MATH-ÉCOLE
206

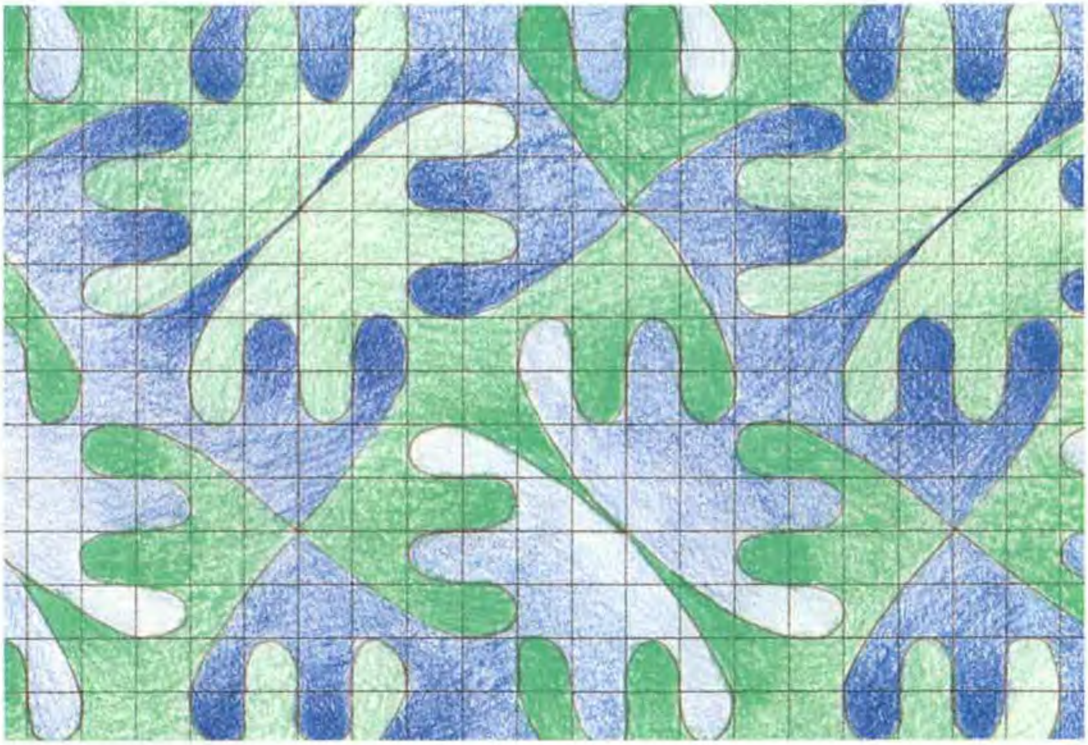
42e Année

Mars 2003

Longueur ou aire?

Art islamique
et mathématiques

Un programme de
mathématiques « adapté »
pour l'enseignement
spécialisé



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.–
Anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

Maquette
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Stéphanie, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE
42e année, quatre numéros par an

206
Mars 2003

ÉDITORIAL

UN HOMME ENGAGÉ : SAMUEL ROLLER

Il nous a quittés, le 21 mars 2003. Il avait 91 ans, mais il était resté jeune. Cette jeunesse d'esprit qui fait les hommes et les entretient dans leur activité intellectuelle et dans leur engagement.

Tristesse et douleur, pour tous ceux qui l'ont connu, de perdre un ami, un être à qui parler, une personne de référence.

Tristesse et reconnaissance, pour tous les lecteurs de *Math-Ecole* qui voient partir celui qui a fondé la revue, celui qui en a tracé la voie, celui qui a tenu la barre durant ses quinze premières années d'existence et qui a continué à la soutenir sa vie durant.

Tristesse et émotion pour les membres du comité de rédaction de *Math-Ecole* qui ne pourront plus entendre le « père » de la revue venir les encourager, les stimuler, les exhorter.

Samuel Roller, avec passion et ténacité, poursuivait l'objectif de faire des hommes de nos chers petits, au travers de l'amélioration permanente de l'école à qui ils étaient confiés. Et cette passion ne l'a jamais abandonné. Sa vie a été une vie de combat, de tous les instants, pour la pédagogie en général, l'enseignement des différentes disciplines scolaires, des mathématiques en particulier. Il avait compris la nécessité de rassembler ceux qui s'y intéressaient.

De 1962 à 1977, il offre à *Math-Ecole* l'hospitalité et l'appui institutionnel du SRP à Genève, puis de l'IRDP à Neuchâtel. S'il passe le témoin en tant que rédacteur responsable au moment où il quitte ses fonctions officielles, il reste membre du comité jusqu'au numéro 100/101. Raymond Hutin, qui a repris le témoin, ne s'y trompe pas quand il annonce ce départ dans son éditorial du numéro 102, en mars 1982 : il laisse quelques points de suspension dans son titre « Samuel Roller prend sa retraite... ».

Mais le concept de « retraite » n'existe pas pour celui qui continue, infatigable, à sillonner la Suisse romande pour apporter chaque fois qu'on le lui demande les fruits de son expérience et de sa réflexion. Pour la revue, il devient lecteur attentif, prêt à réagir à tel ou tel article par un petit mot, par un encouragement, parfois par des coups de gueule – toujours amicaux – lorsqu'il les juge nécessaires : *Vos jeux et concours, c'est bien beau, mais qu'offrez-vous à ceux qui n'ont pas la vivacité d'esprit requise pour ce type d'activités et qui ont besoin d'outils de base plutôt que de haute voltige !*

Il nous rejoignait régulièrement, en décembre, pour nous retrouver à la fin de notre comité annuel traditionnel. Il écoutait, hochait la tête, acquiesçait, esquissait un sourire, et, en fin de séance, lorsqu'on lui demandait s'il avait quelque chose à nous dire, il commençait par s'excuser d'être là. Puis, les hésitations passées, en quelques phrases bien senties, il nous disait ce qu'il avait à cœur, que ce soit sur les finalités de l'enseignement des mathématiques, les besoins des plus humbles, la nécessité d'aider les maîtres... Et le ton montait progressivement, les arguments pleuvaient, balayaient tous les doutes, jusqu'à la péroraison suivie d'un long silence de respiration, d'un moment d'appropriation de tout ce qui venait d'être si bien dit, avec une fougue toujours intacte.

Autour des *Nombres en couleur* – la première innovation de l'époque – Samuel Roller a su créer une équipe et fonder un bulletin, devenu *Math-Ecole* au moment de l'arrivée des « mathématiques modernes ». Cette équipe et cette revue ont été à l'origine d'une page essentielle dans l'histoire de l'école romande : sa coordination, au travers de la réforme de son enseignement des mathématiques. L'entreprise était gigantesque, mais aussi périlleuse et il a fallu parfois redresser la barre. Dans ces moments, Samuel

Roller savait garder la tête froide. « Faire face » écrivait-il dans un éditorial du numéro 66, en janvier 1975 : ... *Nous sommes embarqués. Nous ne pouvons pas ne pas continuer. Mais autrement ; avec peut-être un peu moins de fougue et plus de sagesse. Un calme contenu et pourtant une ferveur. Face à la remise en question de la math moderne, ne pas tout lâcher, mais, au contraire, aller plus outre ou, peut-être, plus profond. Se convaincre, chaque jour davantage, que cette math n'est pas une matière à enseigner mais qu'elle est un esprit à communiquer ; que cet esprit est intelligence – logique, raisonnement hypothético-déductif – et qu'il est aussi ouverture au monde, volonté courageuse de l'affronter pour le mettre en ordre et le maîtriser, qu'il est enfin création et liberté. [...] Face à la lassitude, savoir se reposer et apprendre à réorganiser notre travail... Des vents contraires souffleraient-ils ? Qu'importe. Le navigateur tire des bordées et atteint le port.*

L'enthousiasme n'était donc pas aveugle, il se fondait aussi sur un questionnement permanent. Samuel Roller savait poser les « bonnes questions », bien incongrues, aux mathématiciens et responsables de l'enseignement de cette discipline. Fidèle à lui-même, il ne manquait pas de les faire suivre de ses propres réponses. Ainsi, dans le courrier des lecteurs du numéro 148, en 1991, on lit ses réactions à l'annonce de la dernière réforme de nos moyens d'enseignement romands de mathématiques :

[...] Que veut-on cette fois-ci ? Une simple toilette de ce qui est ou un rajeunissement qui tienne compte des données technico-scientifiques du monde contemporain ? J'espère que ce sera du neuf... Qui se mettra à l'ouvrage ? Pas une Commission – ah ces Commissions helvétiques lentes et pesantes – ni un clan... Mais, bien plutôt, une équipe de copains... Ce ne seront pas des mathématiciens au sens académique du terme. De la math, ils en sauront quelque chose et même un bon bout. Ce seront surtout des amoureux de la math... Pour produire quoi ? De petits ouvrages pas chers et maniables. Avec, dedans, plein de choses, vives, amusantes, stimulantes pour l'esprit : des jeux, des devinettes, des défis. Des choses « sérieuses » aussi. À une condition : qu'elles soient perçues bonnes et utiles, comme du pain bis. Pour quels élèves tout cela ? Pour les bons élèves, les dociles et les appliqués, bien sûr, et aussi pour les autres, les pas dociles, les pas appliqués, les farfelus, les combattifs (avec deux t, résolument). Tous enfants des médias, de la B.D., de l'ordinateur...

Oui, le « lecteur » Samuel Roller n'a cessé de nous rappeler l'essentiel, des choses qu'on a tendance à oublier lorsqu'on est trop impliqué.

Ces dernières années, nous avons régulièrement parlé avec lui de l'avenir de *Math-Ecole*. Il se demandait comment la revue passerait le cap du numéro 200, il nous encourageait à persévérer, à trouver des solutions, tout en restant proche des maîtres et des élèves. Voici un extrait de l'un de ses derniers messages, du 24 octobre 2002, en réponse à notre éditorial du numéro 204 :

Vous avez relevé le défi : Math-Ecole *continue de paraître et paraît bien. Des yeux amis viennent de me lire votre édito. Il est clair et énonce vigoureusement votre dessein d'être au service des maîtres. Je suis heureux de cela et souhaite que vous acquériez le soutien financier dont vous devez bien avoir besoin...*

Orphelins du fondateur de la revue, nous le sommes, certes. Mais nous tenons avant tout à en être les héritiers et à poursuivre l'œuvre entreprise. *Math-Ecole* s'adaptera, comme aujourd'hui à l'occasion d'une nouvelle présentation graphique et d'une augmentation de volume – de près de 240 pages annuelles en 5 numéros à 256 pages en 4 numéros – comme demain vraisemblablement, dans une réorganisation et dans la recherche de nouveaux soutiens, mais l'objectif reste le même : contribuer au développement de la culture mathématique, à l'école et au-delà.

François Jaquet
Rédacteur responsable de *Math-Ecole*

11e RMT, ÉPREUVE 1

Voici les problèmes de la première épreuve du 11e Rallye mathématique transalpin, sur lesquels 2000 classes des degrés 3 à 8 se sont affrontées en janvier et février 2003, dans 19 régions d'Italie, France, Luxembourg, Israël et Suisse (118 classes au Tessin et 228 en Suisse romande). Ces énoncés sont suivis de quelques commentaires et résultats de la Suisse romande.

1. FONTAINES (Cat. 3)

Chaque matin, Monsieur Amidezo passe boire un peu d'eau à chacune de ses cinq fontaines.

Il suit les chemins marqués sur le plan.

Il part toujours de la fontaine A, sans jamais passer deux fois par la même fontaine.

Combien Monsieur Amidezo peut-il faire de parcours différents pour passer par toutes ses fontaines ? Décrivez vos parcours précisément.

2. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 3, 4)

La voiture d'Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu'un chiffre nouveau apparaît.

- Il fait « cric » à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait « crac » à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait « rrmt » à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd'hui Alphonse va faire une promenade en voiture. Il met son compteur à 0 :

0	0	0

Voici le compteur après 13 km :
Il a déjà fait 14 bruits : 13 « cric » et 1 « crac ».

0	1	3

A son retour, le compteur marque 127 km.

1	2	7

Combien Alphonse a-t-il entendu de bruits en tout au cours de sa promenade ?
Expliquez comment vous avez trouvé et dites combien de « cric », combien de « crac » et combien de « rrmt » il a entendu.

3. LES CHAMPIGNONS (Cat. 3, 4)

André, Robert, Daniel et François ont trouvé des champignons dans la forêt.

- François en a trouvé plus que Daniel.
- André en a moins que Daniel.
- André et Robert, les deux ensemble, ont autant de champignons que Daniel et François ensemble.

Qui a trouvé le plus de champignons ? Qui en a trouvé le moins ? Expliquez vos réponses.

4. CHEMINS (Cat. 3, 4)

Vous devez aller de la zone A à la zone B, puis revenir de B à A, en passant toujours d'un pavé à un pavé voisin. En allant, vous ne devez passer que sur sept pavés et la somme des nombres de ces sept pavés doit être la plus grande possible.

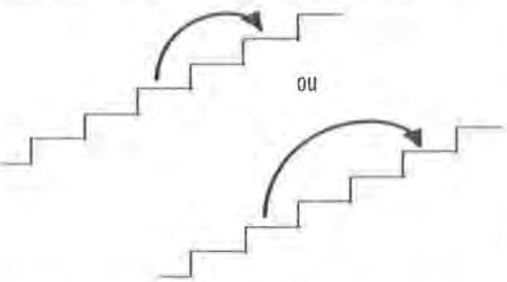
A					
4	10	14	8	10	14
8	13	10	4	14	9
7	7	6	5	11	7
12	16	5	12	9	8
7	9	2	3	12	14
12	6	10	10	4	9
8	9	4	6	11	10
B					

Au retour, vous pouvez passer sur plus de sept pavés, mais la somme des nombres de ces pavés doit être la plus petite possible.

Coloriez le chemin de A à B en sept pavés dont la somme est la plus grande et écrivez votre calcul. Coloriez d'une autre couleur le chemin de retour de B à A par des pavés dont la somme est la plus petite et écrivez votre calcul.

5. LES SAUTS DE FÉLIX (Cat. 3, 4, 5)

Pour garder sa forme physique, le chat Félix saute jusqu'en haut d'un escalier qui a 11 marches. A chaque saut, il monte 2 marches ou 3 marches à la fois.



Avec quelles séries de sauts Félix peut-il atteindre la 11e marche ? Ecrivez toutes les solutions différentes que vous avez trouvées.

6. PAUL ET PIERRE (Cat. 4, 5)

Paul est né quand son père, Pierre, avait 26 ans.

Aujourd'hui, si on additionne leurs deux âges, on obtient 60.

Quel est l'âge de Paul et de Pierre aujourd'hui ? Expliquez comment vous avez obtenu votre réponse.

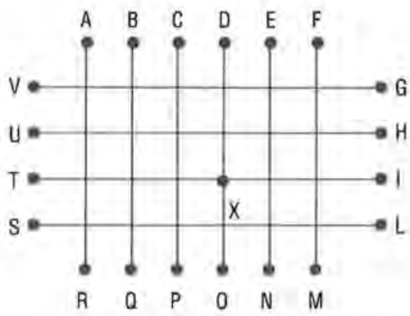
7. L'ARAIGNEE (Cat. 4, 5, 6)

Une araignée se déplace le long des fils d'un treillis.

Elle part d'un des points indiqués sur la figure par A, B, C, ... U, V et arrive au croisement X, où elle s'arrête pour construire sa toile.

Le long de son chemin elle se déplace ainsi :

- au premier croisement, elle passe tout droit ;
- au deuxième, elle tourne à gauche ;
- au troisième, elle tourne à gauche ;
- au quatrième, elle tourne à droite ;
- au cinquième, elle tourne à droite ;
- au sixième, elle passe tout droit ;
- au septième, elle tourne à droite ;
- au huitième croisement, elle s'arrête.



De quels points l'araignée a-t-elle pu partir ? Dessinez tous les parcours possibles de l'araignée.

8. LA CARAVANE (Cat. 5, 6)

Ali et Fatima regardent passer une caravane d'ânes et de chevaux.

Il y a aussi des hommes, qui sont tous sur des chevaux. Sur chaque cheval, il y a un seul homme, avec une caisse derrière lui.

Sur chaque âne, il y a deux caisses.
Ali compte les pattes des animaux, il en trouve 52.
Fatima compte les caisses, il y en a 21 en tout.

Combien y a-t-il d'hommes dans cette caravane ? Expliquez votre réponse.

9. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 5, 6)

La voiture d'Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu'un chiffre nouveau apparaît.

- Il fait « cric » à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait « crac » à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait « rrmt » à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd'hui Alphonse va faire une promenade

0	0	0

en voiture. Il met son compteur à 0 :

Voici le compteur après 13 km.

0	1	3

Il a déjà fait 14 bruits : 13 « cric » et 1 « crac ».

A la fin de sa promenade, Alphonse a entendu 140 bruits en tout.

Combien de kilomètres a parcouru Alphonse au cours de sa promenade ? Expliquez comment vous avez trouvé.

10. PROFESSEUR TOURNESOL (Cat. 5, 6, 7)

M. Tournesol se rend en voiture de sa maison à son bureau. C'est seulement lorsqu'il est exactement à mi-chemin qu'il se rend compte que la petite lampe du niveau d'essence clignote et que son réservoir est presque vide.

Il décide alors de faire demi-tour pour se rendre à la station d'essence qui se situe exactement au milieu du trajet déjà parcouru.

Après avoir fait le plein, il repart en direction de son bureau. Lorsqu'il y arrive, il constate que son compteur indique 24 km. Il l'avait remis à zéro le matin en partant de sa maison.

***A quelle distance de la maison se trouve le bureau de M. Tournesol ?
Expliquez votre raisonnement.***

11. JETS DE PIERRE (Cat. 5, 6, 7, 8)

André et Bruno ont trouvé un vieux cerceau de fer. Ils le suspendent à une branche d'arbre et jouent à lancer des pierres au travers. Ils décident alors de faire un concours dont les points sont attribués selon les règles suivantes :

- si le caillou passe à l'intérieur du cerceau, sans le toucher, c'est « centré » et l'on gagne 1 point ;
- si le caillou passe à l'extérieur du cerceau, c'est « manqué » et l'on perd 1/2 point ;
- si le caillou touche le cerceau, c'est « touché », on ne gagne rien, mais on ne perd rien non plus.

Après avoir lancé 12 pierres chacun, André et Bruno sont à égalité avec chacun 6 points. Ils ont tous les deux touché le cerceau, mais André l'a touché plus souvent que Bruno.

***Combien de « centré » a obtenu André ? Et combien en a obtenu Bruno ?
Expliquez votre raisonnement.***

12. L'ÉTENDAGE (Cat. 6, 7, 8)

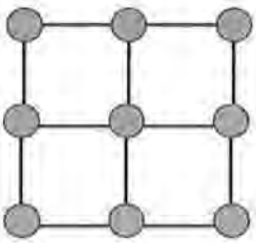
Mademoiselle Printemps veut étendre 9 mouchoirs carrés de 32 cm de côté sur un fil de 2,50 m de longueur. Elle commence à disposer les deux premiers mouchoirs en les recouvrant partiellement et en les fixant à l'aide d'une pince à linge

Mais, comme elle souhaite faire un travail très régulier et utiliser toute la longueur du fil, elle se demande :

De combien de centimètres deux mouchoirs voisins devront-ils se recouvrir ?
Expliquez votre raisonnement.

13. GRILLES (Cat. 6, 7, 8)

Pour construire cette grille de 2 x 2 carrés, Léo a utilisé 9 boulettes de pâte à modeler et 12 allumettes.



Pour faire une grille de 3 x 3 carrés, il lui faudra 16 boulettes et 24 allumettes.

Léo veut construire une grille carrée avec 289 boulettes de pâte à modeler.

De combien d'allumettes aura-t-il besoin ?
Expliquez votre raisonnement.

14. PERROQUETS COLORES (Cat. 7, 8)

Les oeufs pondus par le perroquet de Marc sont éclos. Chaque oisillon qui vient de naître est d'une seule couleur : jaune, rouge, vert ou bleu.

Marc observe que les nouveau-nés sont
- tous rouges sauf 15,
- tous jaunes sauf 12,
- tous verts sauf 14,
- tous bleus sauf 13.

Combien Marc a-t-il de petits perroquets ?
Et combien de chaque couleur ?
Expliquez votre raisonnement.

15. LA PLATE-BANDE FLEURIE (Cat. 7, 8)

Dans une plate-bande, il y a des oeillets et des tulipes ; on a planté exactement 5 oeillets pour 6 tulipes.

Un violent orage détruit 12 fleurs de chaque sorte.

Maintenant, dans la plate-bande, il ne reste plus que 3 oeillets pour 4 tulipes.

Combien d'œillets et combien de tulipes y avait-il dans la plate-bande avant l'orage ?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

16. LA POURSUITE (Cat. 7, 8)

Durant sa ronde de nuit, Sem le policier voit un voleur quitter en courant une bijouterie. Il se lance aussitôt à sa poursuite.

Au début de la poursuite, la distance entre Sem et le voleur équivaut à 18 pas du voleur.

Pendant que le voleur fait 8 pas, Sem en fait 5. Mais, en longueur, 2 pas de Sem valent 5 pas du voleur.

Combien de pas Sem devra-t-il faire pour attraper le voleur ? Expliquez votre raisonnement.

17. L'ENTRAINEMENT DE BASKET (Cat. 8)

Chaque fois que Jean va au basket, sa mère vient le rechercher en voiture. Elle part de la maison, ne s'arrête pas en chemin, arrive régulièrement au terrain à la fin de l'entraînement et rentre tout de suite avec son fils.

Mais aujourd'hui, l'entraînement s'est terminé beaucoup plus tôt que d'habitude. Sa mère n'étant pas encore arrivée, Jean est immédiatement parti à pied à sa rencontre. Ils sont ainsi arrivés à la maison 12 minutes plus tôt que les autres jours.

La mère roule en voiture toujours à la même vitesse, qui est 5 fois celle de Jean lorsqu'il marche.

Combien de temps Jean a-t-il marché à la rencontre de sa mère ?
Avec combien de minutes d'avance l'entraînement s'est-il terminé aujourd'hui ?

COMMENTAIRES ET SOLUTIONS

Nous donnons ici quelques extraits des « analyses a priori » des problèmes précédents, établies systématiquement pour chacun d'eux – par les concepteurs de l'épreuve, en coordination internationale – afin de s'assurer que les problèmes du RMT placent les élèves devant des tâches de résolution leur permettant de construire ou de mobiliser des savoirs mathématiques.

Ces analyses préalables de la tâche décrivent les procédures attendues, mais parfois, les groupes d'élèves qui résolvent les problèmes trouvent d'autres voies, qui apparaissent dans les analyses a posteriori, conduites après l'épreuve. Ces dernières sont exigeantes en temps et énergie, nous n'en publions encore que quelques esquisses pour trois problèmes.

Nous donnons aussi une indication sur la « réussite » de ces problèmes, par la moyenne des points attribués aux copies de Suisse romande par les équipes de correcteurs de l'épreuve. Ces jurys sont composés d'enseignants dont les classes participent au RMT et qui acceptent de consacrer du temps à la correction de toutes les réponses et explications des classes de la région pour un même problème. Cette attribution des points se fonde sur des critères bien précis élaborés lors de l'analyse a priori au niveau international, pour permettre de futures études comparatives entre degrés, entre régions et entre des systèmes scolaires différents. Les critères de correction ne sont pas reproduits ici mais proposent, en général, la répartition suivante :

4 points pour une réponse complète et juste, avec des explications ou justifications claires et détaillées ;

3 points pour une réponse complète et juste, avec des explications laissant à désirer ;

2 points pour la réponse sans aucune explication, juste ou avec une légère erreur de calcul, parfois incomplète selon les problèmes ;

1 point pour un début de recherche organisée, avec quelques tentatives cohérentes ;

0 point pour une procédure totalement inadaptée ou l'incompréhension du problème.

Cette « moyenne », M, est un nombre entre 0 et 4, noté ci-dessous pour chaque catégorie, en regard du titre du problème.

1. FONTAINES (Cat. 3 : M = 2.22)

Problème de parcours et de combinatoire bien réussi, seules quatre classes sur 18 n'ont pas compris la demande. Toutes les autres ont trouvé au moins 5 ou 6 parcours et les ont décrits correctement

Analyse de la tâche :

- Comprendre qu'un itinéraire complet des fontaines consiste, en partant de A, à passer une seule fois par toutes les autres fontaines, selon les chemins offerts.
- Essayer, par essais, d'effectuer un itinéraire et se rendre compte qu'il y a plusieurs possibilités.
- Comprendre la nécessité d'une méthode systématique pour déterminer tous les parcours possibles qui relient la fontaine A aux autres fontaines B, C, D, E.
- Utiliser un diagramme en arbre pour noter les divers parcours, ou les marquer de différentes couleurs ou les noter sur autant de copies du dessin.
- Déterminer les six parcours complets possibles : A-B-C-D-E, A-B-E-D-C, A-E-B-C-D, A-E-B-D-C, A-E-D-B-C, A-E-D-C-B. Vérifier aussi que les deux itinéraires : A-B-D-C et A-B-D-E sont incomplets parce qu'ils ne passent que par quatre fontaines.

2. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 3 : M = 0,72, Cat. 4 : M = 1,67)

Ce problème sur les régularités de notre système de numération s'est révélé très difficile en 3e année où les incompréhensions sont majoritaires. En 4e année, le taux de réussite est meilleur, mais de nombreux élèves ont abusé notoirement de la linéarité en pensant que, puisque Alphonse entend 14 bruits sur les 13 premiers kilomètres, il en entendra 140 sur 130 kilomètres et 3 de moins en 127 km. La « tentation de la proportionnalité » est bien connue, mais les concepteurs du problème n'avaient pas prévu qu'elle serait aussi forte ici.
Ces résultats, comme ceux d'autres problèmes proposés ces dernières années par le RMT, montrent que les régularités de la numération ne sont pas évidentes et que, même si les élèves savent énoncer ou écrire la suite des nombres, beaucoup de ses propriétés ne sont pas perçues clairement.

Analyse de la tâche :

- Comprendre le fonctionnement de l'objet « compteur » pour aider à passer de l'objet mécanique à la succession des nombres naturels écrits par trois chiffres.
- Écrire les premiers nombres 001, 002, 003, 004… et compter les changements, puis constater que de 009 à 010 il y a deux changements, un « cric » et un « crac ».
- En passant, vérifier le 013 de l'exemple, puis continuer, en faisant apparaître la règle « chaque dizaine, 11 bruits »
- Passer la centaine en ajoutant un bruit « rrmt » à la règle précédente.
- Effectuer le comptage final : 127 « cric », 12 « crac » et 1 « rrmt », c'est-à-dire 140 bruits,
  ou comprendre que les 127 « cric » correspondent aux unités, les 12 « crac » sont ceux des dizaines et le « rrmt » est celui du passage de la centaine.

3. LES CHAMPIGNONS (Cat. 3 : M = 1,5, Cat. 4 : M = 2,34)

Analyse de la tâche :

- Comprendre et interpréter correctement les trois informations.
- Représenter ou imaginer les deux relations d'ordre : $F > D$; $A < D$ et les combiner pour obtenir la sériation des trois enfants A, D et F : $A < D < F$.
- Interpréter l'égalité $A + R = D + F$ et la mettre en relation avec la sériation précédente par une compensation du genre : puisque D et F en ont chacun plus que A, il faudra que R en ait plus que D et que F pour compenser ;
  ou travailler à partir d'exemples numériques par hypothèses du genre : si A en a 3, D en a 5 et F en a 6, alors R doit en avoir 8 car $5 + 6 = 11$ et $3 + 8 = 11$, répétés plusieurs fois pour se convaincre de la sériation $A < D < F < R$.
- Exprimer la réponse : C'est Robert qui en a le plus et André le moins.

L'analyse a posteriori a montré que la sériation déterminée par les deux premières phrases de l'énoncé était construite facilement par la grande majorité des élèves. Certains élèves se sont arrêtés là. Par exemple :
François en a plus que Daniel, Daniel en a plus que André et André en a moins que François. Réponse : Celui qui en a le plus est François, celui qui en a le moins est André. (F. le plus, A. le moins) Comment nous avons trouvé la réponse : Grâce à l'aide de la consigne. Il n'y a pas de calcul.

C'est au moment d'insérer Roger que les choses se gâtent. Parmi les groupes qui n'arrivent pas à prendre en compte l'égalité A + R = D + F, une majorité place R en dernier. Par exemple, l'explication qui suit tient compte du placement de F et D en tête du premier trio sans tenir compte de la troisième phrase :
1. François, 2. Daniel, 3. André, 4. Robert.
Il est évident que François et Daniel sont les premiers,
1. Ce sont les deux qui ont cueilli le plus de champignons,
2. en plus, ils sont ensemble.
François est le premier, tandis que Robert est le dernier.

Lorsque les élèves pensent aux deux sommes égales, ils y associent parfois des petits nombres ou des dessins, mais, en troisième année particulièrement, ils ont de la peine à expliquer leur procédure. Une classe répond par exemple : « Robert » accompagné d'un dessin d'un personnage et 4 champignons et « André », où le personnage n'a qu'un seul champignon. On constate ainsi que les nombres imaginés sont souvent les « ordinaux » du classement du premier trio : 3 pour François, 2 pour Daniel et 1 pour André.

Une autre classe donne l'ordre exact des quatre personnages et se contente de l'explication « On a tout compris grasse à la consigne. (sic) ».

Une autre classe, de 4e cette fois-ci, semble avoir adopté une procédure numérique avec des grands nombres :
Celui qui en a trouvé le plus est Robert. Celui qui en a trouvé le moins est André. Au début on a trouvé un nombre dans notre tête qui était 31. Après on a mis deux nombres un plus grand et un plus petit et pour les deux derniers on a fait pareil.

Parmi les explications considérées comme suffisantes pour des élèves de 3e et 4e années, il y a celles qui font état d'une compensation, comme les suivantes :
André en a moins que tous les autres et si Robert en avait peu ça n'irait pas. Ils n'arriveraient pas à en avoir autant que François et Daniel. Nous avons calculé que François en a plus que Daniel, André en a moins que Daniel. Puis nous avons trouvé que puisque André et Robert ont la même somme que François et Daniel d'ailleurs que André a une somme minime, c'est sûrement Robert qui a la somme la plus haute de tous. Après c'est François parce qu'il en a trouvé plus que Daniel. À la fin ils disent que André en a moins que Daniel c'est-à-dire que le dernier est André.

Les réponses qui se basent sur des hypothèses numériques sont plus faciles à argumenter et attestent souvent d'une suite d'inférences logiques parfaitement rigoureuse :
(R. en a le plus, A. en a le moins)... Supposons que André en a 4 vu que Daniel doit en avoir plus disons qu'il en a 5 et vu que François doit en avoir encore plus que Daniel disons qu'il en a 6. Daniel et François en ont 11, André et Robert doivent aussi faire 11, Robert en aura donc 7. Voilà.

4. CHEMINS (Cat. 3 : M = 1,5, Cat. 4 : M = 2,07)

Il y avait beaucoup de calculs à faire dans ce problème de cheminement optimum. La majorité des classes, autant en troisième qu'en 4e année, ont compris les règles de cheminement, mais il semble que la collaboration au sein des groupes n'a pas été toujours optimale. Il faut évidemment se répartir les itinéraires pour obtenir celui qui donne le maximum ou le minimum.

Analyse de la tâche :
- Comprendre la règle de cheminement.
- Imaginer les différents chemins (d'aller et de retour) et calculer toutes les sommes correspondantes.
- Trouver le chemin optimum par comparaisons et compensations terme à terme : le maximum à l'aller : 77 (10, 14, 11, 8, 14, 9, 11) et le minimum au retour : 38 (6, 4, 3, 2, 5, 6, 4, 8)

5. LES SAUTS DE FÉLIX
(Cat. 3 : M = 0.94, Cat. 4 : M = 1,21, Cat. 5 : M = 2,28)

Plus de la moitié des classes de 3e et de 4e années n'ont pas compris la demande de ce problème de combinatoire. Pour celles qui ont pu entreprendre une démarche, il y avait encore beaucoup d'embûches, comme en témoigne l'analyse de la tâche :

- Trouver toutes les sommes dont les termes ne sont que des 2 et des 3 et dont le résultat est 11.
- Comprendre que la marche 11 ne peut être atteinte par des sauts de 2 uniquement, ni par des sauts de 3 uniquement, et que Félix doit donc mélanger les deux types de sauts.
- Essayer de répartir les divers sauts en quelques catégories, par exemple, décrire les suites comprenant

trois grands sauts, ensuite celles comprenant un seul grand saut.
- Indiquer pour chaque catégorie les différentes suites de sauts possibles.

catégorie 1

$3 \times \mathbf{3} + 1 \times \mathbf{2}$ 4 suites possibles
$3+3+3+2$; $3+3+2+3$
$3+2+3+3$; $2+3+3+3$

catégorie 2

$1 \times \mathbf{3} + 4 \times \mathbf{2}$ 5 suites possibles
$3+2+2+2+2$; $2+3+2+2+2$;
$2+2+3+2+2$; $2+2+2+3+2$;
$2+2+2+2+3$

Le barème était aussi assez sévère puisque les « 4 points » n'étaient attribués qu'aux réponses mentionnant les 9 possibilités avec explications claires et qu'il fallait 3 ou 4 possibilités bien détaillées pour obtenir « 1 point ».

6. PAUL ET PIERRE (Cat. 4 : M = 2,73, Cat. 5 : M = 3,22)

Analyse de la tâche :
- Comprendre qu'on est en présence de deux suites arithmétiques qui se développent simultanément, que la première commence à 0 et la seconde à 26, et écrire les deux suites en s'arrêtant lorsque la somme des deux valeurs correspondantes est 60.
- Ou chercher progressivement, parmi les couples de nombres dont la somme est 60, celui dont l'écart des deux nombres est 26.
- Ou se rendre compte que 60 est la somme de 26 et du double de l'âge de Paul, et en déduire que Paul a $(60-26) : 2 = 17$ ans et Pierre en a $26 + 17 = 43$.

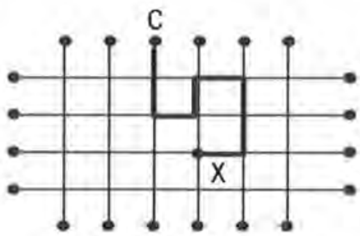
Ce problème d'arithmétique, bien réussi, a fait apparaître des procédures intéressantes, autres que celles prévues dans l'analyse a priori précédente. Par exemple, la suivante correspond à la procédure algébrique (où x représente l'âge de Pierre et $x-26$ l'âge de Paul) :
$x+(x-26)=60 \Rightarrow 2x=60+26 \Rightarrow x=30+13$
avec un contrôle de la différence.

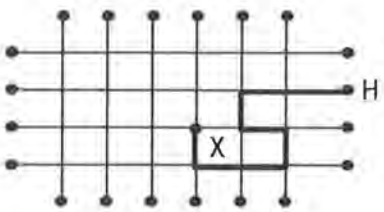
Nous avons divisé 60 par 2, 60 : 2 = 30 et ensuite nous avons divisé 26 par 2, 26 : 2 = 13, ensuite nous avons additionné 30 + 13 = 43 et nous avons trouvé l'âge de Pierre, ensuite nous avons fait 60 – 43 = 17 et ensuite nous avons contrôlé s'ils ont 26 ans de différence et alors Paul a 17 ans et Pierre a 43 ans.

7. L'ARAIGNEE
(Cat. 4 : M = 0,78, Cat. 5 : M = 2,02, Cat. 6 : M = 1,67)

Ce problème de cheminements sur un réseau a été mal réussi en 4e année et mieux réussi en 5e qu'en 6e années. Les résultats sont assez contrastés : beaucoup de « 0 points » et de « 4 points » (les deux réponses correctes et complètes, avec les deux points C, H et les dessins des parcours correspondants), quelques « 1 point » (Identification de un ou plusieurs parcours contenant une seule erreur de direction) et peu de réponses intermédiaires.

Analyse de la tâche :
On peut aborder le problème selon deux points de vue différents :
- exécuter les ordres en partant chaque fois de points différents de la grille, écarter les parcours qui n'amènent pas à X et identifier les deux parcours possibles, c'est-à-dire ceux qui partent de C et de H comme sur la figure suivante :





- ou suivre les ordres en rétrogradant du point X (il s'agit d'intervertir gauche et droite) et se rendre compte qu'il y a deux parcours possibles.

8. LA CARAVANE (Cat. 5: M = 2,73, Cat. 6: M = 2,89)

Ce problème a déjà été proposé aux élèves il y a 6 ans, dans un contexte légèrement différent, mais avec les mêmes données à une petite modification près: les « 21 caisses » ont remplacé « 19 bosses » de chameaux ou dromadaires. Il s'agit en fait de savoir comment les élèves organisent, sans algèbre, la résolution d'un « système de deux équations du premier degré à deux inconnues ». Le nombre moyen de points obtenus n'a pas varié en six ans. La première expérience a permis d'affiner l'analyse a priori, qui est confirmée par les résultats de la seconde passation.

Analyse de la tâche:

- Trouver le nombre d'animaux, par la division 52 : 4 = 13, lorsqu'elle est opérationnelle, par multiplication lacunaire (où il s'agit de déterminer le facteur inconnu... x 4 = 52), ou par addition de termes « 4 », ou par dessin...
- Se rendre compte que la recherche du nombre d'hommes revient à trouver le nombre de chevaux ou encore le nombre d'animaux avec une caisse; puis que le nombre de caisses est supérieur à celui des animaux mais qu'il ne peut dépasser le double du nombre des animaux.
- Engager la recherche qui peut se dérouler: par essais successifs au hasard ou organisés; par dessin, en répartissant les 13 premières caisses sur chaque animal et les autres ensuite, ou en en plaçant deux par animal et en retirant celles qui sont en trop;
  par des raisonnements analogues à ceux des procédures de dessin mais sans support graphique.
- Ou, constater que s'il y avait 13 ânes et aucun cheval, il y aurait 26 caisses: 5 de trop. Réduire alors le nombre d'ânes et augmenter celui des chevaux pour arriver à la solution 8 ânes et 5 chevaux, qui est unique.
- Ou, commencer par une division par 2, du nombre de caisses ou du nombre d'animaux et arrondir à un nombre naturel, (10 caisses sur les chevaux et 11 sur les ânes ou 6 chevaux et 7 ânes) puis procéder ensuite aux adaptations nécessaires pour arriver à 5 chevaux et 8 ânes.
- Transcrire la réponse en nombre d'hommes 5 chevaux –> 5 hommes.

9. LE VIEUX COMPTEUR
(Cat. 5: M = 0,65, Cat. 6: M = 1,13)

Il s'agit du même problème que celui proposé aux catégories 3 et 4 (numéro 3), avec une modification de l'énoncé: au lieu de demander le nombre de bruits en 127 km (140), on inverse la question et l'on demande le nombre de kilomètres parcourus (127) après avoir entendu 140 bruits. Cette demande est plus délicate et les obstacles à la résolution sont encore plus élevés, pour des élèves qui ont pourtant deux ans de plus que ceux à qui l'on a posé la première question. Là encore, on constate que, devant ce problème inédit qui ne fait appel qu'aux régularités de la suite des nombres, les élèves montrent la précarité de leur compréhension de notre système de numération.

L'analyse de la tâche est la même pour l'appropriation du problème, mais on constate que pour déterminer le nombre de kilomètres, il faut travailler par approximations successives:

- Comprendre le fonctionnement de l'objet « compteur » pour aider à passer de l'objet mécanique à la succession des nombres naturels écrits par trois chiffres.
- Écrire les premiers nombres 001, 002, 003, 004... et compter les changements, puis constater que de 009 à 010 il y a deux changements, un « cric » et un « crac ».
- En passant, vérifier le 013 de l'exemple, puis continuer, en faisant apparaître la règle « chaque dizaine, 11 bruits »
- Observer que chaque kilomètre correspond à un « cric », et recenser tous les bruits par un tableau, par exemple (ci-dessous):

« cric » ou km	1	...	10	11	...	13	...	20	...	30	100	110	120
« crac »	0	...	1	1	...	1	...	2	...	3	10	11	12
« rrmt »	0	...	0	0	...	0	...	0	...	0	1	1	1
total	**1**		**11**	**12**	**...**	**14**	**...**	**22**	**...**	**33**	**111**	**122**	**133**

et noter qu'à ce point, il manque encore 7 bruits (des « cric », c'est-à-dire des km) pour arriver à 140 bruits, c'est-à-dire à 127 km.

– Ou procéder par d'autres essais organisés (par dizaines, par centaines, par groupes de 11...)

10. PROFESSEUR TOURNESOL

(Cat. 5 : M = 1,63, Cat. 6 : M = 2,36, Cat. 7 : M = 2,96)

Dans ce problème qui fait appel à quelques connaissances arithmétiques élémentaires, et à la représentation d'un déplacement, on constate une nette progression de la réussite entre la 5e et la 7e année.

Analyse de la tâche :

– Imaginer ou représenter le trajet parcouru depuis la maison (A) au bureau (B) avec le milieu M et la station d'essence E

A	→	E	→	M		B
		E	←	**M**		B
		E	→	M	→	**B**

– Comprendre que le parcours total équivaut à 6/4 du parcours ou 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/2 ou encore, une fois et demie la distance AB, ce qui correspond à 3/2.

– Chercher la valeur de 1/4 du parcours : 24 : 6 = 4 et en déduire que AB = 4 x 4 = 16 (km) ou le noter sur un dessin,

  ou procéder par essais successivement adaptés. Par exemple :
  AB = 20, parcours : 10 + 5 + 5 + 10 = 30 (trop grand)
  AB = 12, parcours : 6 + 3 + 3 + 6 = 18 (trop petit)...

  ou, à partir de 3/2 AB = 24, tirer 1/2 AB = 24 : 3 = 8 et AB = 8 x 2 = 16

  ou passer par une procédure pré-algébrique du genre 1/2 d + 1/4 d + 1/4 d + 1/2 d = 24 et résolution par essais successifs sur d.

– Exprimer la distance AB et vérifier le résultat.

11. JETS DE PIERRE (Cat. 5 : M = 1,87, Cat. 6 : M = 2,24, Cat. 7 : M = 2,73, Cat. 8 : M = 2,75)

Dans ce problème qui fait appel aux capacités de contrôler simultanément plusieurs conditions, qui demande des hypothèses et déductions, qui exige de la logique et un peu de combinatoire, mais qui ne mobilise que des connaissances arithmétiques élémentaires, le degré scolaire a peu d'effets sur les résultats moyens dès le 7e degré.

Analyse de la tâche :

– Déterminer les façons d'obtenir un total de 6 en 12 tirs et en déduire immédiatement qu'il faut un nombre de « centré » supérieur ou égal à 6. A ce point les situations suivantes peuvent se produire :
  6 « centré » et 6 « touché »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 6)
  7 « centré », 2 « manqué » et 3 « touché »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1-1/2-1/2 + 0 + 0 + 0 = 6)
  8 « centré » et 4 « manqué »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1-1/2-1/2-1/2-1/2 = 6)
  Ce sont les seuls cas possibles de 12 tirs avec un total de 6. En effet, avec 9 « centré », même en admettant que les trois derniers tirs sont « manqués », on obtient 7,5 points
– Déduire que le cas 8 « centré » est exclu (le cercle n'est jamais touché) et que André a fait 6 « centré » pendant que Bruno en a fait 7.

  Les critères d'attribution étaient particulièrement exigeants dans ce problème. Le « 4 » demandait la réponse correcte (André 6 centré et Bruno 7), avec explications montrant que les trois situations possibles avaient été envisagées. Le « 3 » n'était obtenu qu'en cas de vérification des nombres de tirs et de points. La réponse correcte seule, comme si elle avait été trouvée au hasard, ne donnait que « 2 ».

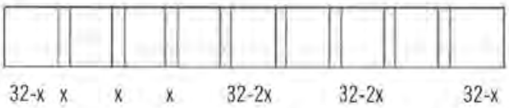
12. L'ETENDAGE

(Cat. 6 : M = 0,93, Cat. 7 : M = 2,10, Cat. 8 : M = 2,50)

Manifestement, la notion de recouvrement régulier des mouchoirs n'a pas été comprise par une majorité des classes de 6e, mais on peut se demander si le fait du nombre d'intervalles, inférieur de 1 à celui des mouchoirs, n'a pas été aussi un obstacle important. On s'attendait à ce que les classes de degré 8, qui disposent de l'outil « équation » réussissent mieux ce problème.

Analyse de la tâche :

- Comprendre la disposition correcte finale des mouchoirs et observer qu'ils y a huit recouvrements :



- Observer que, s'ils ne se recouvraient pas, les mouchoirs occuperaient une longueur de fil de 288 (9x32), en cm, et que la différence 38 (288 – 250) doit être distribuée sur les huit recouvrements de chacun 4,75 (38 : 8), en cm.

- Ou choisir une inconnue, par exemple en désignant par x chacun des recouvrements, et poser l'équation correspondante : $2(32 - x) + 8x + 7(32 - 2x) = 250$ et la résoudre pour trouver la solution $x = 38/8 = 4{,}75$

- Ou encore procéder par essais sur un dessin à l'échelle, commençant par exemple par dessiner les deux mouchoirs latéraux dont la position est fixée et en adaptant la position des mouchoirs centraux.

13. GRILLES

(Cat. 6 : M = 1,56, Cat. 7 : M = 2,36, Cat. 8 : M = 3,35)

Pour obtenir le maximum de points à ce problème de suite régulière de nombres, avec une fonction du deuxième degré à la clé, on demandait la solution correcte (544 allumettes) avec explications complètes (qui peuvent aussi être un dessin, un tableau ou une formule).

Analyse de la tâche :

- Dessiner des grilles de carrés de 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, … 16 x 16 et compter les boulettes
- Ou construire un tableau de progression (voir encadré en bas de page).
  Remarquer que le nombre de boulettes correspond à la suite des nombres carrés et que le nombre des allumettes s'obtient en additionnant le nombre des allumettes de la grille précédente à la différence entre cette dernière et celle de la grille précédente et en ajoutant 4. Ou observer que les différences entre les nombres d'allumettes sont ceux de la suite des multiples de 4 à partir de 8 : 8, 12, 16, 20,
- Ou noter que si la grille est composée de i x i carrés, le nombre des boulettes est $(i + 1)\,(i + 1)$ et le nombre des allumettes $2i\,(i + 1)$; ou chercher une formule permettant de résoudre le problème quel que soit le nombre de cases de la grille carrée :
  si n est le nombre de boulettes, le nombre d'allumettes est $2\,(n - \sqrt{n})$

14. PERROQUETS COLORÉS

(Cat. 7 : M = 2,16, Cat. 8 : M = 2,37)

Il faut contrôler simultanément plusieurs conditions et maîtriser le passage d'une proposition à sa négation pour résoudre ce problème, pas à pas. On peut aussi le résoudre par l'algèbre.

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte que le nombre n des petits perroquets est supérieur à 15 et procéder par essais :
  si n = 16 alors il y aurait 1R (16 – 15), mais ainsi, selon les conditions suivantes, il y aurait aussi 4G, 2V et 3B et leur somme serait 10 et non 16 ;
  si n = 17 alors il y aurait 2R (17 – 15), mais ainsi,

grille	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8		16 x 16
boulettes	4	9	16	25	36	49	64	81	…	289
allumettes	4	12	24	40	60	84	112	144	…	544

selon les conditions suivantes, il y aurait aussi 5G, 3V et 4B et leur somme serait 14 et non 16 ;
si n = 18 alors il y aurait 3R, 6G, 4V et 5B, dont la somme représenterait effectivement 18 petits perroquets.

- Se rendre compte que n = 18 est l'unique solution parce que si n était supérieur à 18, la somme R + G + V + B serait supérieure à n (et l'écart augmenterait avec la croissance de n).
- Ou procéder par voie algébrique :
  se rendre compte que « ils sont tous rouges sauf 15 » équivaut à dire qu'il y a 15 non-rouges – c'est-à-dire les jaunes, les verts et les bleus – et arriver ainsi à l'équation $G + V + B = 15$,
  poursuivre de façon analogue pour les autres couleurs et arriver aux trois autres équations
  $R + V + B = 12$; $R + G + B = 14$; $R + G + V = 13$;
  résoudre le système par substitutions successives, ou se rendre compte qu'en additionnant membre à membre on obtient :
  $3(R + V + G + B) = 15 + 12 + 14 + 13 = 54$ et en déduire par conséquent que le nombre total des petits perroquets est 18 (54 : 3).
- En déduire qu'il y a 3 petits perroquets rouges (18 – 15), 6 jaunes (18 – 12), 4 verts (18 – 14) et 5 bleus (18 – 13).

15. LA PLATE-BANDE FLEURIE
(Cat. 7 : M = 2,16, Cat. 8 : M = 2,33)

Dans ce problème de proportionnalité, l'organisation des données est essentielle et les deux tableaux ci-dessous sont des instruments efficaces.

Analyse de la tâche :

- Etablir un tableau des combinaisons de rapport 5/6

Oeillets	Tulipes
5	6
10	12
15	18
20	24
25	30
30	36
35	42
...	...

Etablir un tableau de rapport 3/4

Oeillets	Tulipes
3	4
6	8
9	12
12	16
15	20
18	24
21	28
...	...

- Comparer les deux tableaux et découvrir qu'en diminuant de 12 les éléments (30, 36) de rapport 5/6 on obtient un couple d'éléments (18, 24) de rapport 3/4. Donc il y a 30 oeillets et36 tulipes.
- Ou observer que, avec les oeillets, on peut former des groupes de 5 et avec les tulipes des groupes de 6. Après la tempête, avec les oeillets, on peut former des groupes de 3 et avec les tulipes des groupes de 4 ; se rendre compte que ceci équivaut à retirer deux fleurs de chaque groupe, tant des oeillets que des tulipes. Puisqu'il y a 12 fleurs détruites de chaque sorte, il y a 6 groupes de chaque sorte. Donc, initialement, il y avait 30 (6 x 5) oeillets et 36 (6 x 6) tulipes.

