MATH ECOLE

Quelques regards sur
un problème et sa résolution:
« le tunnel »

Une approche
du langage algébrique

Des pistes de réflexion
didactiques pour construire
la droite numérique

41e année

205

janvier 2003

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

Mise en page
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Carrés disposés en «spirale» dont les mesures des côtés sont les nombres de la suite de Fibonacci

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous).

Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Abonnement annuel (5 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal CCP 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.–
anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques, 11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

MATH-ECOLE

41e année, cinq numéros par an

205

janvier 2003

Sommaire

Editorial

Chère lectrice, cher lecteur de Math-Ecole,

Comme tous les Instituts Universitaires, l'Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel a une double fonction d'enseignement et de recherche. Ceci nous conduit, mes collègues et moi, à nous intéresser aux débouchés qui s'offriront aux futurs diplômés en mathématiques. Même si la palette des professions et emplois accessibles aux mathématiciens s'est largement étoffée ces dernières années, l'enseignement reste – et restera encore longtemps – un débouché important pour nos diplômés. Nous sommes aussi parfaitement conscients du rôle primordial joué par les professeurs de lycée dans l'orientation ultérieure des lycéens, donc de nos futurs étudiants.

Les raisons ci-dessus nous ont amenés à nous intéresser à certains problèmes liés à la pédagogie et à la didactique des mathématiques – sans pour autant en faire notre sujet de recherche, ce qui ne serait pas notre rôle! Je voudrais simplement expliquer, par ces quelques lignes, pourquoi l'Institut de Mathématiques a très volontiers offert l'hospitalité d'un tiers de bureau à la revue Math-Ecole*: nous considérons que nos propres réflexions s'inscrivent dans la continuité de celles des rédacteurs et lecteurs de* Math-Ecole.

C'est donc un plaisir pour moi que de souhaiter la bienvenue à Math-Ecole*: j'espère que l'Institut et la revue passeront en symbiose de nombreuses années.*

Alain Valette,
directeur de l'Institut de Mathématiques de Neuchâtel

Nous avions annoncé dans l'éditorial de notre numéro 201 que la rédaction de *Math-Ecole* quittait l'IRDP pour l'Institut de Mathématiques. Même si quelques problèmes subsistent pour nos archives et nos stocks d'anciens numéros, nous sommes maintenant bien installés dans les nouveaux locaux qui nous sont généreusement offerts.

Certains lecteurs peuvent se demander en quoi consistent les liens entre les mathématiciens «professionnels» et une revue destinée aux enseignants qui n'ont de loin pas tous fait des études universitaires de mathématiques. Comme le souligne Alain Valette dans sa conclusion, il y a une continuité de la réflexion sur notre discipline, du lecteur qui est enseignant primaire au professeur d'université. Du temps où l'on n'enseignait que le «calcul» à l'école obligatoire, on pouvait éventuellement se passer de liens entre les uns des autres. Mais cette époque est révolue et la didactique nous apprend, depuis une trentaine d'années, que les phénomènes d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques, pour être correctement compris et expliqués, ont besoin de l'éclairage des psychologues, des historiens, des épistémologues, mais aussi – et c'est l'évidence – des mathématiciens!

C'est dans l'intérêt de tous que la rédaction de *Math-Ecole* envisage ce rapprochement. Merci à nos collègues de l'Institut de mathématiques et à son directeur, Alain Valette.

La rédaction de *Math-Ecole*

Quelques regards sur un problème et sa résolution: le tunnel

Denis Odiet
Collège de Delémont

Dans le n° 201 de la revue *Math-Ecole*, Lucia Grugnetti proposait un article consacré aux niveaux de référence en mathématiques pour des élèves de 16 ans, en Europe.

Pour mener à bien cette étude, une liste de 65 questions a été rédigée. Parmi celles-ci, le problème du tunnel a retenu plus particulièrement mon attention. Pour mémoire, voici son énoncé:

EMS Question de référence N° 018 **Le tunnel**

Quatre personnes s'apprêtent à traverser un tunnel étroit et sombre.
Elles disposent d'une lampe de poche qui a une durée de fonctionnement limitée à 18 minutes.
Il leur faut, respectivement, 1, 2, 5, et 10 minutes pour traverser le tunnel.
Sans lampe, elles ne peuvent le faire.
Le tunnel est si étroit que deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble.

Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser le tunnel?

Il est loin d'être inintéressant d'étudier quelques résolutions élaborées par des élèves de 14 ans, non seulement afin d'en dégager certains aspects liés à la compréhension même de l'énoncé et à la signification vouée à certains des termes utilisés dans la donnée mais également afin d'essayer d'en établir une version tendant à supprimer toute équivoque, débouchant en conséquence vers une interprétation unique.

On peut raisonnablement penser que le(s) concepteur(s) du problème s'attendai(en)t à ce que les élèves imaginent deux personnes traversant le tunnel l'une derrière l'autre («*un tunnel étroit*»). Pourtant rien n'empêche, à mon sens, qu'elles puissent s'y engager côte à côte, comme le suggère la solution ci-dessous, tout empreinte de bon sens. Difficile de savoir si elle est à rejeter, car on peut discuter longtemps du sens à donner à l'expression «*deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble*». Il vaudrait mieux préciser dans la donnée que seules deux personnes au maximum peuvent se trouver au même moment à l'intérieur du tunnel. Selon cette nouvelle formulation, il n'y aurait plus de doute: les quatre personnes ne pourraient s'y trouver simultanément.

1ère possibilité:

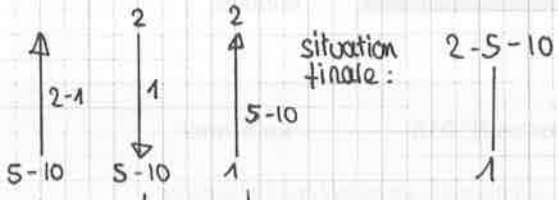
Les quatre personnes traversent le tunnel par rangs de 2, et un des 2 premiers tient la lampe:

donc, ils mettent 10 minutes

La deuxième solution proposée ci-dessous, tout à fait acceptable et nullement en contradiction avec l'énoncé, est plus subtile.

2ème possibilité :

Si, pour une raison quelquonque, la 1ère possibilité est impossible, ils peuvent se déplacer ainsi :



2' + 1' + 10' = 13 minutes

Ici, l'élève joue sur le mot *«traverser»* et le sens qu'on lui attribue généralement : traverser un tunnel, c'est à coup sûr, au bout d'un certain temps, se retrouver à son autre extrémité.

Or, une analyse un peu poussée de cette production montre que les quatre personnes ont bel et bien traversé le tunnel : il se trouve que « 1 » l'a traversé deux fois, alors que « 2 », « 5 » et « 10 » l'ont traversé une seule fois. Elle n'est donc pas à rejeter. Pour éviter une telle interprétation, ne faudrait-il pas simplement remplacer *« traverser le tunnel »* par *« se retrouver ensemble de l'autre côté du tunnel »* ?

La plupart des solutions proposées par les élèves soulignent l'impossibilité d'accomplir la tâche incombant aux quatre personnes. Leur argumentation repose essentiellement sur le choix de l'accompagnant pour chaque traversée, à savoir la personne la plus rapide. Par exemple :

Premièrement, le 1 entame la traversée avec le 2 ; comme il doit se mettre au rythme du 2, il leur faudra 2mn. Arrivé au bout du tunnel, le 1 doit repartir pour aller donner la lampe = 1mn, puis, il repart avec le 3 et de nouveau il se met au rythme de celui-ci : il leur faudra 5mn Le 1 revient à nouveau = 1mn. et enfin, il repart avec le 4 et il leur faudra 10 mn. Si l'on additionne les temps (2 + 1 + 5 + 1 + 10 mn.) cela donne <u>19</u> minutes et il leur manquera 1 minute, donc c'est <u>impossible</u> ! Le 1 a été pris parce qu'il était le plus rapide !

Finalement, il est tout de même possible de réaliser la traversée:

Pour commencer:

1, 2, 5 et 10 correspondent aux temps de chaque personne

$1,2,5,10 \xrightarrow{1,2} 1,2 \rightarrow$ 2 minutes A

$1,5,10 \xleftarrow{1} 2 \rightarrow$ 1 minute B

$1 \xrightarrow{5,10} 2,5,10 \rightarrow$ 10 minutes C

$1,2 \xleftarrow{2} 5,10 \rightarrow$ 2 minutes D

$\longrightarrow 1,2,5,10 \rightarrow$ 2 minutes E

17 minutes

A: 1,2 font un aller pour assurer le retour du voyage de 5 et 10.

B: 1 retourne apporter la lampe.

C: 5, 10 font un aller ensemble pour gagner un maximum de temps.

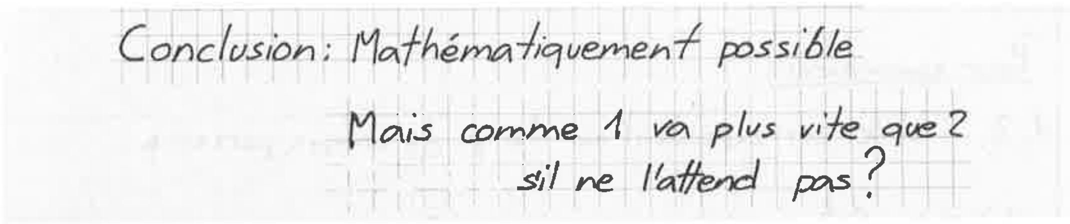
D: 2 retourne chercher 1

E: 1,2 font le dernier voyage.

Total: 17 minutes

Il est par ailleurs symptomatique de constater que certains élèves ne sont pas totalement convaincus de la véracité de leur réponse…

Appréciation : Je suis sûr à 85% 17 minutes au total surtout pour ceux chez qui l'affectif y met aussi du sien :


Conclusion : Mathématiquement possible
Mais comme 1 va plus vite que 2
s'il ne l'attend pas ?

En conclusion, les traces écrites d'élèves prennent une place fondamentale dans l'enseignement des mathématiques :

- pour le concepteur des problèmes, afin que celui-ci puisse remédier à d'éventuelles ambiguïtés liées à l'énoncé ;
- pour le maître, de manière à ce qu'il puisse se rendre compte de ce qui se passe réellement dans la tête de ses élèves,
- pour les élèves enfin, de sorte qu'ils puissent améliorer la qualité de leurs comptes rendus et progresser dans leurs apprentissages.

À propos du problème « Le tunnel »
François Jaquet

En tant que membre du groupe qui, en 2000, à Besançon, a choisi « Le tunnel » comme l'une des « questions de référence » de l'EMS (European Mathematical Society) ; je me permets d'apporter quelques remarques à propos de ce problème et de son énoncé qui, selon l'article précédent pourrait receler certaines ambiguïtés.

Ce problème a été proposé, en anglais, par Sandor Dobos, de Hongrie. Sa résolution, au sein de notre groupe de travail n'a pas été immédiate, loin de là ! Il nous a fallu une bonne dizaine de minutes pour le résoudre et cette durée aurait encore pu être plus longue si notre collègue hongrois ne nous avait assurés que, chaque fois qu'il donne ce problème à ses étudiants de l'Université de Budapest, il s'écoule bien du temps avant que la solution n'apparaisse.

Cette relance a permis de remettre en selle tous ceux qui pensaient à un attrape-nigauds. Dès lors, chacun a compris que la partie se jouait dans sa tête et non pas sur les mots de l'énoncé : la condition « deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble » excluant les groupes de trois ou de quatre, indépendamment des positions relatives de ceux qui les composent ; la phrase « Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser... » étant comprise implicitement comme « se retrouvant toutes de l'autre côté du tunnel », puisqu'elles s'apprêtaient à le traverser.

On pourrait certes utiliser d'autres termes pour la traduction, mais sans être certain que celle-ci y gagne en clarté. (Par exemple, je doute que la nouvelle formulation proposée «seules deux personnes au maximum peuvent se trouver au même moment à l'intérieur du tunnel», qui me paraît plus lourde que celle d'origine, soit plus claire que le texte d'origine «s'y engager ensemble»).

Cette recherche d'une amélioration hypothétique de l'énoncé me conduit aux deux réflexions suivantes:

1) Le problème «Le tunnel» est conçu pour des étudiants, de 16 ans. Lorsqu'on le propose à des élèves plus jeunes, il faut s'attendre à des adaptations de son contexte qui, avouons-le, est totalement fictif, voire irréaliste. Pour franchir l'obstacle – et parfois pour le contourner – les enfants n'hésitent pas à compléter l'histoire de cette traversée, jusque dans les détails: forme du tunnel, disposition et vitesse relatives de ceux qui le traversent ensemble... au risque de s'éloigner des conditions de l'énoncé. Les exemples décrits dans l'article précédent montrent bien l'importance attribuée à ces modalités réalistes de la traversée par des élèves de 14 ans.

Il faut aussi penser aux effets du contrat entre le maître et les élèves. Pour ces derniers, l'enjeu est de donner une réponse, la plus cohérente possible, même en «arrangeant» un peu les choses en cas d'obstacle, comme dans le problème très connu de «L'âge du Capitaine»[1]

À 16 ans et à l'âge adulte, on fait plus facilement abstraction du contexte et de ses détails. On est également plus libéré des clauses implicites du contrat.

1. A la question «Il y a 15 chèvres et 20 moutons sur un bateau, quel est l'âge du capitaine?» les jeunes élèves, jusqu'à 8 à 10 ans répondent généralement 35 ans (15 + 20), mais si les nombres de chèvres et de moutons sont respectivement 8 et 5, les élèves répondront plus volontiers 40 ans (8 x 5) car on n'est pas capitaine de bateau à 13 ans (8 + 5).

2) «Le tunnel» ne met pas en oeuvre des savoirs mathématiques de pointe: il suffit d'un peu de logique au sens le plus commun du terme et de savoir additionner quatre nombres naturels 1, 2, 5 et 10. Ce n'est donc pas une «situation-problème» permettant de faire émerger de nouvelles connaissances chez des élèves de 16 ans. Ce n'est pas non plus un «problème ouvert» au sens où il développerait spécifiquement les aptitudes à la recherche et à la conduite d'une démarche scientifique. Ce n'est pas non plus un jeu, ni un problème d'application ou d'entraînement. Y a-t-il alors une catégorie où classer les problèmes de ce genre?

Dans un article de *Mathématique et Pédagogie* (mai-juin 2002, no 137), Maggy Schneider parle des attitudes et habitudes du sujet qui font obstacle à la résolution de certains problèmes. Elle évoque à ce propos celui des «neuf points» disposés dans une configuration de 3 x 3 qu'il s'agit de relier par quatre segments de droite, tracés sans lever le crayon du papier (fig. 1))

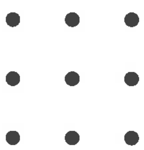


fig. 1

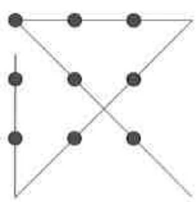


fig. 2

La solution, figure 2, sort des limites du carré. Or, de nombreuses personnes n'y pensent pas – évoquant même le fait qu'on le leur a interdit – ce qui les empêche de résoudre le problème.

Un autre exemple classique est le problème des «allumettes» qui demande de construire quatre triangles équilatéraux avec six allumettes sans chevauchement de celles-ci. La solution attendue est un tétraèdre, c'est-à-dire une figure de l'espace. Mais beaucoup se restreignent au plan dans la recherche de la solution, sans que personne ne le leur ait imposé.

«Le tunnel» me paraît être tout à fait analogue. La personne qui aborde sa résolution se fixe une restriction mentale que l'énoncé n'exige pas: faire toujours porter la lampe par le personnage le plus rapide. L'obstacle ne vient ainsi pas de l'extérieur et le sujet a d'autant plus de peine à le franchir que c'est lui qui se l'est mis dans sa tête. Lorsque la solution tombe enfin, comme le montre l'une des productions d'élèves, on ne devrait pas dire «il suffisait d'y penser» mais plutôt «il suffisait de ne pas s'interdire d'y penser».

«Le tunnel» est là pour apprendre à surmonter des obstacles personnels d'ordre psychologique. Il n'existe pas de catégorie reconnue de problèmes que je qualifierais «d'auto libération». Mais il me paraîtrait bon que chaque élève rencontre quelques questions de ce type au cours de sa scolarité.

