (silence) donc ça fait trois et demi de pommes.*

A partir de ce moment, Béatrice interprète «une demi-pomme» comme «une pomme et demi» et elle propose une résolution du problème qui implique une suite d'additions réitérées «1,5 + 1,5 + 1,5 ... = 185», mise en relation avec le nombre d'élèves. Jean essaie de comprendre la proposition de sa camarade: «*Euh, une pomme et demi pour chaque personne. Le calcul là tu fais + 2, ça fait déjà 3.*» Béatrice tente d'expliquer son raisonnement: «*3 pommes, ça fait 2 élèves. Ensuite il y a 4 élèves. Tu comprends? [...] Ce que j'essaie de dire, c'est qu'un élève, il a une pomme, plus la moitié d'une autre. Ensuite il reçoit une autre pomme, alors ça fait 3 pommes, parce que 2 moitiés ensemble ça fait une pomme en entier. Alors ça fait 3 pommes pour 2 élèves.*». Malgré ses tentatives de comprendre le raisonnement de Béatrice, Jean objecte: «*Ah ouais, 3 pommes pour 2 élèves. Mais en fait j'ai pas compris. Moi je dis que c'est pour un élève chacun. Quand la maîtresse coupe, elle donne à un élève et un autre, Elle ne coupe pas en 3*». On observe ici que Jean comprend un tiers de pomme et non pas trois fois une demi-pomme comme le suggère sa camarade. L'incompréhension entre les élèves s'accentue.

Béatrice va encore expliquer longuement son raisonnement. L'enseignant est présent lors des derniers échanges entre les élèves. Il n'intervient pas directement, mais il décide d'organiser la mise en commun.

Début de la résolution de Jean et Béatrice

? x 22 = 185	Accord entre les élèves	
22 : 2 = 11	Accord initial, puis désaccord entre les élèves	
Jean	Béatrice	Les élèves ne parviennent pas à comprendre leur raisonnement respectif.
? x 22 = 185	1,5 + 1,5 + 1,5 + … = 185 ? x 1,5 = 185	
	Nb de pommes 3 3 3 …185	
	Nb d'élèves 2 2 2 …	

Malgré les efforts des deux élèves pour élaborer une solution conjointe, ils ne parviennent pas à développer une base commune de compréhension, notamment concernant l'interprétation des données relatives à la demi-pomme distribuée à chaque élève. Dans la mesure où cette opération est fondamentale pour la résolution du problème et que les élèves ne parviennent pas à surmonter cette difficulté, Jean et Béatrice paraissent peu avancés dans la résolution au début de la mise en commun, comparativement aux autres dyades. Mais il est à souligner que les échanges entre Jean et Béatrice ont été nourris, avec peu de dispersion de leur part sur des éléments hors de la tâche. La trace écrite des élèves, peu élaborée, n'est en ce sens pas représentative de leur engagement dans l'activité.

4. Phase de mise en commun

Une analyse du type d'activité des élèves et de l'enseignant a permis d'identifier les différentes phases du déroulement de la mise en commun.

Déroulement de la mise en commun

TdP	Phases	Paroles de l'enseignant
1 - 26	Enumération des variables de l'énoncé du problème	*Qu'est-ce que vous pouvez me dire sur les consignes ? Qu'est-ce qui est écrit dans le problème ? Qu'est-ce que vous avez remarqué ?*
27 - 85	Explication des différentes procédures de résolution projetées par les dyades	*Alors j'aimerais que vous puissiez expliquer en deux mots comment vous allez vous y prendre pour résoudre ce problème ? Vous n'avez pas nécessairement tous la même solution.*
85 - 103	Résumé des propositions des élèves	*Alors si on résume les différentes manières que vous avez de faire...*

On observe que la majeure partie des interactions porte sur l'explication des procédures de résolution projetées par les quatre dyades réunies. Suite à l'énumération des différentes variables de l'énoncé du problème, les élèves sont amenés à expliquer leur raisonnement. A noter que l'enseignant ne demande pas une explication complète et détaillée, mais seulement d'énoncer les grandes lignes. Le premier élève à prendre la parole est Jean qui soumet au groupe l'interprétation faite du problème avec sa camarade :