16. LA POURSUITE (Cat. 7 : M = 1,60, Cat. 8 : M = 2,33)

Problème plus difficile en catégorie 7 qu'en catégorie 8. Il faut de l'ordre et de la rigueur dans les différentes unités utilisées : « pas de Sem » et « pas du voleur »

Analyse de la tâche :

- S'approprier l'idée de déplacements par « étapes temporelles » (une avance de 18 pas au début et, au cours de la poursuite, chaque fois que le voleur fait 8 pas Sem en fait 5) et organiser les étapes, graphiquement ou par une disposition structurée (voir par exemple les lignes 2 et 3 du tableau de la page suivante) ; puis introduire l'équivalence des longueurs « 2 pas de Sem valent 5 pas du voleur » où les pas de Sem ont été convertis en pas du voleur par proportionnalité : 5 pas de Sem = 12,5 pas du voleur (voir ligne 4 du tableau) et finalement, comparer les déplacements de Sem et du voleur dans la même unité (lignes 2 et 4 du tableau) pour s'apercevoir que Sem rejoint le voleur après 50 pas du voleur, c'est-à-dire 20 pas de Sem.

« étapes »	0	1	2	3	4	5	…
dépl. du voleur (en pas du voleur)	18	18 + 8 = 26	26 + 8 = 34	42	50	58	…
dépl. de Sem (en pas de Sem)	0	5	2 x 5 = 10	15	20	25	…
dépl. de Sem (en pas du voleur)	0	12,5	25	37,5	50	62,5	…

- Ou résoudre le problème algébriquement, par exemple en imaginant que Sem rattrape le voleur en n étapes. Il faut alors convertir les pas du voleur en pas de Sem (en remplaçant 1 pas du voleur par 2/5 ou 0,4 pas de Sem) et poser l'équation $18x0,4 + (8x0,4)n = 5n$ dont la solution est 4 (étapes) correspondant à 20 pas de Sem.
- Ou procéder par essais organisés, par exemple : si Sem fait 10 pas (2x5), qui valent 25 pas du voleur, celui-ci parcourt 34 pas (18 + 2x8)… c'est insuffisant,
  si Sem fait 30 pas (6x5), qui valent 48 pas du voleur, celui-ci parcourt 66 pas (18 + 6x8)… c'est trop.

17. L'ENTRAINEMENT DE BASKET (Cat. 8 : M = 1,50)

La solution est évidente si on ne tient compte que des 12 minutes gagnées et du déplacement de la mère, comme le montre l'analyse de la première partie de la tâche. Mais, dans ces problèmes où interviennent des vitesses, des temps gagnés et des déplacements, la difficulté est de choisir la « bonne inconnue ». Une des difficultés du problème vient du fait que les durées cherchées sont indépendantes des vitesses et des déplacements.

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte que les 12 minutes gagnées sont celles que la mère aurait utilisées pour parcourir deux fois (6 minutes à l'aller et 6 minutes au retour) le trajet du terrain au point où elle a rencontré Jean ; en déduire que le temps utilisé par Jean, dont la vitesse est le cinquième de celle de la voiture, pour parcourir le trajet à pied est de 30 minutes (6 x 5), comprendre que, vu que Jean a marché 30 minutes et a passé 6 minutes de moins que d'habitude en voiture, l'entraînement s'est terminé 36 minutes (30 + 12 – 6) plus tôt que d'habitude. (Cette deuxième réponse dépend strictement de la réponse à la première question)
- Ou faire un raisonnement hypothétique avec choix de données réalistes du genre :
  L'entraînement se termine d'habitude à 18h15, la mère part à 18h et revient à 18h30 avec son fils ; en se déplaçant à 60 km/h, elle parcourt 30 km (2 fois 15). Aujourd'hui elle part à 18h comme d'habitude mais revient 12 minutes plus tôt, à 18h18, donc elle n'a parcouru que 18 km (2 fois 9) et Jean en a fait 6 (15 – 9). A la vitesse de 12 km/h, il a marché 30 minutes. Son déplacement a duré 39 minutes (30 + 9) en tout, ce qui fait que l'entraînement s'est terminé à 17h39 (18h20 – 39 min), avec 36 (18h15 – 17h39) minutes d'avance sur l'horaire habituel.

  Puis vérifier avec d'autres données hypothétiques en modifiant par exemple la vitesse et la distance de la maison : La mère part à 17h50 et revient à 18h40 en se déplaçant à 30 km/h, elle parcourt 25 km (2 fois 12,5). Elle revient aujourd'hui à 18h28, donc elle n'a parcouru, en 38 minutes, que 19 km (2 fois 9,5) et Jean en a fait 3 (12,5 – 9,5). A la vitesse de 6 km/h, il a marché 30 minutes. Son déplacement a duré 49 (30 + 19) minutes en tout, ce qui fait que l'entraînement s'est terminé à 17h39 (49 min avant 18h28), avec 36 minutes (18h15 – 17h39) d'avance sur l'horaire habituel.

  Constater alors que les réponses 30 minutes et 36 minutes sont indépendantes de la vitesse et de la distance de la maison et de l'emplacement du point de rencontre qui leur est lié !!

Des analyses plus approfondies de certains de ces problèmes paraîtront dans les prochains numéros. Les lecteurs qui seraient intéressés à y participer sont les bienvenus.

LONGUEUR OU AIRE ?

Michel Brêchet

La résolution de problèmes relatifs à la mesure de longueurs, d'aires ou de volumes s'étend sur l'ensemble de la scolarité obligatoire. Dès les premiers degrés de l'école primaire, les élèves sont sensibilisés à la nécessité de choisir une unité pour comparer des lignes ou des surfaces, par exemple lorsqu'ils sont confrontés à des situations dans lesquelles une simple estimation est mise en défaut. Tour à tour, ils se servent de leur règle graduée, décomposent un objet en plusieurs parties afin de les utiliser pour tenter de constituer un autre objet, comparent deux surfaces par superposition directe, partagent un objet en plusieurs parties de grandeur connue avant de les dénombrer, mesurent par report d'une unité (conventionnelle ou non)... L'approche du calcul de la mesure d'une aire comme produit de mesures de longueurs intervient en cinquième année, dans le cas des rectangles, voire d'autres polygones aisément transformables en rectangles. Ce même procédé est revu en sixième année, notamment à propos du volume du cube et du parallélépipède rectangle. Mais auparavant, les élèves ont mesuré ou comparé des volumes par empilement d'unités ou par l'intermédiaire du remplissage de récipients gradués, en analogie au travail effectué pour les longueurs et les aires. A l'école secondaire, le développement de la perception de ces trois grandeurs géométriques se poursuit. Les élèves sont ainsi amenés à distinguer et à mesurer les grandeurs en jeu dans un problème, à déterminer les dimensions nécessaires à un calcul, à utiliser correctement une formule lors de l'étude d'un objet familier et à apprécier un résultat en référence à la réalité, à savoir à se prononcer sur la plausibilité de l'ordre de grandeur d'une mesure.

Malgré les nombreuses heures qu'ils ont consacrées durant la scolarité à l'étude des longueurs, aires et volumes, bien des élèves de 13-15 ans éprouvent encore de sérieuses difficultés à maîtriser ces grandeurs lors de la résolution d'un problème, notamment à se les représenter mentalement, à les distinguer les unes des autres et à prendre conscience de leurs variations respectives[1]. « *Plus l'aire d'une figure est grande, plus son périmètre est grand* », « *Deux surfaces de même périmètre ont même aire* », « *Deux solides de même volume ont même aire totale* », « *Deux cylindres (sans fond ni couvercle) fabriqués à partir de deux rectangles isométriques ont même volume* » sont des conceptions erronées qui émergent fréquemment. De même, la propriété selon laquelle l'aire (resp. le volume) de la réunion de deux figures (sans trou ni superposition) est égale à la somme des aires (resp. des volumes) de chaque figure est parfois étendue au périmètre ou à l'aire totale :

L'aire de ce losange est égale à la somme des aires des triangles qui le constituent. Mais le périmètre du losange n'est pas égal à la somme des périmètres des triangles.

Le volume de ce parallélépipède rectangle est égal à la somme des volumes des cubes qui le constituent. Mais l'aire totale du parallélépipède rectangle n'est pas égal à la somme des aires totales des cubes.

1. Bien évidemment, il ne s'agit pas ici de porter un regard critique sur la qualité du travail accompli à l'école obligatoire, mais bien de prendre en compte les obstacles à l'appropriation des grandeurs géométriques... et des autres (la masse et le temps par exemple).

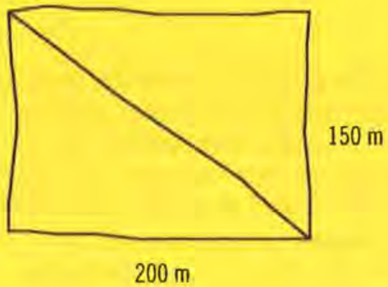
Regard sur quelques travaux d'élèves

Le problème suivant a été soumis à une centaine d'élèves des degrés 7, 8 et 9 ne connaissant pas la relation de Pythagore[2]. Chacun d'eux a eu 15 minutes pour le résoudre individuellement et pouvait utiliser son matériel de géométrie (règle, équerre, compas, rapporteur) et sa calculatrice.

Bill s'entraîne sur la piste rectangulaire et John sur l'une des pistes triangulaires, représentées ci-contre par un croquis.

Ils courent à la même vitesse et pendant la même durée.

Bill fait douze tours de piste. Et John ?

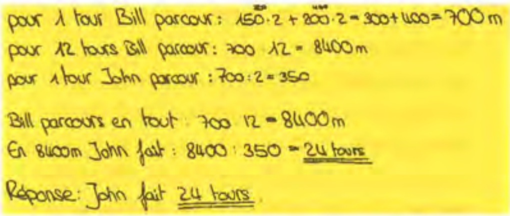


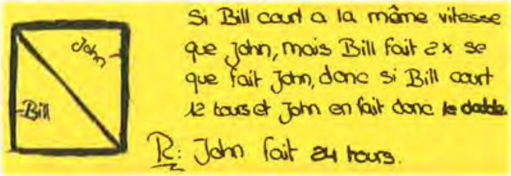
La recherche de la solution passe par plusieurs stades, dont ceux-ci :

- repérer, sans la nommer explicitement, la grandeur à prendre en considération (le périmètre de chaque figure). Comme elle n'est pas mentionnée en toutes lettres dans l'énoncé, l'élève aura à l'identifier et à la discerner de l'aire, grandeur sur laquelle il pourrait être tenté d'opérer ;
- déterminer, à partir d'un dessin à l'échelle et donc approximativement, la mesure de la diagonale du rectangle (250 m) ;
- identifier le trajet de chaque coureur et calculer la longueur de chaque piste (600 m et 700 m) ;
- déduire de l'information « ils courent à la même vitesse et pendant la même durée » que Bill et John parcourent la même distance (cette étape peut s'appuyer sur un vécu extrascolaire ou sur des connaissances intuitives à propos du mouvement d'un corps ; elle ne nécessite pas à tout prix l'utilisation formelle de la relation *distance* = *vitesse* x *durée*) ;
- calculer la longueur totale parcourue par Bill (8400 m) puis le nombre de tours effectués par John (14).

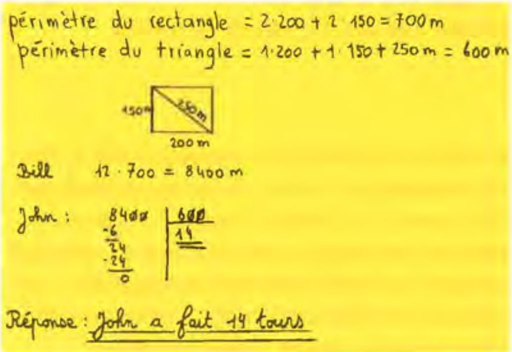
Les travaux présentés illustrent la plupart des difficultés rencontrées par les élèves. Ils fournissent par là même de précieux renseignements sur leurs connaissances. On peut les classer en cinq catégories :

2. Plus précisément : 12 élèves de 7e C, 23 élèves de 7e A, 31 élèves de 8e B, 17 élèves de 8e A et 11 élèves de 9e C. Dans le canton du Jura, pour chacune des disciplines français, allemand et mathématiques, il existe trois niveaux d'enseignement à l'école secondaire. Le niveau A est celui où les exigences sont les plus élevées.

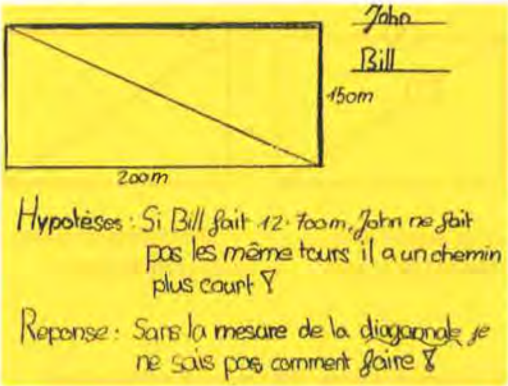




1) 45 % des élèves répondent que John fait 24 tours (ou 6 tours), en argumentant que la longueur de la piste rectangulaire est le double de celle de la piste triangulaire. Cette réponse est parfois donnée à la suite du calcul du trajet de Bill. Dans d'autres cas, aucun calcul n'accompagne l'argumentation. Fait révélateur, cette erreur est commise par des élèves de tous degrés et de tous niveaux, dans des proportions proches les unes des autres.

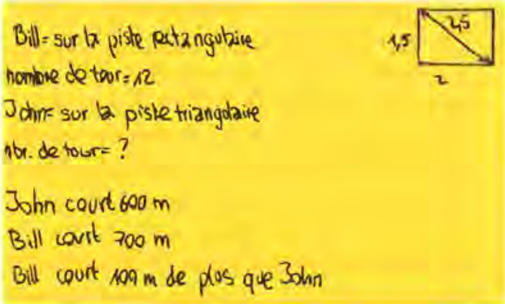


2) 17 % des élèves, majoritairement de niveau A, fournissent une réponse juste, explications à l'appui.



3) 17 % des élèves calculent la longueur du trajet de Bill. Ils échouent ensuite lors de la recherche de la mesure de la diagonale.

4) 15% des élèves mettent en place un raisonnement erroné fondé sur des calculs d'aires, de longueurs ou de durées.

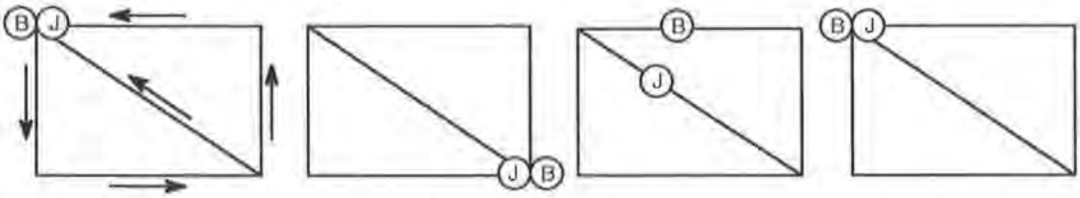


5) 6 % des élèves calculent successivement les longueurs de la piste rectangulaire (ou du trajet total parcouru par Bill), de la diagonale du rectangle et de la piste triangulaire. Ils donnent alors une réponse erronée (à la suite d'une erreur de raisonnement ou de calcul) ou ne fournissent aucune réponse.

En regard de cet état des lieux, le rôle de l'enseignant est d'organiser la relance sans dévoiler la procédure qui mène à la solution. Cette phase est très délicate à conduire si l'on veut que la recherche conserve son intérêt et que les élèves assument la plus grande partie de la tâche restante. A titre d'exemple, décrivons la démarche qui a été appliquée avec une des classes de 8e année.

Phase de relance

Deux élèves (appelés ci-après Bill et John) sont invités à mimer la situation le long de trajets, triangulaire pour l'un et rectangulaire pour l'autre, tracés sur le sol de la salle. Lors du premier mime, ils effectuent tout d'abord la moitié du périmètre du rectangle côte à côte, en se tenant par la main, puisque les deux sportifs courent à la même vitesse. Bill parcourt ensuite une largeur et une longueur du rectangle pendant que John parcourt sa diagonale. Les coureurs se retrouvent donc au même moment à leur point de départ, après un tour :



Bill et John au départ — Après un demi-tour de rectangle — Juste avant d'avoir fait un tour chacun — Bill et John se retrouvent au point de départ

La réaction de plusieurs élèves ne se fait pas attendre : *« Bill est allé plus vite sur la deuxième moitié de son tronçon. John doit faire deux tours pendant que Bill en fait un »*. Logique, puisque pour beaucoup d'élèves, John fait 24 tours et Bill en fait 12. Au cours du deuxième mime, les coureurs (deux autres élèves) effectuent dans un premier temps un demi-tour de rectangle côte à côte, à l'instar du premier mime. Bill termine ensuite son trajet pendant que John parcourt la diagonale du rectangle et un tour complet du triangle ! Les coureurs se retrouvent ainsi à nouveau au même moment au point de départ, et John a fait deux tours de piste triangulaire pendant que Bill a fait un tour de piste rectangulaire. Intervention immédiate des élèves : *« Impossible. Ils doivent courir à la même vitesse »*.

Suit un échange collectif, qui met en exergue diverses conceptions erronées à propos de la longueur de la diagonale du rectangle :

- elle est égale à la moitié du périmètre du rectangle ;
- elle est égale à la moitié de la moitié du périmètre du rectangle ;
- elle est égale au double de la longueur du grand côté du rectangle ;
- elle est égale à la moitié du produit de la longueur du rectangle par sa largeur.

Un troisième mime s'impose alors. Bill et John (un nouveau couple d'élèves) débutent comme précédemment. Bill parcourt ensuite une largeur et la moitié d'une longueur du rectangle pendant que John parcourt entièrement sa diagonale. D'où la réaction : *« Pourquoi Bill est-il exactement au milieu du grand côté lorsque John a accompli un tour complet »* ? Se dégage finalement l'interrogation suivante : *« Comment connaître la longueur de la diagonale du rectangle »* ? Réponse d'un élève : *« Faire un dessin en vrai, changer les mètres en centimètres, et mesurer »*. Suite à cette phase de relance d'une durée de 15 minutes environ, la grande majorité des élèves résout correctement le problème, individuellement toujours, et sans bénéficier d'indications supplémentaires[3]. Pour clore la leçon, la question du calcul de la valeur exacte de la longueur de la diagonale est posée par l'enseignant. Non pas pour étudier dans l'immédiat le théorème de Pythagore, mais bien pour préciser que cette longueur a été trouvée par mesurage (donc par un procédé pragmatique) alors qu'elle peut être obtenue par une formule mathématique (donc par un procédé intellectuel), car elle découle des autres données.

3. Dans les autres classes, après des relances différentes (« matérialiser » le périmètre du rectangle et du triangle par une ficelle, effectuer un « voyage imaginaire » le long de chaque piste…), la plupart des élèves réussissent également à trouver la solution. Une exception toutefois : les élèves de 7e C échouent en grand nombre lorsqu'il s'agit de représenter les pistes à l'échelle. La complexité du problème est donc trop élevée pour eux.

A qui la faute ?

Bien des élèves ont une tendance naturelle à généraliser abusivement certaines propriétés, méthodes, techniques ou relations, c'est-à-dire à les mettre en œuvre dans des situations où elles ne s'appliquent pas. C'est un fait bien connu des enseignants. Par exemple, la distributivité de la multiplication sur l'addition, constatée dès l'âge de 10 ans, est exercée à maintes reprises par la suite. Du coup, pas mal d'élèves de 14-15 ans pensent implicitement, à tort, que l'élévation à une puissance (opération proche de la multiplication) est distributive sur l'addition et donc que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Dans le même ordre d'idée, l'algorithme d'addition en colonnes est parfois utilisé pour multiplier deux nombres, le théorème de Pythagore est appliqué dans le cas de triangles ne possédant pas d'angle droit et les propriétés de la linéarité sont utilisées dans des situations non linéaires.
Par ailleurs, ces erreurs sont d'autant plus fréquentes lorsque les élèves passent trop hâtivement à des écritures symboliques et à des procédures systématiques, car la vigueur et l'appel du formel est alors plus forte que la base de sens.

Dans le problème qui nous intéresse, une partie des élèves ayant considéré que la longueur du trajet triangulaire était la moitié de celle du trajet rectangulaire ont sans doute été influencés par le fait que l'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle. Ils n'ont donc pas discerné les propriétés respectives des deux grandeurs en jeu, voire les deux grandeurs elles-mêmes : un périmètre n'est pas une aire. Alors, à qui la faute ? Aux élèves,

parce qu'ils manquent de bonne volonté pour intégrer les connaissances nouvelles? Ou parce qu'ils manquent d'attention lorsqu'on leur donne des explications? Aux enseignants, parce qu'ils passent comme chat sur braises sur les réelles difficultés des élèves à comprendre les concepts de longueur et d'aire? Ou parce qu'ils se contentent trop rapidement de situations stéréotypées dans lesquelles il suffit d'appliquer les formules usuelles de calculs de périmètre et d'aire?
A l'énoncé du problème, parce qu'il demande un important travail de reconstruction mentale (assimiler les parcours à des figures géométriques exactes, faire comme si la vitesse des coureurs était constante)? Ou parce que, dans la réalité, il n'a pas de solution exacte? Aux moyens d'enseignement, parce qu'ils n'offrent pas suffisamment de problèmes qui obligent les élèves à se poser de bonnes questions? Ou parce qu'ils ne tiennent pas suffisamment compte des stades de développement intellectuel des enfants? Peut-être bien ni aux personnes ni aux outils. Mais tout simplement... au temps, qui n'a pas encore achevé ses effets, et dont l'importance dans les apprentissages est primordial. D'ailleurs, à y regarder de près, les élèves ne manquent pas de nous le rappeler chaque jour, à leur façon certes.
En confondant longueur et aire, par exemple.

Exposition Rivages Mathématiques

Une exposition pour animer votre collège, un club, une fête des mathématiques...
L'exposition (Voir *Math-Ecole* no 197) est à disposition des écoles ou d'autres institutions qui désirent faire connaître les mathématiques de manière dynamique.

Matériel: 5 triptyques recto-verso (15 panneaux, quadrichromie), à poser sur des tables:
longueur 120 cm, largeur et hauteur 80 cm; objets en bois, métal et plastique, représentant 10 postes de travail.
Des fiches complémentaires et un « dossier pédagogique » accompagnent chaque expérience.
Les 10 postes occupent 5 grandes tables, dans un espace de 40 m^2 environ. Le matériel est contenu dans deux caisses de 30 kg: 90 x 15 x 65 et 80 x 37 x 60.

Contenu:
- Les poids de Babylone (bases de numération, Mésopotamie)
- La pierre angulaire (tronc de pyramide, Egypte)
- Thalès en un clin d'œil (triangles homothétiques, Grèce)
- Nombres figurés (conception du nombre, Grèce)
- Pavages magiques (carrés magiques, Islam)
- Pythagore en pièces (théorème de Pythagore, Grèce)
- Kwarizmath (équations, Islam)
- Trois carrés en un (démonstration et somme de carrés, Islam)
- L'escalier de Leonardo (suite de Fibonacci, Moyen-âge)
- Curieux carrelages (pavages, Islam)

Ces dix expériences sur des thèmes qui, historiquement, se sont développés « autour de la Méditerranée », sont décrites dans le numéro spécial de la revue *Hypercube* 32/33, (voir p. 3 de couverture)

Location: CHF 350.– pour deux semaines + transports et assurance. Ce prix comprend un exemplaire de la revue *Hypercube* 33/34, un exemplaire des fiches, pour photocopie et 10 exemplaires du guide-visiteurs.
Réservation: Jean-Luc Bovet, courriel: jeanluc.bovet@bluewin.ch
Renseignements: SENS, www.abord-ch.org/sens

VOYAGE AU PAYS DES FORMULES D'AIRES ET DE VOLUMES

Michel Criton
président de la FFJM, Paris

Une belle formule

Il existe une belle formule assez connue permettant d'exprimer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des trois côtés de ce triangle. Cette formule est connue sous le nom de *formule de Héron*[1]

Si a, b et c désignent les longueurs des trois côtés, et p le demi-périmètre du triangle, toutes ces longueurs étant exprimées dans une certaine unité, alors l'aire *A* du triangle, exprimée dans l'unité d'aire correspondante, est donnée par la formule :

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Qu'en est-il des quadrilatères ?

Existe-t-il une formule analogue pour les quadrilatères plans ? Ici, il faut remarquer que l'aire d'un triangle est entièrement déterminée par la longueur de ses trois côtés, alors que ceci n'est pas vrai pour l'aire d'un quadrilatère. Pourquoi ? Tout simplement parce que, contrairement à un triangle, un quadrilatère dont les côtés sont fixés peut être déformé, dans le plan et même hors du plan (voir figure 1).