En conclusion, si les «questions de référence» de l'EMS devaient être revues, à la lumière d'expérimentations, aussi fines et intéressantes que celles décrites dans l'article précédent, il est vraisemblable que «Le tunnel» serait choisi à nouveau, sans modification notable de l'énoncé. En revanche, on pourrait en dire beaucoup plus sur son intérêt, non pas pour ses contenus mathématiques, mais pour ses potentialités en vue d'affronter les obstacles d'ordre psychologique que pose sa résolution.

On pourrait par exemple proposer d'organiser des mises en commun intermédiaires pour s'accorder sur une interprétation des consignes, de donner des relances sous forme d'encouragement, d'organiser des débats autour des première «solutions» élaborées (comme celles de l'article) et de celles qui soulignent l'impossibilité d'accomplir la traversée en 18 minutes... Et surtout il faudrait bien spécifier la différence qu'il y a entre un problème de ce genre, dont l'énoncé peut s'accommoder d'un certain flou, et un sujet d'examen ou de concours qui sera jugé en termes de réussite ou d'échec.

Mais il faut imaginer le temps et les efforts que prendrait l'élaboration de commentaires didactiques sur les «questions de référence» de l'EMS qui ne pourraient se fonder que sur de multiples expérimentations et débats. Contentons-nous d'observations, bien rapportées, comme celles de l'article précédent et du débat et des réflexions qu'elles peuvent susciter.

Les solutions des problèmes du numéro 204, et en particulier celles du problème «Sous la route» qui nous ont valu un volumineux courrier, figureront dans le numéro 206. Nous remercions tous les abonnés qui nous ont répondu et leur demandons de patienter encore un ou deux mois. (ndlr)

6e rencontre internationale sur le RMT

Les coordinateurs internationaux de l'ARMT
Lucia Grugnetti, François Jaquet

Depuis 1997, les responsables du Rallye mathématique transalpin ont pris l'habitude de se rencontrer une fois par année au niveau international, pour définir la politique de leur concours, pour en déterminer les finalités, pour en exploiter les résultats. Les actes de ces journées d'étude[1] rendent compte de leurs travaux et constituent de solides outils de référence pour l'enseignement et la didactique des mathématiques: *Le RMT. Quels profits pour la didactique?* (Brigue, 1997 et 1998). *RMT. Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques* (Siena, 1999, Neuchâtel, 2000). *RMT. Du problème à la situation* didactique et formation des enseignants (Parma, 2001, Torre delle Stelle, 2002, à paraître).

Du 12 au 14 octobre 2002, 53 animateurs du RMT, venus de France, Italie, Luxembourg, Suisse et République tchèque se sont donc retrouvés en Sardaigne sur le thème des apports des problèmes du rallye à la formation des enseignants. Au programme: dix exposés, deux sessions de travaux de groupes, des synthèses et discussions et l'assemblée générale de l'ARMT (association qui gère le rallye au niveau international). Le détail des titres des exposés permet de se faire une idée assez précise du contenu de ces journées d'étude:

1. En vente par l'intermédiaire de *Math-Ecole*, voir p. 3 de couverture.

R. Charnay, R. Cretin (Bourg-en-Bresse) *L'importance de travailler sur l'analyse a priori en formation des maîtres*

C. Crociani, L. Doretti. L. Salomone (Siena): *RMT: une expérience significative de collaboration entre enseignants et chercheurs*

C. Marchini, D. Medici, M. G. Rinaldi (Parma) *Les problèmes du rallye comme instrument pour la formation, ombres et lumières*

R. Battisti (Riva del Garda) *Le rallye dans le Trentin, quels projets et potentialités pour modifier l'enseignement des mathématiques*

G. Orrù, M. Polo, G. Susnik (Cagliari) *RMT et formation de l'enseignant-chercheur*

V. Mori, A. Rizza, V. Vannucci (Parma) *Le point de vue d'une enseignante en formation*

M. Henry (Besançon) *Le rôle de l'analyse a priori dans l'élaboration d'un problème de rallye et son transfert en situation de classe*

S. Deplano, N. Iesu, S. Puxeddu (Cagliari) *RMT et programmation didactique*

C. Tièche (Neuchâtel) U*n problème du rallye dans un contexte d'évaluation des compétences*

Luc Olivier Pochon (Neuchâtel) *Organisation du rallye sur internet, compte rendu de l'expérience suisse romande*

Une première session de groupes de travail a mis les participants dans la situation de ceux qui doivent attribuer les points aux copies rendues par les élèves après une épreuve. Il s'agissait de la finale virtuelle du 10e RMT, consistant à réexaminer les copies de toutes les classes gagnantes des finales régionales. C'est le test, par excellence, de la qualité des analyses a priori des problèmes du RMT qui décrivent les tâches de résolution et les obstacles ou erreurs attendus. L'exercice a été parfaitement réussi. Il a montré que les critères d'évaluation proposés tiennent la route puisque les points attribués lors de la finale virtuelle sont très proches de ceux donnés par les jurys locaux de chaque finale régionale. Il a surtout permis de confirmer la pertinence de certaines analyse a priori, de voir les compléments à apporter à d'autres et les exploitations possibles des observations, recueillies de manière scientifique, pour la didactique et l'enseignement des mathématiques.

La seconde session des groupes de travail s'est penchée sur cinq problèmes du 10e RMT dont les premières analyses avaient fait apparaître des procédures particulièrement intéressantes et des obstacles révélateurs du niveau de maturation de concepts et savoirs mathématiques. Là aussi, le message est clair: certains problèmes du rallye sont directement exploitables pour la formation des maîtres[2].

Quelques éléments de synthèse

La synthèse des travaux de la rencontre est en voie d'élaboration, elle prendra en compte certaines analyses en cours et fera encore l'objet de consultations avant d'être publiée dans les actes. On peut cependant déjà tirer quelques conclusions des propos tenus en séance de clôture:

Les analyses a priori que le RMT impose à ses problèmes sont le garant d'une qualité certaine du point de vue de leurs contenus mathématiques, d'une clarté de leurs énoncés permettant aux groupes d'élèves de s'engager seuls, de la diversité des procédures qui doivent apparaître lors de leur résolution, de la présence d'obstacles révélateurs pour une évaluation formative des connaissances et conceptions des élèves.

2. *Math-Ecole* publiera, dans ses prochains numéros, quelques-uns de ces problèmes et de leurs analyses approfondies dans une perspective de formation.

Certains de ces problèmes sont plus riches que d'autres et offrent de grandes potentialités pour une exploitation en vue de la formation des enseignants. Certains peuvent aussi devenir le support de situations didactiques et s'insérer ainsi dans des séquences d'apprentissage, parce qu'ils offrent à l'enseignant un large jeu sur les variables didactiques, absolument nécessaire pour une adaptation aux niveaux de leur classe et de leurs élèves.

Des enseignants, des formateurs, des chercheurs travaillent, ensemble, à la conception et à l'analyse des problèmes du rallye. Cette activité débouche sur des énoncés et des résultats, reconnus par les uns et les autres, publiés, constituant un ensemble de données organisées et à disposition de tous, garant du caractère scientifique de l'entreprise.

Dès son origine, le RMT s'est assigné les buts de créer des problèmes, de les proposer à des classes entières travaillant en pleine autonomie et de s'intéresser, au delà de la réponse, aux descriptions que les élèves font de leurs procédures de résolution. Il est vite apparu que les conditions particulières de passation des épreuves n'étaient pas innocentes: elles ressortent d'une conception bien précise de l'apprentissage et répondent aux intérêts de la didactique des mathématiques. Le RMT crée donc un «climat» autour de la résolution de problèmes, caractérisé par les interactions, l'écoute, l'attention particulière attribuée à la diversité des représentations. Ce climat a des incidences sur tous sur les groupes qui travaillent au sein du RMT et sur ses journées d'études. Il a permis d'approfondir régulièrement les analyses et réflexions pour convaincre chacun de l'intérêt des problèmes du rallye pour la didactique. Il a créé de bonnes conditions pour une rencontre entre partenaires de l'enseignement des mathématiques où chacun y trouve son compte: le didacticien peut y vérifier certaines de ses hypothèses de recherche par une confrontation avec des pratiques de résolution, l'enseignant peut apprécier l'intérêt de certaines analyses, et maintenant, le formateur perçoit clairement les fruits d'un travail commun conduit depuis dix ans. Les potentialités de certains problèmes du RMT sont évidentes; elles sont aussi, pour plusieurs participants à la rencontre, synonymes d'espoir pour une évolution des pratiques et des conceptions de l'apprentissage des mathématiques.

Pour conclure ce rapport, voici le problème *Quitte ou double* de la finale:

8. Quitte ou double (Cat. 5, 6, 7)

Camille participe à un jeu-concours, de six questions.
Pour chaque question, la réponse juste rapporte un certain nombre de points:

- la réponse juste à la question n° 2 rapporte le double de points attribués à la question n° 1,
- la réponse juste à la question n° 3 rapporte le double de points attribués à la question n° 2,
- et ainsi de suite.

Si on ne répond pas correctement à une question, on est éliminé et on ne gagne rien.
Mais chaque candidat a un joker qui lui donne le droit de ne pas répondre à une question (bien sûr, il ne gagne pas les points correspondants à cette question).

Camille a utilisé son joker et a répondu correctement à cinq questions. Elle a obtenu 177 points.

Retrouvez les points attribués à chaque question du concours et indiquez pour quelle question Camille a utilisé son joker.

Expliquez comment vous avez trouvé.

la description de la tâche faite dans l'analyse a priori:

- Comprendre que chaque question rapporte le double de points de la précédente et qu'on ne connaît pas le nombre de points rapportés par la première question.
- Faire des essais, en faisant une hypothèse sur le nombre de points rapportés par la première question et en déduire que seule la valeur 3 convient. (Avec 2, on obtient une somme inférieure à 177 : 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126. Avec 4 tous les nombre de points attribués sont aussi des nombres pairs. Avec 5, la somme gagnée devrait se terminer par 5 ou 0. Avec 7, la somme des point attribués aux 5 premières questions est supérieure à 177 : 7 + 14 + 28 + 56 + 112 = 217).
- Chercher à obtenir le nombre 177 en additionnant cinq des nombres de la suite: 3, 6, 12, 24, 48, 96 soit 177 = 96 + 48 + 24 + 6 + 3.
- En déduire le nombre de points rapportés par chaque question et le fait que Camille a utilisé son joker pour la question n° 3.

Ou, algébriquement, attribuer x points à la première question, 2x à la 2e question… pour obtenir un total de 63x. Si x = 1 ou si x = 2, la somme est inférieure à 177, pour x = 3, la somme est 189 et vaut 12 de plus que 177 (ce qui correspond à la troisième question (4x), et ainsi de suite, vérifier qu'il n'y a plus de valeurs qui conviennent.

et la solution d'une classe finaliste de Riva del Garda, de degré 6, à laquelle le jury de la finale virtuelle a attribué une mention d'honneur pour son originalité et sa logique interne :

```
       1  |-| 3
       2  |-|-| 6
       3  |-|-|-|-| 12
63     4  |-|-|-|-|-|-|-|-| 24
       5  |-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-| 48
       6  |-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-| 96
```

63 – 32 = 31	*177 : 31 = 5,709*	*(– 6) Non*
63 – 16 = 47	*177 : 47 = 3,76*	*(– 5) Non*
63 – 8 = 55	*177 : 55 = 3,21*	*(– 4) Non*
63 – 4 = 59	*177 : 59 = 3*	*(– 3) Oui, **a utilisé le joker***
63 – 2 = 61	*177 : 61 = 2,901*	*(– 2) Non*
63 – 1 = 62	*177 : 62 = 2,854*	*(– 1) Non*

177 : 59 = 3	*points de la réponse 1*
3 · 2 = 6	*points de la réponse 2*
6 · 2 = 12	*points de la réponse 3*
12 · 2 = 24	*points de la réponse 4*
24 · 2 = 48	*points de la réponse 5*
48 · 2 = 96	*points de la réponse 6*

Nous avons dessiné les segments qui représentent les valeurs de chaque question, en représentant les doubles indiqués par les données. Nous avons divisé tous les segments en parties égales à la longueur du segment représentant la question 1 ; toutes les parties ensemble font 63. Nous avons essayé d'enlever de ce nombre les parties de chaque question et avons découvert que l'unique nombre entier était obtenu en enlevant les parties de la question 3 et en divisant les 177 points obtenus par les parties des autres questions. Nous avons découvert ainsi que la question numéro 1 vaut 3 points et avons trouvé les valeurs des autres en doublant à chaque fois.

La lecture de cette solution n'est pas aisée et montre bien que ceux qui évaluent les réponses aux problèmes du Rallye doivent souvent chercher à « entrer dans la tête » des élèves qui les ont rédigées pour bien comprendre leurs procédures.

17e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne
13 novembre 2002

CM : 4e et 5e primaires – ex. 1 à 7
C1 : 6e primaires et premières du CO – ex. 2 à 8
C2 : 8e et 9e années ou 2e et 3e années du CO et 1e du collège – ex. 4 à 11
L1 : 10e année et suivantes, jusqu'à la maturité – ex. 7 à 14

Notre site : http://gvjm.ecolevs.ch

1. La cible (CM) (coef. 1)

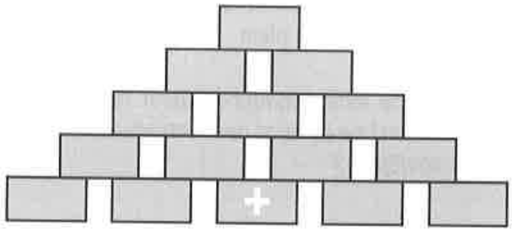
Jean-Albert tire des flèches sur la cible ci-dessous et obtient les points indiqués dans les zones touchées. Avec 3 flèches, il a touché 3 zones différentes et obtenu un total de 36 points.

2	23	3
19	5	17
7	11	13

Quelles sont les zones touchées par ses trois flèches ?

2. Les boîtes (CM, C1) (coef. 2)

Françoise a empilé 15 boîtes comme sur le dessin. Si une boîte tombe, elle entraîne dans sa chute toutes celles qui sont posées sur elle.



Anne-Lise, l'enquiquineuse, enlève la boîte marquée d'une croix.

Combien de boîtes vont alors tomber ?

3. Les poules (CM, C1) (coef. 3)

Jean-Charles a une poule blanche, 1 poule brune et 1 poule rousse. La poule blanche pond 1 œuf chaque jour. La poule brune pond 1 œuf tous les 2 jours. La poule rousse pond 1 œuf tous les 3 jours.

Combien d'œufs peuvent pondre, au maximum, les poules de Jean-Charles, pendant une semaine ?

4. Les jupes (CM, C1, C2) (coef. 4)

Une classe comprend 30 élèves dont 23 filles. Seules les filles peuvent porter des jupes et 20 élèves n'en portent pas.

Combien de filles ne portent pas de jupes ?

5. La montre de Brigitte (CM, C1, C2) (coef. 5)

La montre de Brigitte retarde de 10 minutes mais elle pense qu'elle avance de 5 minutes. Brigitte a un rendez-vous à 9 heures précises.

A quelle heure va-t-elle arriver à son rendez-vous ?

6. Les bactéries (CM, C1, C2) (coef. 6)

Une bactérie se sépare en deux chaque seconde pour former deux nouvelles bactéries. En introduisant une bactérie dans un bocal au temps zéro, il y aura 2 bactéries après une seconde puis 4 bactéries après deux secondes et ainsi de suite. En 60 secondes le bocal est plein.

Combien de temps faudra-t-il pour remplir totalement ce même bocal si nous introduisons 4 bactéries au départ?

7. L'élection (CM, C1, C2, L1) (coef. 7)

	A	B	C	
	D	E	F	
	G	H	I	

Chaque personnage du damier (A, B,...) est candidat à la présidence. Le but est d'enlever huit candidats pour n'en laisser qu'un seul, au centre (ce sera le président), et ceci en un minimum de coups. Une case ne peut être occupée que par un seul candidat. Il n'y a que 2 types de coups possibles:

1. Bouger un candidat vers une case voisine en allant dans tous les sens (vers le haut ou vers le bas ou à gauche ou à droite ou encore en diagonale).

2. Sauter par-dessus un candidat voisin, également dans tous les sens. Le candidat par-dessus lequel on saute est éliminé.

En combien de coups, au minimum, peut-on élire le président?

8. La Fête-Dieu (C1, C2, L1) (coef. 8)

La Fête-Dieu est une fête religieuse dont la date n'est pas fixe. Elle a lieu 60 jours après Pâques. Quant à la date de Pâques, elle est fixée au pre-mier dimanche après la pleine lune ayant lieu le jour de l'équinoxe de printemps (21 mars) ou aussitôt après l'équinoxe. Les pleines lunes se suivent à intervalle de 29 jours. En 1995, il y eut une pleine lune le vendredi 17 mars.