Jean	*On sait déjà que dans le carton il y a 185 pommes, et puis qu'il y a 22 élèves, et puis qu'ils reçoivent une demi-pomme par jour. (...) Ben quand ils reçoivent une demi-pomme, elle partage et puis elle en donne un à un élève et puis à un autre. Comme si la pomme était entière. Ben après on peut faire plus 3.*
Enseignant	*Alors qu'est-ce que vous en pensez les autres ?* (3 sec)
Thierry	*Ben j'ai pas tout compris.*
Jean	*C'est comme si t'as, par exemple, t'as le maître qui prend la pomme. Ben il la partage et après il donne a chacun à deux élèves. Si t'avais deux pommes, si tu partageais la pomme comme ça, ben ça peut faire 3.*
Thierry	*Ça fait pas 3, ça fait quatre !*

Jean obtempère.

Il est intéressant de relever que Jean est le porte-parole d'une partie du raisonnement de Béatrice, bien qu'il ne semblait pas d'accord avec sa camarade lors du travail en dyade. Béatrice, quant à elle, n'interviendra à aucun moment de la mise en commun pour rendre public son interprétation.

Sylvie est la suivante à expliquer son raisonnement. Elle le fait en un seul tour de parole: «*Ça fait la moitié de 22, parce que chaque élève ne reçoit pas une pomme entière. Et puis ensuite ça fait 11, la moitié de 22. Et puis combien de fois il y a dans une semaine. 11 fois 5*». «*Bien, OK*» répond l'enseignant qui valide ainsi rapidement la proposition de Sylvie. Puis, sans autres commentaires, il donne la parole au troisième groupe. Anna n'interviendra jamais pour expliquer le travail de son groupe.

Les élèves des deux dernières dyades s'expriment à leur tour. Ils expliquent des procédures non abouties, qui toutes deux ne demandent pas de diviser 22 par 2. En effet, les élèves choisissent de raisonner en considérant 22 fois une demi-pomme, ce qui implique de doubler le nombre total de pommes.

En fin de mise en commun, l'enseignant reformule les procédures des groupes. Une série de questions-réponses entre l'enseignant et les élèves permet de se mettre d'accord sur la valeur correspondant à 1 de la relation multiplicative: 11 si l'on raisonne en terme de pommes entières ou 22 si l'on raisonne en nombre de demi-pommes, mais qui stipule que le nombre total de parts soit doublé.

5. Phase de reprise de l'activité

5.1 Dyade de Sylvie et Anna

Après la mise en commun, les élèves interviennent auprès de l'enseignant pour lui rappeler qu'elles ont trouvé la réponse. L'enseignant leur demande de reprendre le travail, avec la consigne qu'Anna soit capable d'expliquer à Sylvie l'entier de la procédure déployée. Notons ici l'inversion des rôles, alors que dans la phase initiale de recherche, c'est essentiellement Sylvie qui, au fil de la résolution du problème, a expliqué la démarche à Anna. La consigne de l'enseignant montre que celui-ci est conscient non seulement de la part prise par Sylvie dans la résolution du problème, mais également de la faible participation d'Anna dans la mise en commun[7]. Les élèves s'exécutent:

Anna	*Alors d'abord, on a pris 5 jours, parce que chaque semaine, il y a 5 jours d'école.*
Sylvie	*Oui.*
Anna	*Et puis, comme il y a 22 élèves, on doit diviser 22 élèves par 2.*
Sylvie	*Pourquoi on doit diviser par 2 ?*
Anna	*Ben parce qu'il y a chaque élève qui reçoit une demi-pomme par jour. (...) Et puis après, on fait 5 x 11. Ça fait 55. Et puis après on fait ...*
Sylvie	*Mais pourquoi on a fait 5 x 11 ?*

7. Supposition confirmée au cours de l'entretien avec l'enseignant.

Anna *Ben parce qu'il y a 5 jours dans la semaine.*

Sylvie *Ouais.*

Anna *Alors on a divisé 22 par 2. Ça fait 11. Alors on fait 5 x 11. Ça fait 55. Puis après on essaie de faire combien de fois 55 égale 185.*