1. Héron d'Alexandrie, mathématicien grec de la fin du 1er siècle de notre ère

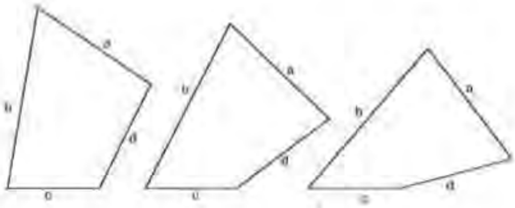


Figure 1
Trois quadrilatères non superposables mais ayant les mêmes mesures des côtés a, b, c, d

Même si deux quadrilatères ont les mêmes longueurs de côtés dans le même ordre et si l'on fixe l'un des angles de ces deux quadrilatères, ils peuvent ne pas être supersosables : l'un peut être convexe et l'autre non convexe (voir figure 2).

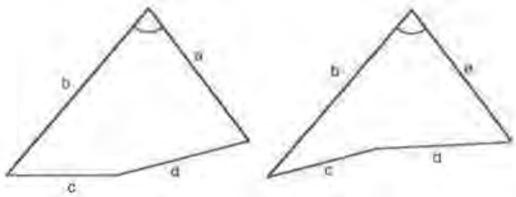


Figure 2
Deux quadrilatères ayant les mêmes mesures des côtés a, b, c, d, et la même mesure de l'angle entre a et b, l'un convexe et l'autre non convexe

Par contre, si l'on fixe les quatre côtés et un angle entre deux de ces quatre côtés et si l'on impose la convexité (ou la non-convexité), alors on obtient un quadrilatère plan unique, à condition bien sûr que les quatre longueurs et l'angle donnés en permettent l'existence. On peut alors penser qu'il existe une formule donnant l'aire A de ce quadrilatère en fonction des grandeurs données. Une telle formule existe et est connue sous le nom de *formule de Brahmagupta*[2] :

2. mathématicien et astronome indien, 598-environ 660

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\ \cos^2\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}$$

où $\widehat{A}$ désigne la mesure de l'angle situé entre les côtés de longueurs a et d, et $\widehat{B}$ celle de l'angle situé entre les côtés de longueurs b et c.

Notre but n'est pas ici de démontrer cette formule, mais le lecteur courageux pourra s'atteler à la tâche.

On remarque que l'expression sous le radical est maximale lorsque les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont supplémentaires, c'est-à-dire lorsque *le quadrilatère est inscriptible dans un cercle.* On obtient alors la *formule de Brahmagupta pour un quadrilatère inscriptible.*

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

On admirera la beauté intrinsèque de cette formule. On pourra ensuite vérifier quelques cas particulières comme celui du rectangle, en posant a = c et b = d par exemple.
Un autre cas particulier intéressant : si l'on choisit d = 0, le quadrilatère perd un côté et devient un triangle... et on retrouve la formule de Héron.

Cette formule peut rendre bien des services. Les lecteurs de *Math-Ecole* qui ont peiné, voire souffert sur la résolution du problème 18 des quarts de finales individuels du 17e *Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques* pourront reprendre cette résolution à l'aide de cette formule et constater qu'elle s'en trouve grandement facilitée !

18. L'ÉTANG D'ARES (coefficient 18)

L'étang d'Ares est un quadrilatère dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers de mètres tous différents, inférieurs à 100 m et non multiples de 5.

Chaque côté de cet étang est également le côté d'un terrain carré. Les quatre propriétaires de ces terrains, Matthieu, Mathurin, Mathilde et Mathias doivent les partager en parcelles de 100 m². Ils constatent qu'il leur reste à chacun la même surface inutilisée.

Quelle est, au maximum, l'aire de l'étang d'Ares ?
On donnera la réponse en m², arrondie au centième.

Il existe une autre formule donnant l'aire d'un quadrilatère convexe en fonction des longueurs des quatre côtés a, b, c, d du quadrilatère et de ses deux diagonales p et q.

Il s'agit de la *formule de Bretschneider*[3] :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)}$$

3. Carl Anton Bretschneider, 1808-1878, professeur de mathématiques au Gymnasium de Gotha, Allemagne, auteur de *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides : ein historischer Versuch.* BG Teubner, Leipzig, 1870.

Le cas des solides

On peut légitimement se demander s'il existe des formules analogues pour les volumes des solides. Prenons le cas du solide le plus simple : le tétraèdre. Un tétraèdre est entièrement déterminé par la donnée des six longueurs de ses arêtes, ces mesures étant associées par paires correspondant à des arrêtes opposées. Existe-t-il une formule donnant la mesure du volume d'un tétraèdre dont les arêtes ont pour mesures a, b, c, d, e et f (a étant opposée à e, c à d et b à f)? La réponse est oui. Cette formule était connue d'Euler[4].

La voici :

$$\begin{aligned} 12^2 V^2 = {} & (a^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \\ & - 2\,[a^2e^2(a^2 + e^2) + b^2f^2(b^2 + f^2) + c^2d^2(c^2 + d^2)] \\ & - (a^2b^2d^2 + a^2c^2f^2 + b^2c^2e^2 + d^2e^2f^2). \end{aligned}$$

On ne peut qu'admirer la puissance de travail légendaire du grand Leonhard Euler qui lui a permis de trouver cette formule à une époque où, rappelons-le, les seuls outils du mathématicien étaient le papier et la plume !

On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il une formule permettant de calculer la mesure du volume d'un pentaèdre inscriptible dans une sphère à partir des mesures de ses arêtes, et dont la formule d'Euler serait un cas particulier, en réduisant une face à zéro ?

La même question peut être posée pour un hexaèdre. Il faudrait bien sûr préciser la nature précise de l'hexaèdre : celui-ci peut posséder une face pentagonale et cinq faces triangulaires (pyramide à base pentagonale), ou six faces triangulaires (bi-pyramide à base triangulaire) ou encore six faces quadrilatérales (voir figure 3).

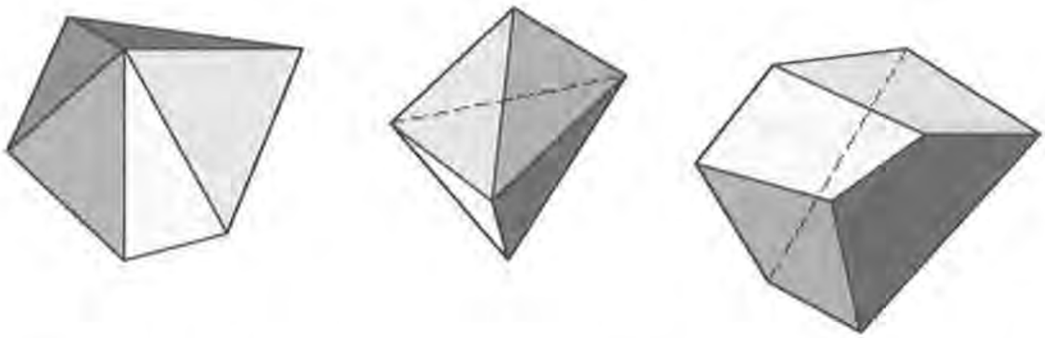


Figure 3.
Les différents types de solides cités dans le texte

Le problème est, semble-t-il, ouvert, à moins qu'un lecteur ne connaisse des formules pour de tels volumes (et leur origine).

4. mathématicien suisse, 1707-1783

GAUSS ET LA DATE DE PÂQUES

Antoine Gaggero
HEP BEJUNE site de Bienne

Le retour des œufs et des lapins de Pâques est l'occasion de se rappeler un algorithme intéressant

Le concile de Nicée, convoqué par l'empereur Constantin en 325 a décidé que la fête chrétienne de Pâques sera célébrée le premier dimanche après la pleine lune qui suit l'équinoxe du printemps. Au plus tôt, elle arrive le 22 mars et au plus tard, le 25 avril. Elle se situe donc à l'intérieur d'une période de 35 jours. Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a imaginé une formule permettant de trouver la date à laquelle est célébrée la fête de Pâques pour une année donnée. Voici comment la calculer pour la période de 1900 à 2099 dans le calendrier grégorien :

algorithme	**Exemple**
m représente l'année choisie	$m = 2003$
a représente le reste de la division entière de m par 19 ; $a = m \bmod 19$	$a = 8$
b représente le reste de la division entière de m par 4 ; $b = m \bmod 4$	$b = 3$
c représente le reste de la division entière de m par 7 ; $c = m \bmod 7$	$c = 1$
d représente le reste de la division entière de $(19a + G)$ par 30 ; $d = (19a + G) \bmod 30$ $G = 24$ dans le calendrier Grégorien $G = 15$ dans le calendrier Julien	$d = 26$
e représente le reste de la division entière de $(2b + 4c + 6d + N)$ par 7 ; $e = (2b + 4c + 6d + N) \bmod 7$ $N = 5$ dans le calendrier Grégorien $N = 6$ dans le calendrier Julien	$e = 3$
La date de Pâques se situe (d + e) jours après le 22 mars	$d + e = 29$

Résultat de l'exemple :
en 2003, Pâques est le dimanche 20 avril

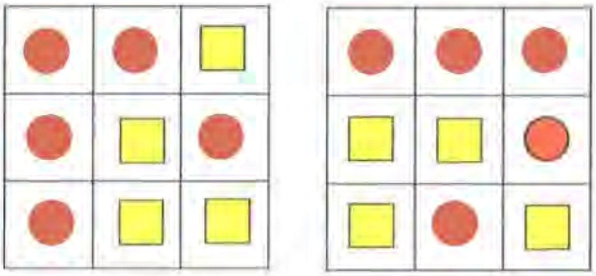
Remarques :

- Le calendrier julien dérive du calendrier romain, réformé par Jules César en 46 av J.C. Il durait 11 minutes et 14 secondes de plus que l'année solaire. Cette différence s'accumula tant et si bien qu'en 1582 le calendrier julien comptait 10 jours de retard sur le retour des saisons.
- Le calendrier actuel, dit grégorien car mis en œuvre par le pape Grégoire XIII, a débuté le 15 octobre 1582 en France, pour palier les défauts du calendrier julien.
- *N* et *G* sont des constantes pour le calendrier julien, mais pas pour le calendrier grégorien. En effet, le calendrier julien, basé sur les phases de la lune est plus régulier que le calendrier grégorien qui est un calendrier solaire, C'est pourquoi cet algorithme n'est valable que jusqu'en 2100.
- Pour ceux qui désireraient mettre cet algorithme sur Excel, la fonction « reste entier de » est par exemple : m mod 7 ==== m – (ARRONDI.INF(m/7;0))*7
- A l'adresse http://www.123genealogie.com vous pouvez calculer directement cette date.

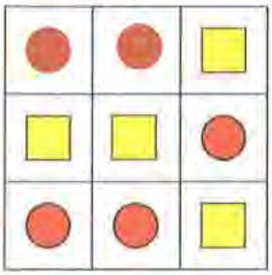
RECTIFICATIF

Une fidèle lectrice, Mme Dominique Valentin, nous signale fort judicieusement une erreur dans l'inventaire des cartes du jeu « Torticolis » de notre numéro 205 : la deuxième carte de la page 24 (première ligne, au milieu) est identique à la dernière de cette même page (en bas à droite). Il faut déplacer un carré jaune de l'une d'entre elles pour obtenir une configuration qui manquait à l'inventaire. Le nombre des cartes différentes reste 34.

cartes isométriques à une rotation près :



nouvelle carte :



Il faut aussi compléter, dans la colonne de gauche de la page 22 du même article la phrase « Ces cartes sont reproduites à la page… et on les trouve en plus grand sur le site internet de *Math-Ecole* http://www.math-ecole.ch » par « ces cartes sont reproduites en pages 23 à 25 et on les trouve… ».

Avec nos remerciements à notre lectrice attentive et nos excuses pour cette confusion qui nous a échappé. [ndlr]

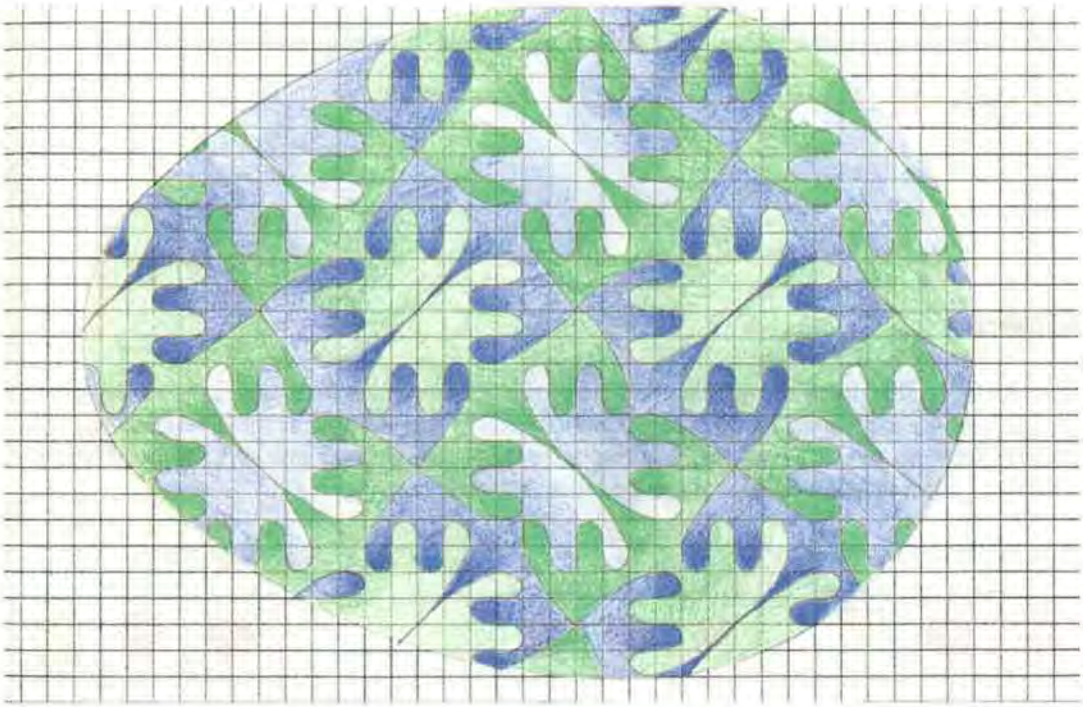
MATH-ÉCOLE, UNE NOUVELLE PAGE DE COUVERTURE

Denis Odiet

La construction d'œufs géométriques, le calcul de leur aire et de leur périmètre ont déjà fait l'objet d'articles proposés aux lecteurs de la revue [1].

Il m'a semblé judicieux d'utiliser ces constructions pour initier les élèves au monde des pavages et à leurs multiples élaborations possibles [2].

La revue *Math-Ecole* a toujours été très exigeante quant à son contenu. Espérons que les lecteurs apprécieront qu'elle se soucie également de son contenant et notamment de sa page de couverture qui, pour ses prochains numéros, présentera des détails d'œufs géométriques pavés par des élèves de 15 ans du Collège de Delémont.



Œuf pavé sur feuille quadrillée A3

1. « Mathématiques pascales », Denis Odiet, *Math-Ecole* no 176
   « Géométrie pascale », Denis Odiet, *Math-Ecole* no 192

2. « Les pavages du Kangourou », André Deledicq et Raoul Raba, ACL-Editions a été d'un précieux secours.

ART ISLAMIQUE
ET MATHÉMATIQUES

Floriane Pochon, Luc-Olivier Pochon

Introduction

Chacun connaît les merveilleux « alicatados » de l'Alhambra de Grenade ou les mosaïques des mosquées un peu partout dans le monde. Les principes à la base de ces « pavages » sont par contre moins connus. Ils sont liés à quelques propriétés arithmétiques et géométriques élémentaires qui constituent autant de jolis problèmes mathématiques, certains simples d'autres plus compliqués.

Le sujet a été traité par de nombreux auteurs. Quelques fois l'approche est symbolique (voir Grabar, 1996, pour un exemple récent), mais la plupart des études se situent à mi-chemin entre art plastique et mathématiques.

Un ouvrage précurseur est celui de Bourgoin (1879), *Eléments de l'art arabe, le trait des entrelacs*, qui fournit une classification des « patterns » visibles dans des édifices du monde islamique. Les planches de l'ouvrage présentent un grand intérêt. Elles ont été réimprimées avec de brefs commentaires en anglais en 1973.

L'approche la plus connue est probablement celle liée aux groupes d'ornementation [1]. Elle fait l'objet d'études classiques (Weyl, 1952, Coxeter, 1961) ou plus modernes (Abas & Salman, 1995, Hussein & Masayuki, 1999). Toutefois, l'existence de patterns à base de figures à 10, voire 9 ou 7 côtés (fig 1) laisse penser que les recherches des mathématiciens arabes étaient d'un autre type, d'autant plus que plusieurs pavages « différents » peuvent correspondre à un même groupe d'ornementation.

figure 1
Cette illustration tirée de Mülayim (1982) montre une rosace à 10 branches

Une autre approche paraît plus conforme à la philosophie originelle. Elle est principalement présentée dans des livres d'architecture. C'est celle que nous utiliserons. Selon cette approche, chaque ornement est construit à partir d'un recouvrement du plan par des polygones réguliers qui en représentent l'ordre sous-jacent souvent caché. La figure 2 montre un exemple de construction tiré de l'ouvrage de Critchlow (1976).

1. Un groupe d'ornementation est l'ensemble des isométries du plan (translations, rotations, symétries) qui laissent un pavage invariant.

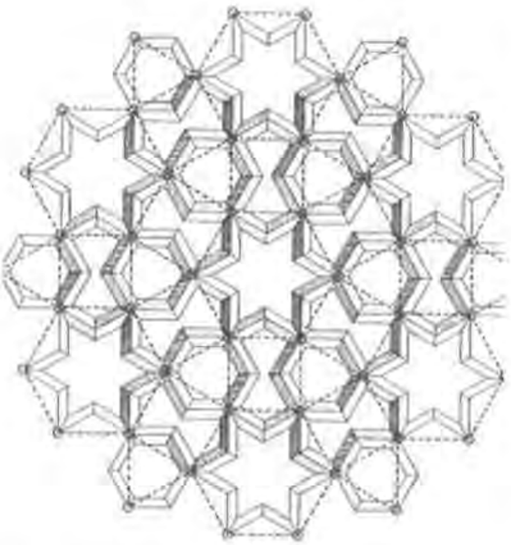


figure 2
Un ornement est construit à partir du pavage en traitillés (auquel sera attribué ultérieurement le type N) en introduisant un « angle » sur chaque arête (illustration tirée de Critchlow, 1976)

A noter que si un réseau de polygones réguliers est souvent utilisé comme base des ornements, ce n'est pas une règle générale. On trouve des exemples où les polygones ne sont pas tous réguliers (fig 3).

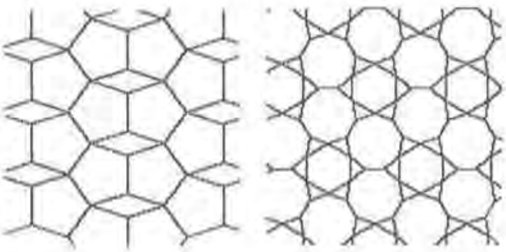


figure 3
Ces deux patterns sont repris de Kaplan. Le premier est bâti avec des losanges et des pentagones réguliers, les deux polygones ayant des cotés égaux. Le deuxième est construit avec des hexagones réguliers, des polygones réguliers à 9 côtés et des triangles isocèles (non équilatéraux)

Chaque pavage est caractérisé par ses sommets. A titre d'exemple, sur la figure 2, tous les sommets du pavage sous-jacent sont du même « type ». Ils sont tous communs à un hexagone, un triangle et deux carrés.

Critchlow (1976) classe les pavages construits avec des polygones réguliers en trois familles, les *réguliers*, les *semi-réguliers* et les *demi-réguliers*. Ces familles seront décrites dans cet article à l'aide de méthodes « élémentaires ». Nous verrons également que la liste des pavages demi-réguliers semble incomplète et la conclusion fera quelques hypothèses à ce propos.

En cours de route, divers résultats sont énumérés dont chacun constitue une situation mathématique intéressante.

Un rappel

Résultat 1 : la valeur de l'angle intérieur a d'un polygone à n côtés vaut :

$$(I)\ \alpha = \frac{n-2}{n}\,180\ [°]$$

Ce résultat s'obtient aisément. Avec les notations de la figure 4, on a la relation $\alpha + \beta = 180$. Donc $\beta = 180 - \alpha$.

En amplifiant cette relation par n, nombre de côtés, on trouve que $n\,(180 - \alpha) = 360$ d'où : $n\alpha = 180n - 360 = 180\,(n - 2)$ ce qui conduit au résultat recherché, élémentaire, mais qui ne manque pas d'élégance.

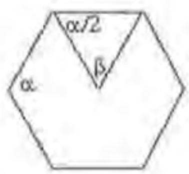


figure 4
La mesure α de l'angle intérieur d'un polygone est en relation avec la mesure de l'angle au centre β

La famille des pavages réguliers

Ce sont ceux où un seul polygone est utilisé. Chaque sommet est donc entouré de 360/a polygones, c'est-à-dire : 2n/(n-2) polygones. Ce nombre doit être entier (positif) ce qui n'est possible que pour n = 3, 4, 6 ainsi que le montre facilement la transformation suivante :

$$\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Tous les sommets sont donc du même type. Ces pavages, ainsi que les sommets, seront respectivement désignés par les types (1), (2) et (3).

Résultat 2: il y a trois pavages réguliers [2]. Ils sont représentés dans la figure 5.

figure 5
Les trois pavages réguliers. Leur type est désigné par (1), (2), (3). Avec la notation (symbole) de Schläfli (mathématicien suisse, 1814-1895), ces pavages sont {3,6}, {4,4} et {6,3}

Pour la suite, il est utile d'introduire la notion de « type » d'un sommet du pavage. Un sommet entouré de 3 polygones (d'ordre 3) ayant respectivement n_1, n_2 et n_3 côtés sera de type (n_1, n_2, n_3) (noté dans le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre). Cette définition est prolongée aux sommets d'ordre quelconque dont deux exemples sont donnés dans la figure 6.

figure 6
Le sommet S est d'ordre 5 et de type (4, 4, 3, 3, 3) et le sommet S' est de type (4, 3, 3, 4, 3)

Les sommets des pavages réguliers de type (1), (2) et (3) sont respectivement de type (3, 3, 3, 3, 3, 3) ; (4, 4, 4, 4) et (6, 6, 6). Lorsqu'un pavage possède un sommet d'un seul type, il reçoit le type de ce sommet.

Les pavages semi-réguliers

Un pavage est semi-régulier si tous ses sommets sont superposables par une isométrie, c'est-à-dire sont soit tous du même type, soit du même type à une symétrie près ; par exemple : les sommets de type (4, 12, 6) et (4, 6, 12) sont superposables. Par contre, les sommets S et S' de la figure 6 ne le sont pas.

Résultat 3: Chaque sommet doit être commun à au moins 3 polygones et ce nombre ne peut pas excéder 6 (sinon l'un des polygones aurait un angle intérieur inférieur à 60°, ce qui est impossible pour un polygone régulier).

Les pavages semi-réguliers de sommets d'ordre 3

Ce sont les pavages où tous les sommets sont d'ordre 3 et du même type. Si $\alpha 1$, $\alpha 2$ et $\alpha 3$ sont les angles intérieurs et n_1, n_2 et n_3 le nombre de côtés des polygones (fig 7), on a :

2. On peut sinterroger sur l'influence conjointe que ce résultat et la découpe de l'année en 360 jours ont eu sur le développement des mathématiques.

Résultat 4: la somme des inverses des nombres de côtés des polygones vaut 1/2.

$$(II)\ \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

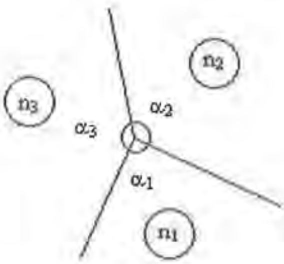


figure 7
Sommet d'ordre 3 de type (n_1, n_2, n_3)

La démonstration du résultat 4 se fait aisément à partir du résultat 1.

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=360\ [°]$$

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right)180=360\ [°]$$

$$1-\frac{2}{n_1}+1-\frac{2}{n_2}+1-\frac{2}{n_3}=2$$

Trouver tous les triplets de nombre n_1, n_2 et n_3 dont la somme des inverses est la moitié de l'unité, voilà un premier petit problème concernant les nombres. Il est assez facile à résoudre par énumération dès que l'on a constaté que l'une des fractions doit être au moins égale à 1/6 et donc qu'un des dénominateurs (n_1 par exemple) est inférieur ou égal à 6 (et supérieur ou égal à 3).

Résultat 5: Les solutions de la relation (II) sont données dans le tableau 1.

Tableau 1
Triplets de nombres naturels dont la somme des inverses vaut 1/2

Solution no	n_1	n_2	n_3	Type du sommet
1	*3*	*7*	*42*	A
2	*3*	*8*	*24*	B
3	*3*	*9*	*18*	C
4	*3*	*10*	*15*	D
5	*3*	*12*	*12*	**E**
6	*4*	*5*	*20*	F
7	*4*	*6*	*12*	**G**
8	*4*	*8*	*8*	**H**
9	*5*	*5*	*10*	I
10	*6*	*6*	*6*	3

Il est aisé de construire des sommets de chacun de ces types.