Quelle fut la date précise de la Fête-Dieu en 1995?

9. Les sportives (C2, L1) (coef. 9)

Rosita, Bernadette et Michèle discutent du sport qu'elles vont choisir en cette année scolaire. Rosita dit: «Si Bernadette fait du tennis, je joue au volley.» «Si Rosita fait du volley, je fais du tennis mais si elle fait du basket, je fais du volley» répond Michèle. Bernadette ajoute: «Si Michèle ne fait pas du basket, je fais du volley.» Chacune désire pratiquer un sport différent.

Quel sport pratiquera chacune d'elles?

10. Les pièces de monnaie (C2, L1) (coef. 10)

Gérard et Serge jouent avec des pièces de monnaie. Ce jeu consiste à séparer un tas de pièces en 2 tas comprenant un nombre différent de pièces. Chacun joue à tour de rôle et c'est toujours Gérard qui commence. Celui qui ne peut plus jouer a perdu. Par exemple, s'il y a un tas de 3 pièces au départ, Gérard en fait 2 tas comprenant 1 et 2 pièces et Serge a perdu car il ne peut plus jouer. Gérard et Serge connaissent parfaitement la tactique de ce jeu.

Le jeu est organisé successivement avec 4, 5, 6 puis 7 pièces. Quelles sont les parties gagnées par Serge?

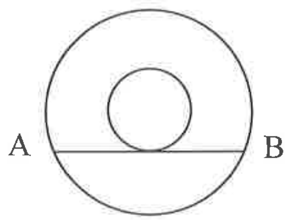
11. La balance à plateaux (C2, L1) (coef. 11)

Les «anciens» utilisaient une balance à plateaux pour peser les pommes de terre. Une masse de 2 kg et une masse 5 kg permettaient de peser 3 kg de pomme de terre (3 kg de pomme de terre mis avec la masse de 2 kg équilibrent la masse de 5 kg).

Quelles sont, au minimum, les masses nécessaires, permettant de peser des masses de 1 kg, 2 kg, 3 kg, etc. jusqu'à 40 kg?

12. Le tapissier (L1) (coef. 12)

Le tapissier Roger doit poser de la moquette dans ce vaste hall en forme de couronne. La distance du



point A au point B est de 28 m. La pose du mètre carré de moquette coûte 10 fr.

Quel est le prix payé à Roger?
Si nécessaire, prendre 22/7 pour la valeur de pi.

13. Le partage (L1) (coef. 13)

Un homme mourant laisse sa femme enceinte et 65'000 fr. Il ordonne par son testament que si sa femme accouche d'un garçon, celui-ci en aura les 3/5 et la mère les 2/5. Si elle accouche d'une fille, celle-ci n'aura que les 3/7 et la mère les 4/7. La mère accoucha d'une fille et d'un garçon.

Quel montant reçut la mère afin de conserver les proportions de la mère aux enfants?

14. Le message du cosmos (L1) (coef.14)

A l'écoute des étoiles, l'astrophysicienne Marguerite relève un message qui ressemble au morse. Il s'agit en effet d'une suite ininterrompue de signaux brefs (.) ou longs (–). En retranscrivant le message qui commence par un signal bref, elle s'aperçoit que si on remplace chaque signal bref (.) par la suite bref-long (. –) et chaque signal long (–) par la suite long-bref (– .), le message reste inchangé.

Quel est le 2002e signal du message ainsi que les 4 signaux qui le suivent?

Solutions en page 21

Une approche du langage algébrique

Michel Brêchet

Les élèves de Suisse romande rencontrent leurs premières écritures littérales au cours des derniers degrés de la scolarité primaire. A doses homéopathiques, elles se profilent en marge de la résolution d'un problème, au fil des pages d'un moyen d'enseignement ou par le biais de l'enseignant, par exemple lorsqu'il estime opportun de montrer le bien-fondé de leur emploi. Cette sensibilisation au langage algébrique se poursuit et s'intensifie durant le début de la scolarité secondaire. A ce moment, c'est essentiellement la généralisation de procédures de calcul qui conduit à utiliser des lettres, dans divers domaines:

- la mesures des grandeurs géométriques débouche naturellement sur des formules comme $p = 4 \cdot c$ (périmètre du carré), $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (aire du triangle) ou $V = a^3$ (volume du cube);

- les fonctions sont un terrain propice à la traduction littérale d'expressions françaises (élever au carré peut se traduire par l'expression fonctionnelle $n \rightarrow n^2$, multiplier par 4 par $n \rightarrow 4 \cdot n$);

- les nombres et les opérations offrent de nombreuses occasions de «passer» à l'algèbre, par exemple pour exprimer la moyenne arithmétique de deux nombres $(\frac{a+b}{2})$, la somme des premiers nombres naturels $(\frac{n \cdot (n+1)}{2})$ ou encore la commutativité de l'addition ($a + b = b + a$).

Dans l'ensemble de ces cas, le langage algébrique est ainsi une manière d'exprimer les choses sans recourir à une liste d'exemples, mais bien sous une forme abstraite, en réponse à un besoin de généraliser l'expression de ces choses.

Quelques difficultés et erreurs dans l'apprentissage de l'algèbre

Plusieurs études[1] ont mis à jour les difficultés et les erreurs dans l'apprentissage de l'algèbre. Elles ont en outre tenté de déterminer quelques-unes de leurs origines. Elles ont consisté tour à tour à analyser des productions écrites d'élèves, à dialoguer avec des enseignants, à examiner des travaux de psychologie et surtout à questionner des élèves, notamment pour obtenir des informations sur leurs idées et les méthodes qu'ils emploient. Voici un aperçu de quelques obstacles à franchir pour progresser dans ce domaine abstrait.

La lettre en tant qu'objet

Dans les expressions littérales, les lettres sont souvent traitées comme des objets et non comme des «nombres inconnus» ou des «nombres généralisés». Ainsi, pour certains élèves, l'écriture 6*a* signifiera par exemple 6 arbres ou 6 ananas, car la lettre *a* représente un objet dont le nom commence par cette lettre. Ceci est compréhensible, dans la mesure ou des écritures du genre $A = b \cdot h$

1. BOOTH L.R. (1984), *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*, Journal pour les enseignants de Mathématiques et de sciences physiques du Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire, no 5.
BATON B. et al., *L'initiation à l'algèbre*, collection «Documents du CREM» no 3, juin 1996 (dans ce document, les auteurs se réfèrent notamment à BEHR M. et al. (1976) et KIERAN C. (1981)).

sont souvent traduites par « Aire = base · hauteur », où ces trois mots évoquent prioritairement des objets (surface et segments) et non des nombres.

L'attribution d'une seule valeur à une lettre

Certains élèves considèrent qu'une lettre ne peut représenter qu'une seule valeur, et non un ensemble de valeurs. En conséquence, il est impossible que deux lettres différentes représentent un même nombre. Ainsi, pour eux, la valeur numérique de l'expression $x + y$ ne sera jamais égale à celle de $x + z$. Cette idée provient peut-être du fait qu'en arithmétique, on ne peut attribuer qu'une valeur à chaque symbole (chaque chiffre). Il n'y a pas de choix possible pour la valeur du symbole 5, par exemple. En outre, lorsque l'on présente une équation simple telle que $b + 7 = 10$ ou que l'on cherche à calculer la valeur numérique de l'expression $7x + y$ pour $x = 4$ et $y = 1$, les lettres ne prennent, dans chacun de ces cas, qu'une seule valeur.

Le double aspect des expressions algébriques

Beaucoup d'élèves considèrent qu'une écriture contenant un signe opératoire apparent, telle que $4m + 1$, est incomplète. Ils y voient une procédure, quelque chose à faire, et ont tendance à la compléter en écrivant une égalité comme « $4m + 1$ = la réponse » ou « $4m + 1 = n$ ». Cette vision des choses ne devrait pas nous surprendre, car en mathématiques, la réussite consiste souvent à trouver un nombre unique, et une réponse donnée sous la forme $2 + 7$ (par exemple) est rarement acceptée. En fait, l'écriture $a + b$ indique à la fois une procédure (additionner a et b) et un résultat (somme de a et b). C'est bien cette clarification-là qu'il s'agit d'effectuer. Cette conception procédurale peut encore conduire à remplacer $4 + 7x$ par $11x$, étant donné que dans ce cas, il y a certainement lieu de faire disparaître le signe opératoire apparent « + ».

La compréhension des notations et des conventions

Chez les débutants en algèbre, le fait de savoir décrire verbalement une procédure ne conduit pas toujours à l'écrire correctement sous forme symbolique. Relevons deux erreurs courantes :

- ajouter a et b est traduit par ab ;
- multiplier 7 et $f + 3$ devient $7 \cdot f + 3$.

La première erreur témoigne sans doute de la conception selon laquelle une addition correspond à un assemblage de collections. Quant à l'origine de la seconde, elle est à chercher du côté du calcul numérique. Lors de l'étude de ce domaine, les élèves ne perçoivent pas toujours la nécessité d'utiliser des parenthèses. Ils pensent que les opérations doivent s'effectuer de gauche à droite, ou alors, suivant le contexte, savent quelle opération doit être effectuée en premier. Malgré le fait qu'ils n'utilisent pas de parenthèses, ils aboutissent souvent à des réponses correctes, ce qui n'est pas le cas en algèbre, où l'oubli des parenthèses amène fréquemment à des résultats erronés.

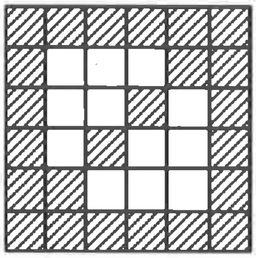
L'algèbre comme outil de communication

L'activité que nous décrivons ici s'inscrit dans un contexte d'approche de l'algèbre. Elle figure sous une forme proche, dans l'excellent ouvrage *Les débuts de l'algèbre au collège*[2], édité par l'Institut National de Recherche Pédagogique.

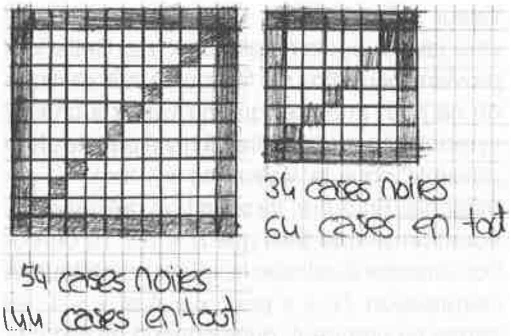
2. COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A. *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP, 1996

Ce carré est formé de petits carreaux isométriques.
Ceux des bords et ceux d'une diagonale ont été hachurés.

Comment calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur ce même modèle?



L'intention poursuivie est de faire prendre conscience aux élèves de la fonction généralisatrice de l'algèbre et de l'économie d'écriture découlant de l'utilisation du langage algébrique. Voici un scénario possible pour la gestion de la classe[3]. Les travaux présentés sont ceux d'élèves de 7e et 8e années. Leur but premier est d'illustrer la multiplicité des niveaux de langage et non pas de refléter les difficultés et erreurs décrites précédemment.



Phase d'appropriation, individuellement

Cette phase a pour but de permettre aux élèves de saisir les caractéristiques de la figure présentée. Elle pourra être laissée à leur charge, notamment s'ils ont déjà rencontré des problèmes proches de celui-ci. Dans le cas contraire, il s'agira probablement de leur suggérer de dessiner quelques carrés de dimensions différentes et de chercher le nombre de petits carreaux hachurés de chacun d'eux.

Phase de formulation, par petits groupes

Les élèves sont alors appelés par l'enseignant à élaborer une ou plusieurs méthodes de calcul conduisant au nombre de petits carreaux hachurés de chaque figure construite sur le modèle proposé, puis à la (les) rédiger à leur manière (en français, en langage algébrique...). Pour certains d'entre eux, la tâche paraît au premier abord impossible. Il n'est donc pas rare d'entendre des réactions comme «Oh mais moi, j'en aurai trois pages», «Ce sera tout un poème» ou «Je n'y arriverai jamais». Les travaux suivants illustrent ce moment clé de l'activité:

Il faut prendre le nombre d'un côté moins un fois quatre plus moins deux du nombre d'un côté, et ça nous donne le nombre de cases hachurées.

3. Cette activité est de type «recherche guidée», avec des phases d'autonomie entrecoupées de mises en commun ou incitations du maître. Malgré certaines ressemblances avec les phases d'une situation-problème, elle n'en est pas une, tout simplement parce qu'il n'est pas pensable que les élèves élaborent spontanément des règles et conventions d'écriture que les mathématiciens ont mis des millénaires à adopter. Le langage algébrique s'enseigne plus qu'il ne se construit.

On fait le côté du carré fois 4 plus le côté du carré moins 6 = 4x+(x-6)

formule: 4(a-1)+a-2
(a = longueur d'un coté)

il faut faire 5 · nbre de côtés dans un côté - 6 carrés

(nbre □ 1 côté)^2 - (nbre □ 1 côté -2)(nbre □ 1 côté -3)
= nbre □ hachurés

il faut faire : (x-4)·5+14

En général ont fait le nombre de ▨ du bord fois quatre.
La diagonale est formée du même nombre de ▨ que le bord, moins deux ▨ parce qu'ils sont déjà comptés dans le bord. Moins quatre ▨ des coins.

Le passage aux formulations écrites ne peut s'effectuer que si des stratégies de calcul ont été imaginées. Au cours de la phase d'appropriation, il est possible que certains élèves se soient contentés de compter les petits carreaux hachurés des figures qu'ils ont dessinées. Il est alors nécessaire de les inciter à dépasser ce stade en leur demandant de calculer le nombre de carreaux hachurés de carrés de «grandes» dimensions, de sorte que toute représentation par des dessins devienne fastidieuse[4].

4. Si on voulait faire naître la nécessité d'utiliser une formule généralisable, il faudrait donner un problème du genre «Léonie a dessiné une figure construite sur ce modèle. Elle y compte moins de 2002 carrés hachurés. Noémie en a dessiné une autre. Elle y trouve plus de 2002 carreaux hachurés et 15 carreaux de plus que dans celle de Léonie. Quelles pourraient bien être les dimensions des figures dessinées par ces deux élèves ?» Un tel problème peut être résolu par l'écriture de suites fastidieuses de nombres ou par l'application d'une loi générale, qui allège sensiblement la tâche. D'où l'intérêt et l'utilité de cette deuxième méthode.

Phase de mise en commun, collectivement

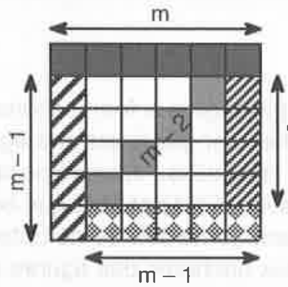
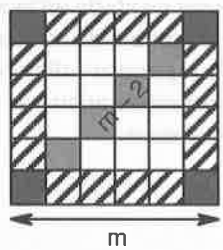
Durant cette phase, chaque groupe présente sa (ses) méthode(s) à l'ensemble de la classe (au tableau, au rétroprojecteur, sur des affiches...). Le débat qui s'installe alors est généralement très nourri et peut déboucher sur:

- la prise de conscience de l'existence de diverses méthodes;
- la validation ou le rejet de certaines formulations;
- des propositions de réécritures de certaines d'entre elles;
- des demandes concernant la signification de la ou des lettre (s) utilisée(s);
- des questions relatives aux règles d'écriture mathématique;
- la vérification, par le biais du calcul numérique, de l'exactitude des expressions littérales;

- la mise en évidence de la difficulté d'exprimer une méthode de calcul avec les mots de la langue française (phrases imprécises, lourdeur des expressions, non-dits, vocabulaire équivoque...) ;
- le fait qu'une écriture algébrique permet de communiquer un résultat;
- ...