Sylvie *OK et puis on est arrivé à la conclusion que c'est quel jour qu'il y aura plus de pommes dans le carton?*

Anna *Ça serait le mardi, je crois, de la 4ème semaine.*

Sylvie *Oui. Alors écris.*

Cet extrait montre que Sylvie joue quasiment le rôle de l'enseignant qui pose des questions et valide les réponses. Anna ne s'en offusque pas, un signe peut-être que cela correspond à l'attente qu'elle a du rôle de Sylvie (Cobb, 1995). Dans les explications fournies par Anna, on observe que la dernière étape qui consiste à interpréter «(3 x 55)+11+9=185» pour trouver le jour final de la distribution des pommes n'est pas explicitée.

Après cet échange, les deux élèves sollicitent l'enseignant qui demande à Anna de lui expliquer la procédure de résolution du groupe. L'enseignant ne se satisfait pas de l'explication fournie à propos de l'étape qui permet d'identifier le mardi de la quatrième semaine. Les élèves retournent à leur place et, toujours sur le même mode d'interaction, Anna et Sylvie revoient ensemble cette dernière étape.

5.2 Dyade de Jean et Béatrice

D'entrée, Béatrice propose une résolution par des additions successives de 11. La question de la demi-pomme et de son interprétation n'est plus abordée par les élèves; une question qui avait été centrale dans la première phase de résolution. Rappelons que dans la mise en commun, Sylvie, la «bonne» élève en mathématiques, a publiquement énoncé une résolution fondée sur la valeur pour un jour 11; une proposition rapidement validée par l'enseignant. En ce sens, on peut postuler que le choix de Jean et Béatrice de résoudre le problème par des additions itérées de 11 est un effet de régulation des interactions semi-collectives de la mise en commun (Allal, 1988; Mottier Lopez, 1999).

En réponse à la proposition de Béatrice, Jean suggère de multiplier pour des raisons de rapidité. Béatrice accepte et formule la proposition «11 x 11»[8]. S'en suit un long épisode dans lequel les élèves tentent de s'accorder sur le produit de la multiplication. Finalement, ils s'accordent sur 121.

Béatrice poursuit la résolution en interprétant le multiplicateur de 11 en terme de semaines: «*Déjà, on commence un lundi. Alors on fait + 5. On a fini la semaine. Ensuite + 5. On a fini la semaine. + 1, on recommence un lundi. Compris?*». Autrement dit 11 x 11 = (5 x 11) + (5 x 11) + (1 x 11). Jean approuve et suggère de continuer en additionnant successivement 5. Il est

8. Il est difficile d'inférer les motifs qui poussent Béatrice à suggérer de multiplier 11 par 11.

difficile de savoir ici si Jean interprète 5 comme la quantité de pommes consommées en une semaine «5 x 11» ou s'il interprète 5 comme la quantité à réitérer pour atteindre 185. Béatrice ne tient pas compte de la proposition de Jean et poursuit en suggérant: *«On a fait 121. Ensuite on fait + 11 + 11 + 11 + 11 + 11. Compris ? T'as des questions ?»*. *«Oui, une question»*, répond Jean qui propose d'ajouter un multiple de 11 à 121, autrement dit: «121 + (3 x 11) = 144». Cette proposition semble déstabiliser Béatrice qui dit ne pas savoir.

Les deux élèves choisissent finalement d'ajouter successivement 11 à 121, en calculant les sommes intermédiaires jusqu'à 165. Béatrice affirme soudainement: *«Il y a un problème. On a dû faire une erreur de calcul»*. La suite des échanges montre qu'elle a anticipé les deux additions successives suivantes et qu'elle a réalisé qu'ils n'atteindront pas 185. Jean contrôle et admet. S'en suit un long épisode dans lequel les élèves contrôlent la multiplication «11 x 11» dont le calcul du produit avait causé initialement des difficultés. Les élèves ont de la peine à s'entendre pour trouver la réponse. Le ton commence à monter. Jean tempère et propose de reprendre en additionnant systématiquement le terme 11. Béatrice collabore à la proposition. Quelque peu dépité, Jean constate qu'ils parviennent toujours à 121 : *«Ça ne va pas marcher [...] Tu ne peux pas aller jusqu'à 185»*.

Un échange avec l'enseignant a lieu. Celui-ci constate que les élèves ont choisi l'addition successive de la valeur 11 comme procédure de résolution. Il demande si les sommes intermédiaires calculées sont *«justes ou fausses»*. Jean et Béatrice ne parviennent pas à se prononcer. L'enseignant leur propose de «jouer la calculette» et annonce que les sommes obtenues sont correctes. Cette validation permet aux élèves de cesser de contrôler les résultats intermédiaires. Jean tente alors d'expliquer que 185 ne sera pas atteint. En réponse à cette objection, l'enseignant choisit de relancer de façon très ouverte: *«Alors discutez-en»* et il s'éloigne.

Béatrice suggère: *«On peut rajouter un petit nombre [...] Alors on a dit qu'il* (l'enseignant de l'énoncé du problème) *ne pouvait pas encore donner une moitié à chacun [...] Alors il donne la moitié de la moitié qu'on leur donne»*. On note ici que Béatrice propose une distribution d'un quart de pomme, ce qui permet effectivement d'ajouter un plus petit nombre à 176, le dernier multiple de 11 plus petit que 185. Jean ne comprend pas le raisonnement de sa camarade et sollicite une explication. Béatrice reformule en proposant de diviser 11 par 2. Jean pense que c'est incorrect. Il n'argumente pas, mais il tente une nouvelle interprétation des calculs déjà effectués. L'enseignant annonce la fin de la leçon. Jean conclut: *«Ben ça ne fait rien, au moins on a trouvé quelque chose»*.

Procédure de résolution de Jean et Béatrice

11 x 11 = 121	Interprétation des élèves : cela représente deux semaines et un jour [(5x11) + (5x11) + (1x11)] autrement dit un lundi.
121 + 11 = 132 132 + 11 = 143 143 + 11 = 154 154 + 11 = 165 165 + 11 = 176 176 + 11 = 187	Addition successive de la valeur d'un jour de distribution de pommes. Les élèves n'interprètent pas ces additions en terme de jours supplémentaires. Ils sont bloqués par le fait que 185 n'est pas un multiple de 11 ; la notion de reste fait obstacle.

La procédure de résolution est centrée sur la notion d'opérateur scalaire («nombre de fois»): les élèves effectuent des opérations, afin de trouver «combien de fois 11 pommes dans 185 pommes». La notion de reste fait obstacle, autrement dit les élèves n'envisagent pas qu'il puisse rester une quantité de pommes plus petite qu'un jour de distribution. Cela les empêche de poursuivre leur raisonnement relativement à la mesure «nombre de jours», un raisonnement qui avait été entrepris pour l'opération «11 x 11».

D'une façon générale, il semble que Jean éprouve des difficultés à identifier les mesures pertinentes pour la relation multiplicative, dans la situation proposée. Il est par contre très actif lorsqu'il s'agit de formuler des opérations et de trouver des résultats. Globalement, on observe que, chez les deux élèves, la résolution du problème s'appuie sur une conception additive. La multiplication sert essentiellement à compter le nombre d'itérations.

6. Commentaires conclusifs

6.1 Procédures de résolution et raisonnement mathématique

Dans la mesure où les deux dyades ont, initialement, énoncé oralement la division euclidienne «185 : 11», on peut postuler que les élèves ont identifié la situation de partage.

Nb de Jours	**Nb de pommes**
1	11
?	185

: 11

Ce raisonnement est centré sur la notion d'opérateur fonction qui fait passer de l'espace de mesures «nombre de pommes» à l'espace de mesures «nombre de jours».

Toutefois, immédiatement après avoir énoncé la division «185 : 11», les élèves choisissent une procédure de résolution «verticale» (par isomorphisme de mesures, en reproduisant dans une colonne les opérations effectuées dans l'autre) plus ou moins sophistiquée, qui sur le plan conceptuel est plus facile pour de jeunes élèves qu'une procédure fonction (Vergnaud, 1981 ; Nunès, 1991).

Nb de Jours	**Nb de pommes**	
1	11	×?
?	185	

Ce constat met en évidence une certaine unité dans le type de démarche conceptuelle mobilisée par les quatre élèves, malgré le niveau d'élaboration différent des procédures mathématiques déployées, ainsi qu'une plus ou moins grande facilité à interpréter les données du problème et à concevoir une résolution pertinente.

Bien qu'il soit évidemment impossible d'énoncer ici des conclusions, les analyses effectuées mettent en évidence quelques éléments qui distinguent les élèves. Par exemple, on note que Sylvie prend systématiquement en compte l'ensemble des contraintes imposées dans l'énoncé du problème lorsqu'elle conçoit les opérations successives amenant à la résolution du problème. Elle effectue régulièrement une interprétation entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques conçues. Béatrice et Jean semblent éprouver davantage de difficulté à considérer l'ensemble des variables de la situation. Jean interprète parfois le problème en prenant pour référence les conditions du contexte de la vie courante :

Jean	*Les élèves reçoivent une demi-pomme. Ben on ne sait pas s'il y en a qui n'en veulent pas. On ne sait pas.*
Béatrice	*Mais on nous dit ça :* ***tout*** *le monde est obligé. Ben parce que ça irait pas, hein, pour calculer.*

Ce constat montre le contraste qui existe entre les formes de raisonnement dans des situations quotidiennes et les formes de raisonnement dans des situations scolaires[9] (Resnick, 1987). Béatrice sait qu'il faut interpréter le problème en terme d'opérations arithmétiques, indépendamment de la logique de la situation réelle. Jean, quant à lui, semble avoir moins bien décrypté les «règles du jeu» inhérentes aux situations scolaires.

Enfin, il est plus difficile d'inférer le mode d'interprétation et de raisonnement d'Anna, mise sous la tutelle de Sylvie perçue comme l'autorité mathématique du groupe.

6.2 Relations entre processus sociaux et processus individuels

Le critère de choix des élèves à observer était une participation contrastée dans les temps collectifs et des niveaux scolaires différents. Bien que la présence du chercheur et de l'enregistreur aient pu produire des effets sur les conduites des élèves, un constat est que ces derniers ont été capables de s'engager dans des activités mathématiques de façon intensive.

L'interprétation et le raisonnement mathématiques tels que décrits plus haut se sont co-construits au sein des interactions dyadiques et au cours de l'interaction collective. La narration faite de la progression de la résolution du problème entre les deux élèves montre combien la dynamique interactive (Gilly, Fraisse & Roux, 1988) peut varier d'un groupe à l'autre, mais toutes deux soutenant ici une co-résolution de la tâche. On observe, par exemple, que les interactions entre Sylvie et Anna sont caractérisées par une relation de tutelle, mais sans pour autant que cela induise une attitude passive d'Anna qui tente de donner sens aux suggestions et explications de sa camarade. Quant aux interactions entre Béatrice et Jean, elles se distinguent essentiellement par des interactions de co-construction ponctuées de brefs échanges relevant de confrontations plus ou moins argumentées. On peut postuler que ces différentes dynamiques interactives résultent de la construction interactive entre les élèves de leur relation amenant à la définition des rôles de chacun (Cobb, 1995), qui par exemple confère à Sylvie son statut d'autorité mathématique non remise en question par Anna. Se

9. Y compris lorsque le problème scolaire prend appui sur un contexte de la vie courante comme c'est le cas avec *Une pomme pour la récré*.

pose évidemment la question de l'efficacité de chacune des formes d'interaction quant à produire des opportunités d'apprentissage pour chacun des élèves.

Il est finalement possible de relever l'importance de la construction d'une base partagée de communication entre les élèves pour une compréhension de l'activité mathématique du partenaire; une base de communication qui parfois a été problématique chez Béatrice et Jean. Mais tous ces constats amènent une question plus générale à mon sens: Comment concevoir la relation entre l'activité cognitive de l'élève – interprétation et raisonnement mathématiques – et les processus sociaux dans lesquels cette activité cognitive s'est construite?

Dans la lignée des travaux néo-piagétiens, les interactions sociales sont vues comme pouvant stimuler le développement cognitif individuel. Il a été observé que certaines formes d'interaction, telle que celles qui relèvent par exemple d'un conflit socio-cognitif entre les élèves, favorisent tout particulièrement les apprentissages (Doise & Mugny, 1981; Perret-Clermont, 1979). Dans la conception vygotskienne, la tendance est de subordonner la cognition individuelle aux relations interpersonnelles et sociales, notamment dans le cadre de relations asymétriques. Un courant de recherche nord-américain et nord-européen (par ex. Cobb, 1995; Cobb, Perlwitz, Underwood, 1994; Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain, & Whitenack, 1997) tente, quant à lui, de théoriser les aspects cognitifs et sociaux dans une relation de réflexivité, avec notamment la question suivante: Dans quelle mesure les processus sociaux contraignent-ils et, tout à la fois, rendent-ils possible l'activité cognitive des élèves et, réciproquement, dans quelle mesure l'activité cognitive contraint-elle et permet-elle le développement des processus sociaux? Une question qui stipule que les dimensions individuelles et collectives de l'activité mathématique se constituent mutuellement et qu'elles ne peuvent exister l'une sans l'autre. Une question qui ouvre, à mon sens, des perspectives intéressantes à explorer.

Remerciements: Je tiens à remercier Lucia Grugnetti et François Jaquet pour leurs commentaires et suggestions sur la version initiale de l'article.

Références bibliographiques:

Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise: processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In M. Huberman (Ed.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires? Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interactions: four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning* (pp. 25-130). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cobb, P., Perlwitz, M. & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 10, 41-61.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing : The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Ed.), *Situated cognition, social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-233). Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Danalet, C., Dumas, J.P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques 3P: livre de l'élève.* Neuchâtel : COROME; Berne : Editions scolaires.

Doise, W. & Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence.* Paris : Interéditions.

Gilly, M, Fraisse, J. & Roux, J.-P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans : dynamiques interactives et socio-cognitives. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Ed.), *Interagir et connaître, enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif* (pp. 73-92). Cousset Fribourg : Editions DelVal.

Mottier Lopez, L. (1999). *Evaluation formative des apprentissages en mathématiques à l'école primaire.* Mémoire de licence, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation.

Mottier Lopez, L. (avec la collaboration de Tièche Christinat, C.) (2001). *Les enseignants 1P/2P donnent leur avis sur l'enseignement des mathématiques.* Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (01.1004).

Nunès, T. (1991). Systèmes alternatifs de connaissances selon différents environnements. In C. Garnier, N. Bednarz & I. Ulanovskaya (Eds.), *Après Vygotsky et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentale* (pp. 117-128). Bruxelles : De Boeck université.

Perret-Clermont, A-N. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* Berne : Editions Peter Lang SA.

Resnick, L. B. (1987). The 1987 Presidential Address, Learning In school and Out. *Educational Researcher*, 16 (9), 13-20.

Tièche Christinat, C. (1999). Analogie entre innovation et évaluation : l'exemple de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. In C. Depover & B. Noël (Ed.), *Approches plurielles de l'évaluation des compétences et des processus cognitifs : actes du 12ème colloque de l'ADMEE 1998* (pp. 151-160). Mons : Université de Mons-Hainaut, Facultés universitaires catholiques de Mons.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston VA : National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.

Voigt, J. (1994). Negociation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** (tarifs en page 2 de couverture).

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 29.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Faites vos jeux! ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
La magie du calcul, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL	...	(ex à Fr. 19.-)
Pliages et mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 25.-)
100 défis mathématiques du «Monde», POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	*(ex à Fr. 20.-)*
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	...	(ex à Fr. 30.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (Tangente HS 10)	...	(ex à Fr. 20.-)

Problèmes de rallyes et concours:

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 18.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...)	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 16.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 16.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 16.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ....
Adresse (rue et numéro): ....
Code postal et localité: .... Tél.: ....
Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

Monsieur N81 **1**
CALAME Jacques-André
6 Chemin de Fresens, La Savoyée
2026 Sauges

envois non distribuables à retourner à
Math-Ecole,
Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand,
2007 Neuchâtel

sommaire