Par contre, ce n'est pas possible de construire un pavage semi-régulier pour tous ces types. En effet, on constate que si un des ni est impair alors les deux autres valeurs doivent être égales. En se référant à la figure 8, le sommet S' est de type (3, n_2, x) et S'' de type (3, x, n_1). Ils sont du même type que S qui est de type (3, n_1, n_2). Donc x = n_1 = n_2.

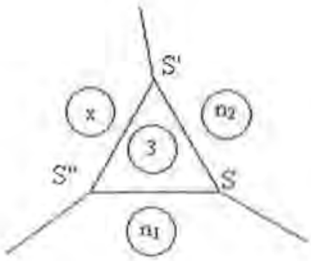


figure 8
Les « alentours » d'un polygone à nombre impair de côtés (triangle) dans un pavage semi-régulier d'ordre 3

Les solutions : 1, 2, 3, 4, 6 et 9 ne peuvent donc pas constituer des types de sommets d'un pavage semi-régulier. Il reste donc les solutions 5, 7, 8 (la solution 10 a déjà été vue précédemment) qui conduisent aux sommets et aux pavages de types E, G et H (figure 9).

Résultat 6 : il y a 3 types de pavages semi-réguliers d'ordre 3. Ils correspondent aux sommets de types E, G, H.

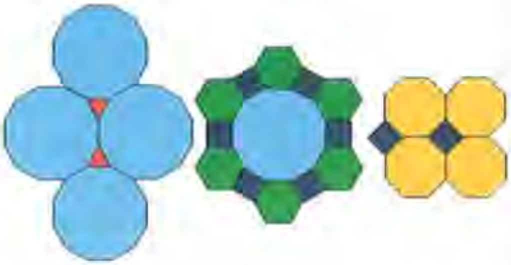


figure 9
Les pavages semi-réguliers d'ordre 3 de types E, G, H

Remarques :

1) L'hexagone peut être pavé par 6 triangles. Le dodécagone peut être pavé par un hexagone, 6 carrés et 6 triangles (fig 10) ou par 6 carrés et 12 triangles. Les pavages contenant des hexagones et des dodécagones peuvent donc être subdivisés.

2) Etant donnés des polygones, la construction du pavage correspondant se fait relativement facilement, les possiblités se révèlent rapidement en nombre limité. Malheureusement, les pièces des jeux de « mosaïque » trouvés sur le marché ne proposent pas les pièces utilisées ici (la plupart du temps, ces pièces sont construites sur la base du triangle isocèle rectangle).

figure 10
Décomposition du dodécagone en triangles, carrés et hexagone

Résultat 7 : Pour les sommets d'ordre 4, 5 et 6 on a les relations suivantes :

$$(III)\ \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

$$(IV)\ \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

$$(IV)\ \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

Elles s'obtiennent de manière identique à la relation (II) du résultat 4.

Les pavages semi-réguliers de sommets d'ordre 4

Résultat 8 : La relation (III) admet 4 solutions (à des permutations près). Elles sont données dans le tableau 2.

Tableau 2 :
Quadruplets de nombres naturels dont la somme des inverses vaut 1

Solution	n_1	n_2	n_3	n_4	**Type du sommet**
1	*3*	*3*	*4*	*12*	L et L'
2	*3*	*3*	*6*	*6*	M et M'
3	*3*	*4*	*4*	*6*	N et N'
4	*4*	*4*	*4*	*4*	2

A noter que les trois premières solutions permettent chacune de construire deux types de sommets différents :

L = (3, 4, 3, 12) ; L' = (3, 3, 4, 12)
M = (3, 6, 3, 6) ; M' = (3, 3, 6, 6)
N = (3, 4, 6, 4) ; N' = (3, 4, 4, 6)

Il n'est pas possible de construire des pavages de type L, L', M', N' (selon un raisonnement semblable à celui conduisant au résultat 6).

Mais on verra que des pavages peuvent être construits qui intègrent plusieurs de ces types.

Par contre, il est possible de construire des pavages de type M et N (fig 11) de façon unique. La solution 4 correspond au pavage régulier d'ordre 4 (type 2).

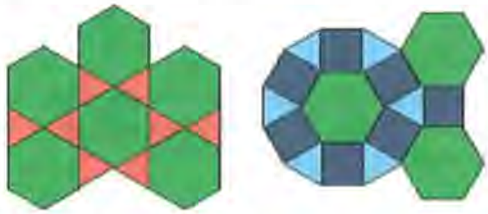


figure 11
Pavages semi-réguliers de types M et N

Les pavages semi-réguliers de sommets d'ordre 5

Résultat 9: La relation (IV) admet 4 solutions (à des permutations près). Elles sont données dans le tableau 5.

Tableau 5 :
quintuplets de nombres naturels dont la somme des inverses vaut 3/2

Solution	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	Type du sommet
1	*3*	*3*	*3*	*4*	*4*	Q et Q'
2	*3*	*3*	*3*	*3*	*6*	R

Q est le sommet de type : (3, 3, 4, 3, 4) et Q' de type (3, 3, 3, 4, 4)

La figure 12 montre que des patterns de type Q, Q' et R existent. Ils sont uniques.

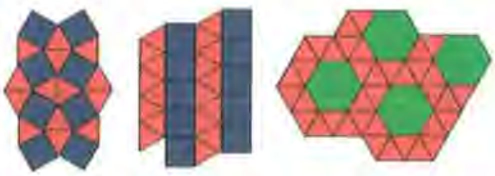


figure 12
Les pavages de types Q, Q', R

Les pavages semi-réguliers de sommets d'ordre 6

Résultat 10: La relation (V) n'admet qu'une seule solution. Elle correspond au pavage triangulaire (type 1).

Résultat 11: En définitive, il existe 3 pavages réguliers et 8 semi-réguliers.

Les pavages n-réguliers

Les pavages n-réguliers possèdent des sommets de n types différents. Les pavages n-réguliers (n > 1) sont dits *demi-réguliers*.

On voit facilement que les sommets d'ordre 3 qui n'ont pas permis de créer des pavages semi-réguliers (1-réguliers), ne peuvent pas non plus être utilisés dans des pavages n-réguliers ($n > 1$). En effet, dans chaque cas apparaît un couple unique de polygones qui n'apparaît dans aucun autre sommet.
Par exemple, le sommet de type (3, 10, 15) devrait être relié à un sommet de type (3, 10,...) qui n'existe pas.

Par conséquent les sommets des pavages demi-réguliers (n-réguliers avec $n > 1$) ne peuvent être que d'un type déjà considéré : 1, 2, 3, E, G, H, M, N, Q, Q', R, auxquels il faut ajouter les sommets pour lesquels il n'existent pas de pavage semi-régulier : M', N', L et L'. On verra que tous pourront apparaître dans des pavages demi-réguliers (un exemple est donné par la figure 13). La figure 14 rassemble ces différents types de sommets.

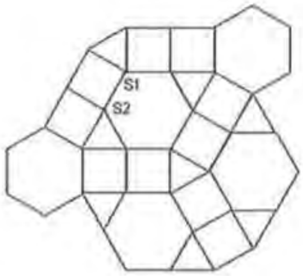


figure 13
Un pavage 2-régulier de type N + N' (S1 est de type N, S2 de type N'). Il existe un pavage 1-régulier de type N, mais il n'en existe pas de type N'

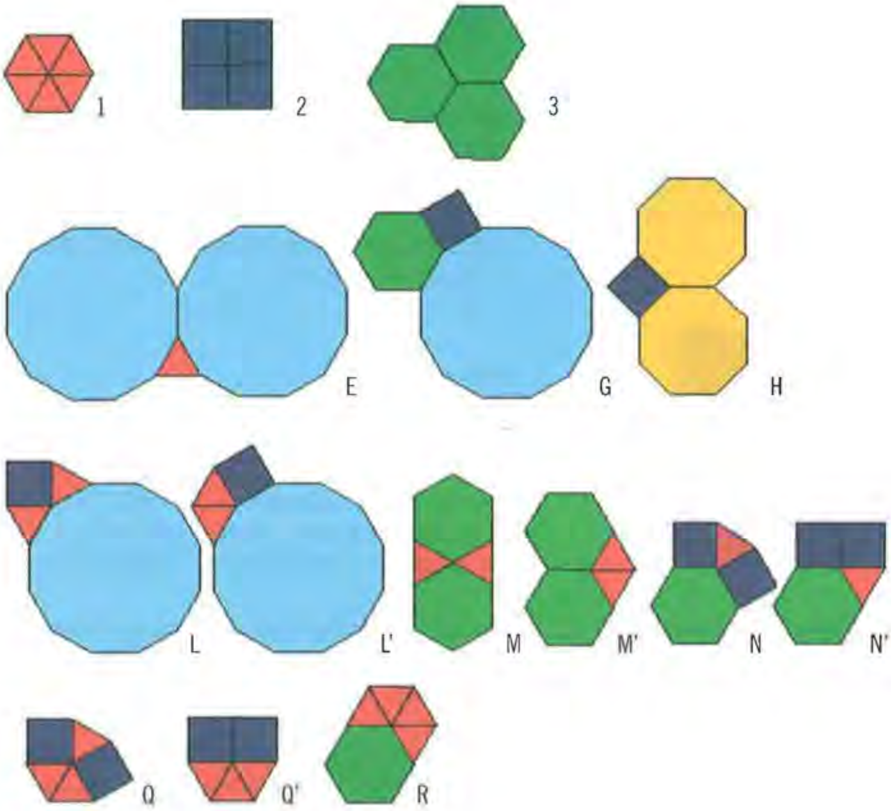


figure 14
L'ensemble des sommets pouvant intervenir dans la construction de pavages n-réguliers

Vers un catalogue des pavages n-réguliers

Critchlow mentionne 14 pavages n-réguliers ($n > 1$). Il s'agit des pavages suivants [3] :

2-réguliers : E + L ; L'+ (1) ; M + G ; M + M' ; N + Q ; Q + (1) (2 contructions possibles) ; N + N' ; N + Q'

3-réguliers : L + L'+ Q ; L'+ Q + (1) ; N + Q'+ Q ; Q'+ Q + (1) (2 contructions possibles)

Etant donné une liste de sommets (par exemple N et Q), il est assez facile de construire tous les pavages les intégrant. Il est aussi assez aisé de voir, cas par cas, que d'autres constructions sont impossibles ; par exemple : N'+ Q' ; L + L', etc.

Par contre, le problème de l'exhaustivité générale demeure. Beaucoup d'autres pavages en plus de ceux dont Critchlow propose la liste peuvent être imaginés. Si certaines solutions, trop « simplistes », par exemple les pavages des figures 15 et 16, peuvent facilement être « éliminées » en évoquant des règles de subdivision homogène, d'autres sont moins triviales comme celles proposées dans la figure 17.

figure 15
Un pavage simple ne satisfaisant pas la règle « d'iso-granularité ». Il y a dans ce pavage des petits triangles et des grands triangles constitués de 4 petits triangles.

3. Les figures correspondantes peuvent être visualisées sur le site Internet de *Math-Ecole* à l'adresse : www.math-ecole.ch/articles/pavages.htm

figure 16
Un pavage de type R + 1 ne respectant pas la règle d'iso-subdivision : des polygones sont « d'un seul bloc », d'autres subdivisés en six triangles

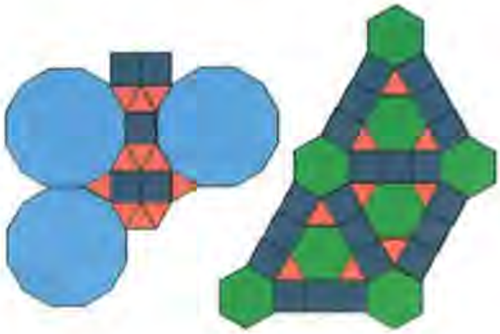


figure 17
Deux pavage ne faisant pas partie des 14 solutions classiques, celui de gauche est 4-réguliers, il est de type : E + L + L'+ Q'. Celui de droite fournit une autre disposition que celle proposée dans la figure 13 pour un pavage de type N + N'

Pour conclure

Cet article a proposé une approche élémentaire de la construction des pavages liés aux ornements de l'art islamique. Il a permis d'évoquer des questions qui peuvent faire l'objet de situations mathématiques intéressantes.

Un certain nombre de questions, certaines faciles d'autres qui paraissent plus ouvertes, demeurent. Par exemple :

1) Le nombre de 14 pavages demi-réguliers avancé par Critchlow n'a pas pû être reproduit. Existe-t-il un critère de sélection permettant de caractériser exactement ces 14 pavages demi-réguliers ?

2) De façon plus générale, peut-on trouver une méthode permettant de faire la liste de tous les pavages n-réguliers (sans régles restrictives) ? (hypothèse : leur nombre est important).

3) Existe-t-il des pavages n-réguliers et non périodiques (non invariants par translation) ? C'est une question facile à résoudre qui devrait permettre au lecteur d'entrer dans ce monde merveilleux des pavages du plan.

Bibliographie

Abas, S. J. & Salman, A. S. (1995). *Symmetries of islamic geometrical patterns.* World scientific.

Bourgoin, J. (1973). *Arabic Geometrical Pattern and Design.* Reprint. Dover, New York.

Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry.* New York : John Wiley & Sons.

Critchlow, K. (1976). *Islamic Patterns.* Reprint. London : Thames & Hudson.

Grabar, O. (1996). *L'ornement : formes et fonctions dans l'art islamique.* Paris : Flammarion.

Hussein, K. & Masayuki, N. (1999). Islamic Symmetric Pattern Generation based on Group Theory. *Computer Graphics International*, 1999, 112-119.

Mülayim, S. (1982). *Anadolu türk mimarisinde, geometrik süslemeler.* Kültür ve turizm bakanligi yayinlari.

Kaplan, C.S. (s. d). *Computer generated islamic star patterns.* Seattle : University of Washington, Departement of computer science and engineering.
(urls : www.cs.washington.edu/homes/csk/taprats, members.tripod.com/vismath4/kaplan/index.htm)

Weyl, H. (1952). *Symmetry.* Princeton : University Press.

VELENO (VENIN) UN JEU DE STRATÉGIE

Martine Simonet

J'ai déniché ce jeu au fond d'une armoire, lors du déménagement de notre école. Après avoir demandé de l'aide pour traduire de l'italien en français la règle figurant au dos de la boîte, j'ai joué de nombreuses parties passionnantes. Souhaitant partager mon enthousiasme pour ce jeu avec les lecteurs de *Math-Ecole*, voici la traduction des règles de VENIN et une description du matériel que j'ai modifié de manière à pouvoir être réalisé avec une feuille de papier et des jetons.

Nombre de joueurs

A 2 joueurs, on se trouve dans une situation classique de jeu de stratégie où s'affrontent deux adversaires : seul compte son propre score.

À 3 joueurs ou plus, il faut aider son voisin de droite à gagner car, au score de chacun seront ajoutés les points obtenus par le joueur suivant. Mais cette « coopération » est à sens unique, votre voisin, que vous aidez, coopère avec le suivant et est votre adversaire. Le nom du jeu, « Venin » vient de cette duplicité. Par exemple, à trois joueurs : le premier, A, joue pour le deuxième, B, et pour lui-même, contre le troisième, C ; mais B joue pour C et pour lui-même, contre A ; et finalement, C joue pour A et pour lui-même, contre B !

Matériel

- Un plan de jeu constitué de 37 hexagones formant eux-mêmes un grand hexagone de côté 4
- 37 jetons : 1 argenté, 4 blancs, 8 rouges, 8 jaunes, 8 bleus et 8 verts.

Déroulement du jeu

On dispose au hasard les 37 jetons, un par case, sur le plan de jeu. (Voir figure 1)

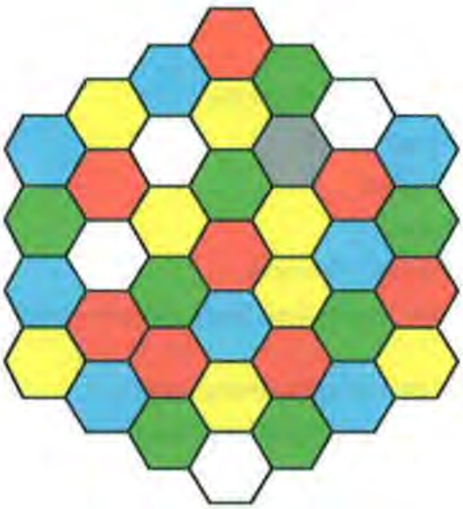


figure 1 (situation de départ)

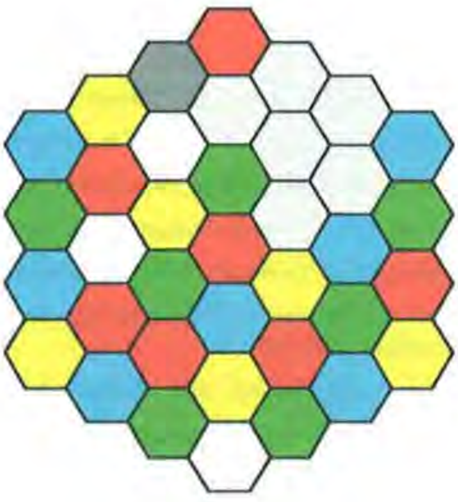


figure 2 (situation après 6 coups)

On joue à tour de rôle, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en prenant à chaque fois un seul jeton qui doit être voisin du jeton argenté. Le jeton argenté est ensuite placé sur la case libérée par le jeton pris.

Dans une partie à deux, le joueur qui commence ne peut pas prendre un jeton blanc au premier coup.

Dans l'exemple de la figure 2, six jetons ont été pris : le jaune au-dessous du jeton argenté initial, puis le rouge à droite, le blanc au dessus, le vert à gauche, le jaune à gauche et le bleu à gauche, sur le bord.

Valeur des jetons

Les jetons blancs valent 10 points chacun. Pour les autres jetons, le calcul des points se fait couleur par couleur : c'est le carré du nombre de jetons ramassés d'une même couleur. Ainsi, le joueur qui a 1 jeton jaune, aura 1 point (1 x 1). S'il a pris 2 jaunes, chacun vaudra 2 points, ce qui fera 4 points (2 x 2) pour ces deux jetons jaunes. S'il a 3 jetons jaunes, chacun vaudra 3 points, ce qui fera 9 (3 x 3) points ; 16 points (4 x 4) pour 4 jetons jaunes ; 25 points (5 x 5) pour 5 jetons jaunes ; et ainsi de suite... Le calcul est le même pour les jetons rouges, les bleus et les verts.

Exemple :
En fin de partie, un joueur qui a 2 jetons blancs, 4 jetons rouges, 1 jeton vert et 5 jetons bleus obtient 62 points :
10 + 10 + (4 x 4) + (1 x 1) + (5 x 5) = 62.

Fin de la partie

Le jeu se termine lorsque le jeton argenté reste isolé, c'est-à-dire quand il n'y a plus de pièces adjacentes à prendre.

Dans la figure 2, par exemple, si le joueur suivant prend le jeton rouge du sommet de l'hexagone, le jeton argenté sera isolé et la partie sera terminée.

Score total

Dans une partie à 3 joueurs (ou plus), aux points de son propre jeu viennent s'additionner les points de son voisin de droite. Il arrive donc qu'il soit plus avantageux de favoriser son voisin de droite en lui permettant de réaliser un bon coup, et pas celui de gauche, même si ce dernier fera tout pour vous avantager !

Dans une partie à 2, on compte seulement ses propres points.

Remarques

Testé dans une classe de 4e année primaire, ce jeu a rapidement été adopté par les élèves. Les raisons de ce succès tiennent entre autres au fait que les règles sont vite comprises et mémorisées, et que la durée d'une partie est courte, entre 5 et 10 minutes. Pour l'enseignant, il est intéressant d'observer les stratégies utilisées par les élèves pour le déplacement du jeton argenté et la manière de compter les points en fin de partie. J'ai ainsi pu constater que certains d'entre eux comptaient sur leurs doigts sans mettre en œuvre des procédures de calcul réfléchi.

Au niveau mathématique, il y a des opérations à effectuer pour déterminer les points en fin de partie, mais il y a aussi l'observation de la progression de la suite des « carrés » et les calculs correspondants : par exemple lorsqu'on hésite entre un sixième jeton d'une même couleur et un quatrième jeton d'une autre couleur, les gains sont différents : 11 points (de 25 à 36) dans le premier choix contre 7 seulement (de 9 à 16) pour le second choix.

RUSH HOUR

information « jeux »

Dans le numéro 200 de *Math-école*, François Boule a écrit un article intitulé « Jeux mathématiques et remédiation » dans lequel il présentait très brièvement un jeu : « Embouteillage ».

Un jeu similaire est diffusé en Suisse sous le nom de RUSH HOUR. Ce jeu, de type casse-tête, existe en plusieurs versions de difficulté variable (cf. le présent numéro de *Math-école* et les suivants). Quelle que soit la version choisie, le principe reste le même : après avoir disposé les camions, les autos, les trains ou les animaux selon la configuration indiquée par l'une des 40 cartes-défi, il faut les déplacer de manière à pouvoir dégager son véhicule de l'embouteillage.

Des cartes-défi supplémentaires peuvent être obtenues pour le jeu de base.

Testés dans une classe de deuxième année et de quatrième année primaire, ces jeux ont rencontré un vif succès. Les enfants aiment ce genre de casse-tête. Ils peuvent y jouer seuls, ou en collaboration avec un copain, et il suffit de quelques minutes de réflexion et de manipulation pour résoudre un défi.

Ces deux jeux peuvent être obtenus, en Suisse, au prix de FCH 29.90 à l'adresse suivante :

LA TOUPIE – Jeux éducatifs
CH-1324 Premier
Tél : 024 453 10 11
E-mail : jouetspre@hotmail.com

RUSH HOUR – Art. 40.0675
Jeu d'embouteillage routier

Vous êtes dans un embouteillage avec quatre camions et onze voitures. Il faut déplacer les véhicules de manière à faire sortir votre voiture rouge en trouvant la sortie de Rush Hour.

Jeu de cartes 2	Art. 40.0682
Jeu de cartes 3	Art. 40.0683
Jeu de cartes 4	Art. 40 0684

RUSH HOUR JUNIOR – Art. 40.0677

Le tout grand plaisir de l'original Rush Hour adapté pour les enfants de 6 à 8 ans.

UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES « ADAPTÉ » POUR L'ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ : UN JEU DÉLICAT ENTRE LIBERTÉ OSTENSIBLE ET CONTRAINTES INTESTINES

Jean-Michel Favre
HEP VD

Un surcroît de liberté pour répondre aux besoins particuliers des élèves.

Dans l'enseignement spécialisé, l'enseignant[1] bénéficie, en apparence tout au moins, d'une plus grande liberté que dans une classe ordinaire pour élaborer son enseignement des mathématiques. Au nom des besoins spécifiques des élèves avec lesquels il travaille, c'est en effet à lui que revient le choix des objets de savoir qu'il va leur proposer d'apprendre, à lui de trouver la bonne manière de les « apprêter » pour les rendre accessibles et encore à lui de définir quand il commence et quand il s'arrête de les enseigner. De telles questions ne se posent généralement pas en effet pour un enseignant d'une classe ordinaire[2], ou en tous les cas pas de façon aussi marquée, dans la mesure, où, pour une bonne part, elles ont été déjà résolues par les auteurs des plans d'études et des moyens d'enseignement et par les représentants des commissions scientifiques chargés de superviser leurs travaux. En d'autres termes, on pourrait donc dire que l'enseignant spécialisé se situe un cran plus haut que son collègue de l'ordinaire dans le processus de transposition didactique[3].

À l'heure où de nouveaux moyens pour enseigner les mathématiques sont mis en œuvre dans l'ensemble des classes (tous degrés confondus) de Suisse romande, il va sans dire que chaque enseignant spécialisé se trouve[4] interpellé par la question de l'utilisation qu'il va ou ne va pas faire de ces nouveaux moyens. Va-t-il effectivement en faire usage ou va-t-il au contraire y renoncer ? Va-t-il n'en utiliser qu'une part ou alors beaucoup ? Et si oui quelle part et comment ? Pour tenter de répondre à ces questions, chaque enseignant spécialisé va dès lors passer par une phase de découverte de ces nouveaux moyens d'enseignement, de manière à en saisir les contenus, les enjeux, la philosophie, etc. Et tout au long de cette prise de connaissance, va constamment se poser pour lui la question de l'adéquation des-dits moyens avec les besoins particuliers des élèves de sa classe ou alors, si tel ne devait pas être le cas, les éventuelles adaptations qu'il est susceptible d'y apporter pour rendre cette adéquation possible.

Dans certains cas, cette prise de connaissances peut donc aboutir à un rejet pur et simple des nouveaux moyens, l'enseignant

1. Le terme générique masculin sera employé tout au long du texte afin de ne pas trop le surcharger.

2. À défaut d'un meilleur terme, c'est celui que l'on emploie généralement dans l'enseignement spécialisé pour qualifier les classes qui ne sont pas « spécialisées ».

3. « Conne, 1981 », « Chevallard, 1985 » en bibliographie.

4. Au lieu de « se trouve », je ferais sans doute mieux d'employer « devrait se trouver », tant je sais, d'expérience, la lenteur avec laquelle les moyens d'enseignement diffusent jusque dans certaines classes spécialisées.