Phase de recherche d'une nouvelle formulation, par petits groupes

Le cas échéant, les élèves traduisent chaque expression verbale présentée par une formule mathématique. S'ils emploient plusieurs lettres dans une même formule, ce qui est fréquent lorsqu'ils débutent en algèbre, le maître leur demandera de réécrire chacune d'elles en n'utilisant qu'une seule lettre, ce qui conduit par exemple à des écritures du genre:

Avec plusieurs lettres	Avec une seule lettre (suite à la demande de l'enseignant)	Représentation sous-jacente (après discussion avec l'élève)
$m+T+T+d+d$ donne le nombre de carreaux hachurés $m-1=T$ $T-1=d$	$m+(m-1)+(m-1)+(m-2)+(m-2)$	
$m \cdot 4 = B$ $B-4=L$ $L+(m-2)=$	$(m \cdot 4)-4+(m-2)$	

Phase d'institutionnalisation, collectivement

Plusieurs aspects liés à l'écriture d'une formule mathématique pourront alors être institutionnalisés:

- une lettre peut être remplacée par n'importe quel nombre d'un ensemble donné (ici, l'ensemble des nombres naturels);
- le choix des lettres est arbitraire;

- il est nécessaire de préciser ce que représente chacune des lettres utilisées;
- plusieurs formules permettent d'exprimer un même résultat.

Pour conclure

La construction d'une ou plusieurs expressions algébriques généralisant une situation géométrique donnée nécessite d'établir des liens entre un contexte concret et un langage abstrait. Elle permet aux élèves de donner du sens aux lettres et aux signes opératoires qu'ils emploient. Ces symboles interviennent en réponse à l'intention d'exprimer les choses. Dès le moment où il y a accord sur leur interprétation, les élèves ressentent qu'ils disent les choses d'une manière succincte mais exacte. La finalité et l'efficacité de ce type d'écriture, de ces conventions et de cette manière de procéder apparaît ainsi au grand jour. Ce genre d'activité, non formelle et non technique, est primordial dans l'apprentissage de l'algèbre.

(Voir pages 13 à 15)

Solutions des qualifications régionales valaisannes

17e championnat des jeux mathématiques et logiques
13 novembre 2002

N	Solution
1	2, 11, 23
2	8 boîtes
3	14 oeufs
4	13 filles
5	9 h 15
6	58 secondes
7	8 coups
8	15 juin
9	Rosita: tennis, Bernadette: volley, Michèle: basket
10	4 et 7 pièces
11	1, 3, 9 et 27 kg
12	6160 fr.
13	20000 fr.
14	long, long, bref, long, bref

TORTICOLIS

Jeu proposé par Martine Simonet

Ce jeu vise à développer la reconnaissance de positions relatives d'objets sur une grille de 3 x 3. Il se joue en solitaire, mais vous trouverez plus loin quelques propositions de variantes pour plusieurs joueurs.

Compétences attendues

- Situer des objets sur une grille.
- Anticiper les déplacements des objets disposés sur la grille lors de ses rotations d'un quart, d'un demi et de trois quarts de tour.

Matériel

- 4 carrés jaunes
- 5 ronds rouges
- un plan de jeu constitué d'une grille carrée de 3 x 3 cases
- 34 cartes-modèles. Sur chacune d'elles figure une disposition différente des 9 pièces sur la grille, à une rotation près. (Voir *Inventaire*, *Math-Ecole* 204, p. 29. Ces cartes sont aussi reproduites à la page .... et on les trouve, en plus grand, sur le site internet de *Math-Ecole* http://www.math-ecole.ch)

But du jeu

Reproduire 15 modèles en 30 permutations au maximum.

Préparations

Prendre 16 cartes, 30 jetons, la grille et les 9 pièces.

Former une pile avec les cartes (faces cachées)

Retourner la carte du haut de la pile et placer les pièces sur le plan de jeu selon la configuration de cette première carte.

Règles du jeu

Retourner la carte suivante, celle du haut de la pile.

Orienter cette deuxième carte dans la position souhaitée et la placer sur la première carte.

Reproduire cette nouvelle carte sur la grille, en permutant les pièces deux à deux. Chaque permutation coûte un point (1 jeton).

Retourner la carte supérieure de la pile et la placer face visible, sur le tas des deux cartes déjà jouées. Orienter cette troisième carte dans la position souhaitée. Reproduire cette nouvelle carte comme précédemment, en permutant les pièces de la grille, et ainsi de suite...

Fin de la partie

Le joueur gagne s'il réussit à reproduire les 15 cartes en un maximum de 30 points. (Il perd s'il reste des cartes dans la pile alors qu'il n'a plus de jeton.)

Remarques

L'activité est normalement réalisable avec une moyenne de deux permutations par carte.

Selon l'âge du joueur, on peut augmenter ou réduire le nombre de cartes et de jetons à disposition.

Variantes

TORTICOLIS solo (casse-tête pour 1 joueur)

Il s'agit de former une suite logique avec toutes les cartes de manière à ce qu'une seule permutation suffise pour passer de l'une à l'autre. Les cartes doivent être disposées sur une seule ligne. Elles ne peuvent plus être tournée une fois qu'elles sont posées.

Les 9 pièces et la grille ne sont utilisées que dans un deuxième temps, pour permettre la validation de la sériation des cartes.

Nous conseillons de réduire le nombre de cartes en proportion de l'âge du joueur.

TORTICOLIS domino (pour plusieurs joueurs)

Comme dans la variante solo, les joueurs doivent créer une chaîne de cartes n'exigeant qu'une permutation entre deux cartes adjacentes.

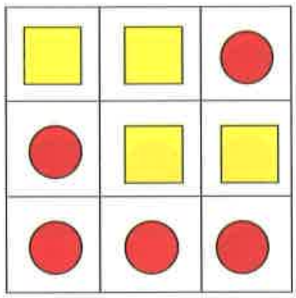
Après s'être répartis équitablement les cartes et avoir placé une carte au centre de la table, les joueurs, chacun à leur tour, disposent une carte à droite ou à gauche de la (des) carte(s) déjà posée(s). Celui qui ne peut pas jouer passe son tour. Le gagnant est le premier à avoir posé toutes ses cartes (ou celui qui a le moins de cartes en main lorsque le jeu s'arrête).

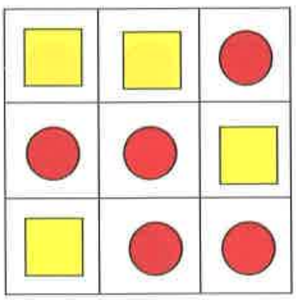
TORTICOLIS tremolo (pour plusieurs joueurs)

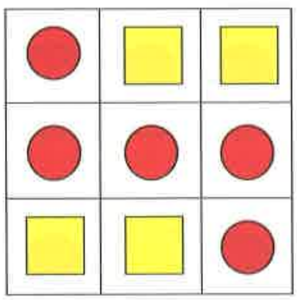
Un joueur place les 9 pièces au hasard sur la grille et distribue équitablement les cartes que chacun dispose en un tas.

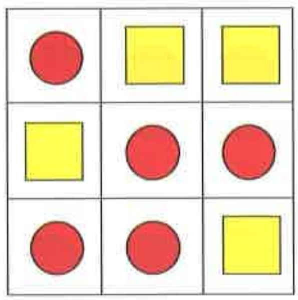
A tour de rôle, chaque joueur permute deux pièces. Lorsqu'un joueur parvient à réaliser le modèle figurant sur la carte supérieure de son tas, il peut se débarrasser de celle-ci (mais il n'a pas le droit de rejouer). S'il forme une combinaison correspondant à la carte d'un autre joueur, ce dernier peut éliminer sa propre carte. Les joueurs peuvent modifier l'orientation de leur carte à tout moment.

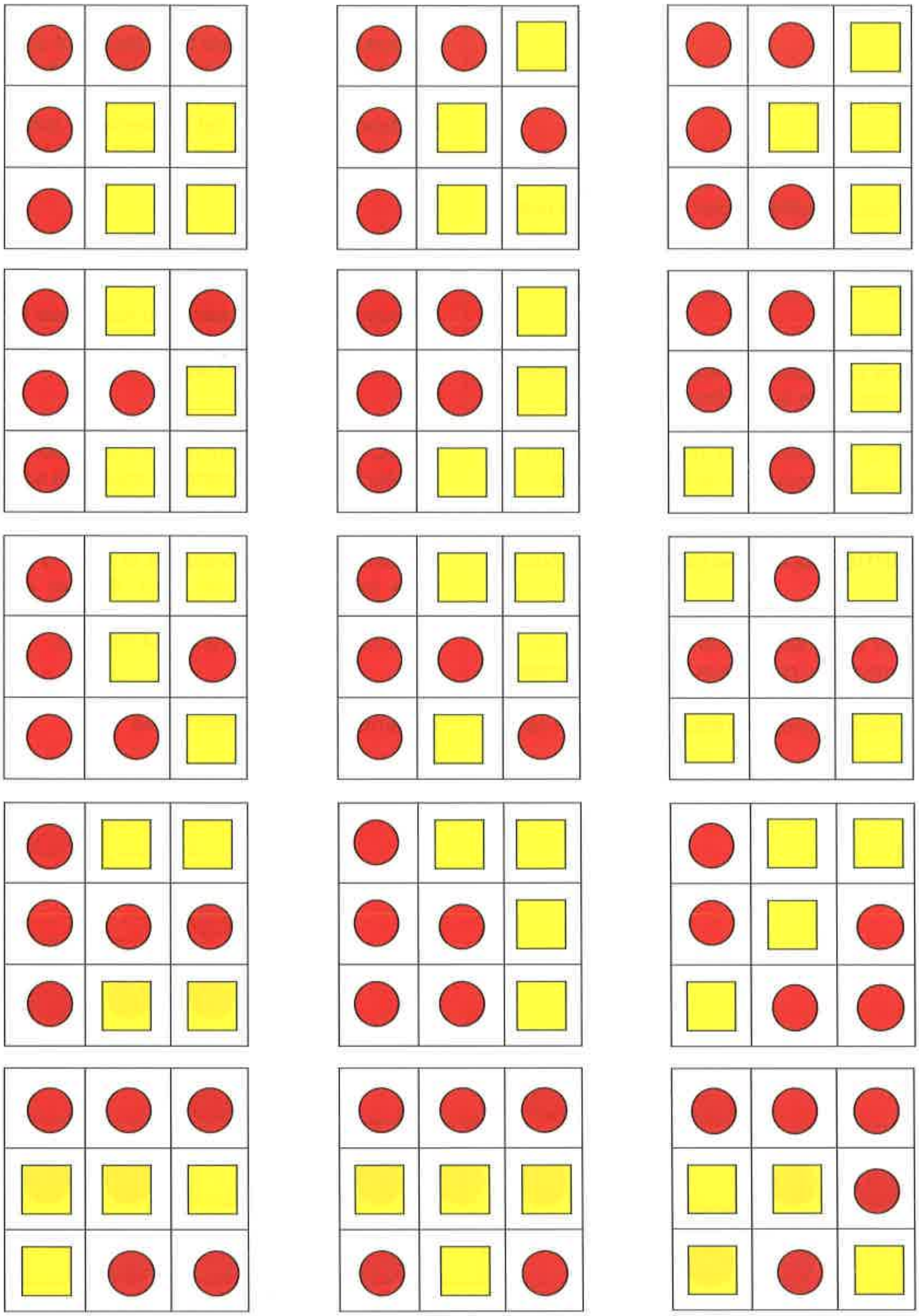
Le gagnant est le premier joueur à s'être débarrassé de toutes ses cartes

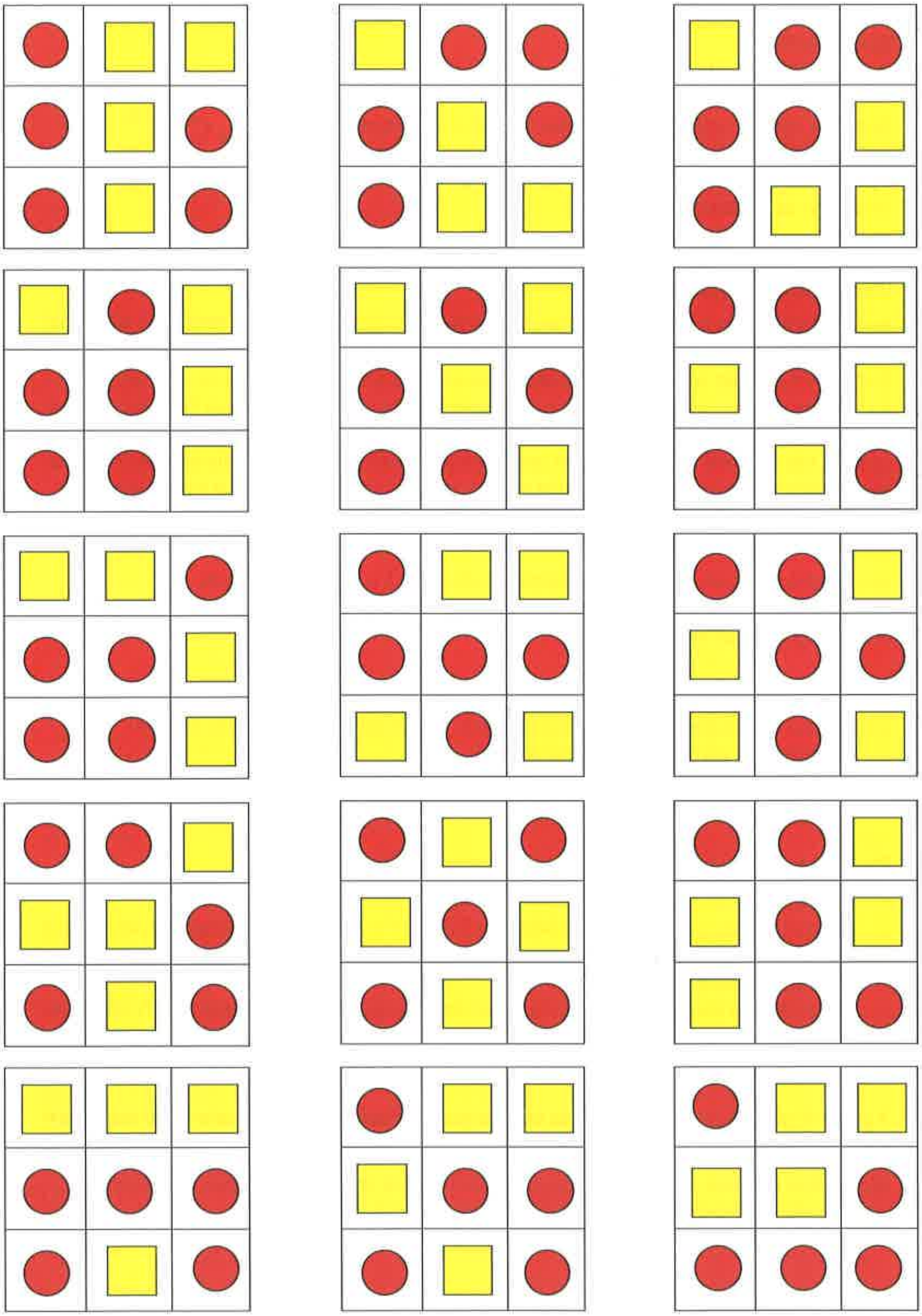












EUROMATH
Coupe d'Europe des régions

Organisée dans le cadre du 4e Salon des jeux et de la culture mathématiques par le Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM), à Paris, Place St Sulpice, du 29 mai au 1 juin 2003 (Week-end de l'Ascension)

Déroulement des épreuves

Euromath 2003 verra s'affronter en plusieurs manches, des équipes venues de différentes régions de France et de l'étranger, le vendredi 30 mai et le samedi 31 mai.
D'abord, il y aura des épreuves chronométrées de sélection s'organisant autour de jeux logiques.
A l'issue de la phase qualificative, les six meilleures équipes disputeront la poule finale sur scène et devant un public, dans la salle des fêtes de la mairie du VIème arrondissement: des épreuves spectaculaires, très visuelles, faisant intervenir une partie ou la totalité des équipes, afin de sélectionner les deux meilleures équipes qui s'affronteront ensuite, toujours sur scène, lors de la superfinale.

Comment former son équipe?

Le choix des membres de l'équipe est laissé à l'initiative et à la charge des régions.
Une équipe se compose de 7 personnes: un capitaine (non joueur), un adulte, un étudiant, un lycéen, deux collégiens et un élève du primaire.

Comment participer?

L'inscription des équipes est gratuite et peut se faire en contactant *Math-Ecole* ou le CIJM
- L'hébergement est pris en charge par le CIJM
- Le transport est à la charge des équipes engagées. Mais le CIJM peut aider dans la recherche des partenaires (SNCF, Région...)

Pourquoi participer?

- La rencontre entre des équipes de différentes régions est riche d'expériences.
- Le séjour parisien sur le Salon d'animation des jeux et de la culture mathématique et la participation à ses événements associés (Rallye dans les rues de Paris, Combilogique, LogicFlip...) est l'assurance de souvenirs inoubliables.
- Jouer, chercher ensemble, s'affronter à travers les défis concoctés par l'équipe de la FFJM est une expérience valorisante.
- ...

Y aura-t-il une équipe de Math-Ecole ou des équipes cantonales pour représenter la Suisse romande à cette joute sympathique et originale?

Si vous êtes intéressé par la constitution d'une équipe, ou si vous avez des élèves à proposer:
- consultez le règlement sur le site du CIJM: www.cijm.org, ou
- écrivez au CIJM courrier@cijm.org ou prenez contact avec *Math-Ecole* admin@math-ecole.ch.

Des pistes de réflexion didactiques pour construire la droite numérique en équipe éducative

Pierre Stegen et Annick Sacré
Équipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques
Université de Liège

[ndlr] Nous publions ici le troisième d'une série de quatre articles sur la droite numérique, de nos collègues de Liège. Les deux premiers concernaient les degrés 5 et 6 (élèves de 10 à 12 ans), celui-ci et le suivant sont consacrés, toujours sur le thème de la droite numérique, aux premiers degrés de l'école primaire et accompagnés de nombreuses propositions d'activité. La «bande» numérique de nos moyens d'enseignement romands est ici la «bandelette» numérique. Mais, au-delà de la terminologie, la problématique reste la même. Il y a un saut énorme entre la bande et la droite des nombres: celui qui existe entre le discret et le continu. Cela vaut bien la peine qu'on y consacre quelques réflexions, dès les premiers degrés de l'école primaire. Merci à nos collègues belges de nous autoriser à reproduire ces articles, parus dans leur revue Ecole des années 2000.

Lors des deux dernières publications[1], nous avons analysé les difficultés rencontrées par les élèves du degré supérieur dans l'utilisation de la droite numérique. Cette analyse nous a conduits à réfléchir sur la manière dont le référent «droite numérique» était construit à l'école primaire. Cette réflexion, envisagée à l'échelle de l'école primaire, s'est faite au départ de questions et de réflexion qui nous paraissent utiles de rappeler ici:

Au cours de la troisième maternelle et en début de scolarité primaire, les élèves sont familiarisés avec le principe ordinal via des jeux de parcours qui préfigurent notamment une étude plus systématique au travers d'une bandelette numérique… Très vite, celle-ci est abandonnée au profit d'un référent «mathématiquement plus correct» qu'est la droite numérique. L'introduction de ce référent soulève, au vu des difficultés rencontrées par les élèves, de nombreuses questions:

– Comment l'enseignant de première année assure-t-il ce passage, cette rupture, entre deux supports fondamentalement différents: la bandelette numérique et la droite numérique?

– Pourquoi introduire si tôt la droite numérique? Est-elle vraiment indispensable?

– À ce niveau, les élèves étudient essentiellement des nombres entiers… soit des quantités discrètes. La bandelette numérique n'est-elle pas un support plus adapté au niveau de compréhension des élèves de cet âge et au type de nombre rencontré?

– Plutôt que de leur imposer comme tel, un support dont ils ne peuvent comprendre les principes de construction, ne faut-il pas privilégier d'autre support, comme la grille des 100 premiers nombres,

1. Voir *Math-Ecole* 202 et 203

qui va leur permettre de mieux appréhender les régularités des suites numériques et devenir un référent très appréciable pour affronter des opérations additives et soustractives?

– Un référent comme la droite numérique apparaît, dans le développement des compétences numériques des élèves, très utile et compréhensible au moment où les élèves découvrent les nombres rationnels qui vont leur permettre d'aborder des quantités continues. Ne faut-il dès lors pas aborder la construction de ce référent, en fin de cycle 8/10, lorsqu'il apparaît que les nombres rationnels ne peuvent être situés sur des bandelettes numériques... que ce support doit être abandonné au profit d'un autre?

Lors des deux précédentes publications, nous avons proposé des activités de remédiation aux enseignants du cycle 10/12. Il s'agissait à ce moment de répondre à la question: «***Comment aider les enseignants de 5e/6e primaires confrontés à des élèves en difficultés avec la droite numérique et ne disposant pas d'assez de temps pour effectuer un long et nécessaire retour en arrière?***». Autrement dit, que pouvait apporter la recherche en didactique à des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage révélées par l'analyse formative d'items d'une évaluation externe?

Dans le cadre de cet article et de celui à venir, nous allons vous détailler les éléments didactiques que nous vous proposons en réponse à une seconde question de recherche tout aussi indispensable: «***Dans une perspective plus globale, quelles activités mettre en place pour permettre aux élèves de construire, en cycles d'apprentissage, des droites numériques?***». Autrement dit, en quoi les erreurs commises par des élèves de 5e ou de 6e peuvent-elles intéresser les enseignants des autres cycles d'apprentissage? Que peut suggérer la recherche en didactique?

Des propositions d'activités

1. Les jeux de parcours

On trouve des jeux de parcours dans le commerce, on peut également très facilement adapter leur principe aux différents thèmes abordés ou aux projets menés au fil de l'année. Il faut veiller, au début du moins, à proposer des jeux de parcours simples, c'est-à-dire durant lesquels l'enfant n'a qu'une consigne à respecter: avancer du nombre de cases indiqué par le dé. Par la suite, on peut rendre ces jeux de parcours plus compliqués, en prévoyant certaines cases spéciales: l'enfant devra se conformer à la consigne donnée par la case, par exemple, cueillir un certain nombre de fruits sur les arbres du plan de jeu, rendre un certain nombre d'objets collectés au fil des tours précédents, reculer de X cases, progresser de X cases, passer son tour...

2. De la bandelette numérique à la grille des nombres

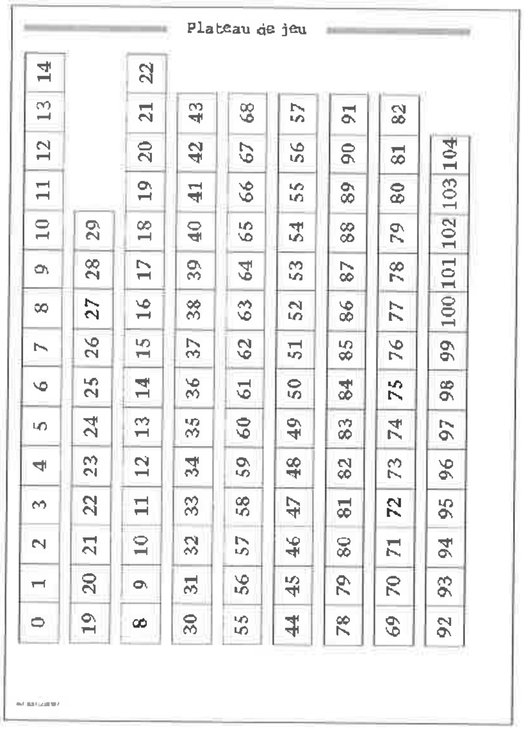
Activité 1: Construction d'une grille des nombres

Objectif:

Construire une grille des nombres qui permettra d'observer les régularités de la suite écrite des nombres.

Matériel:

Des feuilles sur lesquelles se trouvent les morceaux de bandelettes numériques suivantes:



Organisation:

Travail des élèves par deux

- Fabrication d'une bande numérique à partir de morceaux: chaque enfant reçoit une feuille.
- En découpant et en collant les morceaux qui conviennent, les enfants doivent reconstituer une bande numérique régulière à partir de 0 et qui soit la plus longue possible.
- Coloriage des bandes ainsi obtenues selon des consignes telles que:
- «On colorie en rouge toutes les cases où il y a un 5 et en vert toutes celles où il y a un 2»,
- «On colorie en jaune toutes les cases qui contiennent un nombre qui se termine par 9»,
- «On colorie de la même couleur (au choix) toutes les cases qui commencent par le même chiffre»...
- Ces coloriages sont l'occasion d'observations et de verbalisations.
- Réalisation de la grille des nombres: les bandes qui ont été coloriées par dizaines (exemple de consigne) sont découpées «chaque fois que l'on change de couleur». On découvre ainsi les différentes familles (les vingt, les trente...). Les morceaux sont ensuite collés sur une feuille de papier les uns sous les autres de manière à former la grille des nombres de 0 à 99.

Mise en commun:

Mise en évidence des régularités observées lors des phases de coloriage au départ de questions du type: combien de cases entre deux cases coloriées en vert, jaune, rouge...

Activité 2: Des applications autour de la grille des nombres

Objectif:

Apprendre à utiliser la régularité de la suite écrite des nombres.

Matériel:

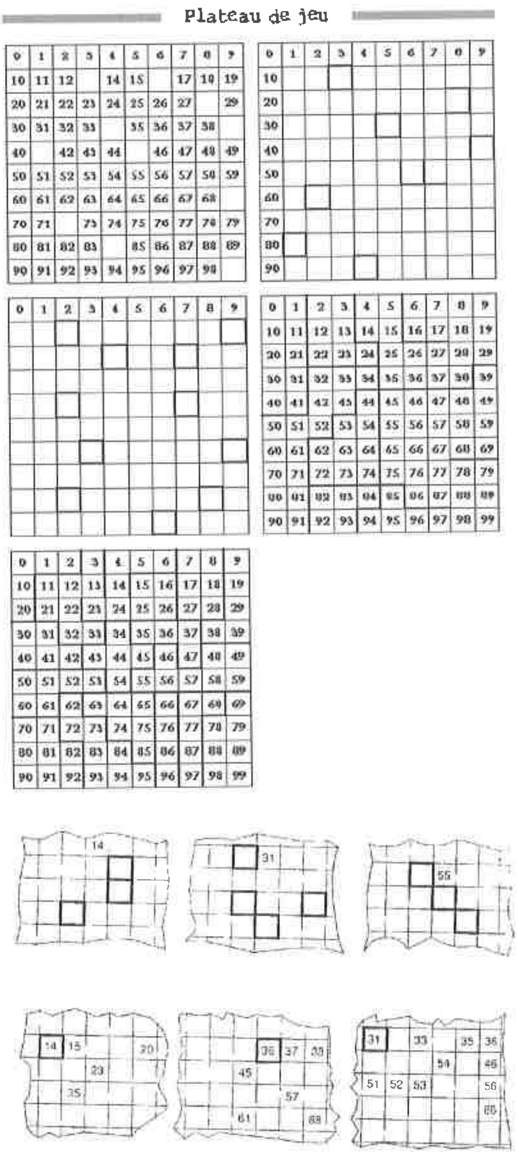
Des grilles de nombres incomplètes;
Des grilles de nombres en puzzle;
Des extraits de grilles des nombres (page suivante).

Organisation:

Travail des élèves par deux

1) Des grilles des nombres à compléter:
   On peut proposer aux enfants trois types de grilles à compléter:

   - ils doivent compléter les quelques cases vides;
   - ils doivent compléter les cases entourées d'un bord foncé avec pour seuls



indices les nombres de la première ligne et de la première colonne;

- ils doivent compléter les cases entourées d'un bord foncé avec pour seuls indices les nombres de la première ligne.

2) Des puzzles:
La grille des nombres a été découpée en un certain nombre de pièces, suivant les capacités des enfants. Ils doivent alors reconstituer le puzzle. Plus il y a de pièces et plus les découpes sont irrégulières, plus le puzzle est difficile à reconstituer.

3) Des extraits à compléter:
Seul un extrait du tableau est donné aux enfants qui doivent le compléter à partir d'une seule information (un seul nombre est donné sur l'extrait).

Activité 3: une reprise de cette activité en 3e primaire

D'autres prolongements peuvent être envisagés avec des élèves de troisième, voire de quatrième année primaire. La grille des nombres est affichée au tableau, elle est constituée de cent cartons, portant chacun un des nombres de 0 à 99 (ou de 1 à 100). Grâce à ce matériel, une enseignante de 3e-4e primaire proposait quotidiennement l'activité suivante à ses élèves. Elle enlevait les cartons de la grille et chargeait les enfants, à tour de rôle, de la reconstituer. Elle pouvait ainsi observer les différentes stratégies mises en œuvre:

- un enfant ne commence à construire la grille que lorsqu'il a trouvé le nombre 1, il cherche ensuite le nombre 2, puis le nombre 3... jusqu'à atteindre le nombre 100;

- un autre commence par placer les cases de la première ligne (de 1 à 10), alors qu'un autre commence par les cases de la première colonne (1, 11, 21, 31,..., 81, 91); ils placent alors les autres cases en se servant de ces repères;

- un enfant prend les cartons comme ils viennent et les place dans les cases, il place ainsi des repères de plus en plus nombreux;

- un autre enfin a pris conscience de certaines régularités de la grille (soit en ligne: + 1, soit en colonne: + 10, soit en diagonale: + 11) et les utilise pour replacer les cartons.

L'intérêt d'une telle activité réside non seulement dans sa répétition (c'est grâce à cela que peuvent apparaître les différentes stratégies), mais aussi dans la discussion qui la prolonge. C'est à ce moment que les enfants soit prennent conscience de ce que leurs condisciples ont découvert, soit clarifient leur pensée en exprimant et en expliquant leur découverte, soit sont encouragés à pousser plus loin leur réflexion grâce à une question posée par un autre enfant ou par l'enseignant.

3. Des déplacements sur la grille des nombres

Une fois que ce référent est parfaitement maîtrisé par les élèves, il peut être utilisé pour effectuer des opérations additives ou soustractives via des déplacements sur cette grille des nombres. Cela peut se faire au travers de l'activité suivante:

Objectif:

Utiliser des écritures additives ou soustractives pour représenter des déplacements sur une grille des nombres.

Matériel:

- Une grille des 100 premiers nombres.
- Des jetons de même couleur par joueur
- Une feuille de route par joueur
- Une feuille pour le secrétaire
- 30 cartons sur lesquels sont écrits des nombres inférieurs à 10 (en vert, pour avancer; en rouge, pour reculer)

Feuille de route d'un joueur

Départ	30

Feuille de secrétaire

	Joueur A	Joueur B
1er coup		
2e coup		
3e coup		
4e coup		
5e coup		

Organisation:

Les élèves sont groupés par trois: 2 joueurs et un secrétaire.

Déroulement:

Au début de la partie, chaque joueur place son pion sur la position 30 (par exemple). Le premier joueur tire alors une carte et déplace son pion selon les indications de celle-ci. Le deuxième joueur fait de même. A chaque tour, les joueurs notent la position atteinte après leur déplacement, tandis que le secrétaire note les déplacements effectués par les deux joueurs. A la fin de la partie (après 5 coups, par exemple), le gagnant est celui qui occupe la position la plus proche (ou la plus éloignée, selon ce qui a été décidé en début de partie) de 0.

Les différents groupes de trois élèves échangent les feuilles de notations. Chaque groupe met ainsi en relation les positions indiquées par les feuilles des joueurs et les déplacements indiqués par la feuille du secrétaire.

Mise en commun:

Une mise en commun suit cette phase de vérification. Elle permet aux différents groupes d'exprimer les incohérences qu'ils ont éventuellement pu observer. Elle permet également de constater les différentes notations utilisées par les secrétaires pour coder les déplacements:

en utilisant les couleurs	en utilisant des mots	en utilisant des signes
3 vert	avancer de 3	+ 3
8 bleu	reculer de 8	– 8

Lors de la vérification et de la mise en commun, on privilégie les écritures additives et soustractives (30 + 3 = 33; 33 – 8 = 25).

4. De la bandelette des nombres vers la droite numérique

Activité 1

Objectifs:

Passer de la présentation d'une suite des nombres dans les cases d'une bande numérique vers une représentation de cette suite sur une droite numérique.

Utiliser la droite numérique comme outil mental ou dessiné de validation ou de résolution de problèmes

Organisation:
Travail en duo ou individuel

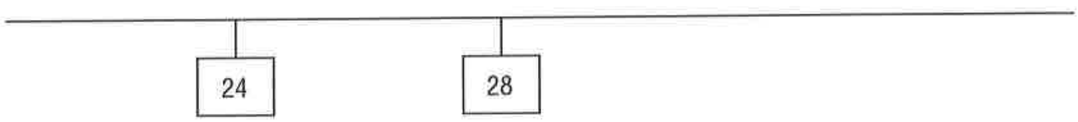
Donner aux élèves le défi suivant: en n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 et 4 former un nombre le plus proche possible de 28.

Exemples: 24 et 31.

Chaque élève écrit sur une étiquette sa proposition. Toutes les étiquettes sont collectées et regroupées au TN. On ne conserve que les propositions respectant la consigne de départ (utilisation des 4 chiffres).