6. Relevons, à ce propos, une conséquence assez inattendue d'un tel refus : la création d'un nouveau manuel pour enseigner l'arithmétique aux élèves de l'enseignement spécialisé (Christofidès Henriques, à paraître).

spécialisé les jugeant entièrement inappropriés à son enseignement[5]. Cependant, la réaction n'est pas toujours si tranchée et c'est ainsi que certains enseignants spécialisés s'essaient peu à peu à expérimenter quelques activités des nouveaux moyens avec leurs élèves. Ces expérimentations peuvent alors les conduire à échanger autour des diverses possibilités d'usage de ces nouveaux moyens avec des collègues de leur établissement ou de leur institution. Et certains iront même parfois jusqu'à participer à des modules de formation organisés dans le cadre de l'école ordinaire.

Un surcroît de liberté qui ne va pas sans poser certains problèmes de repères.

Avant d'aller plus loin, il est toutefois important de souligner combien les décisions que l'enseignant spécialisé va prendre à l'égard de l'usage qu'il va (ou ne va pas) faire des moyens en classe sont loin d'être aisées à prendre. Le surcroît de liberté évoqué plus haut s'accompagne en effet d'un surcroît de responsabilités qui, s'il vient indéniablement en réjouir certains, peut se révéler relativement inconfortable pour d'autres, essentiellement par le manque de repères qu'il génère. Il suffit, pour s'en convaincre, de s'imaginer que chaque enseignant spécialisé doit en quelque sorte, se mettre à chaque début d'année scolaire dans la position d'un concepteur de programme rénové. Et quand on connaît le travail que demande la rénovation d'un programme... Les échanges avec d'autres collègues précédemment évoqués peuvent ainsi constituer pour l'enseignant spécialisé une manière de s'assurer (pour ne pas dire se rassurer) du bien-fondé des choix qu'il a dû réaliser pour construire son enseignement des mathématiques[6].

C'est d'ailleurs précisément pour tenter de faire face à ce problème de manques de repères que, à l'occasion de la mise en œuvre du nouveau moyen 5e, un module d'accompagnement a été spécifiquement mis sur pied à leur intention. Et c'est dans le cadre de ce module d'accompagnement que j'ai été amené à rencontrer un groupe de huit enseignants spécialisés, dont deux travaillaient dans une classe de développement et six dans diverses institutions spécialisées du canton de Vaud.

Définir l'essentiel du programme.

D'une manière qui, dans le cadre de la formation en emploi, a actuellement tendance à devenir tout à fait classique, j'ai alors commencé par demander à ces huit enseignants spécialisés de me communiquer les attentes qu'ils pouvaient nourrir à l'égard de ce module d'accompagnement. Et voici ce que, dans un premier temps, ils m'ont répondu :

- Délimiter les axes généraux des nouveaux moyens mathématiques de 5e année primaire
- Construire un enseignement des mathématiques autour d'une année de programme, de différentes notions mathématiques et/ou de diverses compétences
- Définir l'essentiel du programme de 5e année primaire
- Analyser des activités, préparer des expérimentations et échanger sur ce qui s'est passé en classe

6. Il est d'ailleurs probable que l'attribution d'un niveau scolaire à un élève de l'enseignement spécialisé constitue une forme de réponse à ce manque de repères. Dire d'un élève qu'il est, par exemple, du niveau de la quatrième année primaire, ce n'est pas seulement le renseigner sur sa situation vis-à-vis des normes en vigueur dans l'école ordinaire, c'est aussi, pour l'enseignant spécialisé, se doter de tout un attirail de moyens qui vont lui permettre d'initier un processus d'enseignement un tant soit peu calibré.

Parmi les attentes exprimées, celle qui m'a le plus interrogé (pour ne pas dire le plus ennuyé) était évidemment celle qui appelait la définition de l'essentiel du programme de 5e année primaire. Non pas qu'elle me surprenait, étant moi-même enseignant spécialisé depuis de nombreuses années, c'était une question que je m'étais déjà et me posais souvent encore, mais bien parce que je ne savais trop comment m'y prendre pour y répondre. Dans un texte intitulé « Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé », François Conne [7], parlant d'un *« programme allégé »*, discute déjà de cette délicate question :

[...] Si l'on est un tant soit peu idéaliste, on se demandera en outre : comment alléger sans appauvrir ? Supposons que ce soit possible, alors pourquoi ne pas en faire d'emblée bénéficier l'école ordinaire ? De deux choses l'une, ou bien c'est possible, mais en fait pour une raison ou pour une autre, l'école ordinaire ne veut pas s'alléger et alors adopter cette solution va heurter les rapports entre enseignement spécialisé et école ordinaire et la possibilité pour les élèves de l'enseignement spécialisé chanceux de réintégrer l'enseignement ordinaire. Ou bien ce n'est pas possible, et alors ce n'est pas en allégeant le programme que l'on adaptera les contenus à l'enseignement spécialisé. [...]

Ne sachant donc pas trop bien comment m'y prendre pour bien faire, j'ai finalement choisi de soumettre aux enseignants du groupe un programme déjà allégé, soit celui en vigueur dans l'école ordinaire, sous l'appellation : « Mathématiques : objectifs fondamentaux. » (tirés du plan d'études vaudois [8]), en leur demandant d'identifier ce qui, dans ce programme allégé, leur paraissait bien adapté, ce qui ne leur paraissait pas bien adapté et ce qui leur paraissait y manquer.

En agissant de la sorte, je prenais certes le risque de leur faire construire un essentiel de l'essentiel ou, au mieux, un allégé de l'allégé, et donc, comme l'évoquait plus haut François Conne, venir heurter les rapports entre enseignement spécialisé et école ordinaire, mais j'avais pourtant, dans cette perspective, l'idée d'explorer l'espace de liberté dans lequel chaque enseignant du groupe avait la possibilité de construire un programme de mathématiques adapté aux besoins des élèves de sa classe. Or, dans les échanges qui ont suivi, il est très vite apparu que cet espace était loin d'être aussi étendu que prévu, assujetti qu'il l'était par de multiples contraintes.

Un surcroît de liberté muselé par un entrelacs de contraintes.

Il n'est bien évidemment pas possible d'identifier et de commenter ici l'ensemble des contraintes qui pèsent sur la structure didactique [9] dans l'enseignement spécialisé. D'abord parce qu'elles sont nombreuses et que je ne prétends pas pouvoir en dresser la liste exhaustive. Ensuite, parce qu'elles sont souvent liées entre elles et donc difficiles à envisager séparément. Enfin, parce qu'elles méritent assurément une analyse plus fine, comme j'ai par exemple été amené à le faire ailleurs [10] (Favre, 1997). Je me limiterai donc à ne discuter ici que des trois contraintes qui sont apparues dans le cadre de nos échanges.

7. Voir « Conne, 1999 » en bibliographie

8. Selon les auteurs du plan d'études, (référence en bibliographie) les objectifs fondamentaux correspondent à ce que chaque élève qui arrive au terme d'un cycle devrait au moins savoir pour être en mesure de passer au cycle suivant.

9. Voir « Joshua et Dupin, 1993 », (p.7) en bibliographie

10. Voir « Favre, 1997 » en bibliographie

1. Les « difficultés[11] » des élèves.

La première contrainte évoquée était celle constituée par les difficultés manifestées par les élèves de l'enseignement spécialisé à apprendre ce que l'enseignant cherchait à leur enseigner. Qu'elles soient effectives ou plutôt le fruit d'une attribution, ces difficultés n'en conduisent pas moins à un accroissement sensible du temps didactique (Favre, op. cit.), lesquelles appellent en conséquence un temps plus long pour enseigner. Or, il est certain que, dans de nombreuses classes de l'enseignement spécialisé, du fait des diverses prises en charges liées aux besoins spécifiques des élèves, ce temps apparaît au contraire réduit (et même parfois discontinu). En regard du programme de l'école ordinaire, enseignant et élèves se retrouvent donc placés dans une situation paradoxale, qui veut que le premier devrait, en principe, faire apprendre autant aux seconds, mais en moins de temps, alors que ceux-ci, à cause de leurs difficultés, auraient précisément besoin de plus de temps pour bien le faire. Dès lors, on comprend mieux comment la définition d'un programme essentiel peut constituer une résolution (apparente tout au moins) de ce paradoxe, tant il est vrai que, si les élèves ont moins d'objets de savoir à apprendre, peut-être auront-ils alors assez de temps pour (bien) le faire.

2. L'avenir potentiel des élèves.

Une seconde contrainte apparue au fil de nos discussions résidait dans les perspectives d'avenir que l'enseignant et/ou l'institution pouvait nourrir à l'égard des élèves dont il/elle avait la charge[12]. À ce titre, deux cas de figure se sont présentés. Pour plusieurs enseignants du groupe, l'avenir des élèves de leur classe, c'était l'intégration ou, plus fréquemment, la réintégration dans l'école ordinaire. Cette perspective, qui apparaît souvent (et souvent à tort) comme le critère de réussite majeur de l'intervention spécialisée, n'en met pas moins élève et enseignant dans un nouveau paradoxe : il va falloir faire comme si on était dans l'école ordinaire, mais pas tout à fait quand même, car sinon, qu'est-ce qui viendrait dès lors justifier le fait qu'on n'y soit pas ? Autrement dit, il faudra faire assez différemment pour répondre aux besoins spécifiques des élèves (et aussi, souvent, pour ne pas reproduire l'échec perpétré à l'occasion de l'exclusion des élèves de l'école ordinaire), mais également en rester suffisamment proche, pour qu'en cas d'une éventuelle (ré)intégration, l'élève ne soit pas pénalisé par un éloignement trop important. On voit donc là encore que la définition d'un programme essentiel de l'école ordinaire peut amener élèves et enseignant à sortir de cette seconde situation paradoxale, en leur permettant de rester vis-à-vis de l'école ordinaire dans un rapport de proximité/distanciation acceptable.

Tous les élèves des classes des enseignants du groupe n'étaient pourtant pas concernés par une éventuelle (ré)intégration dans l'école ordinaire. Et dans ce deuxième cas de figure, ce n'était plus l'avenir proche des élèves qui se posait comme perspective, mais un avenir

11. Si j'ai mis le terme « difficultés » entre guillemets, c'est qu'il peut tout autant s'agir de difficultés réelles que de difficultés qui sont attribuées aux élèves, précisément parce qu'ils fréquentent une classe d'enseignement spécialisé.

12. Relevons que cette contrainte est bien évidemment aussi présente dans l'enseignement ordinaire, où les programmes sont, en partie tout au moins, construits en fonction des besoins d'enseignement ultérieurs. Mais elle diffère toutefois dans l'enseignement spécialisé, précisément parce que les perspectives sont différentes : ainsi, par exemple, l'enseignement de l'arithmétique ne sera, à de très rares exceptions près, jamais envisagé pour aboutir à l'enseignement ultérieur de l'algèbre, vu que cet enseignement n'est quasiment jamais ne serait-ce que « rêvé » pour les élèves de l'enseignement spécialisé.

plus lointain qui prenait pour forme soit la formation post-scolaire des élèves (apprentissage ou formation élémentaire), soit leur vie professionnelle (ou même privée) future. La contrainte n'en était pourtant pas moins forte et la question des choix à réaliser dans le programme de l'école ordinaire pour un élève qui se destine à tel ou tel avenir conservait, ici encore, toute son acuité.

3. Le rapport au savoir des enseignants du groupe.

Une troisième contrainte a finalement mis plus de temps à faire jour dans nos échanges. Ceci s'explique sans doute par le fait qu'elle se trouve directement liée aux rapports que les enseignants entretiennent avec les objets de savoir du programme de l'école ordinaire. Mais pour bien comprendre comment opère cette troisième contrainte, commençons par distinguer deux types d'objets de savoir : ceux que l'enseignant maîtrise, voire « hypermaîtrise » et ceux, qu'il ne maîtrise pas ou alors très partiellement. Considérons tout d'abord les premiers. Difficile pour l'enseignant, du fait même de cette maîtrise, d'imaginer ce qui peut venir empêcher les élèves de se les approprier. Surtout que c'est bien à propos de ces savoirs qu'il possède les modèles didactiques les plus éprouvés [13]. Au contraire des seconds, au sujet desquels il aura forcément du mal à s'imaginer une voie meilleure que celle suivie autrefois par ceux (c'est-à-dire les enseignants qui s'étaient essayé à les leur enseigner) qui avaient déjà échoué dans leur tentative de les leur rendre accessibles.

Définir un programme essentiel pourrait alors se comprendre comme une manière de privilégier les premiers objets dont l'enseignant estime savoir comment bien s'y prendre pour les enseigner et écarter les seconds dont il ne sait pas trop quoi faire. Et ce d'autant plus facilement que l'enseignant a tout loisir de constater que son propre défaut de maîtrise à l'égard de ces seconds objets n'a finalement pas eu de conséquences trop lourdes sur ses propres perspectives professionnelles : fort de ces lacunes, n'en est-il pas néanmoins devenu enseignant ?

Constituer un programme en réponse à ces contraintes.

Définir un « essentiel » du programme de l'école ordinaire pouvait donc effectivement s'envisager comme une réponse à certaines contraintes qui pèsent sur la structure didactique dans l'enseignement spécialisé. Une façon assez naturelle de satisfaire l'attente exprimée par les enseignants du groupe aurait donc été de construire un nouveau programme qui s'inscrive comme une réponse aux trois contraintes évoquées ci-dessus. Il aurait ainsi été effectivement possible, en fonction des difficultés des élèves de leur classe, de leur avenir potentiel et du rapport qu'eux-mêmes entretenaient vis-à-vis des objets de savoir du programme de l'école ordinaire, d'opérer un certain tri au sein de ces objets, pour ne finalement retenir que ceux qui auraient été jugés prioritaires.

Une telle manière d'envisager les choses qui, par une forme d'« effet d'entonnoir », procède par une simple réduction du programme de l'ordinaire, présente toutefois un risque important : à savoir que la réduction du programme aboutisse à un appauvrissement du programme et par là même à un appauvrissement de l'enseignement des mathématiques dans les classes spéciales. On peut même envisager que plus les contraintes mises en évidence ont de vigueur – des élèves à, ou considérés comme ayant, de grandes difficultés d'apprentissage, des perspectives d'avenir peu « élevées » et un rapport au savoir de l'enseignant peu étoffé – plus les risques

13. Voir « Lemoyne, 1991 » en bibliographie

d'appauvrissement de l'enseignement des mathématiques sont grands.

C'est d'ailleurs probablement cet effet d'entonnoir qui vient expliquer que, dans certaines classes de l'enseignement spécialisé, l'essentiel des mathématiques qui s'y trouvent enseignées tourne grosso modo autour des quatre opérations élémentaires [14].
Un enseignement centré sur des savoir-faire techniques, et donc plus ou moins mesurables, dont les livrets et les algorithmes de calcul sont les emblèmes privilégiés [15].
Et c'est sans doute aussi ce qui conduit bon nombre d'enseignants spécialisés à recourir prioritairement, pour enseigner les mathématiques, à des situations qu'ils qualifient de « concrètes », c'est-à-dire empruntées à la vie qu'ils considèrent comme « courante », comme si celles-ci s'avéraient en fait les seules garantes d'une appropriation idoine des objets de savoir par les élèves et du sens des activités proposées. N'est-ce pas en effet précisément parce que l'usage des situations concrètes leur paraît mieux adapté aux difficultés de leurs élèves, plus utile (utilitaire serait sans doute plus approprié) vis-à-vis de leur avenir et plus facilement maîtrisable de leur point de vue qu'ils cherchent à y recourir le plus fréquemment ?

Une nouvelle version revue et augmentée du programme.

Afin de résister quelque peu à cette réduction pure et simple du programme de l'ordinaire, nous avons finalement plutôt décidé, au sein du groupe, de l'investiguer pour chercher à mieux le connaître et à apprécier sa diversité. Nous avons ensuite échangé sur ce qui, en regard des pratiques effectives de chacun, était encore susceptible de venir l'enrichir : qu'est-ce que les enseignants du groupe proposaient encore en plus, dans leur enseignement des mathématiques habituel, qui ne figurait pas déjà dans ce programme ? Enfin, nous avons cherché à mettre en évidence ce qui pouvait bien encore faire défaut à un tel programme, en nous interrogeant notamment sur la part des objets mathématiques scolaires auxquels les élèves de l'enseignement spécialisé n'avaient jamais accès, précisément parce qu'ils se trouvaient dans l'enseignement spécialisé [16].

Après plusieurs séances de travail, nous avons ainsi abouti à un nouveau programme que je livre ci-dessous, tout en conservant les normes d'écriture en vigueur dans le programme de l'école ordinaire [17].

14. Un terme encore une fois plutôt mal approprié, en ce sens que pour beaucoup d'élèves, ces quatre opérations sont fort loin de l'être.

15. A l'image du rôle qu'ils jouent, et ce n'est assurément pas un hasard, dans la plupart des propos des détracteurs de l'enseignement des mathématiques à l'école ordinaire.

16. On s'est par exemple interrogé sur les chances que possédait un élève de l'enseignement spécialisé de pouvoir, ne serait-ce qu'une fois au moins, entendre parler de Pythagore et de son théorème (même si certains s'accordent à penser que ce n'est pas Pythagore qui l'a effectivement démontré), sachant bien que ce théorème constitue l'une des plus grandes percées de l'histoire des mathématiques de l'Antiquité (d'une part, parce qu'en établissant le rapport entre une horizontale et une verticale, il définit en fait les trois dimensions de l'espace dans lequel nous vivons ; et d'autre part, parce qu'il y développe le concept de preuve laquelle, procédant d'une logique déductive, donne à son théorème une validité universelle).

17. Je n'entre donc pas ici sur la pertinence ou non d'un programme de mathématiques défini en termes de compétences ; pour une discussion sur ce sujet, voir « Conne et Brun, 2000 » en bibliographie.

Mathématiques 5e :
Programme de mathématiques à l'usage des classes D et des classes spécialisées.

Compétences visées :

Mettre en œuvre une démarche comprenant des phases d'essais, de conjectures, de vérification et de justification

Compétences associées à la compétence visée :
Lire, comprendre, interpréter et trier des données
Trouver des procédures personnelles et les justifier
Anticiper des résultats et les vérifier

Pratiquer des jeux de « stratégies » (abalone, awelé, backgamon, charet, échecs, halma, jass, mastermind, reversi, yatzee, etc.)

S'approprier les règles d'un jeu, les interpréter et les utiliser pour élaborer des stratégies gagnantes

Utiliser des unités de mesure usuelles pour résoudre des problèmes

Mesurer et reporter des longueurs avec un instrument approprié (règle, équerre, rapporteur, compas…)
Établir des correspondances entre mesures de longueurs : km et m, m et cm, cm et mm
Calculer le périmètre (en m, dm, cm et mm) et l'aire (en m^2 et cm^2) d'un carré et d'un rectangle
Établir des correspondances entre mesures de temps : jour, heure, minute et seconde ; de poids : tonne, kilogramme, gramme ; et de capacité : litre, décilitre
Échanger et rendre de la monnaie (en francs et en centimes)

Se repérer dans le plan et dans l'espace

Utiliser un réseau quadrillé, muni d'un système d'axes orthonormé, comprenant des nombres entiers relatifs, pour mémoriser et communiquer des positions et des itinéraires

Interpréter des données numériques

Lire et interpréter des tableaux numériques et des représentations graphiques simples tirées du concret

Observer et construire des formes géométriques et les reproduire à l'aide d'isométries

Tracer des droites parallèles et perpendiculaires à l'aide d'un instrument approprié (règle, équerre, rapporteur…)
Nommer et construire des triangles et des quadrilatères ; étudier certaines de leurs propriétés (côtés isométriques, côtés parallèles, angles droits et axes de symétries)
Reconnaître et utiliser (sur un réseau quadrillé) des translations et des symétries axiales

Utiliser les principes qui régissent notre système de numération pour des nombres supérieurs à 10 000	Passer du mot-nombre oral à son écriture chiffrée et inversement Comparer, ordonner et intercaler des nombres naturels supérieurs à 10 000
Résoudre des problèmes avec des nombres écrits en écriture décimale	A l'aide d'une calculette, choisir les opérations adéquates pour résoudre des problèmes Additionner et soustraire des nombres décimaux positifs (max. 2 chiffres après la virgule) Multiplier des nombres décimaux positifs (max. 2 chiffres après la virgule) Diviser (division euclidienne) des nombres naturels (max. 2 chiffres au diviseur)
Calculer de façon efficace	Mémoriser les tables de multiplication de 0 x 0 à 9 x 9 Utiliser les principes de notre système de numération et les propriétés des opérations pour calculer mentalement Estimer des résultats
Relier certains savoirs du (ou hors) programme à un moment particulier	Faire le récit d'une « aventure » mathématique découverte dans un ouvrage de vulgarisation de l'histoire des mathématiques

J'accompagnerai en outre cette présentation de trois commentaires afin de souligner certains éléments importants de ce nouveau programme :

- Toutes les « compétences visées » figurant dans les objectifs fondamentaux de l'école ordinaire ont été conservées et celles figurant en plus dans le programme de mathématiques de 5e-6e année primaire ont été rajoutées. Il s'agit ainsi de montrer que toutes ces compétences sont de même valeur du point de vue des mathématiques enseignées et que, par conséquent, il ne saurait être a priori question d'en privilégier certaines vis-à-vis d'autres.

- De nouvelles compétences visées ont été ajoutées comme :

a) la pratique des jeux de stratégies qui, bien que faire-valoir des moyens 1-4 (combien de fois n'a-t-on pas entendu dire que les « nouvelles mathématiques enseignées » étaient des mathématiques « ludiques » [18]), et préconisées par de nombreux ouvrages qui ont servi de réservoirs d'activités aux nouveaux moyens, comme le document 40 du Service de la recherche pédagogique de Genève [19], s'affiche comme le parent pauvre du nouveau moyen 5e ;

18. Voir par exemple l'article du Temps, de Nicolas Dufour : « Les maths ne sont plus vraiment « modernes », mais ludiques », du lundi 20 avril 1998.

19. Voir « SRP, 1991 » en bibliographie.

b) la connaissance des règles d'usage des nombres supérieurs à 10 000 qui, curieusement, ne figure ni en termes de compétences, ni en termes d'activités, dans le nouveau moyen 5ème (n'est-il pas pour le moins surprenant de constater que les grands nombres ne sont pas/plus « objet » d'enseignement dans l'école ordinaire alors même que leur apprentissage ne va vraiment pas de soi [20]) ;

c) la découverte de quelques ouvrages de vulgarisation mathématique, des documents actuellement en floraison dans les librairies, afin que ceux-ci ne restent pas l'unique apanage des élèves (et des enseignants) de classes prégymnasiales.

– Certaines compétences associées aux compétences visées ont été ajoutées ou précisées. Elles concernent d'une part certains objets que l'enseignement de l'ordinaire ne place pas en priorité – comme la connaissance des unités de temps par exemple – parce qu'ils sont la plupart du temps appris ailleurs par les élèves. D'autre part ce sont des compétences relatives à l'usage d'outils qui servent de supports pour faire des mathématiques, soit pour tracer (l'équerre, le compas...), soit pour mesurer (la règle, le rapporteur...), soit pour calculer (la calculette). Précisons à ce sujet qu'il ne s'agit pourtant pas d'en faire de nouveaux objets d'enseignement, mais bien, dans la mesure du possible, de leur faire conserver leur rôle d'outil, susceptible de favoriser les pratiques mathématiques des élèves [21]. Un peu en écho à ce que disait autrefois John Napier à propos de son invention des logarithmes : *« J'ai cherché autant que je l'ai pu à me débarrasser de la difficulté et de l'ennui du calcul, qui souvent repoussent de l'étude des mathématiques »* [22].

Conclusion

Arrivé au terme de cette présentation et de ces commentaires, force est de constater que, contrairement aux intentions initiales, et donc à l'attente exprimée par les enseignants du groupe, nous n'avons pas été en mesure d'aboutir à un programme « essentiel » qui procède à une sélection des objets du programme de l'école ordinaire, mais bien plutôt à une nouvelle version d'un programme que l'on pourrait qualifier de revue et augmentée. En ayant travaillé de la sorte, nous prenons par conséquent le risque de venir, depuis l'enseignement spécialisé, chatouiller les susceptibilités des concepteurs de programme de l'école ordinaire. De plus, il est probable que cette nouvelle version va frustrer les enseignants spécialisés à la recherche d'un document qui ciblerait de façon définitive les objets de savoir à enseigner prioritairement dans leur classe (surtout lorsque l'on sait que ce programme est susceptible d'être encore enrichi cette année, à l'arrivée du nouveau moyen 6ème) [23]. Mais il n'en reste pas moins que la définition d'un tel programme est pourtant nécessaire à l'enseignement spécialisé. Tout en renvoyant chaque enseignant spécialisé devant ses responsabilités

20. Pour une analyse multi-référencée d'une leçon sur les grands nombres, voir notamment « Blanchard-Laville & al., 1998 », en bibliographie.