L'enseignant demande alors aux élèves si, parmi les nombres proposés, il y a un nombre plus proche de 28 que les autres. Il dessine une droite au TN et place l'étiquette 28 au milieu de cette droite. Chaque étiquette est ensuite placée en respectant la convention: je place 24 à gauche de 28 car 24 est plus petit que 28.

L'enseignant demande aux élèves de positionner de la même manière tous les nombres trouvés. Après ce positionnement, on peut faire constater aux élèves que tous les nombres placés à gauche de 24 ou à droite de 31 sont plus éloignés. Ceux qui ont proposé 31 vont

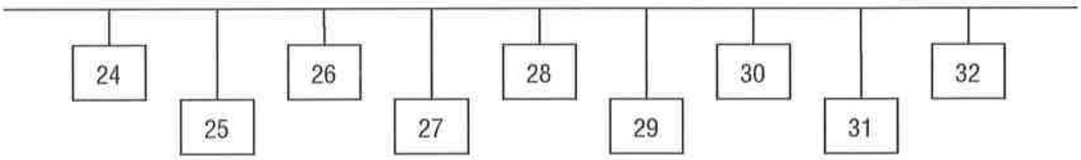


sans doute défendre leur nombre auprès de ceux qui ont proposé 24. L'enseignant peut faire rebondir le débat en interrogeant les élèves pour voir s'il n'y a pas encore des nombres qui sont plus proches. Il demandera alors de placer sur une étiquette, tous ces nombres qui se trouvent entre 24 et 28 d'une part et, d'autre part, entre 28 et 31.

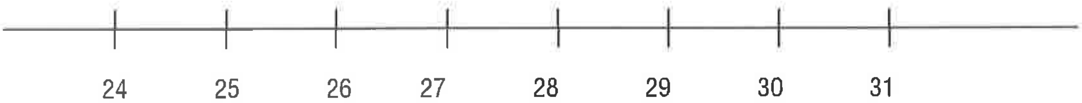
Cette demande est intéressante car elle conduit les élèves à ajuster leur positionnement de nombres.

Ainsi, un élève avait placé 24 tout à gauche de 28 et 31 de façon assez éloignée, à droite. Lorsqu'il s'est agi de placer les nombres intercalaires comme 25 ou 26, l'élève a constaté qu'il n'y avait pas assez de place. Cela l'a obligé à déplacer le 24 et de le situer plus à gauche de 28.

Au terme de ce travail, les élèves ont construit la droite numérique suivante:



Ou



Il faut noter, qu'à ce stade, les droites ne sont pas encore graduées… ce sont toujours des étiquettes placées les unes à côté des autres.

Au terme de cette activité, l'enseignant peut faire conclure que 31 est plus proche de 28 que 24. En effet, on peut compter les pas qui séparent 28 de 31, 28 de 24 pour conclure que c'est bien 31 qui est le plus proche de 28.

Cette activité peut être reprise deux ou trois fois au départ des interrogations suivantes:

Le plus proche de 53 avec les chiffres: 6, 4, 2, 3 (solution: 46)

Le plus proche de 55 avec les chiffres: 2, 4, 6, 8 (2 solutions: 48 et 62)

Le plus proche de 45 avec les chiffres: 1, 2, 3, 5 (solution: 51)

Après ces différentes recherches, la classe se sera constitué des morceaux de droite numérique (ou du moins des premières approximations de droite selon la régularité des graduations).

Activité 2

Objectifs:

Passer de la présentation d'une suite des nombres dans les cases d'une bande numérique vers une représentation de cette suite sur une droite numérique.

Utiliser la droite numérique comme outil mental ou dessiné de validation ou de résolution de problèmes

Matériel:

Une feuille contenant des droites numériques déjà graduées (une vingtaine de graduations) mais vierges de nombres.

Organisation:

Travail en duo ou individuel
Le maître dicte trois nombres aux élèves et leur demande de les placer sur la première droite numérique. Ces nombres sont 39, 23 et 28.

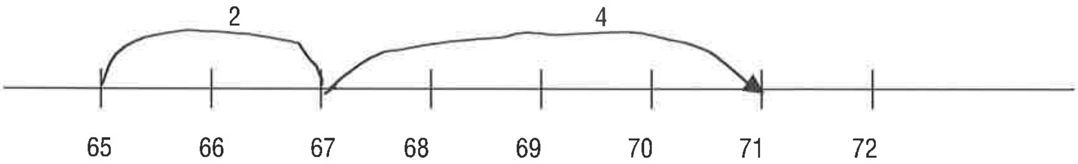
S'il constate des difficultés ou des erreurs de placement, il peut aider les élèves en leur demandant quel est le plus petit? Le plus grand? et si nécessaire de compléter les graduations intermédiaires.

Il demande ensuite aux élèves de calculer l'écart entre le premier et le deuxième nombre (le nombre de pas pour aller du premier au second); ainsi que le nombre de pas entre le second et le troisième.

Mise en commun des procédures utilisées par les élèves:

Nouvelles séries de nombres à placer: 98, 89, 100 – 67, 71, 65 – 33, 40, 25 et 109, 95, 112

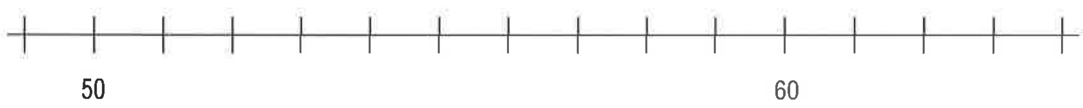
Même démarche et introduire progressivement la notation utilisant des arcs fléchés:



Prolongements

Proposer les activités d'entraînement suivantes:

1. placer les nombres 49, 52, 55 et 61 sur la droite numérique suivante:



2. Dans les exercices suivants, aucune graduation régulière n'est donnée:

   – deux nombres sont donnés, par exemple 20 et 100, il faut placer tous les nombres de deux chiffres que l'on peut former avec 1, 3, 5 et 6. La confrontation des propositions devrait sensibiliser les enfants à la plus grande proximité existant entre les nombres 31, 35 et 36… qu'entre les nombres 51 et 36… sans pour autant aborder la proportionnalité de la longueur du segment entre deux nombres et de l'écart entre ces nombres. Ils seront amenés à remarquer que 31, 35 et 36 devront être serrés ; tout comme 51 et 53 et 63 et 65.

– Placer tous les nombres possibles sur cette droite

– Placer tous les nombres 50, 75, 57, 32, 87 sur cette droite :

Au cours de ce travail de mise en place de la droite numérique, il est nécessaire de varier les exercices pour que le positionnement approximatif des nombres sur la droite devienne un outil familier de mise en ordre et de comparaison.

Math-Ecole, les années quatre-vingt

François Jaquet

Math-Ecole au service de la coordination romande

Dans les deux premiers articles, retraçant l'histoire de *Math-Ecole*[1] nous avons vu que la revue, dédiée aux nombres en couleurs durant ses cinq premières années, de 1961 à 1966, est rapidement devenue un espace de réflexion élargi à d'autres innovations dans l'enseignement des mathématiques. Elle a ainsi consacré de nombreuses pages aux propositions de N. Picard, Dienes et autres précurseurs du mouvement qui allait rester dans l'histoire sous l'appellation des « Mathématiques modernes ». Dans les années septante, *Math-Ecole* est le vecteur d'information et d'introduction de la réforme romande de l'enseignement des mathématiques, approfondissant certains thèmes, présentant les nouveaux moyens d'enseignement, ouvrant des débats élargis sur l'activité mathématique. La revue, après avoir été aux avant-postes de l'innovation, est ainsi devenue un auxiliaire précieux de la formation continue et permanente des maîtres.

En 1980, *Math-Ecole* est domiciliée au service de la Recherche pédagogique de Genève, dont le directeur, Raymond Hutin, a pris la relève de Samuel Roller depuis 4 ans, au poste de rédacteur responsable. Sur un tirage de 2800 exemplaires environ, près de 2000 aboutissent sur le pupitre des enseignants de Genève, de l'école enfantine à la sixième primaire, à qui les autorités scolaires du canton offrent gracieusement la revue. Dans les autres cantons, on trouve encore beaucoup d'abonnés institutionnels : 300 exemplaires pour les salles des maîtres du canton de Neuchâtel et une cinquantaine d'autres pour les inspecteurs de plusieurs autres cantons.

La position de la revue, son rôle, sa fonction quasi institutionnelle sont bien affirmées dans l'éditorial du numéro 125, en novembre 1986, dans lequel R. Hutin dresse un bilan des 25 premières années de *Math-Ecole* :

...Avec l'introduction des programmes romands pour les six premières années de la scolarité obligatoire, Math-Ecole a pris le parti de jouer pleinement le jeu de la coordination, au risque, faut-il le dire, d'y perdre un peu de son identité et de sa vocation de ferment novateur. Il s'agissait en effet de ne pas déconcerter un corps enseignant engagé dans une mutation difficile et de considérer que le changement, quel qu'il soit, demande la maturation du temps. Au cours des dix dernières années, l'accent a été mis sur l'accompagnement de la réforme et de la formation des maîtres. Grâce à la contribution bénévole de nombreux auteurs, titulaires de classes aux prises avec le quotidien, spécialistes de la mathématique et de la pédagogie, animateurs, méthodologues, chercheurs, ce sont près de 1400 pages qui ont été consacrées à la rénovation de l'enseignement de la mathématique dans sa conception romande. Mais s'il est facile de compter les pages, c'est une tout autre affaire que de mesurer, la mesure étant par définition une approximation, l'impact et la qualité de cet effort...

Ces conditions ont évidemment des effets sur les contenus. *Math-Ecole*, qui avait déjà

1. Voir *Math-Ecole* 200, «Les années soixante» (pp 53-63) et 201 «Les années septante» (pp 31-48)

largement présenté le curriculum romand, va passer aux propositions plus concrètes. Après avoir répondu, dans les années septante, à la question: qu'est-ce qu'il y a de nouveau? elle va tenter de dire le pourquoi et le comment.

Math-Ecole, organe de promotion des moyens d'enseignement romands

Le numéro 91, de janvier 1980, porte en sous-titre: *Math 1P, Edition 1979.*

Sous la plume de Jean Cardinet, directeur du Service de la recherche de l'IRDP, un *Historique de l'évaluation et de la réédition des moyens d'enseignement de première année* rend compte de l'ampleur et de l'originalité du projet de curriculum romand et de son évaluation: plan d'études, élaboration de moyens d'enseignement pour l'élève et pour le maître reposant sur le programme conçu préalablement, classes pilotes, enquêtes généralisées avec participation de tous les élèves et de tous les maîtres, groupes de travail cantonaux et romands...

Les autres articles du numéro confirment cette adhésion à la deuxième édition de ces moyens d'enseignement:

- sous la plume de François Jaquet on trouve un éditorial louant «le sérieux, l'honnêteté et le caractère scientifique de l'entreprise» de réédition de ces moyens d'enseignement puis un autre article présentant les adaptations en fonction des résultats de l'évaluation de la première édition;
- dans ses *Libres propos*, Samuel Roller, explique ainsi la raison des orientations prises dans le domaine du calcul: ... *Dans la méthodologie de 1973, l'avenue OP fut trop peu honorée. Six ans plus tard, on se ravise: on fera plus d'opérations. Mais ce qu'il faut dire, c'est qu'on les fera mieux. Maîtriser les algorithmes est besogne de robot. La calculatrice de poche en fait autant et plus vite. Etre capable, en revanche, de répondre à la question 8 x 7... «je ne sais pas mais je sais comment m'y prendre pour savoir», cela est plus valable que la réponse immédiate, attendue par la tradition.* «7, c'est 5 + 2; 8 fois 5, je le sais: 40; 8 x 2... 16; 40 + 16... 56». *Et du même coup l'élève de la nouvelle math saura 8 fois 14... 112; 16 x 7; etc. Plus il saura de cette manière neuve, plus il saura se servir de la calculatrice. Le mythe est sauf. Plus que le mythe: l'avenir de nombreux enfants...*

  Le fondateur de *Math-Ecole* justifie aussi le remplacement du terme «jeu» par «activité» dans la méthodologie, tout en mettant en garde contre le risque de l'oubli du jeu et la méconnaissance du travail: ... *Car le travail, le vrai, celui que les enfants, demain, devront être en mesure de revendiquer, est activité finalisée portant en elle son bonheur. Le but anime, mais l'acte lui-même, quand il reste humain, en fait autant. Des jeux donc qui soient activités douées de sens; des activités qui soient jeux épanouissants.* [2];
- un article de Marie-Claire Andrès décrit les précautions prises dans la nouvelle méthodologie à propos du passage de la manipulation d'objets à l'emploi du symbolisme;
- une nouveauté de la nouvelle édition de *Math 1P* est la présence de suggestions en fin de chaque activité, dont beaucoup sont de type ludique; Janine Worpe en développe quelques-unes à partir de leur

2. 20 ans plus tard, les jeux étant réapparus, sous une autre forme, dans les moyens d'enseignement romand, le thème de la contribution du jeu à la construction de savoirs en mathématique a finalement fait l'objet de réflexions plus approfondies: une rencontre organisée par l'IRDP, préparée et prolongée par des articles de *Math-Ecole* et les ateliers de la journée pour marquer la parution du 200e numéro de la revue. Voir «Notes de lecture» p. 48

pratique en classe et relève dans son introduction: ... *Grâce à ce «réservoir d'idées» l'enseignant pourra compléter, affiner les démarches proposées dans le programme de base. Il pourra également approfondir et répéter les notions essentielles en les approchant sous des angles différents. Il choisira ainsi l'activité qui s'adapte le mieux à sa classe, au temps dont il dispose et à sa façon d'enseigner...*;

- sur le même thème, Jean-François Perret relève l'intérêt psychopédagogique des jeux introduits dans *Math 1P* sous le titre «Suggestions» et dit, entre autres, que... *Nous pouvons faire l'hypothèse, qu'à propos de la même notion mathématique, les connaissances construites ou mobilisées dans des situations pédagogiques différentes (correspondant à des contextes de signification différents) ne sont pas de même nature...*;

- Roger Sauthier parle de l'organisation d'une activité en précisant les différentes fonctions des rubriques de sa description: la situer par rapport au plan d'études, l'intégrer dans son contexte scolaire, la décrire par le déroulement possible d'un groupe de leçons, proposer des activités de remplacement mieux adaptées à la classe.

Un seul article de ce numéro spécial consacré à la nouvelle édition de *Math 1P* reste «non engagé». Il s'agit de *Brèves remarques à propos du schématisme ensembliste lors de l'introduction de la soustraction*, de Jean Brun et François Conne. La première édition, qui s'inspirait directement des conceptions de Dienes, proposait le même schématisme pour l'addition, abordée par la réunion de deux ensembles disjoints, et la soustraction, introduite comme construction de «l'ensemble-différence». Les deux auteurs distinguent le plan de l'action sur les objets et celui du diagramme censé montrer les relations en jeu dans le problème résolu. Ils mettent en doute la généralisation du schéma à l'ensemble des problèmes additifs et soustractifs, indépendamment des variété de traitement des problèmes par les élèves. (Une note de la rédaction, fort opportune, relève que l'analyse concerne le jeu OP4 de la première édition de Math 1P, qui ne figure plus dans la deuxième édition à la suite des évaluations et que le schéma en question a également été rejeté en 2P au profit d'une présentation plus dynamique de la situation soustractive.)

Math-Ecole va ainsi poursuivre régulièrement la promotion des nouvelles éditions des ouvrages romands de Mathématiques 2P à 6P, dans ses numéros 95, 103, 108, 113 et 118, de 1981 à 1985

Math-Ecole et la didactique des mathématiques

C'est en 1980, dans le numéro 91 décrit précédemment, que le mot «didactique» apparaît pour la première fois dans *Math-Ecole*. Le terme réapparaît à quelques reprises, deux ans plus tard, dans le numéro spécial 100-101 sur le thème *Enseigner la mathématique, pourquoi? comment?* puis encore une fois ou deux dans les années quatre-vingt, mais toujours sous la plume de chercheurs. On lui préfère celui de «pédagogie». Rien de plus naturel puisqu'on fait remonter à la fin des années septante la «naissance» de la didactique des mathématiques en tant que «discipline scientifique», suite aux premiers travaux de Brousseau et de Vergnaud. (Nous parlons ici de l'acception francophone du terme, d'un usage plus ancien en langue allemande.)

Au-delà des mots, il y a les faits et les courants d'idées. Si la didactique des mathématique est peu connue sous cette appellation en Suisse romande, elle est bien en train de se constituer en tant qu'étude des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement dans cette discipline. De très nombreux articles de *Math-Ecole* y sont consacrés dès les années quatre-vingt. Le premier d'entre eux paraît dans le numéro spécial 100-101, sous la plume de Jean Brun. Même s'il peut paraître précurseur par rapport aux autres textes qui, sans le mentionner explicitement, abordent tout de même les savoirs, décrivent les situations dans lesquelles ils sont susceptibles d'être construis par l'élève et parlent d'activité cognitive, nous pensons qu'il représente une étape significative pour notre enseignement des mathématiques. (Nous reproduisons cet article en pages 42 à 47). Le temps est en effet venu d'aller au-delà des nouveaux contenus et d'une application trop stricte des propositions des moyens d'enseignement.

On verra ainsi passer dans les pages de la revue de nombreux comptes rendus d'activités très ouvertes, où les propositions, les procédures et les constatations des élèves sont mises en évidence, même si, parfois, ces dernières apparaissent comme le fruit d'habiles maïeutiques conduites par les enseignants. Dans les «situations mathématiques» appelées ainsi à Genève, puis dans les «ateliers de mathématiques» généralisés en Suisse romande par la réédition de «Mathématiques 5e et 6e», et enfin dans les propositions du «coin mathématique» de la Commission romand pour l'Evaluation de l'enseignement des Mathématiques (CEM) – présentées officiellement au 25e anniversaire de *Math-Ecole*, en novembre 1986, numéro 125 – on voit très clairement cette évolution vers des activités plus ouvertes, à la mesure de chaque élève, et une réflexion approfondie sur ce qu'il y a derrière les réponses et les procédures des élèves. Dans un même courant, de nombreux jeux sont aussi présentés et analysés dans les colonnes de Math-Ecole, comme alternatives aux exercices ou travaux plus traditionnels.

La problématique des rapports entre théorie et pratique émerge à cette époque à la lecture de plusieurs articles. Elle est présente en particulier dans la description d'une «situation mathématique», «Les trois petits tours», extraite d'un mémoire de licence soutenu par, Catherine Darbre, Françoise Hirsig et Livia Sellier (Numéro 114, 1984). Ces trois enseignantes de Genève insistent sur la préparation d'une situation, sur les difficultés de sa gestion et sur les conditions de sa réussite. Le passage suivant de leur article illustre bien les préoccupations des maîtres confrontés à de nouvelles pratiques, inspirées de la recherche:

...Avant d'aborder une «situation» il est indispensable que l'enseignant vive cette façon de travailler à son niveau et c'est pour montrer l'importance de la formation du maître que nous avons décidé de parler en premier, d'une manière personnelle, de notre approche de cette pédagogie.

Conduire une situation dans une classe n'est pas une petite affaire et nécessite un certain vécu personnel. L'attitude du maître, ses expériences et son bagage de connaissances sont importants. Il faut vraiment être au courant du pourquoi, du comment et des buts de cette pratique. Néanmoins, une connaissance théorique ne suffit pas. C'est en essayant soi-même que l'on se forme. Souvent, on pense avoir compris en théorie et lorsqu'on doit agir avec les enfants, on se laisse piéger, nos habitudes d'enseigner étant bien «ancrées». En effet, on peut être convaincu de la richesse et de toutes les exploitations possibles d'une «situation», tout en ayant la conviction que cela ne peut se faire qu'en plus et non en lieu du programme...

Dans un autre article, «Le jeu dans l'enseignement de la mathématique, une tentative de communication d'une recherche universitaire» (numéros 123 et 124,1986), Edith Baeriswyl rappelle les dichotomies: *Recherches pédagogiques versus pratiques scolaires et Théories émanant du monde universitaire versus réalités tangibles du praticien*. Son équipe, qui a expérimenté deux jeux avec plus d'une centaine d'élèves et analysé leur fonctionnement, dans le cadre d'une recherche universitaire, se pose la question de savoir comment faire connaître ses résultats: *...cette constatation, doublée du fait que l'équipe de* *recherche est composée de chercheurs universitaires ET de praticiens détachés, nous a amenés à réfléchir à la manière de communiquer nos résultats par un moyen plus accessible que la diffusion classique sous forme de livre, d'articles dans des revues spécialisées ou de communication dans des colloques...*

C'est la voie d'une exposition qui a été choisie et, vu son succès, ironie du sort, d'un article dans une revue, mais pas trop spécialisée: *Math-Ecole*.

On peut conclure ainsi ce chapitre sur la position de *Math-Ecole* par rapport à la recherche en didactique au cours des années quatre-vingt en disant que notre revue a stimulé la réflexion, mais aussi les pratiques liées à l'émergence de nouvelles priorités dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle l'a fait d'une manière originale, en dehors de toute chapelle, en ouvrant largement ses colonnes tant à ceux qui osaient se lancer sur le terrain de l'expérimentation qu'à ceux qui cherchaient à élaborer les fondements d'une nouvelle discipline scientifique, la didactique des mathématiques.

Et encore!

Math-Ecole n'a pas seulement soutenu la coordination romande, milité pour la deuxième édition de ses moyens d'enseignement, ouvert un débat sur la didactique naissante des mathématiques. Le travail d'information et de formation qui est le rôle spécifique d'une revue destinée à ceux qui enseignent les mathématiques s'est poursuivi tout au long de ces années quatre-vingt, au travers d'articles, de numéros spéciaux et d'événements divers.

A la fin de 1981, *Math-Ecole* fête son centième numéro, (100/101) dont nous avons parlé précédemment. A cette époque aussi, paraît «*Math-Ecole pratique*» une publication de 148 pages regroupant une quinzaine d'articles «directement utilisables dans les classes» parus dans les numéros précédents.

En 1982, le numéro 102 annonce que Samuel Roller prend sa retraite du comité de rédaction. Dans son éditorial, Raymond Hutin remercie le fondateur de la revue pour son engagement et sa vitalité et conclut ainsi... *Heureuse et féconde retraite, cher Monsieur Roller!... Et c'est avec plaisir que nous publions ici votre dernier «papier» (est-ce vraiment le dernier?) pour* Math-Ecole. Cet article, qui n'était évidemment pas le dernier, était intitulé «Leçons». Il a permis à son auteur de dresser un magistral aperçu historique des vingt premières années de la revue.

En 1983, c'est le bicentenaire de la mort d'Euler. Le numéro 109 de la revue y est entièrement consacré. L'entreprise était audacieuse: en quatre articles, faire passer un peu du génie de notre célèbre mathématicien bâlois auprès des lecteurs de *Math-Ecole* et leur faire comprendre tout l'intérêt qu'il représente pour l'enseignement des mathématiques. Elle a réussi semble-t-il puisque ce numéro spécial a été fort demandé.

En 1986, *Math-Ecole* a 25 ans et organise pour cet anniversaire sa première rencontre, à Fribourg: une exposition sur le «Jeu dans l'enseignement de la mathématique», montée par une équipe de recherche de l'Université de Genève (décrite dans les numéros 123 et 124); le «coin mathématique» animé par les membres du GERME (sigle, ô combien significatif, d'un Groupe de travail pour l'Etude et la Recherche de Moyens d'Enseignement et d'apprentissage en mathématiques) proposant des ateliers ouverts aux classes de la région; une conférence de Jean-Blaise Grize «Langages de raisonnement et langues de communication» (dont le texte sera publié dans le numéro 127); quelques discours; un repas et beaucoup d'échanges. Cette fête deviendra traditionnelle dans l'avenir, lors de la parution de chaque numéro de *Math-Ecole* multiple de 25.

Pour conclure, citons quelques noms qu'on retrouve durant toutes ces années quatre-vingt – et parfois avant – en dernière page de la revue, dans la rubrique «comité de rédaction»: Raymond Hutin, Théo Bernet, François Brunelli, André Calame, Roger Delez, François Jaquet, Frédéric Oberson, qui ont écrit régulièrement et ont été les piliers de la revue durant cette période.

La «boutique» de *Math-Ecole*

Voici quelques ouvrages nouveaux diffusés par *Math-Ecole*, à commander au moyen du bulletin de la page 3 de couverture ou sur notre site Internet www.math-ecole.ch

Les maths & la plume 2

A. Deledicq, F. Casiro, J-C. Deledicq. 64 pages, cartonné (21 x 28). ACL – Les Editions du Kangourou, Paris 2000.

Le volume 1 était loin d'avoir épuisé le sujet. Les mathématiques et les belles lettres poursuivent leurs relations fécondes dans ce second volume, avec des textes de Lewis Caroll, Colette, Jules Verne, Alphonse Daudet, Boris Vian, Maurice Ravel & Colette, Charles Dickens, Italo Calvino, Jorge Luis Borges, Pierre Dac, Robert Louis Stevenson...
L'ouvrage comprend aussi une quinzaine de pages de «nouvelles» à thème mathématique:
Le poids des mots, Tête au carré, Ça roule, Le TGV népérien...

Panoramath 3

Coédition CIJM, APMEP, ADIREM, ACL-Kangourou. 224 pages (15 x 22). CIJM, Paris 2002.

Après *Panoramath 98* et *Panoramath 2*, voici la publication des meilleurs problèmes de 23 compétitions francophones de mathématiques: internationales, nationales et régionales.
Les sujets sont tirés des épreuves des années 2000 et 2001, suivis des solutions et de commentaires, précédés d'une fiche signalétique de chaque compétition.
On y retrouve des problèmes des concours les plus connus en Suisse comme ceux de la FFJM, de Mathématiques sans frontières, du Rallye mathématique transalpin. On y découvre ceux des rallyes et tournois départementaux d'Alsace, d'Auvergne, de Loire Atlantique, du Limousin... ainsi que ceux de l'Olympiade belge, du concours ATSM de Tunisie, du Championnat du Niger.
9 de ces compétitions s'adressent déjà aux élèves du primaire, les autres débutent au niveau du collège ou du lycée.

Kangourou au pays des contes

C. Bourdeau, E. Clerjon, C. Missenard, J. Touzot. 32 pages, cartonné (21 x 28). ACL – Les Editions du Kangourou, Paris 1998.

Dans ce pays des contes, il y a des bons et... des méchants qui, en fait, ne le sont pas autant qu'on l'imagine puisqu'ils acceptent d'aider le Kangourou dans ses recherches. Sur des thèmes connus comme Blanche Neige, le Chat Botté, Barbe-Bleue, Peau d'Ane... les douze énigmes à résoudre et leurs commentaires sont présentés de manière plaisante, pour des (bons) élèves de 11 à 12 ans.

Les fables du kangourou

C. Bourdeau, E. Clerjon, C. Missenard, J. Touzot. 32 pages, cartonné (21 x 28). ACL – Les Editions du Kangourou, Paris 1998.

Un pastiche des fables de La Fontaine, joliment illustré pour des élèves du primaire – rarement – du secondaire et... pour des adultes. Les activités proposées se veulent interdisciplinaires et sont donc très variées, dans les domaines numérique et géométrique. Leur niveau de difficulté est variable.
Cet ouvrage, comme le précédent, convient comme cadeau à offrir à un jeune (dès 11 ans) passionné de maths, comme document à mettre au «coin mathématique» ou dans la bibliothèque des élèves. Ils ne sont pas conçus pour être directement utilisés dans le cadre d'un programme de mathématiques, mais peuvent constituer une bonne source de renouvellement d'activités pour la classe.

A propos de la didactique des mathématiques [1]

Jean Brun
FPSE, Université de Genève

Si l'on veut bien attacher quelque importance à la variation des vocables utilisés pour désigner un champ d'activité, il n'est pas sans intérêt de noter le renouveau du terme «didactique» à propos des recherches sur l'enseignement des mathématiques. La didactique des mathématiques se définit à la fois par un terrain, l'école, et par une discipline en train de se constituer. Ainsi la création récente d'une revue spécialisée, «Recherches en Didactique des Mathématiques», témoigne de l'existence d'un secteur de recherche autonome, qui produit des travaux expérimentaux spécifiques dans ce domaine. G. Brousseau (1981) dit de la didactique qu 'elle «oblige à réorganiser à la fois les mathématiques, la psychologie et la pédagogie, et se constitue en une activité et un domaine de connaissances propres dont aucune composante ne peut être exclue». Mon propos consistera à essayer de caractériser l'activité de recherche en didactique des mathématiques afin de permettre de la situer dans le découpage actuel des champs théoriques en sciences de l'éducation.

Sans vouloir faire une analyse de révolution du mot «didactique» dans l'histoire de la pédagogie, en bref retour en arrière est toutefois nécessaire pour comprendre l'usage actuel qui en est fait. Dans son «Dictionnaire de la langue pédagogique» (1971), Foulquié lui donne les définitions suivantes:

- «qui concerne ou a pour but l'enseignement;
- technique ou art de l'enseignement;
- étude des méthodes d'enseignement».

On retrouve donc là le double aspect de pratiques d'enseignement et de recherche sur ces pratiques. Mais, après avoir distingué la didactique générale, indépendante des contenus d'enseignement, et la didactique spéciale, qui s'occupe des diverses disciplines enseignées, l'auteur inclut une citation de Debesse qui situe bien la connotation attribuée au terme «didactique» dans les années 60-70; «La pédagogie moderne considère la didactique tout au plus comme un pis-aller parce qu'elle s'appuie surtout sur les mécanismes d'enregistrement mnémique, au lieu de favoriser l'assimilation du savoir par le travail de découverte et de création». (M. Debesse, in *Traité de Psychologie Appliquée*). A didactique est donc associée une conception répétitive, associationniste de l'apprentissage, par opposition à ce qu'on appelle «la pédagogie moderne» censée valoriser la découverte et la création. Vouloir restaurer la didactique, de plus en mathématiques où des années viennent d'être consacrées à des innovations qui se veulent dans le droit, fil de la pédagogie moderne, nécessite assurément quelques explications et mises un point à défaut desquelles le renouveau d'une didactique des mathématiques risquerait d'être perçu comme un sérieux retour en arrière!...

L'analyse didactique se caractérise principalement par la mise en relation de trois éléments:

- les contenus de savoir;
- la situation didactique et ses différentes composantes;
- l'activité cognitive des élèves.

1. Article publié dans *Math-Ecole* no 100-101, novembre 1981, pp 14-20

Les contenus de savoir

Le renouveau du terme didactique en sciences de l'éducation contient une volonté de redonner de l'importance à l'analyse des contenus d'enseignement. Les courants pédagogiques innovateurs ont plutôt mis l'accent sur le développement de l'intelligence et de la personnalité des élèves, opposant même parfois cet objectif à celui de l'acquisition de connaissances, qui se voyait dévalorisé. Dans le cas de l'innovation dans l'enseignement des mathématiques, la réflexion sur les contenus à enseigner a bien été première, et le mouvement réformateur a bien marqué sa volonté d'innover tant à propos des contenus que des méthodes. Mais, avec le recul, il me semble que, si ces deux réflexions étaient bien simultanées dans le temps, elles sont tout de même restées relativement indépendantes sur le fonds, En effet la logique selon laquelle s'effectuait la réflexion sur les contenus à enseigner était fondamentalement celle d'une mise à jour des connaissances constituées, en substituant un découpage du savoir à un autre, sans changer la conception même de ce découpage. Celui-ci était livré d'emblée comme la nouvelle matière à enseigner, sur laquelle on appliquerait une pédagogie moderne, active, etc. En ce sens on peut parler de relative indépendance des contenus et des méthodes d'enseignement. Or, le projet de la didactique est de mener une réflexion qui articule l'aspect conceptuel avec les situations d'enseignement qui lui donnent une signification. Comment?

Tout d'abord, en ne prenant pas tel quel, au premier degré, le découpage des contenus proposé, et en ne limitant pas l'analyse aux contenus des programmes, même de ceux les mieux modernisés. En effet, restreindre l'analyse des contenus d'enseignement à ce cadre c'est réduire sérieusement le champ d'expériences à partir duquel les élèves construisent leurs connaissances. Au nom de quoi pourrait-on affirmer que les contenus des programmes fixent les limites dans lesquelles les élèves élaborent leurs représentations des concepts mathématiques? Ce serait faire fi des expériences que ces élèves possèdent de la réalité, autres que leurs expériences de la salle de classe. Au plan des contenus, un des défis posés à la recherche en didactique consiste précisément à élargir le découpage canonique du discours mathématique pour y intégrer ce qu'on pourrait appeler le discours mathématique de l'élève. Face à la question de savoir quel est le découpage pertinent des contenus mathématiques pour une étude en didactique, j'adopterai le point de vue de G. Vergnaud (1980) pour qui «cet objet d'étude ne doit pas être trop petit, ni émietté en un ensemble non coordonné de savoirs et de savoir-faire, comme c'est malheureusement trop souvent le cas dans les études d'évaluation sur l'enseignement. Il serait vain par exemple d'étudier séparément l'acquisition des notions de fraction, de rapport, de division, de proportion, de fonction linéaire, ou bien dans un autre registre, celles de distance parcourue, de vitesse, de temps, de force et d'accélération. Dans l'étude des contenus une autre exigence consiste à prendre en considération ce que Y. Chevallard (1980) appelle «la transposition didactique». Il la définit en ces termes: «Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets (renseignement. Le «travail» qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique».

Celle réflexion sur les contenus amène également à situer la place des mathématiques dans la formation des maîtres. Il est important que leur approche des mathématiques ne soit pas simplement le décalque du découpage imposé par le programme. Leur maîtrise des contenus à enseigner passe par une pratique des mathématiques qui déborde la préparation des activités et notions proposées dans les moyens d'enseignement, afin de prendre une distance avec les objectifs parcellisés. Surtout c'est à partir d'une activité mathématique qui leur soit propre qu'ils pourront retrouver ce qui est derrière la forme donnée aux contenus d'enseignement et faire l'envers du parcours de la transposition didactique.

La situation didactique et ses composantes

Un des principaux problèmes de renseignement des mathématiques consiste à trouver des situations didactiques qui permettent de faire évoluer les procédures et les représentations des élèves. L'activité de résolution de problème est décisive dans cette évolution et elle est à considérer comme une fin en soi. L'analyse de cette activité prend alors une place centrale dans la recherche en didactique; elle consiste en la description des procédures de résolution et en leur catégorisation. Mais ceci ne suffit pas. Il faut surtout relier ces procédures aux processus qui les déterminent et l'analyse de la situation s'impose, comme condition de la compréhension des productions des élèves. On parlera de situation didactique avec G. Brousseau (1978) dès le moment où il y a «projet, le plus souvent social, de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution» (p. 24). Cette situation didactique au sens large consiste en un ensemble d'interactions entre le maître, les élèves, les contenus de savoir et le milieu. Par milieu, on peut concevoir le système éducatif en général, ou l'organisation très particulière d'une activité choisie par le maître. Cette organisation définit la situation didactique au sens strict, ou «situation-problème». G. Charrière (1980) précise encore davantage cette notion de situation et en fait un moyen didactique qu'il distingue d'autres moyens comme les problèmes, les exercices, les jeux, les centres d'intérêt, les ateliers. Il parle alors de «technique des situations». Avec les maîtres et les maîtresses de méthodologie du Centre Pédagogique de Geisendorf et du Service de la Recherche Pédagogique, à Genève, nous avons mené une série d'observations. dans ce contexte de la technique des situations conçue par G. Charrière. L'observation en classe est une méthode essentielle de recherche en didactique, principalement pour l'analyse des composantes des situations. Pour que l'observation puisse être fructueuse, il faut avoir effectué une première analyse préalable de la situation et ainsi disposer d'un cadre interprétatif pour observer les conduites des élèves. En nous appuyant sur des travaux menés en psychologie du travail (Leplat, 1976) nous avons adopté une méthode de description des situations afin de mettre de l'ordre dans le grand nombre de variables en jeu, qui frappe tout observateur en didactique. Nous avons choisi quelques éléments-clefs pour caractériser les conditions que les élèves doivent intérioriser pour avancer dans la résolution du problème posé par la situation. Ce sont: la consigne, les règles du jeu, le dispositif matériel, la relance du maître, les modes d'échange entre élèves. La mise au point de ces éléments, l'anticipation, puis la vérification, de la manière dont ils s'articulent lors du déroulement de la situation constituent, selon nous. les principales conditions de la gestion de la situation par le maître et de la compréhension de ce que font les élèves. Cette phase de description fournit, en plus de l'analyse conceptuelle de la tâche, les leviers maîtrisables de la situation avec lesquels on pense pouvoir comprendre les procédures des élèves et intervenir pour les faire évoluer.

A titre d'exemple, prenons la situation suivante: «trouver le nombre de dominos qu'il y a dans une boîte de dominos, sans l'ouvrir.» Dans cet énoncé, seule la consigne est explicite. Les «règles du jeu», elles, sont implicites. Une première décision didactique concerne la place à donner à la recherche, par les élèves, de l'information pertinente. Une autre décision aurait été d'expliciter d'emblée les règles du jeu, à savoir qu'un domino est formé de deux parties et que sur chacune d'elles se trouve un chiffre compris entre 0 et 6. Une observation effectuée en sixième année a montré l'intérêt de laisser ces règles du jeu implicites à condition qu'une première étape de l'animation soit consacrée à dégager, lors d'échanges oraux clans la classe, les informations utiles et pertinentes. C'était en l'occurrence une manière de permettre à chaque élève de s'approprier les données du problème, de meilleure façon que par un simple énoncé. Cette description de la situation est à compléter ensuite par l'analyse de l'activité cognitive des élèves. En retour on obtient une meilleure compréhension de la situation et du rôle joué par les éléments qu'on a décrits.

L'activité cognitive des élèves

A cette phase de l'analyse didactique, le but est de voir comment les éléments de la situation qu'on a décrits fonctionnent comme composantes de l'activité cognitive. Celle activité est constituée par l'interaction entre la situation et les élèves : l'analyse de la situation et celle de l'activité des élèves sont interdépendantes. En effet la situation est conçue comme le lieu ou l'élève actualise. ses connaissances par l'intermédiaire des représentations dont il dispose. Il met alors en œuvre des procédures d action ainsi que de symbolisation. En même temps, il s'approprie de nouvelles représentation à partir des exigences de la situation. Ainsi il enchaîne des procédures soumises à une adaptation constante. Actualiser est donc à comprendre au double sens de rendre manifeste et de réviser, ou mettre à jour. ces représentations, et ces connaissances, à partir des données de la situation. Il ne faut pas entendre par actualisation que tout est déjà la dans la fête des élèves et que la situation n'est qu'un révélateur : bien au contraire, elle offre une confrontation à leurs « modèles implicites » et par là-même peut entraîner leur évolution. Dans cette analyse de l'activité cognitive, le déroulement temporel de la situation constitue un aspect primordial. La question n'est plus celle des schémas ou invariants opératoires que lon cherche à dégager de l'analyse des conduites observées à travers une situation expérimentale. En didactique, la question devient celle du rapport entre les caractéristiques d'une situation construite pour enseigner quelque chose et l'actualisation des représentations des élèves tout au long de la résolution de la situation-problème. Dans ce rapport s'effectue l appropriation des connaissances mathématiques.

Reprenons l'exemple de la situation du nombre de dominos a trouver. sans qu'on les voie. Nous avons observé, sur une heure de temps les modifia tiens processives des procédures des élèves en. fonction des relances maître et des échanges qui ont eu lieu à l'intérieur du petit groupe. Un et a tout d'abord identifié le problème à une « combinaison » et a effectué le produit 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 7 x 0. Un autre a déclaré : « il faut faire un arbre ». Mais lequel ? Un troisième a débuté avec un tableau cartésien. La procédure du produit donnant comme résultat un très grand nombre (la multiplication par zéro reste encore un mystère !), elle a été abandonnée la première. Celle de l'arbre, malgré son insuccès, car l'arbre factoriel avait été choisi, est restée très solide, bien que remise en question devant les contradictions qui apparaissent entre la construction de l'arbre et sa lecture. Elle a même résisté au succès obtenu par l'élève qui utilise la procédure du tableau cartésien et qui expliqua comment on parvenait au résultat. Très souvent nos observations nous ont révélé ce phénomène important : la résistance d'une procédure, qui chemine selon sa propre logique Les élèves engagés dans la recherche d'une solution, ne se satisfont pas des modèles des autres ni de celui du maître, même s'ils peuvent les conduire à la réussite lorsqu'ils ne se les sont pas véritablement appropries. Les exigences de la situation nécessitent qu'ils investissent leurs propres représentations du problème. Lorsqu'il y a échange ou emprunt de procédures c'est suite à des discussions qui relèvent d'un processus de preuve plutôt que de simple copie. Les composantes de la situation sont décisives dans la mise en œuvre de ce processus.

Dans l'analyse de l'activité des élèves une attention particulière doit être portée aux représentations symboliques. En effet l'introduction de nombreux diagrammes, schémas ou « écritures symboliques » selon le terme de C. Laborde, peut entraîner des confusions sur le statut de ces symbolismes et sur leur place dans l'activité mathématique. G. Vergnaud (1981) précise bien : « Faute de faire suffisamment la distinction entre le concept et sa représentation, c'est-à-dire entre le signifié et le signifiant, il arrive fréquemment qu'on prenne les symboles et les opérations sur ces symboles pour l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement au plan conceptuel ». Une fois précisée la place des représentations symboliques, leur étude reste une question didactique importante car la construction des concepts mathématiques s'explicite et s'effective par des formulations caractéristiques, qui combinent le langage naturel et les « écritures symboliques ». La formulation d'une connaissance mathématique n'est pas la simple expression, comme allant de soi, d'une conceptualisation déjà formée. Elle a ses propres règles d'élaboration, en liaison avec la construction conceptuelle. Trop souvent la question didactique est posée en des termes tels que « le passage au symbolisme », et considérée comme découlant naturellement de la maîtrise des notions par simple association des symboles adéquats. Or la question n'est pas si simple, et les maîtres le savent bien. Trois aspects sont à considérer :

- l'aspect cognitif : l'activité de symbolisation est liée au sens attribué aux exigences cognitives de la situation et à l'identification que l'élève est à même de faire de la connaissance en jeu. Ainsi utiliser l'arbre dans la situation des dominos nécessite qu'on se détache du modèle de l'arbre factoriel ;
- l'aspect culturel : C. Laborde (1980) a bien montré l'importance de l'analyse historique des systèmes de signes et de leur syntaxe. L'élève qui s'y voit confronté s'en fait sa propre représentation, en fonction de ce qu 'il est à même d'y investir et de la situation dans laquelle il se trouve. Il ne peut se l'approprier d'emblée. Ainsi, reconnaître les signes +, -, = ne suffit pas. Par exemple l'élève n'admettra pas que le signe = soit mis au début d'une équation parce que pour lui il veut dire : à la fin. Ou encore il ne pourra accepter 3 + 5 comme équivalent à 5 + 3 parce que dans le premier cas il estime que le signe + n 'est pas correct car, dit-il « 3 n 'est pas plus que 5 » ;
- l'aspect social des échanges inter-individuels. Dans un contexte où il y a confrontation des points de vue avec d'autres élèves, la mise au point des codes appropriés se développe (Schubauer-Leoni. Perret-Clermont. 1980). Ainsi cherchons-nous des situations où sont réalisées différentes conditions d'interaction et de communication entre enfants pour favoriser la production et révolution d'écritures arithmétiques.

Je terminerai cet inventaire de quelques caractéristique de la recherche en didactique des mathématiques par une remarque sur les méthode utilisées J'ai fait principalement allusion à l'observation et l'expérimentation en classe. C'est une méthode indispensable, mais elle comporte aussi des limites. Comme l'indique G. Vergnaud (1981b) « L'expérimentation en classe n'est pas pour autant la voie royale de la recherche, d une part parce qu'elle ne permet pas. même avec de bons moyens d enregistrement, d'analyser dans le détail tous les processus en jeu, d'autre part parce qu'elle est d'autant meilleure qu'elle peut s appuyer sur les résultats obtenus par d'autres méthodes (entretiens individuels, expériences planifiées). En retour elle permet de déceler des phénomènes qu'il serait intéressant de regarder avec la loupe des entretiens individuels. En tout cas on ne voit pas comment la recherche en didactique pourrait faire l'économie de l'expérimentation en classe». Ces observations doivent être préparées par l'analyse de la situation et la mise au point des questions et des anticipation qu'on peut faire à propos des conduites des élèves. Cette préparation est capitale, faute de quoi l'observation reste anecdotique. Nos efforts en méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques doivent tendre à la fois à développer l'observation et l'expérimentation en classe en même temps qu'à utiliser des méthodes diverses et complémentaires, en particulier les entretiens individuels. Une seule méthode ne saurait à elle seule répondre aux exigences que réclame cet objet d'étude extrêmement complexe qu'est l'appropriation des connaissances mathématiques.

Références

BROUSSEAU G. 1978. *L'observation des activités didactiques. Enseignement élémentaire des mathématiques.* IREM Bordeaux 18, 22-43.

– 1981 *Suggestions pour un programme de didactique pour la formation initiale des professeurs de mathématiques du second cycle du second degré.* Bulletin APM 453-462.

CHARRIERE G. 1980. *Exposé sur la technique des situations.* FPSE.

CHAVALLARD Y. 1980. *Cours sur la transposition didactique. Première école d'été de didactique des mathématiques.* Chamrousse.

CONNE F. 1981 *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Thèse de doctorat. FPSE, Université de Genève.

FOULQUIE P. 1971. *Dictionnaire de la langue pédagogique.* PUF, Paris.

LABORDE C 1980. *Communication au IVe Congrès ICME.* Berkeley.

LEPLAT J. 1976 *Analyse du travail et genèse des conduites. Revue internationale de psychologie appliquée.* 25.1, 2-14.

SCHUBAUER-LEONI, M.-L. et PERRET-CLERMONT, A.-N. 1980. *Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs.* Recherche en didactique des mathématiques, 1, 3. 297-343.

VERGNAUD G., DURAND C. 1976. *Structures additives et complexité psychogénétique.* Revue française de Pédagogie 36, 28-43.

VERGNAUD G., ROUCHIER A. et al. 1979. *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré.* IREM d'Orléans.

VERGNAUD G.1980. *Didactique des mathématiques et psychologie. Problèmes et méthodes.* Actes des Journées sur l'Education Scientifique II. Chamonix, 183-198.

– 1981a. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* P. Lang, Berne.

– 1981b. *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.* Conférence in Actes du Colloque PME. Grenoble, 7-17.

Notes de lecture

L'APPORT DES JEUX
À LA CONSTRUCTION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES
actes de la journée d'étude
du 30 novembre 2001, Neuchâtel, IRDP

Sous la direction de François Jaquet
et Chantal Tièche Christinat
(IRDP 2002, 02-6, format A4, 94 p, CHF 10,80)

Voici une publication, fort attendue, en liens très étroits avec les nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques et leur próblématique, qui intéressera plus d'un lecteur de *Math-Ecole*.

Résumé

Les nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande (1P - 6P ; 1997-2002) proposent de nombreux jeux auxquels les élèves peuvent jouer, seuls ou en groupes, souvent de manière autonome. Après quelques années de pratique, de nombreuses interrogations sont apparues à propos de la gestion et des apports de ces jeux. La question peut, de manière un peu abrupte, se résumer ainsi: quelle est la probabilité que les élèves «fassent» des mathématiques au travers de ce genre d'activité. Des collaborateurs de l'IRDP ont conduit des observations et analysé en profondeur quelques-uns de ces jeux. Ils en ont choisi une dizaine et ont invité une vingtaine de personnes à se réunir une journée pour en discuter. Certains participants étaient auteurs des moyens d'enseignement, d'autres formateurs, d'autres chercheurs en didactique, d'autres encore venaient de l'étranger et apportaient un regard extérieur sur ces jeux. Des présentations, discussions et analyses complémentaires, il ressort que les fonctions des jeux sont très variables de l'un à l'autre, que des savoirs mathématiques peuvent émerger sous certaines conditions, que le maître a un rôle essentiel à jouer dans l'exploitation et dans l'institutionnalisation des connaissances mobilisées lors de ces activités.

Table des matières

Destinataires: les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens

Mots-clés: activités mathématiques, jeu, acquisition de connaissances, enseignement primaire

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** (tarifs en page 2 de couverture).

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des comptes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Faites vos jeux! ACL	...	(ex à Fr. 16.-)
La magie du calcul, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pliages et mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
100 défis mathématiques du «Monde», POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
100 jeux mathématiques du «Monde»: Affaire de logique, POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	*(ex à Fr. 20.-)*
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	...	(ex à Fr. 30.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (*Tangente* HS 10)	...	(ex à Fr. 20.-)
Problèmes de rallyes et concours:		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...)	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro): ....

Code postal et localité: .... Tél.: ....

Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à retourner et photocopier à:
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à
Math-Ecole,
Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand,
2007 Neuchâtel

sommaire