21. La connaissance des unités de temps, l'usage des outils traditionnels de la géométrie (règle, équerre, compas, rapporteur) et l'utilisation de la calculatrice figurent dans le plan d'études de mathématiques de l'école primaire mais ne font que rarement l'objet d'activités spécifiques de « *Mathématiques 5* ».

22. Voir « Charrière, 1995 » en bibliographie

23. Parvenus à la conclusion de ce texte, il est effectivement possible que certains lecteurs éprouvent le désagréable sentiment de s'être fait un peu avoir.

d'effectuer des choix, il vise précisément à accroître cet espace de choix et donc à restaurer un certain espace de liberté. Il encourage de la sorte les enseignants spécialisés à engager un certain jeu avec les contraintes, un jeu qui leur permette le mieux possible de résister à l'appauvrissement de leur enseignement des mathématiques.

Références bibliographiques

BLANCHARD-LAVILLE, C. (dir.) (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence: « L'écriture des grands nombres ».* L'Harmattan éd., Paris.

CHARRIERE, G. (1995). *L'algèbre mode d'emploi.* OFES, Lausanne.

CHASTELLAIN, M. & JAQUET, F. (2001). *Mathématiques 5ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève.* COROME, Neuchâtel.

CHRISTOFIDES HENRIQUES, A. (à paraître). *Arithmétique apprivoisée ou comment réfléchir sur du concret?*

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE, F. (1981). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année primaire.* Thèse de doctorat, Coururier-Noverraz, Lausanne.

CONNE, F. (1999). Domaine de validité de différentes approches en didactique des mathématiques: Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé? A paraître dans les *Actes de la dixième école d'été de didactique des mathématiques.* Houlgate, août 1999.

CONNE, F. & BRUN, J. (1999). La notion de compétence, révélateur de phénomènes transpositifs dans l'enseignement des mathématiques. In *L'énigme de la compétence en éducation,* Dolz et Ollagnier eds, Raisons éducatives n°2, De Boeck Université, pp.95-114.

DFJ-Direction générale de l'enseignement obligatoire. (2001). *Plan d'études vaudois.* Département de la formation et de la jeunesse, Lausanne.

FAVRE, J.-M. (1997). *L'échec, le temps, la multiplication.* Mémoire de licence inédit, FPSE, Université de Genève.

Groupe mathématique du SRP (1991). *Sur les pistes de la mathématique.* Document 40. Service de la recherche pédagogique. DIP – Genève.

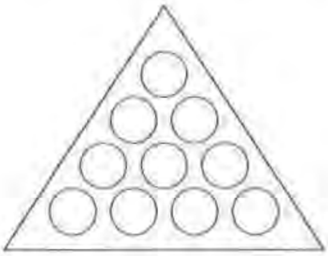
JOSHUA, S. & DUPIN, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* PUF, Paris.

LEMOYNE, G. (1990). La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repères.* Université de Montréal, pp.79-101.

SORTILÈGE À 3 CÔTÉS OU COMMENT FAIRE DES CALCULS DE MANIÈRE LUDIQUE

Martine Simonet

Voici un jeu du commerce dont les potentialités pour le calcul sont certainement très riches.



Matériel :

- 1 plateau de jeu en bois avec 6 trous sur une face (*Mini Sortilège*) et 10 trous sur l'autre face (*Grand Sortilège*, voir dessin ci-dessus) ;
- 10 pions numérotés de 1 à 10 ;
- 100 cartes-défis avec 5 degrés de difficulté pour le *Mini Sortilège* ;
- 100 cartes-défis avec 3 degrés de difficulté pour le *Grand Sortilège* ;
- un livret explicatif traduit de l'allemand dans un français et un langage mathématique approximatifs (chiffres au lieu de nombres, « coins » du triangle...)

La règle du jeu [1] est très simple : il faut placer les pions dans les trous de manière à obtenir la même somme sur chacun des trois côtés du triangle. Pour varier la recherche, des cartes-défis proposent des situations de départ indiquant l'emplacement d'un ou plusieurs pions et la somme à atteindre. Une feuille-réponse (voir fiche 1) permet à l'élève de garder une trace écrite de sa solution.

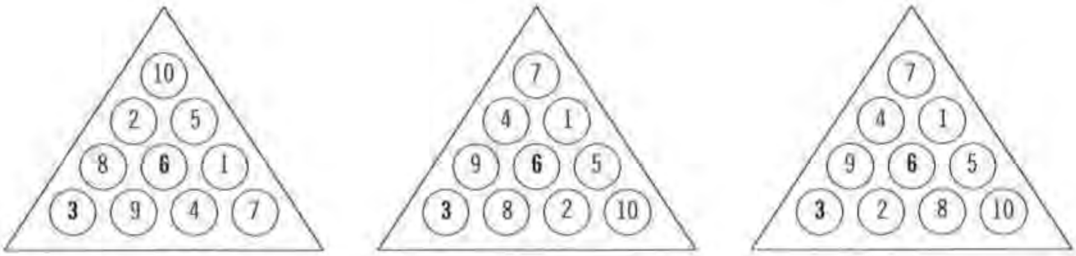
Comme la solution n'est pas unique, il n'y a pas de « corrigé » permettant à l'élève de vérifier sa production. Mais la validation peut se faire à l'aide d'une calculatrice, par un camarade ou encore par l'enseignant.

On pourrait imaginer se passer du matériel et ne faire cette activité que sous forme de fiches. Expérience faite dans une classe de 4e année primaire, voici ce que j'ai constaté : les enfants oublient qu'il n'y a qu'un seul pion pour chaque nombre de 1 à 10 et ils écrivent plusieurs fois le même nombre dans une même « grille ». Avec une version uniquement papier-crayon, la gomme est mise à rude contribution et la solution trouvée devient parfois illisible...

Indubitablement, la recherche est plus aisée et ludique en manipulant le matériel.

Lors d'une mise en commun, les exploitations possibles des productions des élèves sont multiples. En effet, pour une même somme et une même configuration de départ, la comparaison entre les différentes solutions peut

1. Je l'appelle « jeu » de mon point de vue d'enseignante, mais en est-il vraiment un pour les élèves ? Si j'utilise ici ce mot, c'est à défaut d'en trouver un autre plus adéquat. « Jeu » est à comprendre ici dans le sens de casse-tête, défi, recherche dans laquelle on se fixe personnellement des étapes... Il est évident que ces jeux peuvent facilement se transformer en « problèmes ouverts » à l'image de ceux du Rallye Mathématique Transalpin par exemple.



permettre de mettre en évidence une des propriétés de l'addition, la commutativité, ou de faire apparaître – du point de vue de la répartition spatiale des nombres – la notion de symétrie (axiale ou centrale).

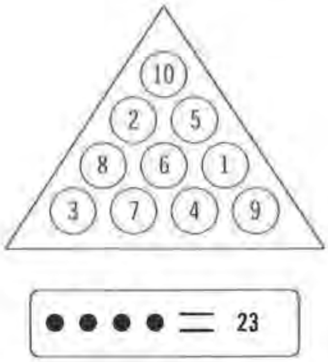
Exemple :
les deux premières solutions ci-dessus, à gauche, sont équivalentes à une symétrie axiale près (axe passant par le sommet « 3 »). La solution de droite peut aussi être considérée comme équivalente à celle du centre, à une permutation près de deux nombres d'un même côté, entre « 2 » et « 8 ».

Dans la brochure explicative, les auteurs proposent de résoudre des problèmes tels que : « Quelle est la plus grande/petite somme possible ? » avant d'utiliser les cartes-défis. Le but de ces questions est de mettre en évidence certaines caractéristiques, par exemple :

Dans le *Grand Sortilège*, le nombre figurant sur le pion central n'est pas pris en compte dans le calcul de la somme alors que les nombres placés aux sommets sont comptés deux fois. Il faut donc placer le 1 au centre du triangle, et les pions 7, 8 et 9 dans les angles, pour obtenir la plus grande somme possible.

J'ai choisi l'approche inverse avec les élèves de ma classe. Ce faisant, j'ai eu envie d'en connaître plus sur leurs stratégies, et notamment de savoir s'ils procèdent par compensation lorsqu'une seule des trois sommes n'est pas correcte après avoir placé tous les pions.

Pour tenter de répondre à cette question, j'ai imaginé le problème suivant[2] :



Brigitte a trouvé cette solution, mais elle s'est trompée : la somme des nombres sur un des côtés du triangle ne vaut pas 23.

Aide-la à trouver une solution correcte en changeant de place le moins de pions possible.

Explique comment tu as réfléchi.

2. Le symbolisme des cartes du jeu pour signaler la somme des quatre nombres de chaque côté n'est pas correct, d'un point de vue mathématique, en raison de l'usage abusif du signe « = ». Il faudrait lui préférer une addition de quatre termes du genre « ... + ... + ... + ... = 23 » où les cercles vides représentent des espaces pour placer des nombres ou une écriture comme « ..., ..., ..., ... —> 23 » illustrant quatre nombres alignés encore inconnus dont la somme devra donner 23.

Analysons le problème :

A) 10 + 2 + 8 + 3 = 23
B) 3 + 7 + 4 + 9 = 23
C) 10 + 5 + 1 + 9 = 25 Il y a 2 de trop !

Quel(s) pion(s) est-il possible de changer sur cette ligne sans modifier les sommes des deux autres lignes ? On ne peut qu'échanger un des deux pions placés à chaque extrémité de la ligne C avec un pion de l'autre ligne à laquelle il appartient.

Voyons ce qui se passe avec le pion 10 : sur la ligne A, on intervertit les pions 10 et 8. La somme A reste inchangée en vertu de la commutativité de l'addition. La somme C se trouve diminuée de 2 et est donc maintenant égale à 23.

Et le pion 9 ? On peut l'échanger avec le 7 qui vaut 2 de moins, la somme C (25-2 = 23) est maintenant égale à la ligne B qui vaut toujours 23.

Il y a donc deux solutions possibles.

La plupart des élèves de ma classe ont trouvé au moins une des deux possibilités. La difficulté pour quelques-uns s'est située au niveau de la verbalisation. Ils n'ont pas réussi à expliquer comment ils avaient réfléchi.

Voici trois exemples (à quelques corrections orthographiques près) de productions d'élèves de 4e année primaire :

Kristofer : *« J'ai changé le 8 et le 10. Parce qu'il y a 2 unités de différence et il faut enlever 2 unités à celui qui a 25 au lieu de 23. »*

Émile : *« J'ai vu que la ligne de en-haut à en bas à droite avait 2 de trop = 25. Puis j'ai vu que sur la ligne d'en bas le 7 pouvait se mettre sur la ligne fausse et que ça enlevait 2 et le 9 était déjà sur la ligne du 7 donc cela changeait seulement la ligne fausse. »*

Mélanie : *« J'ai commencé par dessiner le même triangle et j'ai déplacé 2 ronds et ça m'a donné à tous la même réponse. »* (avec dessin de la solution)

Émile est le seul élève à avoir explicitement dit que l'échange de deux pions placés sur une même ligne ne modifie pas la somme.

L'explication de Mélanie m'interroge et me renvoie à l'énoncé « explique comment tu as réfléchi ». Si j'avais choisi cette formulation de préférence à « explique comment tu as fait », c'était pour éviter d'obtenir ce type de réponse !

En marge du travail individuel de recherche, on peut lancer des défis à la classe sous forme de concours par équipes.

La classe est partagée en deux groupes, voire plus, et chacun reçoit le même problème (par exemple le Défi du Grand Sortilège) à résoudre en un temps record.

La recherche étant trop longue pour être menée par une seule personne, le travail de groupe prend ici tout son sens. A la charge des élèves de s'organiser, de coopérer.

Vous trouverez encore d'autres suggestions d'activités dans le livret explicatif fourni avec le plateau de jeu, les pions et les 200 cartes-défis.

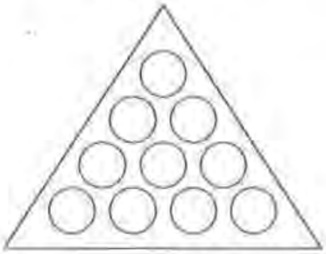
Ce jeu peut être commandé en Suisse à l'adresse suivante :

SOLA DIDACT,
rue des Finettes 54,
CH-1920 Martigny,
tél. : 027 722 54 64
ou par e-mail :
soladida@omedia.ch

LE DÉFI DU GRAND SORTILÈGE

Martine vient de trouver une solution pour ce triangle.

Elle se demande s'il est possible de trouver un triangle dont la somme des nombres sur chaque côté est aussi égale à 21 mais avec « 2 », puis « 3 », puis « 4 »... et finalement « 10 » mis à tour de rôle au centre du triangle.



somme 21

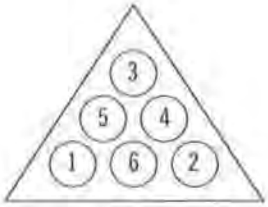
Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.

Rappel :
Pour chaque triangle, on utilise les nombres de 1 à 10. On ne peut pas écrire plusieurs fois le même nombre dans un même triangle.

Réponse au *Défi du Grand Sortilège*:
Il n'y a pas de solution avec le nombre 3 comme pion central, mais la preuve de cette affirmation passe par un inventaire systématique des nombres possibles sur les sommets et d'un examen de l'existence de solutions pour les nombres qui ne sont pas sur les sommets ni au centre. (voir annexe)

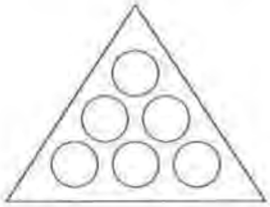
LE DÉFI DU PETIT SORTILÈGE

Martine a construit un petit triangle, avec les nombres de 1 à 6, dont la somme des nombres sur chaque côté est 9.



somme 9

Mais elle n'arrive pas à trouver une solution dont la somme des nombres sur chaque côté est 10.



somme 10

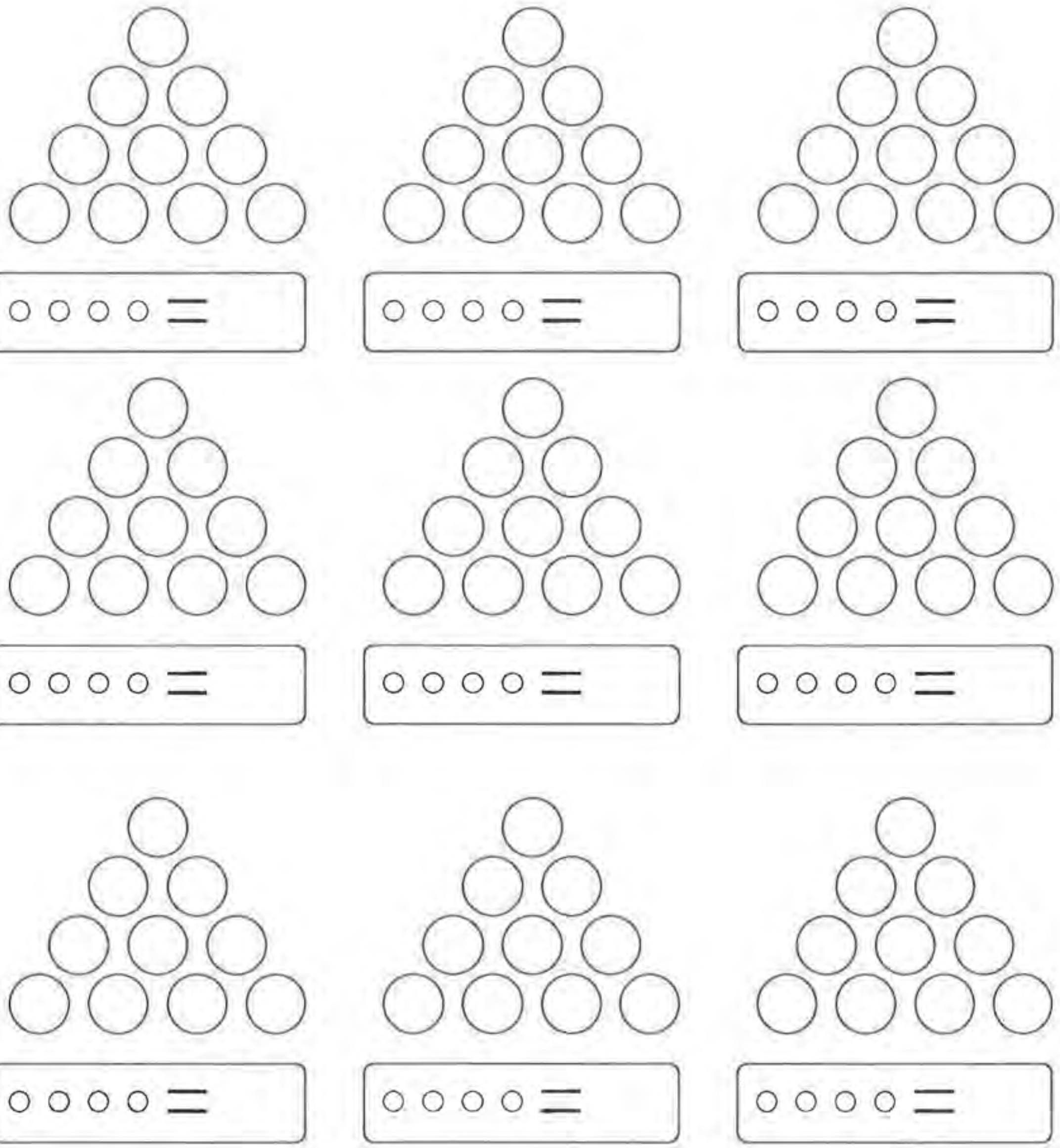
Cette solution existe-elle ?
Quelles sont les autres sommes possibles ?

Rappel :
Pour chaque triangle, on utilise les nombres de 1 à 6. On ne peut pas écrire plusieurs fois le même nombre dans un même triangle.

Fiche 1 prénom : ....

GRAND SORTILÈGE

Recopie au stylo les nombres figurant sur la carte-défi.
Écris ensuite ta solution au crayon noir.
Si tu veux, tu peux colorier les 4 petits ronds de la couleur de la carte-défi.
N'oublie pas ! Chaque nombre de 1 à 10 ne peut être utilisé qu'une seule fois !



ANNEXE

par François Jaquet

Inventaire des solutions du *Grand Sortilège* dont la somme des nombres de chacun des trois côtés du triangle est 21 ou « lorsque le langage algébrique se révèle plus économique que la rhétorique »

Les dix nombres $a, b, \ldots, j$ sont les dix nombres naturels de 1 à 10, dont la somme est 55 :
$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 55$ (I)

Puisque la somme des nombres de chaque côté est 21, les trois sommes donnent 3 x 21 = 63 :
$(a + b + d + g) + (a + c + f + j) + (g + h + i + j) = 63$ (II)

Le nombre du centre, e, ne figure pas dans cette dernière égalité mais les nombres des sommets, *a, b, c*, y figurent deux fois. On peut donc réorganiser la relation (II) par permutations et associations ainsi :
$(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) + a + g + j - e = 63$ (II')

et en la comparant à la relation (I), simplifier le tout pour obtenir la relation :
$55 + a + g + j - e = 63$ (III)

ou, en soustrayant 55 à chacun des deux membres de l'égalité :
$a + g + j - e = 8$ (III')

ou encore, finalement,
$a + g + j = 8 + e.$ (III")

Dans ce qui précède, on peut évidemment se passer du langage algébrique et n'utiliser que la « langue » habituelle de communication, comme les phrases insérées ci-dessus entre les relations littérales. En français, par exemple, la relation (III") s'exprime par : « la somme des trois nombres aux sommets des triangles vaut 8 de plus que le nombre du centre ».

L'algébrisation – ou la généralisation que permet l'usage de symboles (ici les lettres *a, b*…) – se révèle utile pour organiser l'inventaire des solutions.

« J'essaie avec le nombre 1 au centre, puis avec les nombre 2, etc. « revient à prendre successivement les dix valeurs possibles de la variable « *e* » par une représentation en arbre ou en tableau par exemple (première colonne du tableau suivant). « Si le nombre 1 est dans la case centrale, la somme des trois nombres des sommets vaudra 9 » se généralise de manière algorithmique – ou mécanique – aux autres cas (au moyen d'un tableur par exemple).

On peut aussi, par un raisonnement algébrique, préparer les sommes partielles des deux nombres d'un même côté qui ne sont pas des sommets, comme pour les nombres h et i : $g + h + i + j = 21 => h + i = 21 - (g + j)$

e	*a+g+j*	*a*	*g*	*j*	*h+i*	*h*	*i*	*c+f*	*c*	*f*	*b+d*	*b*	*d*
1	9	**2**	**3**	**4**	14	**5**	**9**	15	**7**	**8**	16	**6**	**10**
1	9	**2**	**3**	**4**	14	**6**	**8**	15	**5**	**10**	16	**7**	**9**
2	10	**1**	**3**	**6**	12	**4**	**8**	14	**5**	**9**	17	**7**	**10**
2	10	**1**	**3**	**6**	12	**5**	**7**	14	**4**	**10**	17	**8**	**9**
2	10	**1**	**4**	**5**	12	**3**	**9**	15	**7**	**8**	16	**6**	**10**
3	11	1	2	8	11	4	7	12	imp	imp	18		
3	11	1	4	6	11	2	9	14	imp	imp	16		
3	11	2	4	5	12	imp	imp	14			15		

4	12	**1**	**2**	**9**	10	**3**	**7**	11	**5**	**6**	18	**8**	**10**
4	12	1	3	8	10	imp	imp	12			17		
4	12	1	5	6	10	imp	imp	14			15		
4	12	2	3	7	11	1	10	12	imp	imp	16		
5	13	1	2	10	9	imp	imp	10			18		
5	13	1	3	9	9	2	7	11	imp	imp	17		
5	13	**1**	**4**	**8**	9	**2**	**7**	12	**3**	**9**	16	**6**	**10**
5	13	**2**	**3**	**8**	10	**1**	**9**	11	**4**	**7**	16	**6**	**10**
5	13	**2**	**3**	**8**	10	**4**	**6**	11	**1**	**10**	16	**7**	**9**
5	13	2	4	7	10	1	9	12	imp	imp	15		
6	14	1	3	10	8	imp	imp	10			17		
6	14	1	4	9	8	3	5	11	imp	imp	16		
6	14	1	5	8	8	imp	imp	12			15		
6	14	2	3	9	9	1	8	10	imp	imp	16		
6	14	2	3	9	9	4	5	10	imp	imp	16		
6	14	2	4	8	9	imp	imp	11			15		
6	14	**2**	**5**	**7**	9	**1**	**8**	12	**3**	**9**	14	**4**	**10**
6	14	3	4	7	10	1	9	11	imp	imp	14		
6	14	**3**	**4**	**7**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**	14	**5**	**9**
7	15	1	4	10	7	2	5	10	imp	imp	16		
7	15	1	5	9	7	3	4	11	imp	imp	15		
7	15	**1**	**6**	**8**	7	**2**	**5**	12	**3**	**9**	14	**4**	**10**
7	15	**1**	**6**	**8**	7	**3**	**4**	12	**2**	**10**	14	**5**	**9**
7	15	2	3	10	8	imp	imp	9			16		
7	15	2	4	9	8	3	5	10	imp	imp	15		
7	15	2	5	8	8	imp	imp	11			14		
7	15	3	4	8	9	imp	imp	10			14		
7	15	**4**	**5**	**6**	10	**1**	**9**	11	**3**	**8**	12	**2**	**10**
7	15	**4**	**5**	**6**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**	12	**3**	**9**
8	16	**1**	**5**	**10**	6	**2**	**4**	10	**3**	**7**	15	**6**	**9**
8	16	1	6	9	6	2	4	11	imp	imp	14		
8	16	2	4	10	7	1	6	9	imp	imp	15		
8	16	**2**	**5**	**9**	7	**1**	**6**	10	**3**	**7**	14	**4**	**10**
8	16	3	4	9	8	1	7	9	imp	imp	14		
8	16	3	6	7	8	imp	imp	11			12		
8	16	**4**	**5**	**7**	9	**3**	**6**	10	**1**	**9**	12	**2**	**10**
9	17	1	6	10	5	2	3	10	imp	imp	14		
9	17	2	5	10	6	imp	imp	9			14		
9	17	2	7	8	6	1	5	11	imp	imp	12		
9	17	3	4	10	7	1	6	8	imp	imp	14		
9	17	3	4	10	7	2	5	8	imp	imp	14		
9	17	3	6	8	7	2	5	9	imp	imp	12		
9	17	**4**	**5**	**8**	8	**1**	**7**	9	**3**	**6**	12	**2**	**10**
9	17	4	5	8	8	2	6	9	imp	imp	12		
9	17	**4**	**6**	**7**	8	**3**	**5**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**
10	18	1	8	9	4	imp	imp	11			12		
10	18	2	7	9	5	1	4	10	imp	imp	14		
10	18	**3**	**6**	**9**	6	**1**	**5**	9	**2**	**7**	12	**4**	**8**
10	18	**3**	**6**	**9**	6	**2**	**4**	9	**1**	**8**	12	**5**	**7**
10	18	**3**	**7**	**8**	6	**1**	**5**	10	**4**	**6**	11	**2**	**9**
10	18	**3**	**7**	**8**	6	**2**	**4**	10	**1**	**9**	11	**5**	**6**
10	18	4	5	9	7	1	6	8	imp	imp	12		
10	18	4	6	8	7	2	5	9	imp	imp	11		
10	18	5	6	7	8	imp	imp	9			10		

Cet inventaire montre qu'il n'y a pas de solutions avec « 3 » dans la case centrale, mais qu'il en existe pour tous les autres nombres de la case centrale.

Est-il si fastidieux qu'il n'y paraît de dresser un inventaire de ce type?
Oui, indubitablement, s'il fallait construire à chaque fois le triangle correspondant.
Non, si les colonnes sont préparées à l'aide des outils algébriques permettant un travail algorithmique.

Au passage, on voit que la condition que les dix nombres cherchés soient les dix nombres naturels de 1 à 10, tous différents, est d'une autre nature que celle qui régit les sommes.
Il y a en effet plusieurs solutions pour les équations $a + g + j = 8 + e$, $h + i = 21 - (g + j)$...

On ne peut échapper à un inventaire ordonné pour chacune d'elles, qui tient compte des contraintes sur le choix des dix nombres naturels différents.

Pour le cas de $e = 3$, on arrive toujours à une impossibilité (« imp » dans le tableau). La démonstration se fait ici par « épuisement » des cas.

Tout ceci nous fait penser que ce problème du *Sortilège* a des développements potentiels très riches pour les élèves des dernières années de l'école primaire et des premiers degrés de l'école secondaire, dans l'approche des raisonnements algébriques et déductifs.

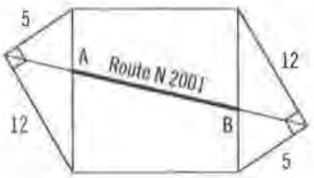
RÉPONSES AUX PROBLÈMES DU NUMÉRO 204

« SOUS LA ROUTE » (numéro 204, p. 9)

Ce problème nous a valu un abondant courrier. Merci à nos collègues et amis de *Math-Ecole* qui ont répondu et envoyé leurs solutions.

Rappel de l'énoncé :

Quelle est la longueur du tunnel creusé sous la route N 2001, entre les points A et B ?
La figure est formée d'un carré et de deux triangles rectangles.



Le problème a été apprécié de nos lecteurs qui le situent tous dans le cadre des programmes des degrés 8 à 9 de nos écoles secondaires. Il est aussi jugé intéressant comme en témoigne ce commentaire : *Beau problème de géométrie dont la résolution passe, par exemple, par la construction de segments dont on peut calculer la longueur, d'où une de ses difficultés. « Voir » des figures simples qui se prêtent bien au calcul, en lien avec la figure initiale, bien entendu…* (M. Brêchet)

7 réponses, 11 procédures différentes de résolution (y compris celles de la rédaction et de la personne qui nous a signalé le sujet), on est donc bien en présence d'un problème riche en exploitations didactiques.

La place nous manque pour publier toutes les solutions intégralement, nous nous contentons de les résumer ici, en se référant aux figures 1 et 2 sur lesquelles ont été concentrées les différentes productions.

Quatre solutions font appel à des triangles semblables (fig. 1)

- les triangles STU et SUR, puis QVB et QWU pour Michel Brêchet, de Delémont, donnant BV = 1547/578 puis, par Pythagore, OB ≈ 7,029 et la distance AB « proche de 14,059 » ;
- les triangles ACB et PQU pour Ambrogio Galvanone, de Pregassona, et Christian Bazzoni, de Bôle, qui, par des voies différentes, arrivent respectivement à AB = 14,059 (approximation à la troisième décimale) et $AB = (169\sqrt{2})/17 \approx 14,06$;
- les triangles BUR et ABC pour Antoine Gaggero, de Bienne, pour arriver à l'égalité AB/BU = CB/RU et à l'équation suivante : $AB(60/13) = 13(17\sqrt{2} - AB)/2$, dont la solution est $AB \approx 14,06$.

La solution de Vincent Keusen, de Gimel, se fonde sur la constatation que le triangle PAK (Fig. 1) est isocèle et rectangle : *x* étant la mesure du côté AK et de KP, la décomposition de l'aire du triangle PDE (d'aire 30) en un trapèze PDAK et un triangle KAE se traduit par l'équation $30 = (5 + x)\,x/2 + (12 - x)\,x/2$, dont la solution est 60/17, d'où $PA = (60/17)\sqrt{2}$ et $AB = 17\sqrt{2} - 2((60/17)\sqrt{2}) = (169\sqrt{2})/17 \approx 14$

Une des solutions de A. Gaggero fait appel au théorème de la bissectrice dans le triangle TUS (Fig. 1) pour déterminer BS = 65/17 (selon l'égalité BS/SU = BT/UT qui devient BS/(13 – BS) = 5/12). Par soustraction, on arrive à : AC = 13 – 2(65/17) et, par Pythagore dans le triangle ABC, on trouve AB ≈ 14,06.

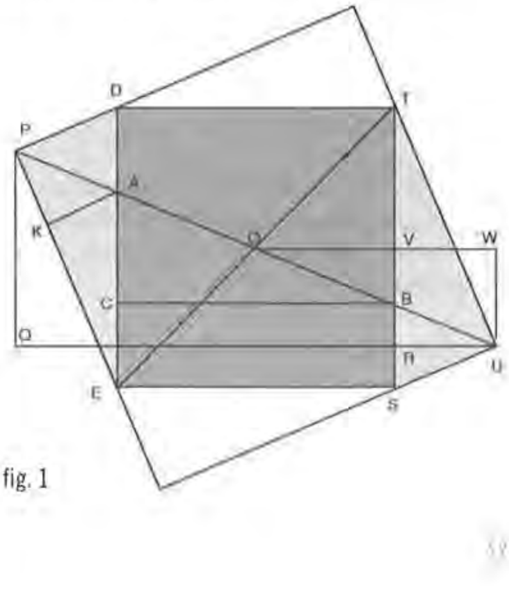


fig. 1

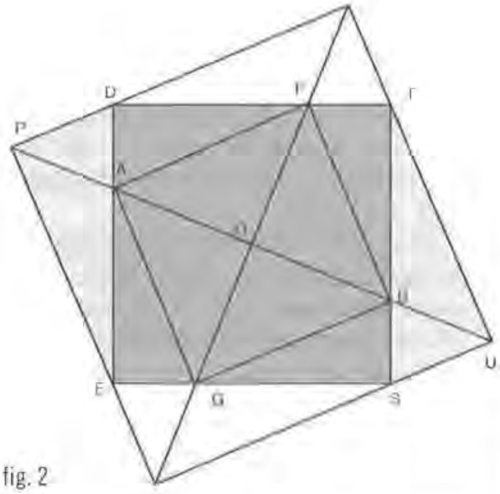


fig. 2

D'autres solutions se réfèrent à la similitude entre les carrés emboîtés successifs de la figure 2. Nous les devons à André Calame, de Sauges, Denis Straubhaar de la Chaux-de-Fonds et à la rédaction de *Math-Ecole*. Les côtés du carré extérieur mesurent 17 (12 + 5), ceux du deuxième carré mesurent 13 (par Pythagore). Le rapport de la similitude qui amène le premier sur le deuxième est par conséquent 13/17. C'est le même que celui de la similitude qui amène le deuxième sur le troisième. (Cette constance des rapports repose sur le fait que les similitudes successives font passer d'un carré au carré inscrit par une homothétie et une rotation dont l'angle est toujours le même en valeur absolue, vu le parallélisme des côtés du premier et du troisième carré).

Les mesures des diagonales de ces carrés sont par conséquent, dans l'ordre décroissant : $17\sqrt{2}$; $13\sqrt{2}$; $(13\sqrt{2})(13/17) = (169\sqrt{2})/17$. Cette dernière mesure est celle de AB, la distance cherchée, elle s'obtient sans recours à la calculatrice.

Une deuxième question du problème était de savoir comment faire comprendre aux élèves que le triangle BUS n'est pas isocèle, alors qu'un dessin précis pourrait laisser croire que BU = US (5 cm).

Deux explications ont été apportées par nos lecteurs :

- la première fait confiance à la calculatrice et montre que les approximations de BU, calculées en général par différence entre celle de AB et celle de la diagonale du grand carré donnent 4,992 ou 4,99 ;
- la seconde part de considérations sur les mesures réelles des segments et sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$:
  $BU = 1/2(17\sqrt{2} - (169\sqrt{2})/17) = (60/17)\sqrt{2}$.
  si BU = 5, on aurait $5 = (60/17)\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} = 17/12$, ce qui reviendrait à dire que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel !

Belle occasion de réflexion, pour nos élèves de l'école secondaire, sur les concepts de nombres rationnels et irrationnels !

QUARTS DE FINALE INDIVIDUELS DU 17e CHAMPIONNAT DE LA FFJM (numéro 204, pp. 6 à 8)

Les solutions, quelques indications pour la résolution de ces problèmes et leur exploitation en classe.

1. Le ***dé coupé*** a 15 arêtes. Si l'on sait que le cube en a 12, on voit qu'il suffit d'ajouter les 3 nouvelles arêtes du triangle scié. Sinon il faut imaginer ou construire effectivement le solide et compter ses arêtes. Pour ceux qui connaissent la relation d'Euler : $s + f - a = 2$, comme on sait que le solide a 7 faces et 10 sommets, la relation devient $7 + 10 - a = 2$, d'où l'on tire $a = 15$. Les variations sont nombreuses sur ce thème.

2. Le ***calcul incomplet*** (23 – …) + (23 x …) = 50 a une infinité de solutions avec des « nombres entiers », comme le dit l'énoncé : (23 – 19) + (23 x 2) = 50, (23 – 42) + (23 x 3) = 50, (23 – 65) + (23 x 4) = 50… La « réponse attendue » est la première, où l'égalité est complétée par 19 et 2, mais les couples de nombres entiers (et même naturels) 42 et 3, 65 et 4… conviennent aussi, même si la première parenthèse représente des nombres négatifs (non naturels mais aussi entiers). En effet, la commutativité et l'associativité de l'addition permettent à ceux qui ne connaissent pas les nombres négatifs de calculer la deuxième parenthèse en premier, d'additionner 23 et de soustraire finalement 42, ou 65, ou 89,… . Si l'on souhaite reprendre cet exercice en classe, il faut évidemment accepter toutes les solutions citées ici ou modifier l'énoncé pour n'avoir qu'une seule solution, par exemple : « compléter l'égalité ci-dessous avec des nombres naturels inférieurs à 23 ».

3. La ***pyramide*** est composée de 40 cubes :
$(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) =$
$2 + 6 + 12 + 20 = 40.$
La variable didactique est évidente, c'est le nombre d'étages, ce qui permet de reprendre la problème dès la 6e année avec par exemple, une pyramide de 50 étages, puis, dès la 8e, une pyramide de 2003 étages par exemple, afin d'inciter les élèves à rechercher la loi de composition de chaque terme, puis la somme des premiers termes. Grandes potentialités pour aborder le concept de fonction.

4. ***Les quatre amis.*** Il semble difficile de se tromper. Mathilde a des lunettes, Mathurine a les cheveux bruns et Mathias n'a pas de lunettes.

5. ***Appartenance triple.*** Il suffit de compter les carrés, partie par partie. Mais encore faut-il s'entendre sur le nombre de rectangles en jeu ! Si l'on ne considère que les 5 rectangles tracés à l'origine, sans côtés communs ou sans parties de côtés communes, on trouve 4 zones grises qui sont chacune à l'intérieur de 3 rectangles (fig. 1).

Mais il faut se rendre à l'évidence. Il y a beaucoup plus de rectangles qui apparaissent sur la figure après le dessin des 5 premiers ! Nous en avons compté 30 (sans garantie). Par conséquent, les nombres de rectangles contenant chaque zone augmentent aussi sensiblement. Il n'y a alors plus qu'une seule partie grise contenue dans 3 rectangles exactement. (Les nombres indiqués dans les zones de la fig. 2 sont à contrôler !)

Les auteurs ont donc, en toute honnêteté, considéré deux solutions possibles à ce problème :

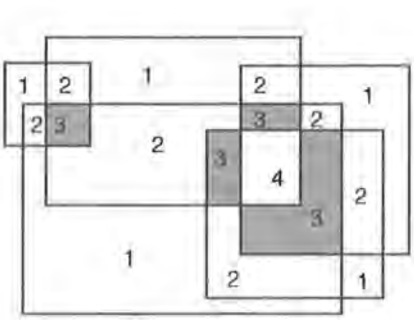


fig. 1

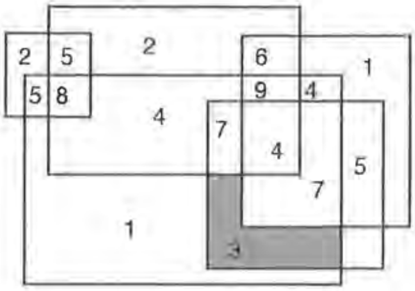


fig. 2

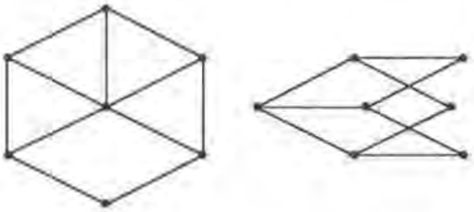
6. ***Les pesées.*** Les symbolismes des balances et des objets ne facilitent pas la tâche d'élèves de 4e et 5e années, mais, en retirant systématiquement un même objet des deux plateaux de chacune des balances, on reconstitue pas à pas la sériation des jouets, du plus lourd au plus léger :
avion > flèche > cœur > carré > triangle. Mathias va donc garder les deux cœurs.

7. Ici, contrairement au problème 5, ***les triangles*** sont bien déterminés car l'énoncé est sans ambiguïtés : « combien compte-t-on de triangles entièrement dessinés » (le RMT utilise la formule « combien de triangles peut-on voir dans la figure »). Il y a 12 triangles en tout : 6 composés d'une seule « zone », 4 composés de deux « zones » et 2 composés de trois « zones ». Les variations sur ce thème sont innombrables, et le dénombrement passe par une organisation systématique selon les « zones » de base dont la réunion constitue les nouvelles figures.

8. ***Les bonbons*** sont au nombre de 4. Il y a deux hypothèses à faire pour chaque enfant. Une seule ne conduit pas à une contradiction : Mathilde a mangé moins de 7 bonbons (et n'en a pas mangé plus de 4), Mathias en a aussi mangé moins de 7 (et autant ou plus que Mathilde). La réponse est Mathilde 4 et Mathias 6. Ce type de problème entraîne au raisonnement hypothético-déductif.

9. La prochaine ***bonne année*** de 53 week-ends sera la septième année bissextile après 2000, (qui l'était, elle-même, comme tous les multiples de 400, contrairement aux autres multiples de 100) c'est-à-dire 2028.

10. Avec un peu de patience, on trouve qu'il faut 7 points au minimum pour former 4 ***losanges*** dans l'une des deux configurations suivantes :



11. ***Souvenir, souvenir*** La différence est de 4 minutes par heure. Il y a donc 15 heures que l'horloge et le réveil ont été mis à l'heure. Il est 7 h 45 min. La mise à l'heure se situe à 15 h 45 min, la veille.

12. ***7 une chance*** se résout par essais successifs, qui font apparaître rapidement une régularité : ça marche pour 13 et 14, 22 et 23, 31 et 32, 40 et 41, 49 et 50, 58 et 59, 67 et 68, … le 13e de ces nombres est 67. Problème à développer dans le cadre des opérations et des suites régulières de nombres.

13. ***La vieille calculatrice*** livre rapidement son secret, pour autant que l'on procède avec méthode : il y a 75 nombres de trois chiffres pairs dont le carré s'écrit avec 6 chiffres (le premier peut être 4, 6 ou 8, le deuxième et le troisième 0, 2, 4, 6 ou 8, ce qui donne 3 x 5 x 5 combinaisons avec répétitions). Il n'est cependant pas nécessaire de les vérifier tous si l'on connaît bien les deux chiffres terminaux des carrés des nombres naturels (voir tableau annexe). Le 7 n'apparaît que quatre fois comme chiffre des dizaines dans les « terminaisons » de carrés : pour ceux des nombres naturels se terminant pas 24, 26, 74 et 76. Comme 74 et 76 ne peuvent convenir ici (pas de chiffres impairs) et comme le chiffre des centaines ne peut être que 4, 6 ou 8, il ne reste ainsi que 6 nombres à élever au carré : 424, 426, 624, 626, 824, 826. Seul le carré du dernier est formé de chiffres pairs à l'exception du chiffre des dizaines : $826^2 = 682276$. La réponse est 826 et le procédé de recherche a montré qu'elle est unique.

14. Le tableau des terminaisons utilisé précédemment permet de dire immédiatement que le numéro de ***téléphone au carré*** est 06 76 25 01 00.

15. On retrouve, dans la ***bicyclette partagée*** un beau problème de déplacements, cher aux auteurs de nos anciens manuels. Traduit par une équation où d représente la distance du départ au cèdre et $25 - d$ la distance restante (en km), l'égalité des durées totales de déplacements donne (Mathilde à gauche et Mathieu à droite) :
$d/18 + (25 - d)/6 = d/3 + (25 - d)/15$. La solution est 225/34 ($\approx$ 6,618, pour respecter les traditions du concours où – vraisemblablement pour des raisons d'unicité d'écriture – on demande des réponses approximatives plutôt que les nombres exacts).
À exploiter dans le cadre des équations et des problèmes de vitesse.

16. Le ***sauvetage dans l'espace*** conduit à un inventaire des rations d'oxygène. Avec n passagers initiaux le jour du premier sauvetage, ce nombre de rations est $95n = 60(n + 7)$, ce qui permet de dire qu'il y avait 12 passagers, devenus 19 après le premier sauvetage. Ils consomment alors 6 x 19 rations en six jours. Lors du second sauvetage de m nouveaux passagers, l'inventaire des rations donne l'équation suivante : $54 \times 19 = 38(m + 19)$ dont la solution est $m = 8$. Ce problème est facile à exploiter en vue de la mise en équations.

17. Les plus petits cercles du ***tapis persan*** sont ceux qui sont dans l'intersection du carré et du grand cercle. La diagonale du carré (1 m) est constituée du diamètre du cercle intérieur ($\sqrt{2}/2$), de deux rayons (r) des petits cercles et de deux diagonales de carrés de côtés r, ($r\sqrt{2}$). Ceci nous conduit à l'équation $1 = \sqrt{2}/2 + 2r + 2\,r\sqrt{2}$ dont la solution est $r = (3\sqrt{2} - 4)/4$. Le diamètre de ces petits cercles, est donc, en m : $(3\sqrt{2} - 4)/2$ et, en mm : $500(3\sqrt{2} - 4) = 1500\sqrt{2} - 2000$ (La réponse approximative est 121,3 mm). On pourrait aller plus loin dans ce problème et calculer les diamètres des autres cercles du motif.

18. ***L'Etang d'Ares*** fait de nouveau intervenir la table des deux derniers chiffres des carrés de nombres naturels (voir annexe). L'égalité des restes de la division par 100 des quatre aires revient à chercher quatre terminaisons égales de la table. Les quatre côtés correspondants doivent permettre de former le quadrilatère le moins « aplati » et par conséquent,

il faut chercher les quatre restes le plus près du centre de la table. (Les quatre restes « 01 » par exemple, conduiraient à un quadrilatère de côtés 1, 49, 51 et 99 m, presque « plat »). Les restes « 76 » correspondent au quadrilatère de côtés 24, 26, 74 et 76, le moins « plat ».

La formule de Brahmagupta (Voir article de M. Criton « Voyage au pays des formules d'aire et de volume » pp. 23-25 de ce numéro) est ici inespérée. (Sinon il faut travailler avec de lourdes équations trigonométriques). Le demi-périmètre du quadrilatère est $p = 100$, son aire est $\sqrt{3509376} \approx 1873{,}33$, en m^2.

En conclusion, de bien beaux problèmes dans l'ensemble, souvent originaux, dont la plupart ont des potentialités évidentes pour la classe, au niveau didactique. Bravo à nos collègues de la FFJM qui font preuve de créativité et de beaucoup de rigueur dans la préparation de leurs sujets d'épreuve.

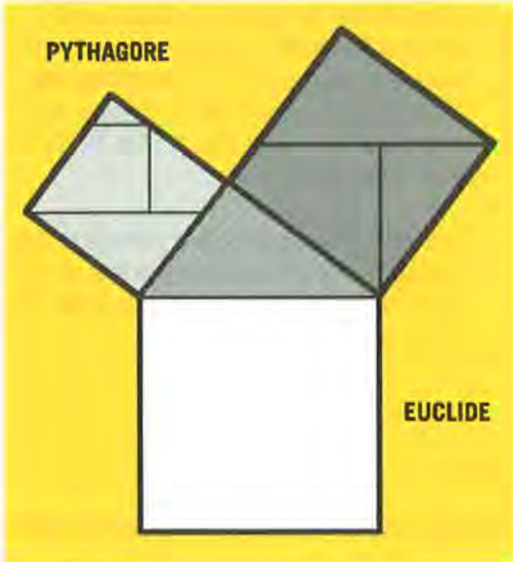
Annexe :

Table des terminaisons (deux derniers chiffres) des carrés des nombres naturels

d\u	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
.0.	00	01	04	09	16	25	36	49	64	81
.1.	00	21	44	69	96	25	56	89	24	61
.2.	00	41	84	29	76	25	76	29	84	41
.3.	00	61	24	89	56	25	96	69	44	21
.4.	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
.5.	00	01	04	09	16	25	36	49	64	81
.6.	00	21	44	69	96	25	56	89	24	61
.7.	00	41	84	29	76	25	76	29	84	41
.8.	00	61	24	89	56	25	96	69	44	21
.9.	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01

Exemple : on trouve les deux dernier chiffres de 1478^2 à la ligne . 7. et dans la colonne . . 8, c'est-à-dire 84.

LA « BOUTIQUE » DE *MATH-ÉCOLE*



Puzzle « Pythagore – Euclide »

Lors de la première présentation de l'exposition « Rivages mathématiques » (V. *Math-Ecole* 197), plusieurs visiteurs nous avaient demandé où ils pouvaient se procurer les pièces en bois de l'expérience « Pythagore en puzzles ».

Nous avons finalement trouvé un artisan qui a construit ce puzzle sur une planchette de bois croisé, (29 cm x 24 cm) avec des pièces de trois essences différentes, poncées finement et huilées. (Une dizaine d'exemplaires sont encore à disposition, voir page 3 de couverture.)

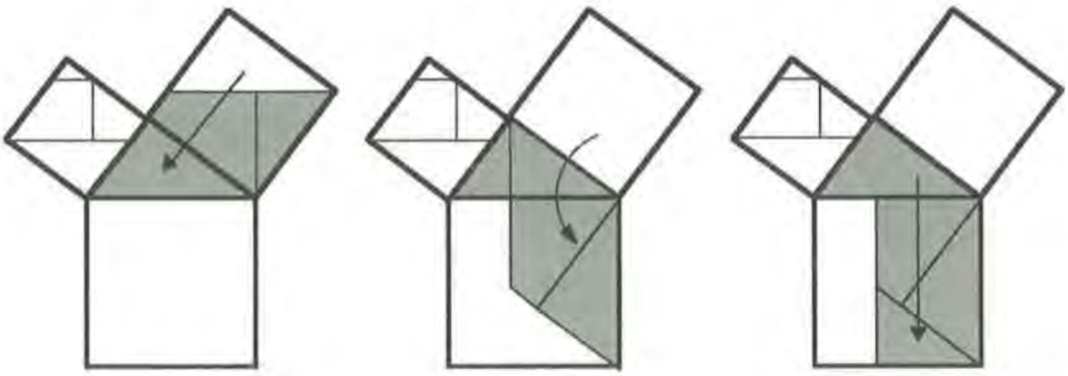
Il s'agit en fait d'une « démonstration par manipulation » du théorème de Pythagore, très proche de celle d'Euclide (Livre I, proposition 47)

L'intérêt didactique de ce puzzle est évident, comme le montre la séquence suivante :

- du carré de droite à un parallélogramme en un découpage et une translation,
- d'un parallélogramme à un autre, isométrique, par une rotation d'un quart de tour,
- du parallélogramme au rectangle, par un nouveau découpage et une dernière translation.

Mais pour passer rapidement d'une configuration à l'autre il y a tout un travail d'appropriation du puzzle, de ses sept pièces et des relations d'équivalence entre carrés et rectangles en jeu.

Rappel : *Panoramath 3* est maintenant disponible (V. *Math-Ecole* 205 et page 3 de couverture).



ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des comptes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Faites vos jeux ! ACL	...	(ex à Fr. 16.-)
La magie du calcul, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pliages et mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
100 défis mathématiques du « Monde », POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
100 jeux mathématiques du « Monde » : Affaire de logique, POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (Tangente HS 10)	...	(ex à Fr. 20.-)
Puzzle Pythagore et Euclide	...	(ex à Fr. 55.-)
Problèmes de rallyes et concours :		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5…)	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6…)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7…)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7…)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7…)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9…)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9…)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10…)	...	(ex à Fr. 14.-)

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel