MATH-ÉCOLE
209

Décembre 2003

Grand N – numéro spécial
« points de départ »

L'analyse à priori, un outil
pour l'enseignant

«Cap maths», comparaison
avec les ouvrages romands
« Mathématiques 1P-4P »

MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 8.50
Anciens numéros : CHF 6.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Didier, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE
42e année, quatre numéros par an

209
Décembre 2003

ÉDITORIAL

VOUS AVEZ DIT, ASSOCIATIVITÉ ?

François Jaquet

La scène se passe en octobre dernier à Gênes, lors du Festival de la Science, au stand du RMT (Rally matematico transalpino) où les visiteurs peuvent résoudre quelques-uns de ses problèmes sans papier ni crayon mais avec le matériel approprié[1].

Un jeune garçon, appelons-le Guglielmo pour l'occasion, est devant l'énoncé de *Il bersaglio*: (traduction) *Guillaume a atteint la cible avec toutes ses fléchettes, il compte ses points: 34! Jeanne joue et dit: « j'ai aussi 34 points, mais j'ai deux fléchettes de moins que toi ». Combien ont-ils chacun de fléchettes dans la cible? et dans quelles zones?*

Après de très longues recherches, hésitantes, Guglielmo a 6 pions rouges (flèches) dans la zone extérieure « 5 » de la cible. Il tient un septième pion rouge dans sa main droite, le pose dans la zone intermédiaire « 7 », hésite, le retire puis le pose dans la zone « 5 », compte mentalement et le retire définitivement du jeu.
Il prend alors un des six pions déjà posés et le déplace de la zone « 5 » à la zone centrale « 11 ». Les doigts de sa main gauche s'agitent et le pion aboutit finalement dans la zone « 7 » et y reste. Mais visiblement ce n'est pas encore la solution. Les doigts reprennent leur course et Guglielmo retire un nouveau pion de la zone « 5 » et le place en « 7 ». Le contrôle prend du temps: mouvements de doigts et de la tête, puis un sourire de soulagement se dessine, comme pour affirmer que les 4 pions dans le « 5 » et les deux dans le « sept » font bien 34. Guglielmo lève la tête et voit que je l'observe d'un air encourageant. Il relit l'énoncé et prend des pions verts. Il en place 3 au centre, dans le « 11 », réfléchit et, rapidement, en retire un qu'il place dans la zone « 7 », je l'entends dire « venti-due (22) et je vois nettement les 5 doigts de la main gauche puis deux de la main droite se lever au rythme de la récitation mentale qui aboutit à « venti-nove » (29).
Il prend alors un quatrième pion vert, le met en « 7 » et lève 7 doigts successivement (il a mémorisé le 29 obtenu avec trois pions). Je ne l'entends pas prononcer le « trenta-sei » (36) de la fin du comptage, mais il s'est rendu compte qu'il était trop loin puisqu'il déplace ce dernier pion vers la zone « 5 ». Enfin! me dis-je en moi-même, il lui aura fallu pas moins de 10 minutes mais il y est arrivé!

Mais Guglielmo n'a pas fini, il ne sait pas encore qu'il est à 34. Les cinq doigts de sa main gauche se lèvent un à un; il y a un moment d'hésitation puis un recomptage total de 22 à 29 puis à 34, toujours sur les doigts. Guglielmo se redresse alors sur sa chaise et me lance un regard interrogateur. Je lui demande son âge. Il me répond qu'il a 11 ans et qu'il est en première année d'école secondaire (« prima media »). Je lui demande encore s'il pense que ce qu'il a trouvé est juste. Il hoche la tête de gauche à droite et hausse les épaules comme pour dire qu'il n'en est pas certain.

Sa mère, assise à côté de lui, muette durant toute la recherche, cherche une approbation dans mon regard. Je lui dis que son fils a trouvé la solution, mais qu'il a eu beaucoup de peine car il doit effectuer tous ses calculs sur ses doigts, comme par exemple $22 + 7 = 29$. Et je demande alors à Guglielmo, à brûle-pourpoint: combien font $2 + 7$? Il me répond 9, immédiatement, avec l'air de dire « il y a longtemps que le sais! ».

Aujourd'hui, Guglielmo ne sait pas encore si sa solution est la bonne, est complète, ou s'il y en a d'autres. En particulier, il n'a pas vérifié une des clauses de l'énoncé disant qu'il y a deux flèches vertes de moins que de flèches rouges. Toute son énergie a été prise par le

1. Voir *Math-Ecole* 207, p. 27 à 34.

comptage un à un des points, seule stratégie possible lorsqu'on a un handicap aussi lourd en calcul. Il semble connaître sa table d'addition limitée aux nombres de un chiffre puisqu'il sait que $2 + 7 = 9$, mais cet outil n'est pas disponible dans le calcul $22 + 7$.
Mais, au fait, quelles sont les étapes du passage de $2 + 7$ à $22 + 7$?

1 Il faut d'abord être conscient que, selon les règles de notre système de numération de position, 22 se décompose en $20 + 2$.
2 Il faut ensuite être persuadé que la transformation précédente n'affecte pas l'opération et que, par conséquent, $22 + 7 = (20 + 2) + 7$. Est-ce si évident?
3 Il y avait deux termes, 22 et 7, auparavant. Il y en a maintenant trois: 20, 2 et 7. Et en outre, on est passé d'une à deux additions, successives. D'une part, une règle usuelle, mais implicite et abusive, veut qu'on opère toujours de gauche à droite, ce qui nous ferait revenir à $22 + 7$. De l'autre, une propriété mathématique dit que l'ordre dans lequel on effectue les deux additions n'affecte pas le résultat, c'est-à-dire, en langage conventionnel: $(20 + 2) + 7 = 20 + (2 + 7)$. Le terme « associativité » peut paraître bien savant, l'écriture correspondante bien abstraite, mais il existe des manières plus abordables d'en parler avec les élèves, de faire constater qu'on peut « mettre ensemble » le premier et le deuxième ou le deuxième et le troisième. Peut-être que Guglielmo n'a jamais été mis en garde contre la règle usuelle qui constitue un tel obstacle pour lui, peut-être qu'il n'a jamais dû formuler, dans son langage, la règle d'associativité de l'addition?
4 La difficulté franchie, on additionne d'abord le 2 et le 7, pour obtenir $20 + 9$. De là à obtenir 29, le pas est encore plus simple que celui de la première étape puisqu'il va « vers le résultat ».

Des enfants comme Guglielmo, nous en avons rencontré beaucoup, qui avaient vraiment envie de résoudre les problèmes de notre exposition-atelier du RMT, partout où nous l'avons présentée, mais qui perdaient de vue le but de leur recherche, par épuisement sur des calculs pour lesquels ils ne disposaient pas d'instruments adéquats.

Après ce constat, évitons le piège de la culpabilisation ou de l'accusation qui nous entraînerait dans des querelles stériles. Cherchons plutôt des voies de remédiation.

Une piste nous est offerte par la pratique du calcul réfléchi, une autre par la pratique des jeux arithmétiques; elles sont illustrées dans ce numéro de *Math-Ecole* par plusieurs articles[2]. Une autre encore est, précisément, celle de l'exposition-atelier, où l'on libère l'élève de l'écriture, pour lui permettre de s'appuyer sur des nombres mobiles et sur d'autres matériels figuratifs.

Mais il ne suffit pas d'intituler une séquence d'enseignement « calcul réfléchi », de faire jouer les élèves, de leur proposer des manipulations arithmétiques. Il faut ensuite revenir, avec l'enfant, sur ce qu'il a fait. Il faut qu'il verbalise, qu'il justifie, qu'il note ses règles de calcul, qu'il les compare avec celles de ses camarades. Il faut aussi que l'adulte, finalement, puisse lui donner son avis sur ce qu'il a exprimé, qu'il puisse lui dire que certaines propriétés sont très importantes et générales et d'autres plus personnelles et éphémères.

L'associativité de l'addition, l'élève l'aborde très tôt dans son parcours scolaire, malheureusement sans en être conscient ou sans qu'on le lui dise, par des mots simples. Et un jour il y aura celle de la multiplication jusqu'au moment où la distributivité pointera l'oreille. Et là, adieu les belles symétries de la propriété, il faudra tout reconstruire!

Alors, l'associativité, si on la faisait vivre, puis raconter à l'élève? Ça vaudrait la peine d'essayer!

2. Entre autres par *Mathador* (pp. 4 à 7), *Cap maths* (pp. 39 à 47), *Magico* (pp. 27 à 29)

PLAIDOYER POUR LA PRATIQUE DE JEUX NUMÉRIQUES EN CLASSE ET PRÉSENTATION DE *MATHADOR* ET *MATHADOR JUNIOR*

Eric Trouillot[1]

Résumé : Dans une période de questionnement important sur l'enseignement du calcul avec le problème de la gestion de la calculatrice, une approche mérite qu'on s'y intéresse de plus près : le jeu. Cet article essaie de mettre en avant les points positifs à la pratique du jeu sans occulter quelques difficultés. En parallèle, car le lien était idéal, je présente les 2 jeux de calcul que j'ai créés : *Mathador* et *Mathador Junior*.

Calculer en jouant...

Un constat quasi-général au collège et au lycée est fait par l'ensemble des collègues sur une baisse des aptitudes en calcul numérique de nos élèves. Pourquoi ?

Moins de pratique du calcul mental, c'est une évidence. La calculatrice est passée par là. C'est un peu comme si l'apport des nouvelles technologies de ces dernières décennies (ordinateur, calculatrice, internet...) avait déposé une couche de poussière sur l'expression « calcul mental ». Une sorte de vieillissement accéléré. Conséquence : nous avons délaissé, inconsciemment peut-être, cette activité. Cette erreur que l'homme répète si souvent lors de changements importants : il embrasse la nouveauté qui devient modernité absolue en passe de tout révolutionner et rejette aux oubliettes ce qu'il adorait hier en le qualifiant de pratiques ancestrales dignes de l'*homo sapiens*. Légère caricature mais tout de même.

Par ailleurs, il s'est aussi installé insidieusement dans la tête de nos élèves que la maîtrise du calcul et de tous ses mécanismes n'est plus vitale. Je m'explique : il y a 30 ans et plus, un élève qui ne savait pas calculer, était automatiquement bloqué dans sa progression mathématique et scolaire et n'avait pas d'issue de secours. Aujourd'hui, un élève qui ne sait pas ou pas bien calculer n'est plus bloqué et surtout ne se sent pas bloqué. Il a la boîte magique, celle qui peut tout faire à sa place. Je crains que cette analyse ne se fasse inconsciemment chez un grand nombre d'élèves.

Pourtant les programmes sont clairs, la pratique du calcul sous les trois formes : mental, à la main ou avec la calculatrice, doit être une part importante de l'activité mathématique au primaire et au collège.

Parmi la panoplie des pratiques possibles, le jeu présente de nombreux intérêts : notamment la possibilité pour un élève en difficulté de se libérer des barrières psychologiques. Par le changement de cadre, le jeu permet à toute la classe de pratiquer le calcul de façon différente et plus ludique. Il est bien entendu que le jeu apporte un plus, un complément, mais ne peut en aucun cas se substituer aux activités traditionnelles nécessaires et indispensables.

Mais qu'est-ce qu'un jeu ? Un jeu mathématique ?

L'enseignant peut-il décréter pour une classe qu'une activité, même originale, est un jeu ? Je crains que non.

1. L'auteur, Eric Trouillot est professeur de mathématiques au Collège Victor-Hugo de Besançon. Il est le créateur des jeux *Mathador* et *Mathador Junior*, dont le premier a déjà été présenté dans le numéro 200 de *Math-Ecole* (pp. 40 à 45).

Les qualificatifs les plus fréquemment utilisés pour définir le jeu sont: plaisir, liberté, évasion, défi, habillage. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Quoi de plus personnel que les notions de plaisir, de liberté et d'évasion. Vous l'avez compris, l'attribution du label jeu à une activité mathématique présente une grande part de subjectivité.

Le paragraphe suivant est une présentation succincte des règles des deux jeux que j'ai créés: *Mathador* et son petit frère *Mathador Junior*. Vous pourrez juger par vous-mêmes si l'attribution du label jeu est justifiée!

Mathador et Mathador Junior

- Ce sont deux jeux de parcours, l'un de 63 cases pour *Mathador* et l'autre de 28 cases pour le *Junior*.

- On peut jouer à partir de 2 joueurs et éventuellement jusqu'à 12 en formant des équipes. Le jeu en équipe favorise les échanges, apporte de l'interactivité et peut permettre d'équilibrer les forces.

- *Mathador Junior* s'adresse aux plus de 8 ans et Mathador aux plus de 10 ans sans limite supérieure d'âge.

- Le premier qui arrive au bout du parcours gagne.

- Deux formules de jeux sont possibles:
  À chaque coup, tout le monde joue et c'est le premier qui trouve la réponse qui reprend la main ou bien on laisse la priorité jusqu'à la fin du temps imparti par le sablier à celui qui a la main. S'il trouve, alors il continue, sinon il perd la main.
  La première formule est plus vivante, mais peut laisser le monopole du jeu à 1 ou 2 joueurs si les forces sont disproportionnées.

- En se déplaçant sur le parcours, on peut rencontrer deux types de cases:
  Une case-énigme: on tire une carte sur laquelle se trouve un problème à résoudre. La réponse est au dos de la carte.
  Une case-calcul: on lance 7 dés et sur le principe du «Compte est bon». Les joueurs doivent trouver, en utilisant 5 nombres obtenus sur 5 dés blancs, un nombre compris entre 0 et 99 pour *Mathador* avec obligation d'utiliser dans le calcul l'opération ou les 2 opérations inscrites sur la case. Pour le *Mathador Junior*, le nombre à trouver est compris entre 10 et 69 avec obligation d'utiliser dans le calcul l'opération inscrite sur la case.

L'apport du jeu dans la classe

D'une façon générale, le plaisir procuré par une pratique accrue du jeu à l'école ne pourrait que redorer le blason des mathématiques et donner une image plus vivante et plus en lien avec le monde extérieur. Le déficit dans ce domaine me semble encore important. Le rapprochement avec le monde du jeu est une des façons de le combler.

En jouant, l'élève est acteur et peut donc retrouver plus facilement le goût et l'envie de chercher propres aux mathématiques. De plus, par le changement de cadre qu'elle apporte, la pratique du jeu peut valoriser et remotiver des élèves en situation d'échec scolaire.

Concernant *Mathador* et *Mathador Junior*, la manipulation des 7 dés est un vrai plaisir tactile pour les élèves. Les dés ont un côté magique et mystérieux qui aide l'élève à s'approprier les nombres avec lesquels il va jongler. Le nombre est un être abstrait. Pour l'élève, il est souvent en dimension 2: sur une feuille, sur un livre, au tableau, sur une carte à jouer... Le dé lui donne une forme, un corps et lui permet donc de rentrer dans notre monde en 3 dimensions. Ce paramètre, psychologiquement non négligeable, «humanise» le nombre et le rapproche de l'élève. Cela aide à donner du sens à la pratique du calcul.

Liens avec les programmes de mathématiques

Certains jeux ont une dimension pédagogique plus marquée que d'autres. C'est le cas de *Mathador*. Cette marque est parfois analysée comme une entorse à la notion de liberté et de gratuité du jeu que certains puristes considèrent comme un dogme. Mais si le jeu peut faire se côtoyer plaisir et apprentissages scolaires, pourquoi s'en priver ?

Pour que le jeu trouve sa place de façon durable dans l'école et soit reconnu comme une véritable pratique pédagogique, un soutien des différents acteurs (élèves, parents d'élèves et institution) est indispensable. De nombreux signes semblent démontrer que la tendance est bonne mais il y a encore beaucoup de chemin à parcourir avant que ne disparaissent totalement des remarques du style « ce n'est pas en jouant qu'ils vont apprendre quelque chose » ou « l'on n'est pas à l'école pour jouer » !

Paramètre très important : l'ancrage du jeu à l'école sera d'autant plus solide que les liens entre les règles des jeux utilisés et les programmes scolaires seront clairement établis.

Concernant *Mathador* et *Mathador Junior*, les calculs peuvent s'effectuer mentalement ou à la main. Le calcul mental et le calcul à la main sont des objectifs majeurs du primaire et du collège.

La pratique régulière du jeu améliorera la perception, le sens des nombres. Pour réussir ses calculs, l'élève travaille les ordres de grandeur et le sens des opérations dont la maîtrise est également un objectif majeur.

La notion de démarche scientifique est très présente dans *Mathador* dans la mesure où, pour réussir ses calculs, il est souvent nécessaire d'effectuer différents tests calculatoires afin d'approcher au plus près le résultat à atteindre. On retrouve dans ces tâtonnements les notions d'ordre de grandeur et de sens des opérations.

Par les multiples tentatives de décompositions de nombres en sommes, différences, produits et quotients, l'élève s'initie à l'arithmétique et améliore sa perception des nombres.

On peut établir un lien avec les règles de priorité du calcul. Après avoir cherché et trouvé une solution, l'élève pourra essayer d'écrire son calcul de 2, 3 ou 4 étapes en ligne avec éventuellement des parenthèses.

Exemple :

Pour trouver 35 avec 1 ; 4 ; 7 ; 1 et 2

$7 + 2 = 9$ $9 \times 4 = 36$ $36 - 1 = 35$	$4 + 1 = 5$ $5 \times 7 = 35$	$7 + 1 = 8$ $8 \times 4 = 32$ $2 + 1 = 3$ $32 + 3 = 35$
Puis $(7 + 2) \times 4 - 1$	$(4 + 1) \times 7$	$(7 + 1) \times 4 + 2 + 1$

Dans les différentes étapes d'un calcul, mentalement ou par écrit, il faut parfois trouver le nombre manquant d'une égalité faisant intervenir une des 4 opérations. Il s'agit alors d'une initiation à la résolution d'équations pouvant prendre la forme d'opérations à trous au primaire puis progressivement de véritables équations avec inconnue au collège.

On peut envisager des séances de jeu avec possibilité d'utiliser la calculatrice. Les élèves se rendront compte de l'apport mineur de la calculatrice étant donné que l'aspect combinatoire l'emporte souvent sur l'aspect calculatoire : l'élève a plus souvent un problème de choix qu'un problème de calcul. La calculatrice pourra aider l'élève dans ses choix lorsque ce dernier n'a pas encore la maîtrise des ordres de grandeur.

Utilisation en classe

La question du « Comment jouer en classe ? » peut paraître anodine. Mais, en raison du changement total de cadre et de la gestion de la classe inévitablement modifiée, cette question n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire. De plus, elle est très importante car des conditions d'utilisation inappropriées pourraient décourager les acteurs, élèves comme enseignants. Une classe entière avec 25 à 30 élèves est évidemment un frein à l'utilisation de jeux. On pourra privilégier, lorsqu'elles existent, les heures en groupes réduits. La remédiation en petit groupe avec des élèves en situation d'échec ou de rejet est un lieu propice à l'utilisation de jeux. On peut aussi mettre en place, comme souvent dans le primaire, un coin jeu où les élèves peuvent se rendre à des moments bien définis ou lorsqu'ils ont terminé un travail. Cela suppose de la place et surtout une organisation dans l'emploi du temps plus compatible avec le primaire, où l'enseignant gère son temps sur une journée, qu'au collège avec son fonctionnement en tranches horaires.

Concernant *Mathador* et *Mathador Junior*, en n'utilisant que les dés, on peut faire des séquences courtes de calcul mental avec toute la classe : un ou deux élèves lancent les dés et annoncent à voix haute les nombres obtenus. L'enseignant les écrit au tableau et fixe la durée de la recherche. Toute la classe cherche en même temps. On peut alors établir un système de comptage de points du type 1 point par bonne réponse et faire le total des points à la fin de la séquence ou à la fin de la semaine. Cette formule offre une grande souplesse dans la gestion de la classe : l'enseignant choisit la durée qu'il veut y consacrer par le nombre de lancers des dés. Il peut aussi éventuellement choisir une opération imposée. Ce peut être l'occasion de travailler plus particulièrement une opération sur une certaine période. Cette formule avec les dés uniquement donne l'occasion de pratiquer des séances de calcul mental très vivantes. En effet, dans de nombreux cas, il y a plusieurs solutions. Il est alors intéressant de les écrire toutes au tableau afin que les élèves se rendent compte des différentes démarches pour arriver au même résultat.

Pour les adeptes du calcul mental et pour la beauté du jonglage, lors d'un lancer des 7 dés, on peut chercher à faire un *Mathador*. Cela signifie : obtenir le résultat en utilisant les 5 nombres sur les dés blancs avec les 4 opérations utilisées chacune une fois. En cas de système de comptage de points, un *Mathador* rapportera 1 point bonus supplémentaire.

Par exemple, pour trouver ***24 avec 2 ; 5 ; 17 ; 1 et 4***

On peut faire :

$17 + 5 + 2 = 24$	$2 \times 17 - (5 + 4 + 1) = 24$	$(5 + 1) \times 4 = 24$
$2 \times 5 + 17 - 4 + 1 = 24$	$(17 - 5) \times 2 = 24$	$(17 - 5) : 2 \times 4 = 24$

Mais $[(17 + 1) \times 4] : (5 - 2) = 24$ est un *Mathador* car les 5 nombres sont utilisés avec les 4 opérations.

L'OR DES FOUS
UN JEU DE STRATÉGIE

créé par Martine Simonet

Matériel

- Un plan de jeu quadrillé de 7 x 11 cases (voir Figure 1) ;
- 6 pions clairs et 6 pions foncés dont la face supérieure est concave pour pouvoir accueillir une pierre précieuse (des bouchons à vis de bouteilles en plastique conviennent très bien) ;
- 2 pierres « précieuses » (par exemple des pyrites, aussi nommées « or des fous ») ;
- 1 dé spécial à 6 faces (deux faces à 1 point, deux faces à 2 points et deux faces à 3 points).

Préparatifs

Placer les pions comme sur la figure 1 ; poser une pierre précieuse sur chacun des deux pions porteurs.

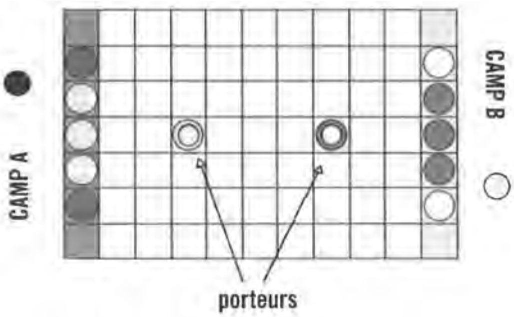


Figure 1

But du jeu

Ramener une des deux pierres précieuses dans son camp en exploitant au mieux les possibilités de déplacement des pions données par le dé.

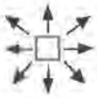
Règles du jeu

A tour de rôle, chaque joueur lance le dé et déplace un de ses pions, sauf le porteur (voir "déplacement des pions"). On ne peut pas passer son tour. On n'est pas obligé de déplacer la pierre précieuse, même si l'on en a la possibilité.

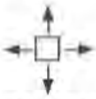
Déplacement des pions

Le porteur, c'est-à-dire le pion qui porte la pierre précieuse, ne peut pas se déplacer.

Les autres pions se déplacent du nombre de cases correspondant au nombre de points indiqués par le dé :



Lorsque le dé indique **1**, les pions se déplacent d'une case dans n'importe quelle direction (verticalement, horizontalement ou en diagonale (il y a 8 possibilités).



Si le dé indique 2 ou 3, ils se déplacent respectivement de 2 ou de 3 cases verticalement ou horizontalement. (Comme ils ne peuvent pas se déplacer en diagonale, il n'y a donc plus que 4 possibilités).

Un pion ne peut pas traverser une ou plusieurs cases occupées par des pions adverses. Il se peut donc qu'il soit bloqué. Par contre, il peut traverser des cases occupées par des pions de sa propre couleur.

Un pion ne peut aboutir sur une case occupée par un autre pion, sauf si ce dernier est le porteur de l'adversaire.

Déplacement d'une pierre précieuse

Pour déplacer une pierre en sa possession, il faut amener un de ses pions sur une case voisine, par un côté ou par un sommet, de la case sur laquelle se trouve son pion porteur. On peut ensuite transférer la pierre sur ce pion. Ce pion devient alors le porteur et ne peut plus se déplacer tant qu'il détient la pierre.

Si une chaîne de pions est créée en amenant un pion sur une case adjacente à celle du porteur, la pierre peut alors passer de pion en pion au gré du joueur.

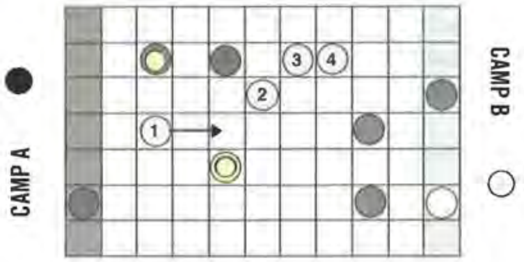


Figure 2: En déplaçant le pion no1 de deux ou de trois cases vers la droite, le joueur B a la possibilité de transporter sa pierre jusqu'au pion no1, 2, 3 ou 4.

Prise d'une pierre à l'adversaire

Pour s'emparer d'une pierre détenue par l'autre joueur, il faut amener un de ses propres pions sur la case occupée par le porteur adverse (il faut avoir le nombre exact de points correspondant au déplacement à effectuer). En cas de réussite, on remplace le pion porteur adverse par son propre pion sur lequel on pose la pierre prise à l'adversaire. Le pion adverse n'est pas retiré du jeu; il est renvoyé dans son camp, sur la case désignée par le preneur.

Fin de la partie

Le gagnant est le premier joueur à avoir ramené une pierre précieuse dans son camp.

Variantes

Débutant:
On ne peut pas s'emparer de la pierre qui est en possession de l'adversaire. Le gagnant est le premier à avoir rapporté sa pierre dans son camp.

Champion:
Les pions peuvent se déplacer dans n'importe quelle direction, quelle que soit la valeur indiquée par le lancer du dé. Ils peuvent donc se déplacer de 2 ou 3 cases en diagonale également.

GRAND N – NUMÉRO SPÉCIAL « POINTS DE DÉPART »

Robert Neyret et Gérard Yvroud
Rédaction de *Grand N*

[ndlr]. Nos collègues et amis de la revue *Grand N*[1] ont regroupé leurs « fiches pratiques » pour les degrés 3 à 5 de l'école primaire, conçues dans une perspective de « résolution de problèmes ». Elles se placent dans la ligne actuelle des conceptions de l'apprentissage, illustrée par de nombreuses propositions bien connues en Suisse romande, dont les moyens d'enseignement officiel et les problèmes du Rallye mathématique transalpin.
La rédaction de *Math-Ecole* remercie les auteurs de ces « points de départ » de les présenter à ses lecteurs.
Le recueil complet est disponible dans la « Boutique » de *Math-Ecole* en page 3 de couverture.

Depuis quelques années, la revue *Grand N* s'efforce de proposer à ses lecteurs de petits problèmes destinés à favoriser une activité de recherche chez des élèves, tout particulièrement ceux du cycle 3 de l'école élémentaire. À l'origine, ces fiches figuraient dans une rubrique intitulée « Pratique » qui est devenue « Points de départ » avec le numéro 58 de la revue.

Ces fiches veulent être à la fois :

- des points de départ pour les élèves, en leur proposant des activités attrayantes et stimulantes dans lesquelles ils vont s'engager avec plaisir ;
- mais aussi des points de départ pour les maîtres qui pourront trouver matière pour enrichir leurs séquences, en reprenant certains éléments de ces fiches, en les modifiant, en trouvant avec leurs élèves des prolongements possibles.

Grand N a souhaité regrouper la plupart de ces fiches dans un seul et même document afin de faciliter l'exploitation de ces petits problèmes par les enseignants. Vous pouvez ainsi retrouver la plupart des fiches publiées au fil des numéros de la revue. De plus, dans ce numéro spécial « Points de départ » chacune d'elles est accompagnée d'un texte court qui, outre des éléments de réponse du ou des problèmes, en présente l'intérêt, montre les choix sous-jacents effectués par les auteurs et propose généralement des prolongements possibles.

Points de départ et résolution de problèmes

Depuis plusieurs années, les programmes pour l'enseignement primaire insistent sur l'aspect résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques. Les nouveaux programmes pour l'école primaire[2], publiés en février 2002 rappellent que *« la résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées... »*. Le texte ajoute que *« le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs*

1. Abonnement : pour la Suisse, 34 par année. S'adresser à *Grand N*, IREM-UJF, BP 41, F - 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex ou par courrier électronique à : revue.grandn@ujf-grenoble.fr

2. B.O. Hors série n 1 (14 février 2002) *Horaires et programmes de l'école primaire.*

méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat. » (p. 82).

Dans le numéro 42 de *Grand N*, Dominique Valentin posait déjà la question : « *Est-il possible d'apprendre à résoudre des problèmes ?* » Elle signalait que « *des capacités sont nécessaires pour mener à bien la résolution d'un problème dont on ne connaît pas le modèle, capacités qu'il est souhaitable de développer dès que possible* ». Elle en dressait une liste non exhaustive :

« – *savoir ce que l'on cherche, être capable de se représenter la situation, se l'être appropriée ;*
- *avoir envie de (ou intérêt à) le résoudre ;*
- *être capable de se concentrer assez longtemps et aussi de se décentrer, de changer de point de vue ;*
- *être capable de mobiliser au bon moment les savoirs et les savoir-faire antérieurs ;*
- *être capable de garder la trace de ses essais, d'organiser, de planifier, de gérer l'information dont on dispose, qu'elle soit donnée d'entrée de jeu ou construite au fur et à mesure ;*
- *oser agir, risquer, se tromper ;*
- *pouvoir formuler, communiquer l'état de sa progression, mesurer l'écart au but, etc.*
- *être capable de valider, prouver... etc.* »

Roland Charnay, dans le numéro 64 « A la recherche du sens » précisait ce que l'on pouvait entendre par chercher en mathématiques : « *chercher la solution d'un problème dit d'application, c'est effectivement tenter de mettre la main sur la « notion qui s'applique » au problème posé, c'est la dégager de la panoplie des connaissances acquises pour l'utiliser directement. C'est un peu comme chercher, dans son trousseau, la clef qui ouvre telle serrure qui nous est présentée, quitte à devoir, parfois adapter la clef à cette serrure particulière. Il y a bien alors activité mathématique dans la mesure où la situation proposée doit être reformulée, modélisée à l'aide des concepts disponibles et où souvent un raisonnement est nécessaire.*

Mais chercher la solution d'un vrai problème, inédit, nouveau, c'est autre chose. C'est davantage encore construire, élaborer la solution. Aucune connaissance n'est directement utilisable, il faut essayer, bricoler, ajuster, recommencer... La clef n'est pas dans le trousseau, il faut la fabriquer. »

Les rédacteurs des fiches « Points de départ » ont voulu proposer aux élèves des activités leur permettant de développer les compétences énoncées par Dominique Valentin, en « cherchant » selon les différentes acceptions décrites par Roland Charnay.

Des tentatives diverses

Si la pratique des problèmes d'application a toujours fait partie des activités demandées aux élèves, les tentatives existent pour élargir la palette des problèmes : « *permettre la construction d'un rapport adéquat à l'activité mathématique, donc d'un sens de cette activité qui (épistémologiquement) se rapproche du travail du mathématicien*[3] ».

L'utilisation des « situations-problèmes », initiée essentiellement par G. Brousseau et son équipe à Bordeaux, reprise par nombre d'équipes de recherche, en particulier développée de manière continue sur l'ensemble du cursus élémentaire par l'équipe ERMEL vise, en faisant franchir un certain nombre d'obstacles aux enfants, à leur faire construire de nouveaux savoirs mathématiques.

La pratique du « problème ouvert »[4], surtout développée au collège est, elle, plus centrée sur la méthodologie de la recherche : faire des

3. CHARNAY Roland, 1999, « A la recherche du sens », *Grand N*, no 64, pp. 59-63.

4. CHARNAY Roland, 1993, « Problème ouvert, problème pour chercher », *Grand N*, no 61, pp. 77 à 83.

essais, conjecturer, produire des contre-exemples, valider une conjecture...

Les rallyes[5], notamment ceux réalisés par classe se sont beaucoup développés au cours des dernières années. Outre que les élèves sont placés en situation de résolution de problèmes, l'accent est mis sur les débats que ce type d'activités engendre et sur la capacité des élèves à travailler en équipe permettant au maître d'avoir un regard différent sur ses élèves.

Les travaux sur l'argumentation[6] qui se sont développés ces dernières années ont mis l'accent sur les échanges dans la classe et montrent tout l'intérêt de la formulation des solutions, de leur explicitation et des discussions sur leur validité. Le choix et l'aménagement de situations pour favoriser les débats ont donc été au centre des préoccupations de ces chercheurs.

Dans les « Ateliers de Recherche en Mathématiques » (ARM) expérimentés par Pierre Eysseric et présentés dans un article[7] de la publication de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Ecole Publique (APMEP) (Eysseric, 2001), article repris dans ce numéro, l'auteur distingue (p. 845) le sujet de recherche du problème de recherche qui doit susciter chez l'élève un certain nombre de questions. Il ajoute qu'un problème de recherche peut devenir un sujet de recherche *« s'il est clair pour tous les acteurs que l'on n'attend pas seulement la solution du problème, mais toutes les questions qu'il peut conduire à se poser. »*

5. GRUGNETTI, JAQUET, 1998, « La résolution de problèmes par classes », *Grand N*, no 64, pp. 61-69.

6. ERMEL, 1999, *Vrai? Faux?...On en débat! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3*, INRP, Paris

7. EYSSERIC, Pierre, 2001, *Les ateliers de recherche en mathématiques – Expérimentation dans les classes et formation des professeurs d'écoles.* Publication de l'APMEP no 434, pp. 838-858.

La recherche d'une fiche et sa caractérisation par mots clés

Toutes les fiches comportent un enjeu pour les élèves, qui doit susciter le désir d'entrer dans l'activité. La solution n'est jamais immédiate et la résolution peut prendre plus ou moins de temps. La grande diversité des fiches proposées montre que certaines sont plutôt du côté des problèmes d'application alors que d'autres vont être plutôt du côté des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution éprouvée. Certaines pourront éventuellement susciter un véritable questionnement de la part des élèves, transformant le problème de recherche initial en situation de recherche.

Sans vouloir préjuger de l'adaptation qui peut en être faire par un enseignant, il nous a paru intéressant d'essayer de caractériser les fiches par un certain nombre de mots clés qui permettent à celui-ci d'envisager a priori une utilisation possible. Deux grands groupes, qui ne s'excluent pas mutuellement conduisant à cinq mots clés, ont été retenus.

« Utilitaire » et « notionnel » : des fiches plutôt centrées sur les contenus

Un premier ensemble de fiches vise plutôt soit l'entraînement et le renforcement de savoirs mathématiques, soit la construction d'un concept mathématique. Nous les avons caractérisés par les mots clés « *utilitaire* » et « *notionnel* ». Voici pour chaque mot clé ainsi caractérisé, un exemple de fiche qui nous semble significatif.

Mot clé « Utilitaire »

L'activité relève de l'entraînement. Ces fiches conduisent à croiser des notions relativement maîtrisées et visent à permettre leur renforcement. Les différents éléments en jeu dans l'activité, chacun de manière isolée, ne doivent pas poser de problèmes aux enfants. Le temps nécessaire à la résolution n'est pas très long. Dans certains cas, les élèves peuvent prolonger l'activité en construisant une fiche sur le même modèle : confectionner de nouveaux « nombres croisés », chercher d'autres puzzles pour paver...

Exemple :

FICHE... NOMBRES CROISÉS

	A	B	C	D	E	F	G
1			■			■	
2	■			■			
3		■			■		■
4			■			■	
5				■			
6	■	■			■		■
7				■			

Horizontalement

1 Le périmètre d'un carré de côté 3 ; 100 : 4.

2 2 x 7 x 5 ; le nombre de minutes écoulées de 21 heures 25 minutes à 8 heures du matin.

3 180 : 4.

4 9 x 7 ; le nombre minimum de sachets de 4 cakes qu'il faut acheter pour que chacun des 202 enfants de l'école ait un cake au goûter.

5 Le nombre que l'on obtient avec 21 unités et 83 dizaines ; 5 x 43.

6 (10 x 10) – (8 x 8)

7 1000 : 8 ; (5 x 75) + (5 x 25)

Verticalement

A Le nombre d'heures dans un semaine.

B 41 – 14 ; 5 unités et 3 dizaines.

C Les 2 premiers chiffres d'un numéro de téléphone à Nice ; le prix, en francs, d' 1 kg 500 de viande à 90 francs le kilo.

D 440 : 8.

E 14 + 14 + 14 + 14 ; le nombre d'arêtes d'un cube.

F 2 x 2 x 2 x 2 x 2 ; un mètre et demi en centimètres.

G Le nombre de quart d'heures dans 3 heures 45 minutes ; le nombre de petits carrés de 2 cm de côté dans un carré de 10 cm de côté.

Mot clé « Notionnel »

La fiche propose une activité articulée autour d'une notion spécifique. Elle peut facilement participer à la construction de celle-ci, soit comme élément initial dans la progression, soit comme élément donné au cours de l'enchaînement de séquences consacrées à cette notion. Un ou deux mots clés précisent de quelle notion il s'agit. Son exploitation dans le temps est nécessairement limitée

Exemple :

FICHE... TABLETTE DE CHOCOLAT

Cette tablette de chocolat pèse 200 g. Tu as besoin de 75 g.

Que prends-tu ?

« Logique », « Essais », « Défi », des fiches plutôt centrées sur la méthodologie

Un deuxième ensemble comprend des fiches qui permettent principalement d'exercer plutôt des compétences méthodologiques de recherche. Certaines activités pourraient être conduites sur plusieurs jours, voire plusieurs semaines ; l'enseignant faisant se succéder temps de recherches personnelles, réalisées de manière individuelle ou en interaction avec d'autres élèves d'un petit groupe, moments de présentation de résultats partiels et phases de débat. Elles peuvent aussi engager un travail qui, laissé à l'initiative des élèves, peut s'apparenter à l'activité du chercheur avec des phases de travail plus ou moins informel, hors temps scolaire, et des phases d'échanges en classe.

Certaines fiches proposent un problème unique pour lequel la recherche de la solution conduit à expliciter un grand nombre de procédures ou de solutions, d'autres un problème qui permet de rebondir dans un autre contexte ou bien d'engager les élèves dans un autre problème du même type. Nous avons distingué trois types : « *logique* », « *essais* » et « *défi* ».

Mot clé « Logique »

Il s'agit d'une activité nécessitant d'articuler ou d'enchaîner des informations et comportant des pas de résolution de type déductif.

Exemple :

FICHE... LES TÉLÉPHONES

1 2 3 4 5

Sur le bureau d'un homme d'affaires très occupé, il y a cinq téléphones placés comme le montre le dessin.

Chacun d'eux est d'une couleur différente.
Le téléphone blanc n'est ni à côté du bleu, ni à côté du rouge, ni à côté du gris.
Le téléphone jaune n'est ni à côté du bleu, ni à côté du gris.
Le téléphone bleu n'est pas à côté du rouge.
Le téléphone gris est à droite du rouge.

A quel numéro correspond chaque couleur de téléphone ?

Mot Clé « Essais »

Le problème de recherche proposé oblige à faire des essais, émettre des hypothèses et regarder ce que cela donne, mettre en œuvre des stratégies diverses, connecter des notions entre elles...

Exemple :

FICHE... LES TROIS

3	3	3	3	=	2
3	3	3	3	=	3
3	3	3	3	=	4
3	3	3	3	=	5
3	3	3	3	=	6
3	3	3	3	=	7
3	3	3	3	=	8
3	3	3	3	=	36

Place entre les 3 un signe d'opération + , – , x , :, et des parenthèses pour obtenir une écriture correcte sur chaque ligne.

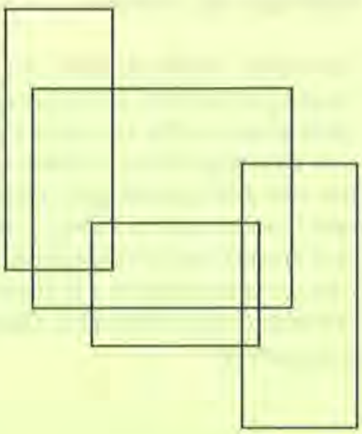
En procédant de la même façon, indique d'autres résultats possibles.

Mot clé « Défi »

Le problème proposé comporte une multiplicité de solutions qui fait que celui-ci s'inscrit obligatoirement dans la durée. Le défi provient du fait qu'on peut toujours se poser la question : est-ce qu'il y a une nouvelle solution ? Les solutions nouvelles sont alors valorisées par l'enseignant par exemple par un affichage dans la classe, celui-ci pouvant faire de temps en temps le point pour voir si des éléments systématiques ont été trouvés.

Exemple :

FICHE… RECTANGLES



Combien y a-t-il de rectangles dans cette figure ?

Une même fiche peut relever de un ou plusieurs mots clefs différents pris sur cette liste, par exemple, une activité peut relever principalement de « Logique », mais aussi de « Essais », notamment dans les prolongements proposés.

Enfin un second ensemble de mots clés précise certains contenus mathématiques sous-jacents. La liste suivante a été retenue : **dénombrement, calcul, proportionnalité, aire et périmètre, sous-figure, solide tracé, symétrie, figure superposable**.

Une fiche sera donc caractérisée par un ou deux mots de la première liste, complétée éventuellement par des mots clés de la deuxième liste. Les enseignants pourront donc choisir selon le type d'activités et suivant le contenu mathématique

Pour l'aider dans ce choix, chaque fiche est accompagnée d'un commentaire qui explicite son intérêt, précise les choix opérés par les rédacteurs et propose éventuellement quelques prolongements possibles. Les commentaires pour la fiche « rectangles » sont présentés ci-après à titre d'exemple.

Signalons pour terminer que des éléments de solution des différentes fiches sont regroupés à la fin du fascicule.

FICHE… RECTANGLES (Commentaires)

Mots clés : *défi, sous-figure*

Intérêt

Il s'agit d'identifier des sous-figures dans une figure complexe, en particulier voir qu'un rectangle peut se décomposer en plusieurs sous-rectangles. On fixe l'objectif d'en trouver le plus possible.

Remarque : La difficulté du travail d'identification de sous-figures est une difficulté qui a été pointée depuis plusieurs années par les évaluations nationales de CM2-6ème.

Raisons du choix de la disposition proposée

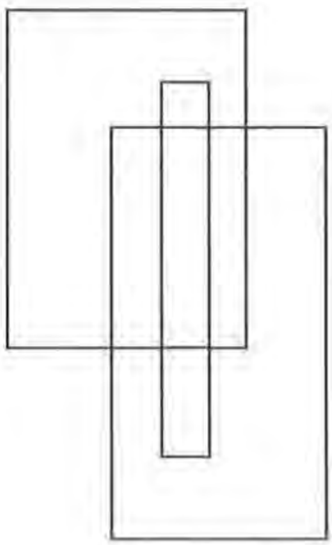
- le nombre de rectangles à trouver est raisonnable,
- mais celui-ci est suffisamment grand et la recherche suffisamment complexe.

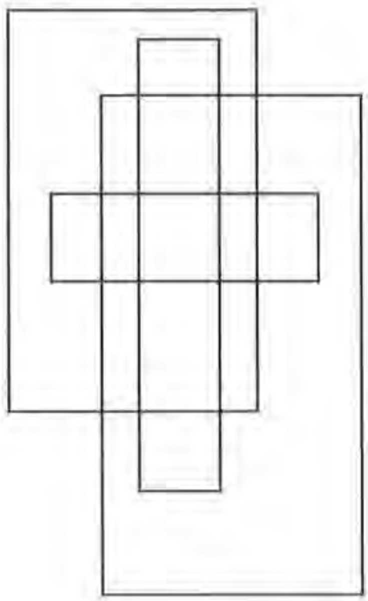
On espère que cela entraînera de la part des enfants des résultats différents ce qui motivera la relance de la recherche après une phase de bilan sur le nombre de solutions trouvées.

Plusieurs reproductions sont fournies aux enfants pour leur permettre de colorier tous les rectangles sans que certains se superposent. Cela demande cependant une organisation pour ne pas colorier plusieurs fois le même.

Prolongements possibles

Sur le plan méthodologique : trouver un moyen pour déterminer le plus possible de rectangles puis être sûr de les avoir tous obtenus. La configuration proposée ne se prête pas bien à des systématiques possibles ; si on veut travailler sur cet aspect, tout en conservant l'objectif principal indiqué plus haut, on peut proposer plutôt des configurations (qui comportent des éléments de régularités) du type suivant :





L'ANALYSE À PRIORI, UN OUTIL POUR L'ENSEIGNANT[1]

Roland Charnay[2]

INTRODUCTION

Le métier d'enseignant a fortement évolué. On peut, de façon un peu caricaturale, résumer cette évolution de la façon suivante. Pendant longtemps, le maître enseignait un savoir et, pour cela, présentait des solutions que l'élève devait ensuite appliquer dans des problèmes. Cette période est loin d'être révolue. J'entendais, récemment, un enseignant dire à des élèves qui hésitaient devant un problème : *« Vous connaissez pourtant la règle du jeu. Quand je vous donne un problème, ce n'est pas par hasard. Il a quelque chose à voir avec ce qu'on a étudié, il n'y a pas longtemps »*.

Aujourd'hui, on demande au maître d'enseigner en proposant d'abord aux élèves des problèmes dont la résolution nécessite d'inventer des solutions originales que le maître cherche ensuite à faire évoluer pour aboutir à des éléments de savoir nouveaux et à des solutions plus élaborées.

1. Cet article est tiré du troisième volume des actes des rencontres sur le Rallye Mathématique Transalpin, qui vient de paraître (voir pp. 63-64). Une traduction en italien figure dans cet ouvrage. La rédaction de *Math-Ecole* remercie l'association ARMT de lui laisser publier ces pages.

2. Roland Charnay, de l'IUFM de Bourg en Bresse, est bien connu en Suisse romande par ses nombreux passages dans nos cantons, par la collection ERMEL dont il est le directeur et par sa participation active dans le cadre du RMT qui se déroule régulièrement dans le département de l'Ain. Il est aussi l'un des auteurs du nouveau manuel « Cap maths », présenté dans ce numéro en pages 39 à 47.

On retrouve cela dans les nouveaux programmes pour l'école primaire, en France : *« Élaborées comme réponses efficaces à des problèmes, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes... Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des **solutions personnelles** élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure). »* L'élaboration de ***solutions personnelles*** précède ainsi l'apprentissage des ***solutions expertes***.

Dans ce contexte, l'enseignant est amené à prendre de nombreuses décisions : micro-décisions dans le cadre de la gestion d'une séance en classe (mais qui peuvent avoir des effets importants !) et macro-décisions, notamment dans l'organisation de son enseignement, dans le choix des situations... On peut ici retenir des décisions de trois types :

- celles qui sont relatives au choix et à l'aménagement des « bons » problèmes ;
- celles qui sont relatives à la gestion, dans les phases de mise en commun, des solutions personnelles élaborées par les élèves ;
- celles qui sont relatives aux moyens de faire évoluer ces solutions personnelles, en particulier vers les solutions expertes visées.

L'ANALYSE A PRIORI

Dans ce cadre **l'analyse a priori** constitue un des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant. Il n'existe pas à ma connaissance de définition reconnue de l'analyse a priori, bien que l'expression soit souvent utilisée.

Certains utilisent l'expression lorsqu'il s'agit de conduire « une analyse épistémologique et didactique qui précède nécessairement la construction d'ingénieries didactiques » : place et rôle de la notion en mathématiques, place dans l'enseignement des mathématiques, conceptions initiales des élèves, objectifs visés. Nous parlerions plutôt, dans ce cas, d'analyse préalable, l'analyse a priori se situant au moment du choix et de la conception d'une situation située à l'intérieur d'un processus déjà défini.

L'analyse a priori d'une situation est, pour nous, un travail d'hypothèses faites par l'enseignant, orientées vers :

1. les démarches, stratégies, raisonnements, procédures, solutions que l'élève peut mettre en œuvre dans la situation qui lui est proposée compte tenu de ses connaissances supposées : peut-il s'engager dans le problème ? a-t-il des critères pour savoir s'il a réussi ou non ?

2. les difficultés qu'il peut rencontrer et les erreurs qu'il peut commettre : en particulier, la situation permet-elle à l'élève d'engager ses conceptions erronées ?

3. l'étude des variables didactiques de la situation et les effets sur le travail de l'élève des modifications que l'enseignant peut apporter à la situation : en particulier, la notion ou la procédure visée est-elle l'outil le plus approprié pour résoudre le problème posé ?

4. l'étude des variables pédagogiques, liées à des choix d'organisation de la classe ou d'interventions de la part de l'enseignant, et de leurs effets sur le travail des élèves : en particulier, quelles sont les organisations ou les interventions qui feraient obstacle au travail souhaité de l'élève ?

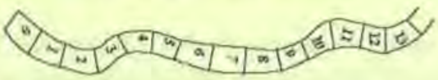
Cette définition est compatible avec l'usage qui est fait de cette expression dans le rallye mathématique, mais en allant plus loin, ce qui s'explique par le fait que, dans le cadre du rallye, l'exploitation didactique des problèmes proposés n'est pas pris en charge[3].

L'exemple d'un problème du rallye 2002 (*En sautant*, problème 4, finale 2002)

Rappelons l'énoncé de ce problème proposé pour les niveaux 3, 4 et 5 (de 8 à 11 ans).

EN SAUTANT

Une grenouille, un kangourou et un lièvre se déplacent sur la « piste » des nombres.



Ils partent tous de la case 0.

La grenouille fait toujours des sauts de trois cases, (elle arrive donc sur la case 3 après son premier saut), le kangourou fait toujours des sauts de six cases et le lièvre des sauts de quatre cases.

À son dernier saut, chaque animal arrive sur la dernière case du parcours.

Chaque animal laisse ses traces sur les cases où il pose ses pattes.

À la fin du jeu, il y a 9 cases qui contiennent à la fois les traces des trois animaux.

Indiquez le numéro de la dernière case de la piste.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Et l'analyse a priori qui accompagnait cet énoncé :

« **Domaine de connaissances**
– Arithmétique : multiples, suites de nombres

3. Ceci est un aspect que l'ARMT a mis en discussion, soit sous forme de débat interne – voir le thème de la rencontre de Parma (*Exploitations du RMT pour la classe : du problème à la situation didactique*), soit dans les cours de formation organisés dans le cadre de plusieurs sections.

Analyse de la tâche

- Remarquer que la grenouille, le lièvre et le kangourou aboutissent après chaque saut sur des cases notées par des multiples respectifs de 3, de 4 et de 6.

- Noter, sur un ruban numérique ou dans un tableau, les cases sur lesquelles chaque animal laisse ses traces (par des couleurs ou des lettres) et constater que celles qui portent les traces des trois animaux sont celles des multiples de 12 (ppmc de 3, 4 et 6). En déduire que, en comptant la case de départ, la dernière case du parcours sera la case 96 (8 x 12 ou 12 + 12 + 12 + ...).

- Ou dessiner un ruban des nombres et y noter toutes les traces des animaux et, par comptage des 9 cases portant les trois traces, trouver que la dernière case est celle du nombre 96.

Cette analyse propose quelques procédures correctes que les élèves peuvent utiliser pour résoudre ce problème. Elles peuvent être distinguées de la façon suivante (qui répond au point 1 de l'analyse a priori) :

P_1 : réalisation effective du déplacement de chaque animal (par exemple en utilisant des pions) ou schématisation de celle-ci (ce qui peut servir de procédure d'entrée dans le problème) : si on la mène à son terme, cette procédure nécessite de dessiner la piste jusqu'à la case 98 au moins ;

P_2 : simulation des sauts et écriture des étapes de chaque animal, par comptage de *n* en *n* ou par additions itérées du type : 3 + 3 + 3 + ..., puis recherche des 9 étapes communes ;

P_3 : procédure identique, en utilisant la suite des produits du type 3k... (utilisation implicite de la suite des multiples de 3 de 4 et de 6) ; l'utilisation des suites de multiples pourrait également être explicite ;

P_4 : constater que la 1e case commune (autre que 0) est 12 et que les suivantes vont de 12 en 12, et utiliser les procédures P_2 et P_3 avec 12 ;

P_5 : mathématiser le problème en cherchant explicitement le ppcm de 3, 4 et 6 puis chercher le produit par 8 de ce ppcm.

Le choix des nombres permet que toutes ces procédures puissent être mises en œuvre avec un coût raisonnable.

La notion de **procédure experte** dépend de ce qui peut être visé à un niveau donné, compte tenu des connaissances travaillées au niveau considéré. Dans le cadre des programmes français :

- la procédure P_5 peut constituer un niveau d'expertise pour la fin du collège,

- les procédures P_3 et P_4 peuvent être visées au cycle 3, c'est-à-dire au niveau auquel était proposé le problème pour la finale du rallye.

D'une certaine manière, l'attribution des points complète cette analyse, en signalant des réponses incomplètes ou des erreurs possibles (point 2 de l'analyse a priori).

« Attribution des points

4 Réponse correcte (96) bien justifiée (avec des calculs ou par un dessin détaillé ou liste des multiples de 12, ...)

3 Réponse 108 (la case 0 n'est pas comptée) ou 120 (cases d'arrivée et de départ non comptées) mais bien justifiées

2 Réponse 96 sans aucune explication ni dessin,
ou les neuf cases
ou une ou deux erreurs dans le comptage ou le marquage des sauts

1 Plus de deux erreurs dans le comptage ou le marquage des sauts

ou réponse 108 ou 120 sans explications

0 Incompréhension du problème

Les erreurs peuvent concerner :

- le choix d'une procédure inappropriée (codage 0),
- la gestion des procédures P1 ou P2 (codages 1 et 2),
- la non-prise en compte des cases départ et/ou arrivée (codages 3)

Les erreurs dans la mise en œuvre des procédures P_3 ou P_4 (calculs de multiples) ou P5 (recherche du ppcm) ne sont pas envisagées explicitement.

L'intérêt de ce premier travail d'analyse a priori est évident pour l'enseignant et donc pour la formation des enseignants. On peut le décliner dans 4 directions :

- aide à l'observation : la mise à plat des différentes procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre permet d'identifier plus rapidement celles qui sont effectivement utilisées par les élèves, y compris celles qui éventuellement n'ont pas été anticipées ;

- aide à la classification : à partir de l'observation réalisée pendant le travail des élèves, il devient possible d'opérer un classement des procédures ;

- aide à l'organisation et à la gestion de la mise en commun : choix de l'ordre dans lequel seront examinées les procédures, choix des productions les plus significatives, possibilités de rapprochement entre différentes productions, choix des élèves à solliciter...

- aide à l'aide : l'analyse a priori permet également d'anticiper les aides à apporter aussi bien pendant le travail de recherche (mise à disposition d'une piste plus longue pour certains élèves, par exemple) et surtout les évolutions possibles entre procédures qui peuvent être considérées comme voisines (allusion à la notion de Zone Proximale de Développement).

L'analyse a priori est également un outil indispensable pour envisager les aménagements à apporter à la situation pour provoquer l'apprentissage des élèves

Celle-ci permet d'envisager les différents problèmes qui peuvent être posés à partir de cette situation, par exemple :

- les sauts sont donnés, on cherche les cases communes dans un intervalle donné ;
- une ou plusieurs cases communes sont données, on cherche les sauts possibles.

Elle permet également d'identifier les variables didactiques de la situation et l'influence des choix possibles sur le travail des élèves (point 3 de l'analyse a priori). Ici, on peut considérer :

- la présence ou non de tout ou partie de la piste,
- la valeur de la case d'arrivée,
- les valeurs des sauts.

Sur une idée voisine, voici par exemple les choix effectués dans un ouvrage que j'ai mis au point pour des élèves de CE2[4], (Voir annexes) avec l'objectif d'amener les élèves à « comprendre a x b comme la position atteinte en se déplaçant, à partir de 0, de a en a (b fois) ou de b en b (a fois) », pour des élèves qui connaissent déjà la multiplication.

Les choix sont marqués dans les 3 étapes de la situation :

4. Cap Maths, CE2, guide des activités et fichier de l'élève, Hatier, 2002. Voir ANNEXES: supports de travail pour l'enseignant et pour les élèves.

- **étape 1 :** case arrivée : 24 ; sauts de 3, de 4 et de 5 ; piste suggérée, mais non visible en totalité
    - ◊ permettre à tous les élèves d'entrer dans la situation
    - ◊ laisser le choix de la procédure
    - ◊ y compris celle qui consiste à dessiner la piste
- **étape 2 :** case arrivée : 72 ; sauts de 8, de 9 et de 10 ; piste suggérée, mais non visible en totalité
    - ◊ dessiner la piste devient plus coûteux, mais pas impossible
    - ◊ le choix de nombres comme 8 et 9 rend les calculs de 8 en 8 ou de 9 en 9 un peu plus difficiles (mais pas insurmontables) et peut inciter au recours à la multiplication (table, d'autant plus que 8 x 9 = 72 !), le choix de 10 peut faciliter ce recours à la multiplication
    - ◊ ce choix est fait pour que procédures additives et procédures multiplicatives soient utilisées et que, au cours de la mise en commun, l'équivalence puisse être mise en évidence
- **étape 2 bis :** le guide pour le maître suggère de poser la même question avec la case 160 et des sauts de 16 en 16, 4 en 4 et 20 en 20 si trop peu de procédures multiplicatives ont été utilisées à l'étape 2
- **étape 3 :** entraînement individuel (fichier)
- **étape 4 :** nouveau problème (recherche des sauts, la case d'arrivée étant connue), l'utilisation de procédures de déplacements effectifs ou additives devient maintenant beaucoup plus coûteuse.

On voit bien, pour l'auteur du dispositif, la nécessité de ce travail d'analyse a priori.

Ajoutons enfin l'analyse liée aux variables pédagogiques (point 4 de l'analyse a priori) :

- **étape 1 :** individuelle pour permettre à chacun d'entrer dans la situation et, pour l'enseignant, noter ceux qui, en particulier, confondent valeur du saut et nombre de sauts (le guide du maître suggère qu'une piste effective puisse être mise à disposition de ceux qui n'ont aucune procédure d'entrée)
- **étape 2 :** par équipes de deux pour favoriser échange sur les procédures et contrôle mutuel

EN FORMATION

L'intérêt en formation est double :

- montrer que certaines tâches importantes de l'enseignant se situent hors de la classe, et ne se limitent pas au travail de correction ;
- préparer l'enseignant à anticiper les effets de certains de ses choix, l'analyse a priori nécessitant de les situer non seulement par rapport à l'organisation du savoir (c'est ce que fait plutôt l'analyse préalable) mais par rapport aux interactions entre l'élève et le savoir : élève et savoir sont ainsi au centre de l'analyse a priori.

Plusieurs modalités de formation peuvent être proposées, illustrées à partir de l'exemple choisi :

- analyse a priori d'une situation (points 1 et 2) ;
- choix d'une mise en œuvre de la situation, notamment organisation de classe, matériel, aide (point 4) ;
- préparation de la mise en commun ;
- confrontation avec des travaux d'élèves : confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori ;
- modifications à apporter à la situation, en fonction d'un objectif d'apprentissage (point 3) ;
- analyse d'une proposition d'enseignement (cf. Cap maths CE2 – annexes) et décryptage des choix opérés par les auteurs.

ANNEXES

1. La fiche guide (Extrait du guide des activités pour le maître, Cap Maths, Hatier, 2002)

40 min — individuel, puis par équipes de 2

matériel par équipe :
- *fiche recherche 23*
- feuilles pour chercher

Activité 3 Rendez-vous sur une piste (1)

Il s'agit de trouver les différentes valeurs de sauts qui permettent d'atteindre une position donnée et de déterminer le nombre de sauts correspondant. Progressivement, le recours à la multiplication sera reconnu comme pertinent pour résoudre ce type de problème.

❶ Résolution individuelle du problème 1

Ce premier problème doit permettre à chaque élève de s'approprier la situation, au besoin en expérimentant effectivement les déplacements sur la piste.
Il est important de préciser au départ que le rendez-vous est réussi si les deux personnages se retrouvent exactement sur la même case et non sur des cases voisines.

Lors de la mise en commun, on se limite à enregistrer les réponses et procédures utilisées, sans privilégier de procédure particulière. C'est le problème suivant qui devrait inciter à recourir aux résultats connus de la table de multiplication.

Le premier problème a été choisi pour favoriser le plus grand éventail possible de procédures :
- déplacement effectif ;
- recours à l'addition itérée (ou au comptage de n en n), procédure en général la plus fréquente ;
- recours à la multiplication (résultats connus de la table).

Certains élèves confondent « longueur d'un saut » et « nombre de sauts ». Le recours à une expérience ou à une schématisation peut aider à lever cette ambiguïté.

❷ Résolution par équipes du problème 2

Les élèves doivent garder une trace écrite de la manière dont ils ont procédé car ils auront à en rendre compte lors de la mise en commun.
On s'intéresse cette fois-ci plus à l'efficacité des procédures qu'à leur variété.

Par exemple, certains auront encore compté ou additionné de 8 en 8 ou de 9 en 9 (ce qui est fastidieux), alors que d'autres auront utilisé le fait que $8 \times 9 = 72$, ce qui valide d'ailleurs les propositions de deux des personnages : 8 sauts de 9 et 9 sauts de 8 !
D'autre part, la facilité de calcul avec 10 aura permis à certains élèves de remarquer que $7 \times 10 = 70$ et $8 \times 10 = 80$, et que l'on ne peut donc pas atteindre 72 en sautant de 10 en 10.

Les autres recherches peuvent être proposées aux élèves plus rapides.

Dans ce 2e problème, la taille du nombre à atteindre et le fait de travailler par deux devraient inciter à recourir au calcul, voire favoriser l'utilisation de la multiplication.

S'il apparaît que trop peu d'élèves ont utilisé la multiplication pour résoudre le 2e problème, on proposera un 3e problème en augmentant sensiblement la taille du nombre à atteindre
Par exemple : 160, en proposant des sauts de 16 en 16, de 4 en 4 et de 20 en 20.

❸ Exercice sur fichier

- *fichier de l'élève p. 106, exercice 2*

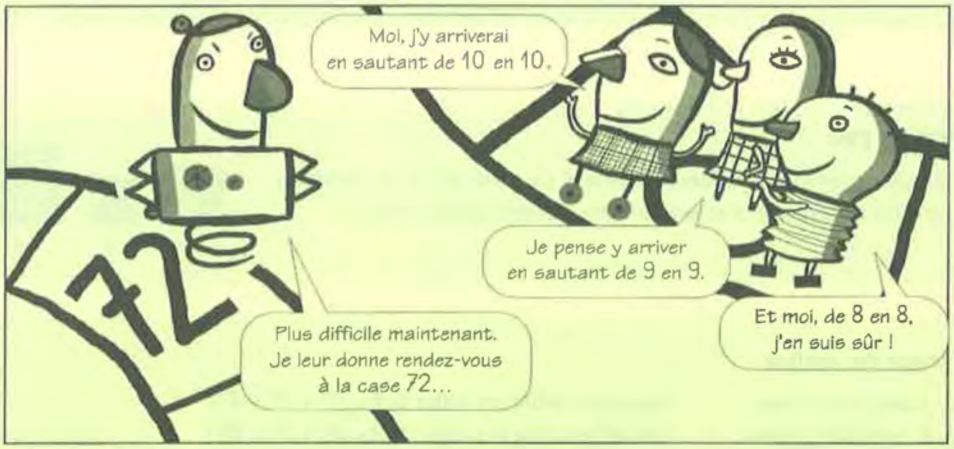
2. La fiche guide (Extrait des fiches photocopiables du guide des activités, Cap Maths, Hatier, 2002)

Fiche recherche 23

Rendez-vous sur une piste (1)

- Millie a-t-elle raison ? Si elle a raison, combien devra-t-elle faire de sauts pour rejoindre Idix ?
- Géomie et Plix pourront-ils rejoindre Idix à la case 24 en partant de la case 0 ?

Si oui, combien de sauts devront-ils faire chacun ?



- Ont-ils raison ?
- Trouve d'autres sauts possibles pour arriver à 72.

Aides, conseils

Tu peux écrire toutes les positions par lesquelles va passer chaque personnage, mais ce sera long.
Cherche des solutions plus rapides.

quir ne 11 • séance 2

Autre recherche

Trouve tous les sauts possibles qui permettent d'atteindre 54 en partant de 0.

3. L'extrait du fichier de l'élève (Extrait du fichier de l'élève, Cap Maths, Hatier, 2002)

Problèmes

2 Millie, Géomie et Idix partent tous de 0.

- Millie, Géomie et Idix arriveront-ils à la case 60 ? En combien de sauts ?
- Quelles sont les autres sauts possibles qui permettent d'arriver à 60 en partant de 0 ?

Travail de grec

En utilisant la règle (non graduée), l'équerre et sans faire de calcul, construire un carré qui ait pour aire la somme des aires des trois carrés donnés.

a b c

Le temps des cerises

1, 2, 3 nous irons au bois…	Quel est le chiffre des unités de $A = 1^{23} + 2^{31} + 3^{12}$?
4, 5, 6, cueillir des cerises…	Quel est le chiffre des unités de $B = 4^{56} + 5^{64} + 6^{45}$?
7, 8, 9, dans un panier neuf…	Quel est le chiffre des unités de $C = 7^{89} + 8^{97} + 9^{78}$?

[ndlr] Ces problèmes sont tirés de *Panoramath 3* (Voir p. 3 de couverture), ils viennent du « Rallye d'Auvergne »et sont destinés à des élèves de troisième et de seconde (degrés 9 et 10). Cette compétition n'est pas individuelle mais par classes entières, Les élèves ont à résoudre sept problèmes en deux heures. Les solutions doivent être rédigées. Une des solutions est présentée sous forme d'affiche.

Pour chaque problème, le jury évalue :
- l'exactitude de la (ou des) réponse(e) aux questions posées,
- l'argumentation,
- la présentation.

Le premier problème nous paraît intéressant pour rappeler le sens géométrique de la relation de Pythagore. Le second, contrairement à ce qu'on pourrait penser en première analyse, se résout de tête ou avec quelques notes. *Solutions dans le prochain numéro*

MAGICO

Martine Simonet et François Jaquet
Comité de rédaction de Math-Ecole

Magico est un jeu d'addition (soustraction) et de réflexion pour 1 joueur, qui se présente sous deux versions : *Magico 4* et *Magico 9*.

Magico 4 s'adresse plutôt aux élèves des premières années de la scolarité primaire et *Magico 9* aux plus grands. Le matériel se compose d'une planche dans laquelle sont creusés 4 ou 9 trous disposés en carré, de billes rouges et de billes bleues, et de nombreuses cartes problèmes. Le but du jeu est de déposer dans les creux le nombre exact de billes rouges valant 1 unité et de billes bleues valant 5 unités, de manière à obtenir les sommes indiquées sur la carte choisie.

Magico 4

Sur les cartes figurent les sommes de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale. Sur certaines d'entre elles, est aussi indiquée la valeur des billes à placer dans l'un des 4 creux. Une suite d'additions lacunaires ou de soustractions permet de trouver facilement la solution pour les 3 autres creux. (Voir *Figure 1*). Dans cet exemple, les trois valeurs cherchées se déterminent par les opérations :

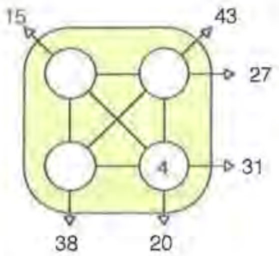


Figure 1

4 + ... = 20	ou	20 − 4 = 16
4 + ... = 15	ou	15 − 4 = 11
4 + ... = 31	ou	31 − 4 = 27

et le contrôle se fait à l'aide des trois sommes non encore utilisées :

11 + 16 = 27
11 + 27 = 38
27 + 16 = 43

Il est bien évident que les données sont redondantes et qu'on pourrait ici, par exemple, supprimer le 27 et le 20 de la donnée originale[1].

Le raisonnement suivrait alors une chaîne de déductions : découverte du 11 par 4 + ... = 15, puis découverte du 27 par 11 + ... = 38 et du 16 par 27 + ... = 43 ou par 11 + ... = 27

Le jeu se complique lorsqu'il n'y a pas d'indications autres que les sommes. La stratégie à adopter est alors différente. (Voir *Figure 2*)

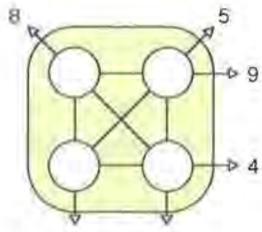


Figure 2

Le jeune élève peut essayer un nombre, au hasard, puis un autre, puis encore un autre en vérifiant à chaque fois si « ça marche ». Par exemple, avec 3 dans la case inférieure droite, il obtient directement, de gauche à droite puis de haut en bas : 5 ; 2 ; 1 ; nombres qui ne satisfont aucune des autres ligne, colonne ou diagonale. Mais avec 2 dans la case inférieure, il obtient une solution (elle est unique) 6, 3, 2 qui satisfait toutes les conditions.

1. Puisqu'il n'y a que trois nombres inconnus, on pourrait même ne conserver que trois informations permettant de déterminer un système de trois équations à trois inconnues.

Comme dans le cas précédent, l'élève a effectué une succession de soustractions ou additions lacunaires, mais précédées du choix d'un premier nombre et suivies de vérifications obligatoires.

La différence est encore plus notable si on donne des nombres plus grands, comme ceux de la *Figure 3*, par exemple[2].

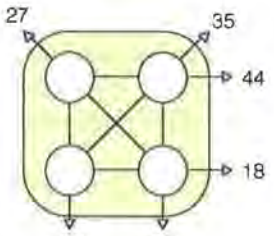


Figure 3

Si l'élève choisit 12 pour la case du bas à droite, il peut calculer directement les trois autres nombres 15, 13 et 6, pour constater que, par exemple, la somme de la première ligne est 28 au lieu de 44. Un second essai, 14 par exemple, donne 13 et 11 dans la première ligne, dont la somme devient 24.

L'élève peut ainsi continuer à choisir d'autres nombres au hasard, jusqu'au moment où il tombera sur la solution. Il développe alors des compétences ou attitudes du genre « patience », « ténacité ».

Mais s'il a constaté qu'en remplaçant 12 par 14 dans son premier choix, il a fait passer la somme de la première ligne de 28 à 24, alors qu'elle devrait être de 44, il essayera probablement de remplacer le 12 par un nombre plus petit cette fois-ci, comme 11, pour constater que la somme de la première ligne passe de 28 à 30 (16 + 14). En choisissant 10 on obtient 32 sur la première ligne...
On peut donc continuer ainsi. On peut aussi y aller en faisant des pas plus grands.
On peut même anticiper en choisissant directement 4 = 10 – 6 pour être quasi certain d'obtenir 44 = 32 + 12 = 32 + (2 x 6).
En effet, le choix de 4 en bas à droite donne 23, 21 et 14 dans les autres cases, qui vérifient toutes les conditions.

En complément des suites de soustractions et additions, l'élève a alors fait des essais, au hasard, puis de manière organisée, pour s'aventurer dans le domaine des conjectures et de leurs vérifications. Il y a là un saut non négligeable dans le niveau des objectifs.

Il faut encore remarquer que les trois exemples précédents ont été traités sans matériel, comme si le problème était résolu mentalement ou par écriture de nombres et d'opérations. Le jeu *Magico* est proposé avec des billes rouges (valant une unité) et des billes bleues (pour un groupe de 5 rouges).
Il y a donc d'autres stratégies de calcul avec les billes, plus proches des additions complémentaires que des soustractions, avec une pratique des échanges « 1 contre 5 ».

En conclusion de cette analyse a priori, on constate que les savoirs mathématiques en jeu de *Magico 4* sont multiples : ils vont des techniques d'échanges et des calculs additifs à une initiation à une démarche scientifique lorsque les nombres sont plus grands et rendent fastidieuse la méthode par essais au hasard. Il y a donc, en perspective, de nombreuses possibilités de différenciation et aussi d'observation des démarches des élèves en vue d'une évaluation formative.

Magico 9

Avec la disposition de 3 x 3 cases, la difficulté est plus grande car il faut décomposer les nombres indiqués sur les cartes en sommes

2. A propos de cet exemple et du précédent, il y a des informations superflues ou redondantes : il y a quatre nombres inconnus et six sommes données. En les choisissant judicieusement, on pourrait retirer deux sommes (de manière à obtenir un système de quatre équations à quatre inconnues linéairement indépendantes.)

de trois termes et non plus de deux comme dans *Magico 4*. Une autre différence réside dans le fait qu'une grille de *Magico 9* offre de nombreuses solutions. (Voir *Figures 4a* et *4b*)

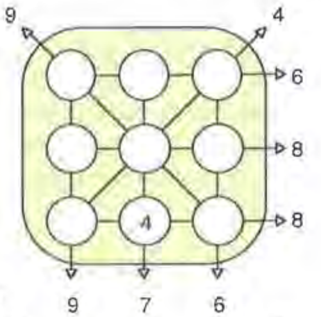


Figure 4a

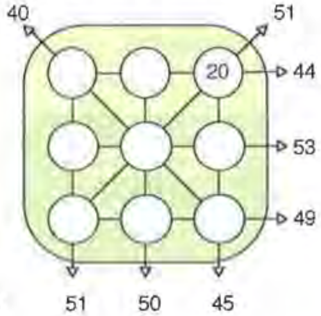


Figure 4b

Les solutions de *Magico* s'expriment en nombres naturels si on veut les représenter par des billes entières. Pour réduire les possibilités, on peut exiger que tous les nombres soient non nuls. Dans la *Figure 4a*, on voit qu'il y a peu de choix possibles pour la case centrale : 2 ou 1 et que les nombres d'une des diagonales doivent être 1, 1 et 2. On s'en sort assez rapidement pour arriver à la solution : 4 ; 1 ; 1 (ligne 1), 4 ; 2 ; 2 (ligne 2) et 1 ; 4 ; 3 (ligne 3).

Mais on est passé ainsi à côté d'une propriété intéressante de la case centrale, qui est entièrement déterminée.

Nous proposons au lecteur de chercher cette propriété et de trouver combien la grille de la *Figure 4b* a de solutions, en nombres naturels et non nuls.

La réponse sera donnée dans le prochain numéro, et sa recherche permettra aux lecteurs intéressés d'imaginer les développements de ce jeu *Magico 9*.

Les conclusions seront les mêmes pour *Magico 9* que pour *Magico 4*. Derrière des tableaux anodins et des démarches qui semblent répétitives en première impression, se cachent de nombreux calculs, des stratégies hypothético-déductives et, pour ce dernier jeu, des développements intéressants sur les systèmes d'équations linéairement indépendants, qui vont bien au-delà des programmes de l'école primaire.

Deux remarque encore, à propos du matériel : Comme c'est le cas bien souvent pour les jeux en bois, *Magico* coûte cher (une cinquantaine de francs). D'exécution solide, c'est un jeu qui durera longtemps. Le seul inconvénient vient des petites billes rondes qui s'échappent insidieusement pour aller rouler aux quatre coins de la classe. On peut toutefois pallier facilement ce problème en plaçant le jeu au centre d'une grande boîte qui recueillera les fuyardes, ou en remplaçant les billes rondes par des perles carrées.

On pourrait se dire aussi que le matériel n'est pas nécessaire, étant donné que toutes les démarches décrites dans cet article ont pu se mettre facilement sur papier. Ce serait négliger alors les potentialités de la manipulation pour tous les élèves qui, dans une première phase tout au moins, ne jouent encore pas avec des nombres, mais avec des billes sur les cavités d'une planchette de bois. Ce support leur sera vraisemblablement utile lorsqu'il s'agira de passer à l'écrit pour les validations et toutes les phases ultérieures d'enregistrement et de communication des résultats.

Le lecteur trouvera encore d'autres suggestions dans le livret explicatif fourni avec le plateau de jeu, les pions et les cartes-défis. Ce jeu peut être commandé en Suisse à l'adresse suivante :

SOLA DIDACT, rue des Finettes 54,
CH-1920 Martigny, tél. : 027 722 54 64
Ou par e-mail : soladida@omedia.ch

LA « BOUTIQUE » DE *MATH-ÉCOLE*

De nouveaux ouvrages dans notre boutique (Voir p. 3 de couverture) :

40 JEUX LITTÉRAIRES

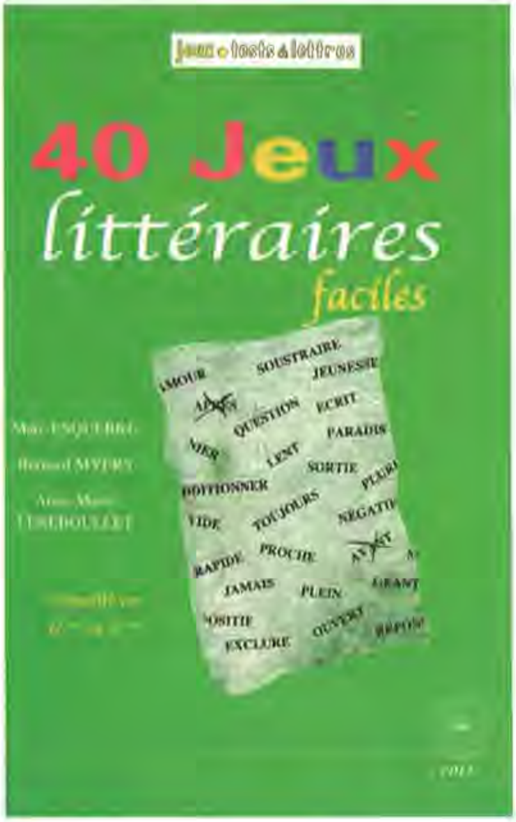
Éditions Pole – Paris 2003
Marc Esquerre, Bernard Myers, Anne-Marie Lebouillet

Voici deux petits ouvrages – de 96 pages chacun – de la collection « Jeux, Tests et Lettres » correspondant à ceux que l'on connaît bien sur les énigmes mathématiques tirées des problèmes de la FFJM : « 50, (52, 7x7) jeux et énigmes mathématiques faciles (pour tous, pour l'école...) »

Le premier s'intitule ***40 jeux littéraires faciles*** et est conseillé pour des élèves de 11 à 12 ans, le second ***40 jeux littéraires pour tous***, pour des élèves de 13 et 14 ans. Les auteurs, Marc Esquerre, Bernard Myers et Anne-Marie Lebrouillet, annoncent en avant-propos que « ce petit recueil s'adresse à tous les esprits ludiques aimant allier rigueur, fantaisie et créativité... Mais ne vous y trompez pas, les jeux dont vous allez vous divertir ne sont pas de simples exercices d'application destinés à compléter un cours de langue ou de littérature. Ils sont l'occasion de découvrir, par des détours inattendus, les mécanismes logiques, les surprises, les richesses de la langue française... Pour venir à bout de la plupart des jeux, il vous faudra être méticuleux dans l'exécution des consignes, attentif, précis, astucieux, cultivé. [...] »

Après avoir résolu quelques-uns de ces jeux, nous partageons les propos précédents et sommes certains que la logique et la rigueur nécessaires pour ces recherches littéraires ne sont pas étrangères à celles qu'il faut mettre en oeuvre pour de nombreuses énigmes mathématiques.

Les textes sont bien illustrés, par Guillaume Legoupil. Un index thématique et un index des écrivains cités, en fin de volume, en facilitent l'usage pédagogique.



Voici un exemple de ces jeux littéraires, tiré de 40 jeux littéraires faciles :

Formules magiques

PAUL
Une salangane ne fait pas la véraison !

PAULINE
Comme vous avez raison.

PAUL
Et les subsides ne font pas la félicité !

PAULINE
Il y a lieu de s'en féliciter !

PAUL
Le vêtement ne fait pas le...

PAULINE
Tant mieux !

Paul transforme des proverbes connus à l'aide de synonymes peu courants :

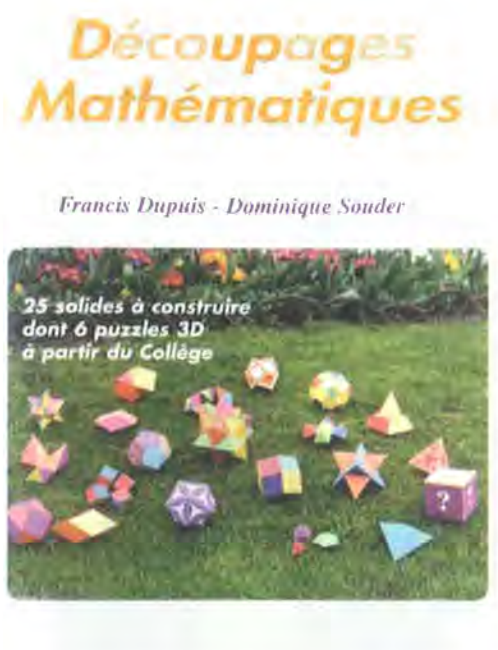
salangane = hirondelle, véraison = printemps, donc « Une hirondelle ne fait pas le printemps ». On remarque aussi que le vers suivant rime avec le précédent (raison – véraison).

En utilisant des synonymes (éventuellement avec l'aide d'un dictionnaire), vous pourrez ainsi « traduire » les vers successifs et, à l'aide de la rime, trouver le mot manquant du dernier proverbe.

Quel mot complète le dernier proverbe ?

Solution :
Le deuxième proverbe est « l'argent ne fait pas le bonheur » et son commentaire : « à la bonne heure ». Le troisième commence par « vêtement », dont un synonyme est « habit », amenant à « l'habit ne fait pas le moine ». On doit donc trouver un synonyme du mot « moine ». Pour faire la rime avec « mieux », la solution est le mot « religieux ».

DÉCOUPAGES MATHÉMATIQUES
Éditions Archimède
Hypercube Hors Série No 2, 1999
Francis Dupuis, Dominique Souder



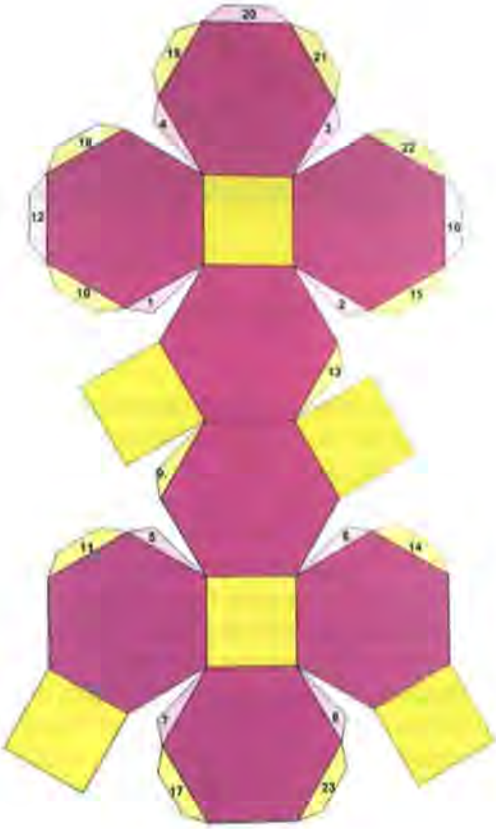
les 25 solides de *Découpages mathématiques*

Ce premier cahier – d'une soixantaine de pages, format A4, dont la moitié de planches à découper et plier – est suivi d'un deuxième, ***Nouveaux découpages mathématiques***, de Francis Dupuis (Editions Pentaèdre et ACL, 2003) d'une quarantaine de pages ; le tout en quadrichromie, sur papier fort, permettant de réaliser une quarantaine de solides de très belle facture. Nous avons vu des centaines d'enfants construire ces polyèdres au dernier Salon des jeux et de la culture mathématique de Paris. Les résultats sont remarquables, pour autant qu'on respecte les instructions de montage, très précises et détaillées : découpage soigneux, marquage des plis et collage avec précaution à la colle instantanée dans l'ordre indiqué.

Accessibles dès le collège, ces constructions – surtout celles du premier cahier, aux dimensions plus grandes que celles du deuxième – peuvent déjà être réalisées par des enfants de 10 ans.

Les découpages sont accompagnés de textes sur les différents types de polyèdres, de descriptions, d'inventaires et de questions. Les enseignants y trouveront un support d'activités pour enrichir leurs cours ou animer des clubs, ateliers...

Une belle introduction à la géométrie dans l'espace où les aspects ludiques et esthétique s'allient aux observations et aux acquisitions de connaissances sur les polyèdres.



MAGIE & MATHS
Éditions Pentaèdre & ACL, 2001
Dominique Souder

Cet ouvrage de 64 pages reprend des articles publiés dans « Le Jeune Archimède », « Tangente » et Hypercube », réorganisés en 30 séances de magie regroupant plus de 100 tours. La difficulté est graduée, mais chaque séance est indépendante des autres.

Le jeune lecteur (dès 10 à 12 ans) est identifié au petit-fils de *Papy Georges* qui fascine son auditoire de ses tours, donnant au jeune garçon le goût de les comprendre et de se les approprier. Ce dernier s'entraîne avec divers bonheurs devant sa grande sœur et ses amies. Les magiciens n'aiment pas trop dévoiler leurs tours, mais Papy Georges, ancien prof de maths, souhaite avant tout faire réfléchir et comprendre.

Ces tours ne nécessitent aucune habilité particulière, le lecteur peut apprendre à les réaliser sans effort, grâce aux conseils et explications, avec un peu de baratin et de suspense pour la présentation.

Quelques thèmes extraits de l'index des tours de l'ouvrage :

À la bonne place – Quatre tours qui reposent sur le même principe : une carte se retrouve à une place bien déterminée dans le paquet, sans que les spectateurs s'en doutent.

Papy joue des tours – Jeux de dés, par exemple : le magicien a les yeux bandés, le spectateur jette trois dés et suit une série d'instructions (opérations arithmétiques) du magicien qui permettent à ce dernier de retrouver les faces indiquées par les trois dés.

Ne perdez pas le fil – Quatre tours sur le thème des nœuds qui se font ou se défont de manière inattendue.

Nombres et logique – Trois tours de logique et de calcul avec des algorithmes étonnants permettant d'éviter des suites fastidieuses de comptages ou de calculs.

LA PERSPECTIVE
Hypercube, Numéro spécial 39 – 40, 2002

Le titre complet de ce numéro spécial de la revue Hypercube est ***la PERSPECTIVE dans la poche avec le KANGOUROU***. 48 pages quadrichromie + planches et matériel.

Nous sommes entièrement d'accord avec la notice de la dernière page de couverture :

« Réalisez plus de 40 expériences, grâce aux 16 planches à découper pour découvrir tous les secrets de la perspective, et leurs ressorts mathématiques.

Perspective cavalière, bien sûr, mais aussi axonométrie, perspective conique, double projection, utilisation des points de fuite, plongée et contre-plongée, anamorphoses, perspective accélérée et ralentie, trompe l'œil, images stéréo, autostéréogrammes... Chaque fois, c'est l'expérience qui ouvre la voie et conduit à se poser des questions et à énoncer des principes, comme ce fut le cas historiquement, pour comprendre les projections parallèles, les projections centrales, et effleurer la géométrie projective.

Une mine d'activités pour faire de la géométrie, au collège comme au lycée, et une excellente occasion de donner leur véritable place aux mathématiques dans les travaux interdisciplinaires... »

Les auteurs ont choisi de remettre les règles géométriques des perspectives, qui ne figurent que rarement dans les programmes scolaires, dans le contexte mathématique qui leur donne toute leur généralité et leur puissance, sans pour autant tomber dans une théorie trop compliquée pour de jeunes lecteurs. Pour cela, ils ont choisi de commencer par le commencement, c'est-à-dire par l'expérience : on construit, on vise, on découpe, on reporte ... puis on s'émerveille et l'on s'enthousiasme devant ces constructions magiques, passant progressivement de l'utilisation maladroite à la maîtrise technique, puis à tous les jeux et illusions que permet une compréhension plus profonde.

F.J.

INFORMATION « JEUX »

Dans la même collection que la série des jeux RUSH HOUR, il existe d'autres puzzles casse-tête tout aussi passionnants. *Lunar Lockout*, en dépit de son design peu attirant au premier abord, est particulièrement ludique. Il a déjà séduit de nombreux joueurs dès 10 ans et des spécialistes du jeu.

De petit format et conçus pour que l'on puisse tout ranger dans la boîte-plateau de jeu, ces puzzles casse-tête s'emportent aisément partout. Ils ne prendront que très peu de place dans le coin-math de votre classe tout en ayant beaucoup de succès auprès de vos élèves !

LUNAR LOCKOUT – Art. 40.0695

Vous êtes un astronaute. Vous vous trouvez sur le plateau d'atterrissage de votre vaisseau spatial et vous voulez y entrer. Comme vous naviguez dans l'Espace, vos déplacements ne s'arrêtent que lorsque vous rencontrez un obstacle, en l'occurrence des robots. Parviendrez-vous à placer judicieusement vos robots pour réussir à atteindre le sas d'entrée sans vous perdre définitivement dans l'Espace ?

LEAPIN' LIZARDS – Art. 40.0696

Aidez chaque lézard à retourner sur son rocher !

Chaque lézard est assis sur le mauvais rocher. Il aimerait rejoindre le rocher de sa propre couleur le plus vite possible, mais il peut sauter vers une place libre uniquement s'il existe un chemin qui y mène.

Ces jeux peuvent être obtenus, en Suisse, à l'adresse suivante :

LA TOUPIE – Jeux éducatifs
CH-1324 Premier
Tél : 024 453 10 11
E-mail : jouetspre@hotmail.com

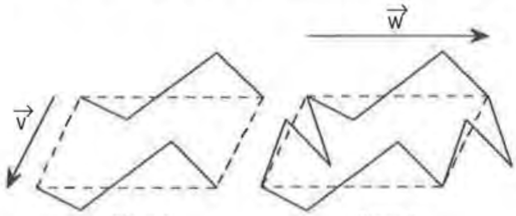
LE COIN DES PAVAGES (3)

Michel Brêchet

Les pavages par rotations d'un quart de tour et par symétries centrales ont retenu notre attention dans les numéros 207 et 208 de la revue. Pour ce troisième épisode, nous nous intéresserons au recouvrement du plan à l'aide d'une même figure, par translations uniquement. L'illustration de la page de couverture de ce numéro s'apparente à un tel recouvrement. S'apparente seulement, car deux figures sont en jeu, et non une seule. Construites à partir d'un réseau quadrillé, elles ont des formes très proches l'une de l'autre, mais elles ne sont pas superposables.

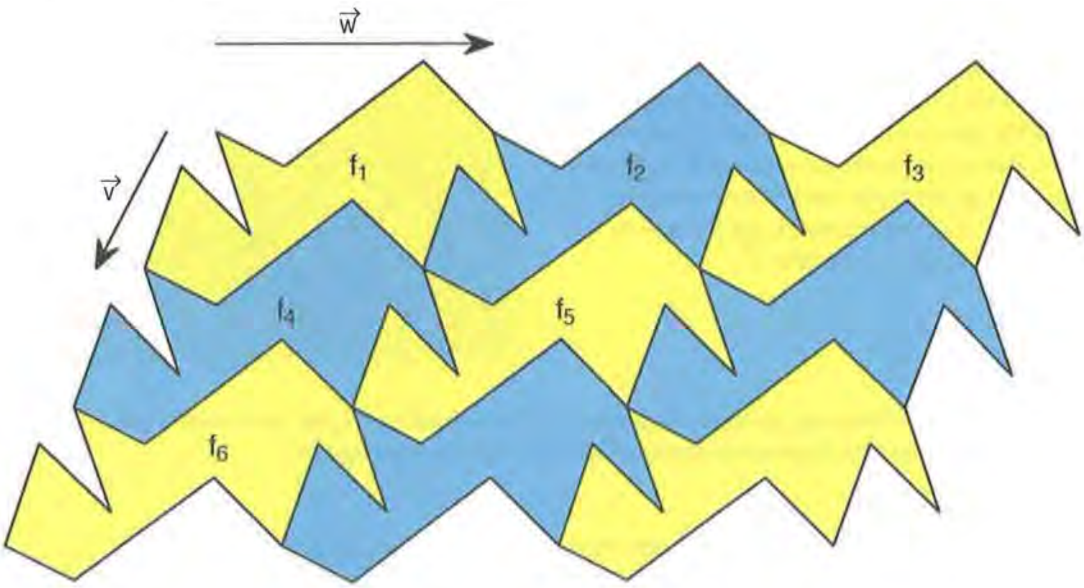
Les pavages par translations : comment faire ?

- Construire un parallélogramme.
- Déformer de la même façon deux de ses côtés opposés (étape 1, selon le vecteur $\vec{v}$).
- Faire de même avec l'autre couple de côtés opposés (étape 2, selon le vecteur $\vec{w}$).
- Paver le plan par translations.



Etape 1 Etape 2

Motif obtenu



Analyse du motif

Par construction, les polygones voisins d'une même ligne ou d'une même colonne sont images l'un de l'autre par translation :

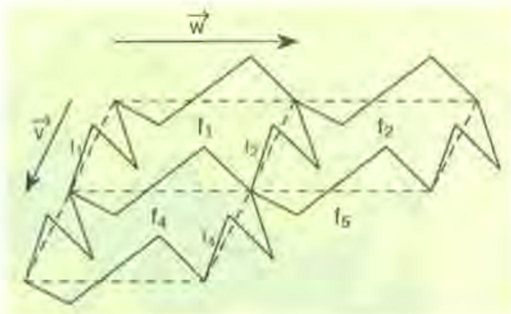
Première ligne	**Deuxième ligne**	...	**Première colonne**	**Deuxième colonne**	...
$f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_5$	...	$f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_5$	...
$f_2 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_3$	...	...	$f_4 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_6$	...	...
...	...	...	...	...	...

En conséquence, la composée de deux translations étant une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des translations données, on a : $f_1 \xrightarrow[T(2\cdot\overrightarrow{w})]{} f_3$, $f_1 \xrightarrow[T(2\cdot\overrightarrow{v})]{} f_6$, $f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})]{} f_5$, ...

Pourquoi ça marche ?

Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux car deux lignes correspondantes sont images l'une de l'autre par translation.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, par construction, la ligne l_2 est image de l_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ et la ligne l_4 est image de l_1 par translation de vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Par conséquent, l_4 est l'image de l_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

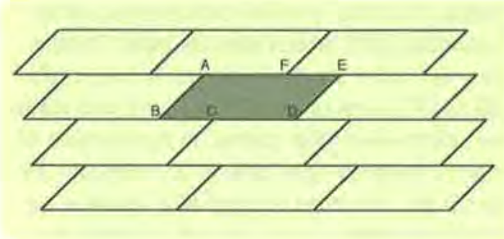


On peut bien sûr faire une démarche analogue en considérant que f_5 est construite à partir de f_4. Ce même type de raisonnement s'applique également aux autres figures.

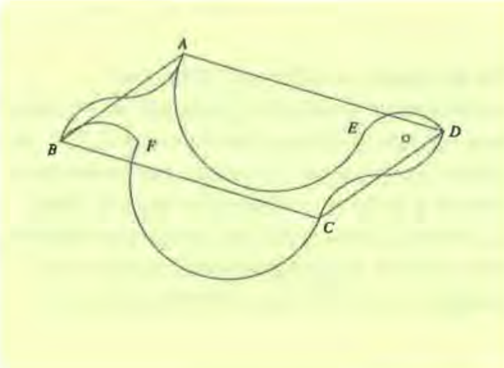
Selon la méthode décrite jusqu'à présent, deux lignes brisées opposées du pavé de base sont toujours images l'une de l'autre par une seule translation. Cependant, des parallélogrammes « décalés » pavent également le plan. Du coup, il est possible de déformer une paire de côtés opposés d'un parallélogramme – mais seulement une paire – selon deux translations et non une seule.

Dans ce pavage, on peut considérer :

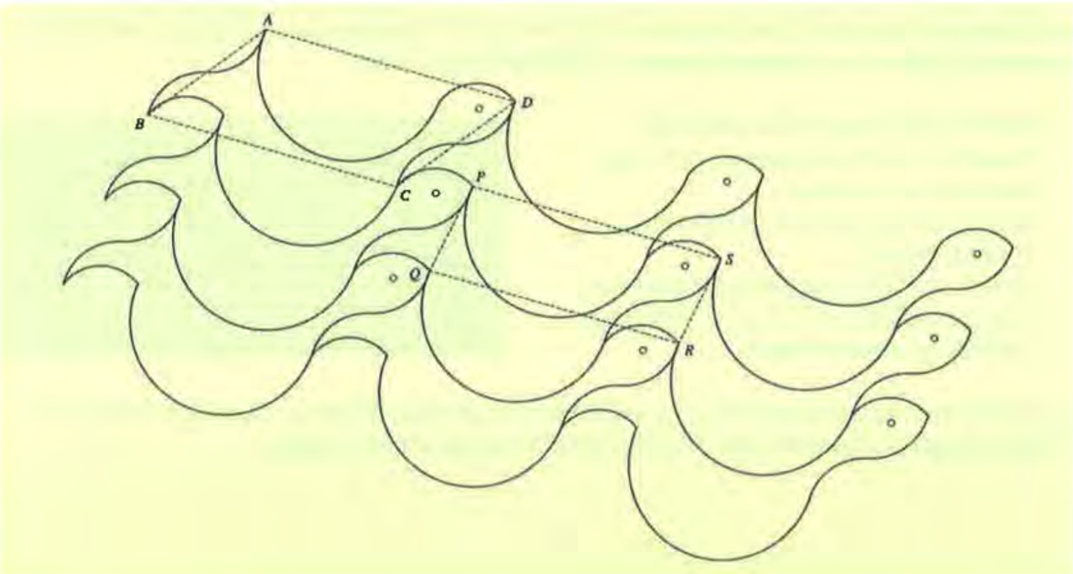
- que les côtés AB et ED sont images l'un de l'autre par une seule translation, de vecteur $\overrightarrow{AE}$;
- qu'une translation amène le segment AF sur le segment CD et qu'une une autre translation amène FE sur BC.



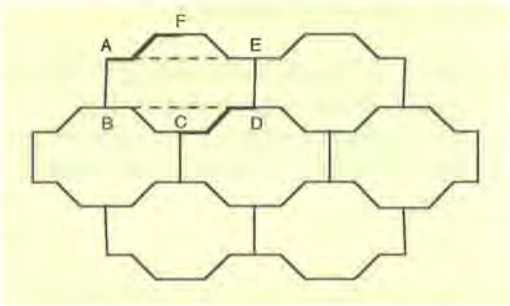
En exploitant ce résultat, qui à première vue paraît bien banal, on peut recouvrir sans trou ni superposition une surface plane. Dans l'exemple ci-contre, la ligne courbe d'extrémités A et B et celle d'extrémités D et C sont images l'une de l'autre par une seule translation, de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Les déformations des côtés AD et BC ne sont en revanche pas images l'une de l'autre par une translation unique. En effet, l'arc AE a pour image l'arc FC et l'arc ED a pour image l'arc BF. Deux translations sont donc en jeu dans cette ultime phase.



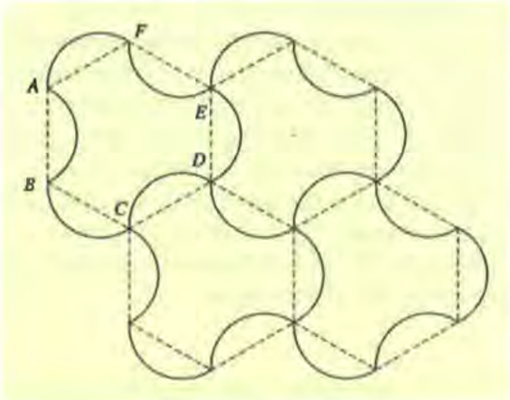
On peut ainsi générer facilement des pavages fort divers les uns des autres. Leur analyse montre en dernier ressort qu'ils auraient aussi pu être créés – mais avec plus de subtilité dans le cas où l'on souhaite obtenir des pavés figuratifs – selon la méthode décrite en début d'article, à savoir par le biais de deux translations de vecteurs parallèles aux côtés du parallélogramme de base (ici le parallélogramme PQRS).



Relevons encore que de nombreuses places publiques sont recouvertes de pavés images l'un de l'autre par translations. Ici, les côtés AB et DE du rectangle ABDE n'ont subi aucune déformation. Par contre, la ligne brisée AF a pour image la ligne brisée CD, alors que FE va sur BC. En outre la ligne AFE possède un axe de symétrie, ce qui accroît le degré de régularité du pavage.



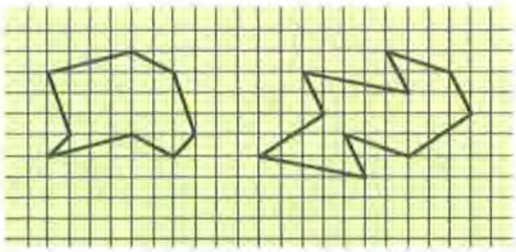
On terminera ce petit tour d'horizon, certainement incomplet d'ailleurs, en signalant que la page de couverture du numéro 207 de *Math-Ecole* montre un pavage par translations réalisé à partir d'un hexagone régulier. Mais on pourrait aussi y voir un pavage par rotations d'un tiers de tour, car les déformations sont images deux à deux par rotations de 120°.



En classe

La translation est certainement la transformation du plan la plus facile a appréhender, car elle conserve les directions et les longueurs. Nul besoin d'une grande gymnastique de l'esprit pour reconnaître deux figures images l'une de l'autre par un tel mouvement. Créer un motif périodique à l'aide d'une seule figure et par translations uniquement est donc une activité qui est à la portée des élèves dès l'âge de 13 ans, voire bien plus jeunes. En travaillant sur du papier quadrillé et en utilisant au besoin une paire de ciseaux, ils pourraient tour à tour :

- paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre, ou pourquoi pas d'une autre de leur invention ;
- décrire les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- générer une figure permettant de paver le plan par translations, s'ils n'ont pas accompli cette tâche précédemment.



La recherche d'un pavé adéquat laisse aux élèves une certaine liberté de manœuvre. C'est sans doute la phase la plus motivante de cette petite séquence d'apprentissage.

« CAP MATHS »

COMPARAISON AVEC LES OUVRAGES ROMANDS « MATHÉMATIQUES 1P – 4P »

François Jaquet

Il y a une dizaine d'années, la collection *ERMEL* a soulevé un grand intérêt par son approche nouvelle des apprentissages mathématiques. Nos moyens d'enseignement romand des degrés 1 à 4 s'en sont largement inspirés : « des problèmes pour... », « la bande numérique », le « calcul réfléchi », viennent de là, comme de nombreuses idées d'activités. Mais, si les ouvrages d'*ERMEL* contenaient une séquence complète de situations, problèmes et propositions d'activités pour les apprentissages numériques, ils n'étaient pas vraiment conçus sous la forme « livre du maître », « manuel et fichier de l'élève », prêts à soutenir une gestion de la classe.

La nouvelle collection *Cap maths*[1] franchit ce pas. Sous la direction de Roland Charnay, une équipe de Bourg-en-Bresse s'est mise au travail et l'éditeur Hatier trouve ainsi un prolongement d'*ERMEL* dans le champ de l'édition scolaire française, où la concurrence est forte. La lecture et l'analyse de *Cap maths* nous donnent, a posteriori, des éclairages nouveaux sur nos ouvrages romands. La comparaison met en évidence les choix des uns et des autres, à partir de conceptions proches de l'apprentissage. C'est aussi une occasion de se rendre compte de l'évolution de moyens d'enseignement dans une perspective socio-constructiviste au cours de ces dix dernières années, si l'on part des ouvrages d'*ERMEL*, publiés dès le début des années 1990.

Une plate-forme commune.

Apprendre en résolvant des problèmes : tout le monde s'accorde aujourd'hui sur cette position. Tout apprentissage nouveau doit être élaboré en réponse à une question que l'élève s'est approprié. Cette conception est affirmée avec force dans chacun des ouvrages de *Cap maths*, elle est partagée par les concepteurs des ouvrages romands, tout comme sa première conséquence : *Apprendre en analysant ses propres démarches, ses erreurs, à partir de son propre cheminement* qui en appelle une deuxième : *Apprendre avec les autres : analyser ses démarches, ses erreurs, ne peut se faire seul : l'échange, la confrontation avec les autres élèves et avec l'enseignant sont indispensables.*

On relèvera au passage que le rôle de l'enseignant est ici relevé explicitement, en complément de celui des autres élèves, dans la confrontation et les échanges. Mais d'un côté et de l'autre, les mises en commun et les moments de synthèse sont considérés comme essentiels pour favoriser les apprentissages. *Cap maths* les propose dans son guide des activités, en pointant en particulier ce qui doit être mis en évidence au cours de ces phases.

Une troisième conséquence : *Apprendre en s'entraînant, en se familiarisant personnellement, progressivement, avec de nouveaux éléments de connaissance* n'est pas une nouveauté par rapport aux conceptions de nos ouvrages romands, à l'exception peut-être du « progressivement » qui est proposé dans *Cap maths* par l'organisation du parcours et des activités différenciées de la phase d'entraînement.

La quatrième conséquence est, en revanche, une nouveauté : *Apprendre en faisant le point,*

1. *Cap Maths.* CP, CE1, CE2, CM1, CM2 (à paraître) Guide des activités, livre de l'élève et fiches photocopiables Roland Charnay, Georges Combier, Marie-Paule Dussuc, Dany et Paul Madier, Hatier 2000 - 2003

en s'arrêtant sur ce qu'on a appris, ce qu'on sait, ce qu'on devrait encore travailler. À cet effet, *Cap maths* propose des temps d'arrêt avec des activités d'évaluation et de bilan du type « ce que j'ai appris », « ce que je sais faire », « je fais le point »...

Les objectifs d'apprentissage, vers une description plus approfondie

Pour chaque degré, les objectifs sont décrits largement et organisés en cinq grands domaines correspondant à ceux du programme officiel national : résolution de problèmes, nombres et numération, calcul, espace et géométrie, grandeurs et mesures. A partir du CM1 (4e année) on parle aussi de compétences visées, en parallèle avec les contenus d'enseignement, tout en sachant bien que chaque formulation d'objectif ou de compétence conduit à des interprétations fort diverses d'un maître à l'autre, comme d'ailleurs des auteurs des programmes à ceux des manuels et aux enseignants.

Cap maths consacre plusieurs pages de son guide des activités à éclairer les contenus de ses cinq domaines, du point de vue mathématique, en cherchant à décrire les étapes essentielles de la construction des connaissances par l'élève, comme le font aussi les pages théoriques de nos livres du maître et les descriptions plus générales de nos commentaires didactiques de Suisse romande.

Au niveau des contenus, les programmes français et romands ne sont pas très différents pour l'école primaire, à l'exception des fractions et des nombres décimaux pris en compte un à deux ans plus tôt outre Jura. À ce propos, *Cap maths*, dans ses « choix fondamentaux » de CM1, propose une première étude des fractions pour préparer celle des nombres décimaux, insiste sur la compréhension de la valeur des chiffres selon leur position dans l'écriture à virgule et rend attentif au fait que la « lecture courante » des fractions et des décimaux ne doit pas être évitée à tout prix, mais utilisée avec prudence.

C'est au niveau des liens entre objectifs, compétences, contenus, activités, représentations de l'élève que se dessine une évolution. Chaque activité est située par des tableaux dans le cadre général du programme, ses buts sont rappelés dans le plan de chaque séance, ils sont repris encore dans les analyses a priori et dans les propositions de différenciation. D'autres commentaires encore la situent par rapport aux apprentissages connexes, précédents et futurs. Il y a là un souci évident de préciser le « quand » et le « pourquoi » de chaque activité et de justifier ainsi une progression raisonnée dans le parcours du plan d'études.

Le calcul, une évolution sensible

Dans le domaine du calcul, *Cap maths* accorde une priorité aux opérations mentales, par rapport à l'usage de la calculatrice et des techniques opératoires. La distinction est claire dans les tableaux d'objectifs d'apprentissage et de progression : il y a d'abord les problèmes, au cœur des apprentissages numériques (nombres et calcul). Le calcul mental – au sens de résultats mémorisés et automatisés – a un rôle purement instrumental. Le calcul réfléchi a une position centrale et fait intervenir clairement les propriétés des opérations. Les algorithmes écrits subsistent (*Les techniques opératoires usuelles ont toujours leur place à l'école, mais leur apprentissage doit être orienté vers la compréhension des mécanismes en jeu...*) et la calculatrice est là pour effectuer des opérations avec des grands nombres. « L'écriture et le langage arithmétique » apparaissent aussi explicitement dans certains tableaux d'objectifs ou dans les « choix fondamentaux ». On insiste sur le passage des « procédures personnelles » aux « procédures expertes » dans la résolution de problèmes, sur le fait que les opérations peuvent avoir plusieurs sens pour les élèves et sur la signification des symboles opératoires.

Dès le CM1, la résolution mentale de « petits problèmes » est introduite dans les activités pour éviter certaines difficultés de lecture d'énoncés et d'écriture d'opérations et pour centrer l'attention des élèves sur le traitement des relations entre les données.

Notons au passage un fait intéressant dans le domaine des écritures : *Cap maths* propose de se passer du signe opératoire de la division euclidienne à l'école primaire (voire plus tard), obstacle important et source de confusions avec celui de la division (:) dite « exacte » (opération inverse de la multiplication).

Si nos ouvrages romands, comme d'ailleurs la collection *ERMEL*, distinguent aussi clairement les différents aspects du calcul et des opérations, *Cap maths* innove résolument en proposant des activités régulières, pour les élèves, à l'appui de ses choix exposés dans le livre du maître. Chaque séance d'apprentissage commence par une courte séquence de calcul mental et d'entretien de connaissances abordées antérieurement, sous des formes très variées et plaisantes, qui n'ont rien à voir avec le drill ou une répétition mécanique.

Les documents de l'élève

L'élève dispose d'un « fichier », de format A4, avec une reliure à anneaux, en quadrichromie. (Dès le CM1, il s'agit d'un livre relié, de format légèrement inférieur). Un autre document de fiches photocopiables permet au maître de préparer certains matériels pour les élèves : tableaux, figures à agrandir, réseaux, cartes à découper, fiches « différenciation » sur le modèle de celles du fichier de l'élève... Enfin, dès le CE1 (2e année) un petit cahier de référence, le « dico-maths », est à disposition de l'élève pour retrouver les termes utilisés et les quelques règles simples vues au cours de l'année.

Un examen superficiel ne permet pas de distinguer le fichier de l'élève d'un autre manuel traditionnel pour l'école primaire. Il faut une analyse un peu plus approfondie pour comprendre que ce document de l'élève n'est qu'un complément à des séquences vécues précédemment en classe. Des rubriques distinguent les activités « d'entretien », des « recherches » et des « exercices ». On remarque aussi que, pour chaque degré il y a des pages intitulées : « ce que j'ai appris » et d'autres : « ce que je sais faire » qui apparaissent périodiquement. Chacun des cahiers contient aussi une « banque de problèmes » organisés en quinze thèmes, chacun sur une ou deux pages. Enfin des activités sous forme graphique plus ludique apparaissent cinq fois dans chaque fichier sous la rubrique « Math-magazine ».

Pour revenir à notre analyse comparative, on trouve dans les documents de l'élève de *Cap maths* beaucoup de supports d'activité qu'on pourrait rencontrer dans nos manuels et fichiers romands. Les problèmes et recherches proposés par nos collègues français paraissent cependant plus abordables que les nôtres en ce sens que leur phase d'appropriation par les élèves est manifestement plus courte. Une autre différence, essentielle cette fois-ci, vient de la présence très régulière d'activités d'entretien ou d'exercices dans le fichier de l'élève et, surtout, de son organisation chronologique selon un parcours annuel.

Le guide des activités

Comme on l'aura bien compris au vu de ce qui précède, le guide des activités est le « pivot » de la méthode *Cap maths*, et correspond en cela à notre « livre du maître ». Selon ses auteurs, *l'enseignant y trouvera une description détaillée de l'ensemble des activités et de leur mise en oeuvre, des indications de durée, la liste du matériel à préparer, un commentaire pédagogique.*

Après les pages d'introduction, la description détaillée des objectifs, l'exposé des conceptions didactique, le cœur de l'ouvrage est constitué de 15 chapitres, correspondant chacun à une période d'une « quinzaine », conçue elle-même autour d'un ou deux objectifs principaux et découpée en 8 « séances » de 60 minutes. L'enseignant dispose donc, dans son guide, de 120 séances d'enseignement/apprentissage décrites sur une à deux pages, divisées chacune en un moment d'entraînement des apprentissages antérieurs et un moment de construction ou de consolidation de nouveaux apprentissages.

La huitième séance de chaque quinzaine est consacrée à une réflexion sur ce qui a été fait précédemment selon deux moments : « ce que j'ai appris », comme évocation des principaux apprentissages de la quinzaine écoulée et « ce que je sais » comme évaluation des acquis.

L'enseignant trouve encore dans son guide, pour chaque séance, des pistes de différenciation, des activités complémentaires, des indications sur les exercices différenciés à adapter selon les modèles du fichier de l'élève et du matériel photocopiable, ainsi que les suggestions pour l'exploitation de la banque de problèmes qui figure dans le fichier de l'élève. Enfin, le guide propose encore des bilans périodiques (« je fais le point ») correspondant aux activités du fichier de l'élève et des commentaires sur les pages « Maths magazine ».

Les partis pris de *Cap maths*

Le choix de la prise en charge par le moyen d'enseignement d'une progression sur l'année, organisée sur 15 périodes de 8 séances est évidemment à l'opposé de ce que les ouvrages romands proposent. Lorsqu'on se rappelle la vivacité des débats de nos commissions de rédaction et de lecture des moyens d'enseignement romands dès que l'on parlait de « fil rouge », on peut imaginer les réactions suscitées chez nous par l'aspect « programmation » de *Cap maths.* Mais avant de juger, on peut essayer de s'engager dans la problématique de nos collègues français. Le titre « Les partis pris de *Cap maths* » est emprunté aux pages d'introduction de l'ouvrage. Les auteurs y expliquent leurs choix. En voici un extrait :

- ***Une exigence :*** *faciliter le travail de l'enseignant en lui offrant un outil « clé en main »*
  La progression sur l'année est prise en charge… . les activités sont décrites « séance par séance », le matériel nécessaire est fourni…

- ***Une volonté :*** *offrir un outil adaptable*
  L'enseignant peut modifier, aménager ou même remplacer telle activité que nous proposons, par exemple en utilisant les activités complémentaires. …
  Il peut enfin mettre en place des dispositifs d'aide personnalisée : c'est bien entendu, sur le terrain, dans chaque classe, que les choix les plus pertinents doivent être faits à ce sujet. Mais des outils sont proposés : pistes de différenciation dans les commentaires… fiches « différenciation » photocopiables…

- ***Un choix :*** *développer deux outils de calcul essentiels, le calcul mental et l'usage de la calculatrice*
  La calculatrice est devenue l'instrument de calcul du quotidien et, bien utilisée, c'est un outil pédagogique. …
  Parallèlement, le calcul mental doit être une préoccupation prioritaire. Sa maîtrise est nécessaire aussi bien pour traiter des situations de la vie courante que pour contrôler les résultats fournis par une machine ou encore pour être « à l'aise » avec la plupart des notions mathématiques.

- ***Un objectif :*** *rendre l'élève autonome dans la résolution de problèmes*
  …

Les termes du contrat sont clairs et exposés honnêtement. À première vue, ces quatre

« partis pris » semblent, à l'exception du premier, correspondre à ceux de nos ouvrages romands. Examinons-les un à un.

Le « clé en main »

Si, l'enseignant romand pouvait choisir ses moyens d'enseignement, il est fort à parier que l'outil « clé en mains » serait souvent un argument décisif. En France, et ailleurs, c'est même considéré comme une exigence, autant commerciale que pédagogique : on choisit le manuel qui paraît le plus adapté à ses besoins de gestion de sa classe et à ses conceptions de l'apprentissage[2]. *ERMEL* et *Cap maths* les deux seules collections françaises d'option socio-constructiviste ne représentent ainsi qu'une part estimée à 20 % du marché, la majorité des autres étant de type traditionnel : le « cours », à la charge du maître ou de certaines pages du manuel, où l'on « montre », puis les activités de l'élève où ce dernier imite, s'exerce et applique selon les injonctions des énoncés.

Au-delà des conceptions d'apprentissage, il faut préciser à quoi se rapporte l'expression « clé en mains » chez *Cap maths*. Il s'agit du travail, important et complexe, d'élaboration d'un cheminement annuel : une lecture des objectifs du plan d'étude (explicites mais aussi implicites), une transposition dans le domaine des savoirs mathématiques (du point de vue de l'élève et du maître), une réflexion sur les articulations de ces savoirs et leur répartition sur l'année (lesquels placera-t-on en premier pour en tirer profit lorsqu'on en abordera de nouveaux ?), une présentation cyclique – dans l'année ou sur plusieurs années – de chaque savoir pour assurer les phases d'approche, de construction, de consolidation, de structuration et d'utilisation (il s'agit de ne pas oublier de revenir périodiquement sur une notion ou une connaissance pour s'assurer qu'elle sera disponible !), une mise en parallèle des activités et des savoirs accompagnée d'analyses a priori et de critères d'évaluation (il faut savoir à quoi sert chaque activité et comment évaluer si la connaissance visée est atteinte). La liste, qui pourrait encore être allongée, suffit déjà à se rendre compte de l'ampleur de cette « prise en charge » de la progression.

Pour les moyens d'enseignement romands, cette construction est dévolue à l'enseignant qui, évidemment, ne va pas choisir l'ordre des pages des ouvrages, du thème 1 au thème 7 ou l'ordre alphabétique des activités de l'élève.

C'est une tâche que nous semble très (trop ?) lourde pour une personne seule et qui est, en fait, souvent dédiée à un groupe, selon des modalités diverses : en formation continue, sur mandat cantonal ou régional, entre collègues d'un établissement. Si chaque enseignant participe effectivement à la construction de son parcours, c'est un point positif par rapport à la « clé en main ». S'il se contente de le recevoir, on se retrouve dans la situation de celui qui a choisi *Cap maths*, pour autant que la proposition reçue ait les qualités de celle qui a été élaborée par des auteurs, professionnels, qui maîtrisent parfaitement leur instrument.

La différenciation

« L'outil adaptable » *Cap maths* semble moins souple, du fait même de sa programmation interne, que *Mathématiques 1P – 4P*.
En revanche, en libérant le maître de l'élaboration de la progression, il lui permet d'investir plus de temps dans l'évaluation formative et la mise en place d'activités différenciées pour les élèves.

2. Lorsqu'on présente les ouvrages romands à l'étranger – nous l'avons encore vérifié très récemment en Belgique – le public a beaucoup de peine à concevoir une situation de monopole où les maîtres n'ont pas d'autre choix que les moyens d'enseignement officiels.

Cette évaluation et cette différenciation sont facilitées encore par les analyses a priori qu'on trouve dans les commentaires de chaque séance de travail, décrite dans le guide de l'enseignant[3] et par les nombreuses propositions de fiches permettant une reprise personnalisés de certaines activités.

En ce qui concerne l'adaptation de l'outil aux besoins spécifiques d'une classe entière, dans une collection comme dans l'autre, c'est par le choix des rythmes et des activités qu'elle va se réaliser. Il y a des propositions en suffisance dans les deux séries d'ouvrages pour modifier ou aménager les parcours. L'utilisateur de *Cap maths* aura alors à construire lui-même les préparations, scénarios et analyses a priori de ses séances nouvelles, comme ses collègues de Suisse romande doivent le faire d'ordinaire pour chaque période d'enseignement.

Le calcul mental et la calculatrice

Le parti pris de *Cap maths* est, dans les textes, très semblable à celui de *Mathématiques 1P – 4P*. La différence vient du fait que le premier « passe à l'acte » en proposant une séquence de calcul réfléchi, « d'entretien » ou de « problèmes oraux » en début de chaque séance. Pour le second, cette consolidation est « à la charge » des jeux ou d'autres activités qui se déroulent dans le « coin maths » (d'ailleurs aussi prévu par le premier).
Les jeux sont assez différents d'une collection à l'autre : plus simples et décontextualisés dans *Cap maths*, plus ouverts, plus nombreux et plus ambitieux dans la seconde. Le contrôle des connaissances mises en œuvre ou construites lors des jeux est décrit minutieusement par le guide des activités dans la première, il est laissé à la charge du maître dans la seconde, par l'organisation de mises en communs ou d'autres systèmes de vérification.

L'évolution est sensible, par rapport à *ERMEL* et aux ouvrages romands, *Cap maths* veut s'assurer que les instruments de calcul qu'il propose sont élaborés dans un cadre bien précis : il n'y a pas de place pour les excès de drill ou les fixations sur les algorithmes écrits, mais on entraîne le calcul réfléchi et on le contrôle très régulièrement.

Un exemple de « séance » selon *Cap maths*

Pour illustrer les intentions de *Cap maths*, nous proposons d'examiner, à titre d'exemple, une « séance » tirés du guide des activités de CE1 : quinzaine 5, séance 7 (pages 110 et 111).

En tête de page, la description des deux activités de la séance, développant les rubriques d'une page précédente d'introduction, sur les « objectifs de la quinzaine 5 » et « l'essentiel de la quinzaine 5 » domaine par domaine. Ces objectifs figuraient déjà dans des tableaux de la partie introductive du guide, quinzaine par quinzaine et domaine par domaine :

> « *Nombres et numération* – Entretenir la compréhension de la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre, en fonction de leur position (groupements et échanges correspondants).
>
> *Grandeurs et mesure* – Entretenir la capacité à comparer indirectement des longueurs (une unité étant donnée, par report de cette unité), à comprendre que la mesure dépend de l'unité choisie, à mettre en œuvre l'activité des mesures. »
>
> « **Activité 1 – le moment d'entraînement** (Le jeu du grand collier)
>
> Reprise du jeu en équipes. Pas de mise en commun prévue, mais l'enseignant peut intervenir auprès des équipes pour des mises au point (notamment

3. Un exemple de ces commentaires figure en page 24 de ce numéro, dans les annexes de l'article de R. Charnay, sur l'analyse a priori.

sur l'interprétation des chiffres en fonction de leur position et sur les échanges à réaliser) »

Le jeu du « grand collier » a été travaillé lors des séances 5 et 6 de la quinzaine. Il s'agit, sur un parcours de « jeu de l'oie », de distribuer ou recevoir un nombre de billes (de 1, 2 ou 3 chiffres) correspondant à celui qui est écrit sur la case où l'on vient d'aboutir, les billes étant représentées sur des cartes de 1, 10 ou 100 billes. Temps attribué : 15 minutes, par équipes de 5 ou de 3. Le matériel est tiré du fichier photocopiable.

« Activité 2 – Longueur de chemins »

(45 minutes par équipes de 2, matériel photocopié : 2 chemins de 27 cm, affichés au tableau, dans la disposition qui suit, deux bandes de papier blanc de 1,5 x 29,7 cm, une unité blanche de 1,5 x 3 cm et une unité grise de 1,5 x 4,5 cm, 2 crayons, une feuille-réponse avec les légendes : « comparaison des longueurs des chemins a et b » et « explications »)

Consigne lue par l'enseignant :

« 1. Une course d'escargots

Alex et Lisa veulent faire une course d'escargots. Moustik a dessiné deux chemins A et B pour les escargots. Mais Alex et Lisa ne savent pas si les deux chemins sont de même longueur. Il faut les aider à résoudre cette question. Vous travaillerez par groupes de deux, vous n'utiliserez que le matériel que je vais vous donner : une longue bande de papier blanc, un petit bout de papier blanc et un autre gris. »

Il est précisé que les élèves n'utilisent pas d'autre matériel et s'organisent eux-mêmes. La suite des commentaires se rapporte à la mise en commun :

« 2. Mise en commun

L'enseignant recense les réponses. Trois sont possibles :

- le chemin A est plus long que le chemin B ;
- le chemin B est le plus long ;
- les deux chemins sont de la même longueur.

Puis on note les arguments et les méthodes de comparaison employées :

- Certains ont utilisé la ou les bande(s) de papier blanc en faisant des marques pour reporter la longueur de l'un des chemins ou des deux chemins, peut-être en « redressant » le chemin A ou en pliant la bande.
- D'autres ont utilisé des petits bouts de papier pour mesurer les deux chemins en reportant l'une ou l'autre ou encore les deux unités ; on note alors la mesure de chacun des deux chemins avec chacune des deux unités.
- D'autres encore ont peut-être utilisé l'écartement de leurs doigts (ou la longueur de leur main) et fait des reports.

On discute des arguments et on se met d'accord sur le fait que les deux chemins sont de même longueur. »

Cette description de la mise en commun constitue, en fait, une partie de l'analyse a priori de l'activité, élaborée par des auteurs qui connaissent bien les savoirs mathématiques en jeu et savent beaucoup de choses – dans le domaine de la didactique – sur leur construction par les élèves. D'autres commentaires, en marge, complètent l'analyse, et montrent où se situent les enjeux de cette séquence sur la mesure :

« Les objectifs de la situation sont multiples. On suppose que les élèves vont réinvestir ici ce qui a été travaillé au CP à diverses reprises : comparaison des longueurs à l'aide d'une comparaison intermédiaire (avec la bande de papier), mesure d'un chemin droit ou non par report d'une unité, mise en oeuvre de l'additivité des mesures.

Le format de la feuille permet aux élèves qui le souhaitent de travailler à deux (chacun sur un chemin).

Le fait que les deux chemins soient sur la même feuille bloque la méthode par comparaison directe. On s'attend à ce que les élèves fassent des relevés sur les bandes blanches et utilisent ces marques pour comparer. On s'attend également à ce que certains fassent des mesures par report d'une unité, éventuellement d'une unité différente pour chacun des chemins. Si cette dernière méthode n'apparaissait pas, il faudrait relancer l'activité en supprimant les bandes de papier blanc. »

L'essentiel est ainsi dit et prévu, aux niveaux mathématique et didactique. Vient ensuite la phase d'institutionnalisation, suivie de quelques exercices :

« Synthèse

L'enseignant montre les deux méthodes valides pour comparer deux ou plusieurs chemins :

- l'utilisation d'une bande de papier pour une comparaison indirecte ;
- la mesure des deux chemins par report d'une même unité ; il montre comment mesurer un chemin en « deux morceaux ».

L'enseignant engage chacune des deux equipes a essayer les deux méthodes et à effectuer les mesures. Il conclut :

Attention, la mesure dépend de l'unité choisie : les deux chemins mesurent 6 unités grises ou 9 unités blanches.

Exercices écrits.... »

Les trois exercices proposés figurent dans le cahier de l'élève. Celui-ci doit comparer deux chemins tracés sur des pages différentes et s'exercer à mesurer des chemins par report d'une unité.

Dans le tableau des objectifs d'apprentissage du domaine « Grandeurs et mesures », qui se trouve dans les premières pages du guide des activités, on constate, dans la colonne « longueurs » que cette activité de comparaison et de mesure est poursuivie par d'autres, dans les « quinzaines » 8, 9, 11, 12, 13, et 15 pour aboutir aux unités conventionnelles du mètre et du centimètre et à l'approche de leur conversion réciproque.

Conclusion

Les recherches sur l'apprentissage des mathématiques s'accordent actuellement sur le fait qu'on ne peut plus se limiter à des exercices écrits ou à des tâches d'imitation ou de reproduction de règles. La résolution de problèmes, les démarches qu'elle suppose pour la confrontation et la validation des solutions paraissent essentielles dans un processus qui implique l'élève dans l'appropriation, la compréhension et la construction de ses connaissances. Mais ce n'est pas une mince affaire de transposer cette conception dans le quotidien d'une classe, sur une ou plusieurs années.

Il n'était déjà pas facile de concevoir un recueil traditionnel de leçons, d'exercices progressifs et de répétitions pour parcourir un programme. Il l'est encore moins lorsqu'on veut que chaque élève s'implique dans ses processus d'apprentissage. On peut compter sur les doigts d'une main les collections complètes d'ouvrages qui relèvent le défi, explicitement. En langue française, nous n'en connaissons que trois pour l'école primaire : *ERMEL*, *Mathématiques 1P – 4P* et *Cap maths*. Indépendamment des habitudes et sensibilités régionales, il vaut la peine de les comparer, non pas pour les juger, mais pour comprendre leurs « partis pris » et pour évaluer l'évolution qu'il y a de l'une à l'autre.

L'analyse comparative précédente a montré des différences entre *Cap maths* et nos ouvrages romands, qui se cristallisent autour de la « progression annuelle » très fine du premier et de la large latitude laissée au maître dans le choix de son parcours par le second.

Il s'agit d'une volonté, de part et d'autre, de prendre en charge le choix et la structuration d'une progression ou de laisser cette tâche – lourde – à l'enseignant, qui doit encore gérer l'évaluation, la différenciation et tous les autres choix dans la conduite de sa classe.

Au travers de l'exemple présenté[4], on constate la rigueur et la pertinence des commentaires du guide de *Cap maths*. Ces qualités ne sont pas fortuites, elles résultent d'un travail en équipe de professionnels : formateurs, didacticiens et mathématiciens, qui se fondent sur des expérimentations valides.

Il y a, derrière cette activité de comparaison et de mesure de longueurs, une conception claire de ses buts, de sa position par rapport aux apprentissages qui précèdent et qui suivent, de son intégration dans l'évolution des procédures et représentations des élèves. Une progression à la quinzaine et à la séance peut paraître limitative et trop contraignante pour certains. Mais lorsqu'elle est aussi étayée et rigoureuse que celle de *Cap maths*, elle peut aussi être ressentie comme une référence et un appui pour l'enseignant, qui peut se libérer ainsi de ce choix délicat pour se consacrer aux autres tâches, qui ne manquent pas.

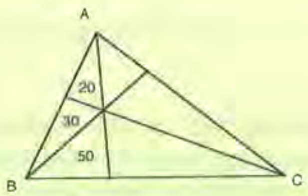
4. Rappel, un deuxième exemple est donné dans l'article de R. Charnay sur l'analyse a priori, en page 24 de ce numéro

Tout bu or not tout bu?

Un litre a la forme d'un cylindre de 20 cm de hauteur surmonté d'un goulot de forme éthylitroïde, et contient du bon vin. Si le litre est à l'endroit, on mesure 14 cm de vin ; si le litre est à l'envers, on mesure 11 cm d'air. Combien y a-t-il de vin ?

L'aire des champs

Calculer l'aire du champ ABC connaissant les aires de trois parcelles de ce schéma. (On peut aussi chercher à calculer l'aire de chacune des trois parcelles de droite)



[ndlr] Ces deux problèmes sont tirés de *100 friandises mathématiques*, de Robert Ferachoglou et Michel Lafond. de l'IREM de Dijon. (Ellipses éditions, 2002, diffusé en Suisse par Albert le Grand SA, rte de Beaumont 20, Fribourg). Les deux auteurs sont animateurs du Rallye mathématique des Lycées de Bourgogne. Ils ont réuni dans cet ouvrage plus d'une centaine de problèmes, variés, qu'on résout avec le bagage d'un bon élève de première ou deuxième année de lycée, combiné avec de la logique, du bon sens et de l'astuce. Les solutions sont bien développées et souvent très originales.

Il n'y a pas besoin de consulter un dictionnaire spécialisé sur les formes éthylitroïdes pour résoudre le premier problème ci-dessus. Le second ne demande aussi que des connaissances de niveau « collège » mais qui sont souvent mal maîtrisées.

Solutions dans le prochain numéro

COURRIER DES LECTEURS

« ... *L'article paru dans* Math-Ecole *206 sur l'algorithme de Gauss permettant de calculer la date de Pâques nous a vivement intéressés. En cherchant à découvrir une année où la date de Pâques tomberait au plus tard, soit le 25 avril, nous avons découvert avec surprise que pour l'année 2076 la formule de Gauss donne la date du 26 avril!*

Une petite recherche sur internet nous apprend que la formule de Gauss amène au moins deux autres erreurs: en 1954 Pâques eut lieu le 18 avril alors que la formule donne le 25 avril et en 1981, la fête eut lieu le 19 avril au lieu du 26 avril prévu par la formule.

Nous apprenons aussi qu'il existe un autre algorithme, celui de Thomas O'Beirne (c.f. ci-dessous), qui lui ne souffrirait d'aucune exception dans la même période limitant l'algorithme de Gauss (1900 à 2099).

Meilleures salutations.

Daniel Bussy et Cédric Ischi »

[ndlr] Le message précédent de deux lecteurs attentifs a été transmis à notre collègue du comité, Antoine Gaggero, en lui demandant une réponse. La voici :

« *Cher Carl Friedrich,*

Je vous écris pour vous donner des nouvelles du procédé que vous avez mis au point, à l'aube du 19ème siècle, pour calculer la date de Pâques. Je me suis permis de l'appliquer à la période où je vis, soit le laps de temps compris entre 1900 à 2076, et de présenter ce procédé au travers d'un article paru dans Math-Ecole *(numéro 206, pp. 26-27) Je vous l'avoue, cher Carl, j'ai fait une faute impardonnable pour un mathématicien !!! Je n'ai pas vérifié votre formule pour chacune des années de prétendue validité. Mais votre gloire et votre savoir faire ayant franchit les âges, il me semblait commettre un crime de lèse majesté en vérifiant votre formule.*

Cependant, deux lecteurs attentifs de Math-Ecole, *ont trouvé au moins trois failles dans votre formule, soit pour les années 1954, 1981 et 2076. Ma première réaction fut d'être scandalisé, voire outré, que l'on puisse vous mettre en doute. Mais, les preuves s'accumulant, je m'en suis fait une raison et je remercie Daniel Bussy et Cédric Ischi pour leur perspicacité et leur intérêt pour cet article.*

Votre toujours dévoué
Antoine Gaggero

Retour au présent :

Daniel Bussy et Cédric Ischi, ont trouvé sur Internet un procédé dû à Thomas O'Beirne qui donne des résultats plus conformes à la réalité :

1. Soit Y l'année. Soustrayez 1900 de Y et soit N la différence;
2. divisez N par 19. Soit A le reste;
3. divisez (7A + 1) par 19. Ne tenez pas compte du reste et soit B le quotient;
4. divisez (11A + 4 - B) par 29. Soit M le reste;
5. divisez N par 4. Ignorez le reste et soit Q le quotient;
6. divisez (N + Q + 31 - M) par 7. Soit W le reste;
7. la date de Pâques est 25 - M - W.
   Si le résultat est positif, le mois est avril. S'il est négatif ou nul, le mois est mars (en considérant 0 comme le 31 mars, –1 comme le 30 mars, –2 comme le 29 mars et ainsi de suite jusqu'à –9 pour le 22 mars).

Référence:
http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/www/math/html/node62.html

Comme je ne possède pas les calendriers des années incriminées, j'ai cherché sur Internet un calendrier universel. J'en ai trouvé un, sous la forme d'un logiciel libre, que l'on peut télécharger à l'adresse ci-dessous et qui confirme bien que la date de Pâques selon la formule de Gauss possède quelques inexactitudes alors que celle de O'Beirne est correcte.

Adresse du calendrier universel :

http://ramsesgen.online.fr/fr/ramcal.htm

Pour les amoureux de Excel, j'ai programmé cette nouvelle formule comme je l'avais fait pour celle de Gauss. Sur demande, je peux l'envoyer par courrier électronique (gaggero@hispeed.ch).

Voici, par exemple, la vérification pour l'année 1954 :

Excel + Gauss donne	**25/04/54**
Excel + O'Beirne donne	**18/04/54**
Le calendrier universel donne	**18 Avril 1954**

Pour l'année prochaine, les trois modes de calcul convergent vers le onze avril.

Antoine Gaggero »

FORMULE DE BRETSCHNEIDER

Monsieur Roland Somville, de Fontaine-l'Evêque (Belgique) nous signale une erreur dans notre numéro 206, p. 24 (« Voyage au pays des formules d'aires et de volumes »). La formule de l'aire S d'un quadrilatère en fonction de la longueur de ses côtés et de celle de ses diagonales est (avec l'exposant « 2 » que nous avions oublié) :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

Notre lecteur nous offre une démonstration de cette formule à l'aide des formules du cosinus appliquées à quatre triangles (tous les angles sont mesurés en degrés) :

$$\triangle \mathrm{AIB} : a^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 - 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \cos(180 - \hat{\alpha}) \qquad (1)$$
$$\triangle \mathrm{BIC} : b^2 = \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 - 2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI} \cdot \cos\hat{\alpha} \qquad (2)$$
$$\triangle \mathrm{CID} : c^2 = \overline{CI}^2 + \overline{ID}^2 - 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{ID} \cdot \cos(180 - \hat{\alpha}) \qquad (3)$$
$$\triangle \mathrm{AID} : d^2 = \overline{ID}^2 + \overline{AI}^2 - 2 \cdot \overline{ID} \cdot \overline{AI} \cdot \cos\hat{\alpha} \qquad (4)$$

On effectue ensuite membre à membre (1) – (2) + (3) – (4)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \cos\hat{\alpha} + 2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{IC} \cdot \cos\hat{\alpha} \\ &\quad + 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{DI} \cdot \cos\hat{\alpha} + 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{ID} \cdot \cos\hat{\alpha} \\ &= 2\overline{BI}\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{AI} + \overline{IC})}_{m} + 2\overline{ID}\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{AI} + \overline{CI})}_{m} \\ &= 2m\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{BI} + \overline{ID})}_{n} \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= 2mn\cos\hat{\alpha} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn} = \cos\hat{\alpha} \qquad (5)$$

Classiquement, en trigonométrie, on connaît la formule de l'aire d'un quadrilatère :

$$S = \frac{1}{2}mn\sin\hat{\alpha}$$

En élevant au carré et en remplaçant $\sin^2 \alpha$ par $1 - \cos^2$ on a :

$$4S^2 = m^2n^2(1 - \cos^2 \hat{\alpha})$$

En utilisant (5) :

$$\begin{aligned} 4S^2 &= m^2n^2\left(1 - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4m^2n^2}\right) \\ S^2 &= \frac{m^2n^2}{4}\left(1 - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4m^2n^2}\right) \\ &= \frac{m^2n^2}{4} - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{16} \\ &= \frac{4m^2n^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{16} \end{aligned}$$

Finalement :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

Ce lecteur nous fournit également une démonstration pour la formule de Brahmagupta citée dans le même article de *Math-Ecole* 206 :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)}$$

où p représente de demi-périmètre du quadrilatère : $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Pour cela, on considère les triangles ABC et ADC :

$$\begin{aligned} &\triangle\mathrm{ABC} : m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{B} && (1) \\ &\triangle\mathrm{ADC} : m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\hat{D} && (2) \\ &a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\hat{B} - 2cd\cos\hat{D} && (3) \end{aligned}$$

où (3) est obtenue en soustrayant (2) de (1). Comme S vaut la somme de l'aire des 2 triangles ABC et ADC, on a :

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}ab\sin\hat{B} + \tfrac{1}{2}cd\sin\hat{D} \\ 4S &= 2ab\sin\hat{B} + 2cd\sin\hat{D} \quad (4) \end{aligned}$$

Par addition membre à membre de $(3)^2$ et de $(4)^2$ puis simplification on obtient :

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \\ &= \frac{[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)][2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \\ &= \frac{[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \\ &= \frac{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \\ &= \frac{(a+b-c+d)}{2}\frac{(a+b+c-d)}{2}\frac{(c+d-a+b)}{2}\frac{(c+d+a-b)}{2} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \\ &= (p-c)(p-d)(p-a)(p-b) - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où l'on obtient, en prenant la racine, la formule recherchée.

CHAMPIONNAT FFJM – TANGENTE

1/4 DE FINALE INDIVIDUELS

18e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques

[ndlr] *Math-Ecole* invite ses lecteurs à participer aux quarts de finale individuels du 18e championnat de la FFJM et à renvoyer leurs réponses à l'aide du « Bulletin de réponse » qu'ils trouveront sur le site http://ffjm.org

DÉBUT CATÉGORIE CE

1 – LA COURSE D'ESCARGOTS (coefficient 1)

Voici les temps obtenus par sept escargots à une course de rapidité : 47 minutes, une demi-heure, 35 minutes, vingt minutes, 25 minutes, une heure moins dix et 53 minutes.

Quel est le temps de l'escargot qui obtient la médaille de bronze ?

2 – CALCUL INCOMPLET (coefficient 2)

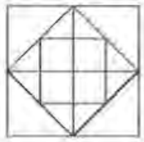
Place les chiffres 1, 1, 2 et 5 dans les cases pour que l'opération soit juste.

$$\begin{array}{r} 3\,\square \\ +\ \square\,9 \\ \hline =\ \square\,\square \end{array}$$

DÉBUT CATÉGORIE CM

3 – LES CARRÉS (coefficient 3)

Au total, combien de carrés entièrement dessinés peux-tu compter dans cette figure ?



4 – DEMAIN (coefficient 4)

Hier, Karin m'a dit : « Après-demain nous serons le 13 décembre. » Aujourd'hui je me demande quel jour nous serons demain.

Peux-tu me répondre ?

DÉBUT CATÉGORIE C1

5 – LA GRENOUILLE ET LE PRINCE (coefficient 5)

La grenouille Géraldine veut savoir si son prince l'aime. Pour cela elle arrache les pétales d'une marguerite.
« Il m'aime » dit-elle en arrachant le premier pétale.
« Un peu » en arrachant le deuxième.
« Beaucoup » pour le troisième.
« A la folie » pour le quatrième.
« Pas du tout » pour le cinquième.

Elle recommence à « il m'aime » pour le sixième et ainsi de suite. Elle dit « A la folie » lorsqu'elle arrache le tout dernier pétale de sa marguerite. On sait qu'elle a dit exactement sept fois « pas du tout ».

Combien de pétales sa marguerite avait-elle au départ ?

FIN CATÉGORIE CE

6 – LES CHÈQUES DU SUCCÈS (coefficient 6)

Des amis ont réuni leurs économies afin d'acheter un bateau qui leur permettra d'effectuer le tour du monde. « Bravo ! » leur dit le banquier : « Les différents montants écrits sur vos chèques représentent tous les nombres entiers qu'il est possible de former avec les mots « cinq », « vingt », « mille », et seulement ceux-là, utilisés chacun une fois. »

À eux tous, quelle somme ont-ils déposée ?

DÉBUT CATÉGORIE C2, L1, L2, GP, HC

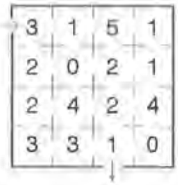
7 – L'IMMEUBLE DES TROIS AMIS (coefficient 7)

Céline, Marie et Jean-Baptiste habitent chacun un appartement dans un immeuble de quatre étages (rez de chaussée, 1er étage, 2e étage, 3e étage et 4e étage).
Céline : « j'habite juste au-dessus de Marie. »
Jean-Baptiste : « je n'habite pas au rez-de-chaussée. »
Marie : « je dois descendre deux étages pour aller chez Jean-Baptiste. »

À quels étages Céline, Marie et Jean-Baptiste habitent-ils ?

8 – LE LABYRINTHE (coefficient 8)

Trouve un chemin pour traverser ce labyrinthe.



- On ne peut pas passer plusieurs fois dans la même case.
- La somme des nombres des cases choisies doit être égale à 13.

FIN CATÉGORIE CM

Problèmes 9 à 18 : Attention ! Pour qu'un problème soit complètement résolu, vous devez donner le nombre de ses solutions, et donner la solution s'il n'en a qu'une, ou deux solutions s'il en a plus d'une. Pour tous les problèmes susceptibles d'avoir plusieurs solutions, l'emplacement a été prévu pour écrire deux solutions (mais il se peut qu'il n'y en ait qu'une !).

9 – LA RÉSERVE (coefficient 9)

L'an dernier, M. et Mme Zanimo ont ouvert une réserve d'autruches et d'éléphants.
Mme Zanimo dit : « Je suis contente car, avec les naissances de cette année, je compte 35 têtes et 116 pattes ! »

Donne le nombre d'autruches et d'éléphants élevés par M. et Mme Zanimo.

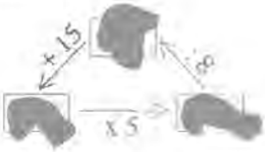
10 – DÉCALAGE HORAIRE (coefficient 10)

Un avion qui part à 8 h de Mathville (heure locale) arrive à midi à MathCity (heure locale). Par contre, pour le retour, si l'avion part à 14 h (heure locale), il arrive à 20h (heure locale). La durée du voyage est la même, mais les deux villes ne sont pas situées sur le même fuseau horaire.

Lorsqu'il est midi à MathCity, quelle heure est-il à Mathville ?

11 – TRIANGLE D'OPÉRATIONS (coefficient 11)

Voici trois opérations notées sur le cahier de Francis. Chaque tache cache un nombre entier et les trois opérations sont justes.



Retrouvez les trois nombres cachés.

FIN CATÉGORIE C1

12 – LES NOMBRES DE L'ANNÉE (coefficient 12)

Si j'additionne les deux nombres de l'année, j'obtiens 2004. Si je calcule leur différence (le plus grand moins le plus petit) et si je retranche 1 à cette différence, j'obtiens 1105.

Quel est le plus grand des deux nombres de l'année ?

13 – VIVE LA POLITESSE ! (coefficient 13)

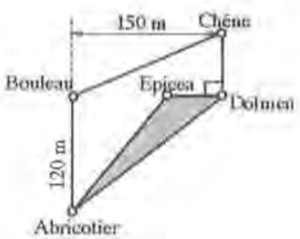
Dans la classe de Thomas, il y a deux sortes d'élèves : les élèves polis et les élèves impolis, les premiers étant heureusement deux fois plus nombreux que les seconds. De même, l'ensemble des filles polies et des garçons impolis est deux fois plus nombreux que l'ensemble des garçons polis et des filles impolies, les filles polies étant aussi nombreuses que l'ensemble de tous les garçons. La classe de Thomas compte plus de 20 élèves et moins de 30 élèves.

Mais combien compte-t-elle de garçons ?

FIN CATÉGORIE C2

14 – LE TERRAIN DU PÈRE OXYDE (coefficient 14)

Le Père Oxyde possède un terrain en forme de trapèze dont une base mesure120 m et la hauteur 150 m.
Le terrain contient une mare en forme de triangle dont les sommets sont l'abricotier, l'épicéa et le dolmen (voir la figure). L'abricotier, l'épicéa et le chêne sont alignés, de même que le bouleau, l'épicéa et le dolmen, qui forment un angle droit avec le chêne. Le terrain (sans la mare) a une aire égale à 11 400 m^2.



Quelle est l'aire de la mare ?

15 – SOMME D'IMPAIRS CUBIQUE (coefficient 15)

On additionne sept nombres entiers naturels impairs consécutifs. La somme est le cube d'un nombre entier naturel premier.

Quel est le plus grand des sept entiers ?

16 – LE TERRAIN D'ÉRIC (coefficient 16)

Eric If possède un terrain représenté ci-contre et comportant une mare en son centre. Eric veut partager son terrain, à l'exception de la mare, en six parts de même forme et de même aire (à un retournement près).

Faites le partage du terrain du Père If.

FIN CATÉGORIES L1, GP

17 – SOLITAIRE À TROIS RANGÉES (coefficient 17)

On veut éliminer 15 pions de ce tableau de 3 cases sur 8 cases en appliquant les règles du jeu de Solitaire.
Un pion peut sauter par-dessus un autre pion horizontalement ou verticalement pour aboutir sur une case libre voisine du pion sauté qui est alors retiré du jeu.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

Quel est le plus petit nombre de sauts verticaux qui permet d'éliminer 15 pions du jeu ?

Indiquez le numéro du premier pion sauté et enlevé du jeu.

18 – MULTIPLICATION POLYGLOTTE (coefficient 18)

NINE x THREE = NEUF x TROIS

Comme dans tout cryptarithme, deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents, et deux chiffres différents sont toujours représentés par deux lettres différentes. De plus, aucun nombre ne commence par un zéro. Par ailleurs, on sait que TROIS et NINE sont divisibles par 3 et que NEUF et THREE sont divisibles par 9.

Quel est le résultat de la multiplication?

FIN CATÉGORIES L2, HC

Consultez le site Internet de la Fédération Française des Jeux Mathématiques, à l'adresse:

http://ffjm.org

Comment participer au dix-huitième Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques?

1) *Repérez les problèmes que vous avez à résoudre (de 5 à 12 problèmes selon votre catégorie).*

catégorie CE:	Cours Elémentaire 2 (3e année de l'école primaire)
catégorie CM:	Cours Moyen 1 et 2 (2 dernières années de l'école primaire, CH: degrés 4 et 5)
catégorie C1:	classes de 6e et 5e des collèges (2 premières années du secondaire, CH: degrés 6 et 7)
catégorie C2:	classes de 4 e et 3 e des collèges (3e et 4e années du secondaire, CH: degrés 8 et 9)
catégorie L1:	classes de 2e et 1e et Terminales des lycées (3 dernières années du secondaire, CH: degrés 10 à 13)
catégorie L2:	2 premières années de l'enseignement post-baccalauréat
catégorie GP:	grand public (les participants à une finale internationale en 2001 ou 2002 sont en HC)
catégorie HC:	haute compétition

2) *Essayez de résoudre ces problèmes et complétez le bulletin-réponse que vous trouverez sur le site http://ffjm.org. Pour les catégories autres que CE et CM, chaque problème peut avoir une ou plusieurs réponses; si l'emplacement pour 2 réponses est prévu, cela n'implique pas qu'il y en ait forcément plusieurs.*

3) *Joignez le montant de votre adhésion:*

	CE/CM	C1 / C2	L1	L2	GP/ HC
Union Européenne	5 €	8 €	10 €	12 €	16 €
Suisse	7 CHF	12 CHF	15 CHF	18 CHF	25 CHF

4) *Postez le tout avant le 15 janvier 2004 à: F.F.J.M. 80 Boulevard Saint-Michel 75006 Paris.*

Bonne participation!

NOUVELLES DU RMT

Après la finale de Berne, décrite dans le numéro précédent (208) de *Math-Ecole*, les activités de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) se sont poursuivies, au cours de l'été, **par l'édition des actes de ses cinquième et sixième rencontres internationales**, de Parma (2001) et Torre delle Stelle (2002). Ce troisième ouvrage de la collection est présenté dans les notes de lectures, en pages 63 et 64.

La **septième rencontre internationale** s'est tenue au Luxembourg, du 25 au 27 octobre dernier, sur le thème ***RMT et évaluation***. Elle a réuni une quarantaine de participants d'une douzaine de sections du RMT en travaux de groupes, exposés et débats nourris.

Chacun sait que les épreuves du RMT s'adressent à des classes entières, que celles-ci s'organisent le plus souvent par groupes et que leurs résultats ne sont analysés que sur la base d'une seule feuille-réponse par problème. On ne peut donc imaginer évaluer des compétences ou connaissances individuelles à travers ces copies, mais, en revanche, on en tire des informations très riches sur les problèmes proposés, sur les obstacles rencontrés et la manière dont ils sont résolus, selon l'âge des élèves... En plus, les observateurs qui contrôlent la passation de l'épreuve, puis les maîtres, lors des exploitations en classe des problèmes après l'épreuve, recueillent d'importantes informations complémentaires sur la manière dont les élèves s'organisent et sur les interactions au sein de la classe.
Cette masse d'observations accumulées au cours de plus de dix années de pratique constitue une source de données sur lesquelles se sont organisés les échanges de la rencontre sur l'évaluation :

- des problèmes : savoirs mathématiques requis pour leur solution, caractéristiques de leurs énoncés, potentialités d'appréciation des procédures de résolution, obstacles, variables didactiques...

- des stratégies de résolution : degré d'efficacité, registre des représentations,

- des justifications ou des validations pour l'attribution des points,

- des capacités de débat scientifique au sein des groupes ou entre groupes et d'organisation de la classe,

- des « retombées » didactiques et pédagogiques du RMT sur les classes : élèves et enseignants.

Plusieurs pratiques d'évaluation formative au travers de l'exploitation des problèmes du RMT ont aussi été présentées par des enseignants.

Toujours dans le cadre de l'évaluation, les participants à la rencontre ont procédé à la **finale des finales** du 11e RMT, exercice consistant à « réattribuer » les points aux copies des classes gagnantes de chaque finale régionale, selon les mêmes critères, appliqués il y a quelques mois par les équipes de chaque section. Cette finale virtuelle permet évidemment de comparer les résultats des classes gagnantes des différentes sections du RMT. Ce nouveau classement n'a qu'un intérêt anecdotique, mais, en revanche, le travail des jurys internationaux conduit à une prise en compte plus approfondie des stratégies de résolution et des représentations des élèves. C'est au travers de ces confrontations que s'affinent les observations et que s'explicitent les critères d'attribution des points, dont la rigueur est garante de la régularité de la compétition et de la pertinence des analyses didactiques qui se développent sur les problèmes du RMT.

Pour la petite histoire, les classes gagnantes de Suisse romande se sont retrouvées : à la mi-classement pour celle de catégorie 3 ; en 3e position — ex-aequo avec trois autres — pour la catégorie 4 ; dans un petit peloton de tête pour celle de la catégorie 5 ; en deuxième position pour celle de la catégorie 6. Au vu de la sélection précoce que nous connaissons en Suisse romande (et aussi au Luxembourg), les comparaisons entre nos classes gagnantes des catégories 7 et 8 — composées d'élèves triés sur le volet — et les classes correspondantes — à tronc commun — des autres pays participants seraient invalides.

A l'unanimité, l'assemblée générale de l'ARMT a décidé d'organiser une **12e édition du RMT** en 2004. Pour la Suisse romande, on trouvera tous les renseignements nécessaires et les formulaires sur le site http://www.rmt-sr.ch

Les inscriptions sont ouvertes !

[ndlr] Parmi les « retombées » didactiques et pédagogiques, mises en évidence dans la rencontre *RMT et évaluation*, de nombreux enseignants relèvent l'évolutuion positive des attitude de nombreux élèves, acteurs et autonomes dans la recherche de solutions. Dans ce sens l'annonce suivante va intéresser de nombreux lecteurs de *Math-Ecole* et, en particulier, ceux dont les classes participent au RMT.

LE TANGRAM, UN JEU À FACETTES

Valentina Celi
IUFM d'Auvergne – Équipe Didirem Paris 7 (France)

Solutions des jeux proposé dans *Math-Ecole* 208 (pages 46 à 51)

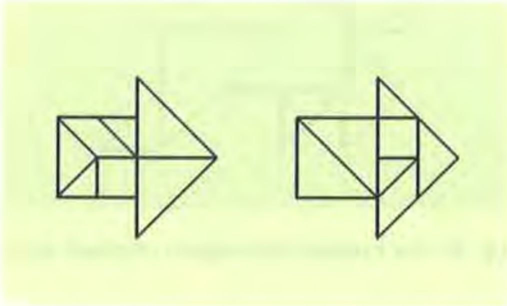


fig. 2 – Deux manières de reconstituer la flèche (exemple de tangram *propre*)

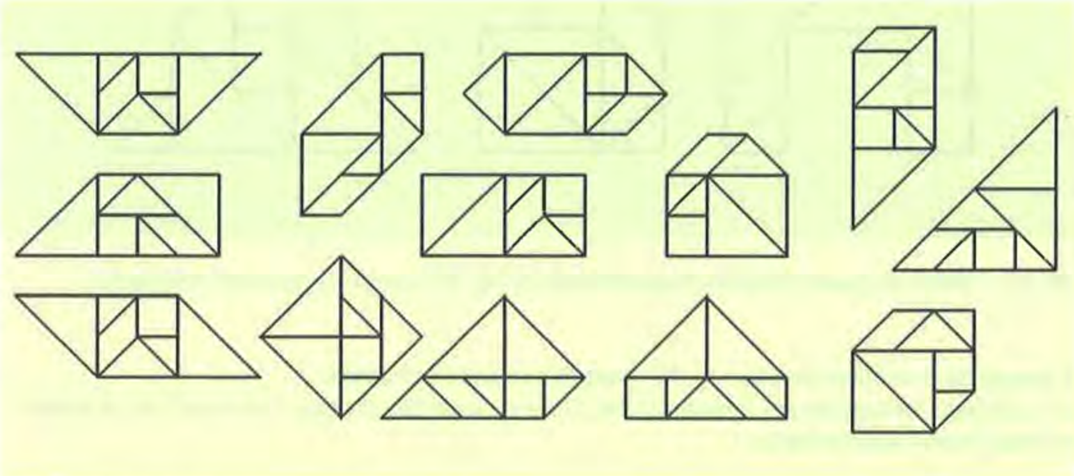


fig 3 – Les treize polygones convexes.

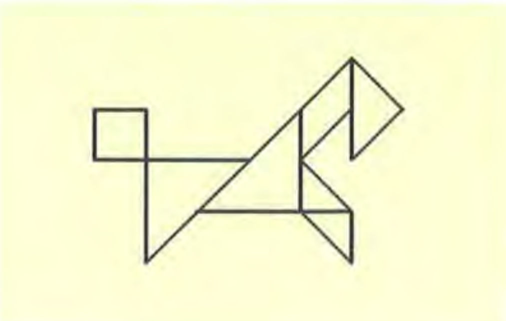


fig. 5 – Un exemple de tangram non propre

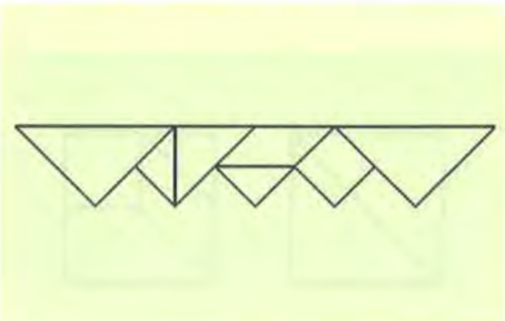


fig. 8 – Un exemple de tangram compact

fig. 9 – Un exemple de tangram compact ayant au plus dix-huit cotés

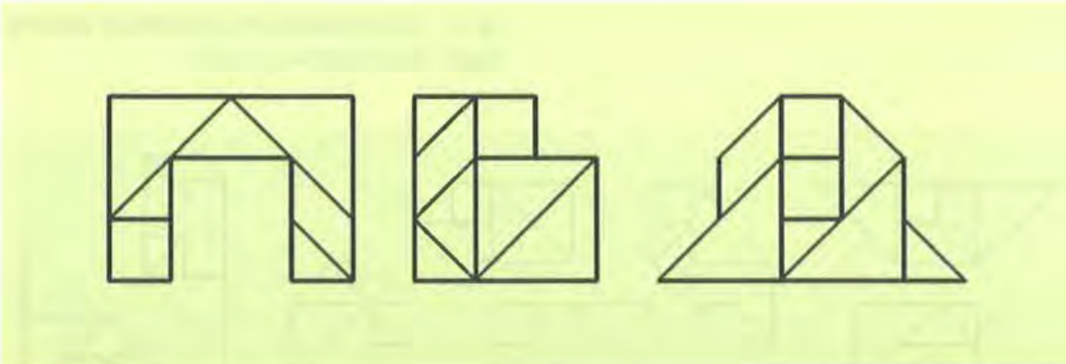
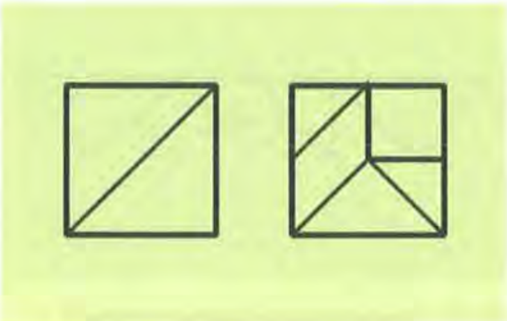


fig. 10 – Parmi les quatre tangram proposés dans la fig. 10, voici ceux qui sont réalisables.

A propos de la dernière question (p. 51, haut de la colonne de droite)
« En utilisant les sept tan du Tangram (c'est-à dire le casse-tête complet), est-ce qu'on peut réaliser deux carrés superposables ? »

SOLUTION. Si l'aire du tan carré est égal à 1, alors l'aire du Tangram est égal à 8. Les deux carrés devront alors avoir une aire égal à 4. Il suffit ensuite de faire quelques calculs en considérant les longueurs des côtés de chaque tan pour parvenir à la solution suivante :



NOTES DE LECTURE

DES GRANDEURS AUX ESPACES VECTORIELS
LA LINÉARITÉ COMME FIL CONDUCTEUR
CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) B-1400 Nivelles. 2002
Nicolas Rouche, coordinateur
(format A4, 614 pages)

Dans leur collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, nos collègues du CREM viennent de publier leur quatrième ouvrage dont les premiers ont déjà été présentée dans les colonnes de *Math-Ecole* et sont toujours parmi les « best sellers » de notre boutique.[1]

L'esprit et l'ouverture sont maintenus, comme le signale toujours la remarque en page de titre : « Cet ouvrage a été conçu comme source d'idées et base de discussion. Souhaitons que personne n'en fasse un dogme ».

L'intérêt de ce nouveau « pavé » est ici la recherche d'un fil conducteur qui va de l'école primaire au lycée, passant par les grandeurs, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les vecteurs, jusqu'aux transformations linéaires.

L'ouvrage propose des situations-problèmes, bien décrites, avec leurs enjeux mathématiques, la façon de s'y prendre, des déroulements en classe, des prolongements possibles et, parfois, des perspectives à long terme où est définie la place que la situation occupe dans la culture mathématique globale.

Mais plutôt que de commenter ce parcours, laissons la parole aux auteurs qui, dans leur avant-propos, décrivent leur projet de manière magistrale et, au passage, font une analyse historique fort pertinente, tout à fait valable pour la Suisse romande aussi. En voici de larges extraits, significatifs :

« ....

1. La linéarité, une idée de base

Dans les années 60 et 70 du XXe siècle, les promoteurs des mathématiques modernes avaient proposé un fil conducteur unique et clair pour l'enseignement des mathématiques. Pour le dire sommairement, ils privilégiaient les structures et l'enchaînement déductif qui va des ensembles et relations aux systèmes de nombres et aux espaces vectoriels. Cette conception exhibait l'unité de la mathématique, que ces promoteurs défendaient si éloquemment.

À partir de la fin des années 70, ce fil conducteur a été délaissé pour l'essentiel, et l'enseignement, comme les programmes en font foi, est revenu aux divisions traditionnelles des mathématiques, celles que nous avons héritées de l'histoire plus ancienne. Il s'agit en gros de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, l'analyse et les probabilités. Or ces divisions de la matière mathématique ont un sens. Dans une étude antérieure[2], le CREM a montré que chacune d'elles est associée certes à l'étude d'une certaine classe d'objets, mais aussi et peut-être surtout à un mode de pensée. C'est bien d'ailleurs pour cela qu'elles ont émergé au cours des siècles.

1. Voir p. 3 de couverture et les notes suivantes

2. Voir *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM [1995], dans les chapitres 4 à 9, les sections intitulées « Les nombres comme forme de pensée », « La géométrie comme forme de pensée », etc.

Quoi qu'il en soit, et peut-être précisément parce qu'ils correspondent à des modes de pensée spécifiques, ces chapitres ont tendance à se refermer chacun sur lui-même. Et l'enseignement mathématique, considéré dans son ensemble, se constitue alors en compartiments plus ou moins étanches.

Les enseignants connaissent bien les difficultés, pour les élèves, des transferts de méthodes et d'intuitions d'une matière à une autre. Dans cette perspective, il manque des fils conducteurs, des liens de parenté visibles qui favorisent la mobilité de la pensée.

Comme nous l'avons remarqué déjà ci-dessus, le point de vue des structures a été dans une assez large mesure occulté à partir des années 80. Or les structures peuvent être considérées, en raison même de leur abstraction, comme un mode de pensée non spécifique, en ce sens qu'elles transcendent les divisions traditionnelles des mathématiques et de ce fait favorisent les transferts. Elles transcendent ces divisions, parce qu'elles sont au cœur, au principe même de la pensée mathématique.

D'où la question : n'avons-nous pas assisté, autour des années 80, à un retour trop ample du balancier de l'histoire ? N'aurait-il pas mieux valu, plutôt que d'abandonner les structures, penser à les enseigner autrement ? Telle est la question à laquelle le présent ouvrage propose des éléments de réponse.

On a compris aujourd'hui que les structures ne peuvent pas être au début de l'enseignement. Ce qui vient d'abord, ce sont les grandeurs, les nombres, les formes, des questions à leur sujet, des symboles qui soutiennent la pensée mathématique commençante. Les parentés de structure se découvrent petit à petit. Et d'ailleurs, certaines structures sont plus prégnantes que d'autres.

Dans cet ouvrage, nous montrons le pouvoir éclairant de la structure linéaire. C'est celle qui sous-tend les grandeurs et leur mesure, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. L'idée de linéarité, qui apparaît modestement à l'école maternelle, se construit par généralisations successives tout au long de la scolarité. Elle est de celles – la principale peut-être ? – qui peuvent soutenir la conception d'un enseignement en spirale, puisque de classe en classe, elle revient dans des contextes divers et éclaire des questions de plus en plus vastes. L'idée de structure linéaire n'est pas donnée au départ, elle s'élabore en même temps que s'approfondit l'expérience mathématique des élèves.

2. De la prime enfance à l'age adulte

Une fois de plus[3], le CREM propose ici un ouvrage qui traite de l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte. L'idée est qu'il est intéressant – voire nécessaire – pour chaque enseignant d'explorer non seulement les matières au programme de sa classe, mais encore celles d'avant et celles d'après, puisque l'éducation mathématique forme un tout.

Le risque d'une étude adressée à des lecteurs aussi nombreux et divers est que beaucoup d'entre eux ne la liront qu'en partie. Mais au moins prendront-ils conscience que leur travail quotidien a des tenants et des aboutissants importants, et seront-ils tentés d'y aller voir. ...

3. Creuser profond mais aussi servir en classe

Cette étude regroupe des contributions de deux sortes. D'une part des chapitres de nature épistémologique et historique sur la structure linéaire. L'idée est de creuser profond, sur un

3. Voir les deux autres publications antérieures les plus importantes du CREM, à savoir, *Formes et mouvements, perspectives pour renseignement de la géométrie* [2001] et *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001].

plan théorique. Ensuite des chapitres de situations-problèmes adaptées à tous les âges de l'école, montrant pratiquement la structure linéaire en construction dans diverses matières. Cette double face de notre travail entraîne un autre risque : c'est que le lecteur théoricien ne lise que ce qui l'intéresse immédiatement, et que le praticien fasse de même. Notre espoir est que certains, les plus nombreux possibles, cèdent à la tentation d'éclairer un point de vue par l'autre, ce qui est – nous semble-t-il – la meilleure façon de saisir véritablement l'ensemble du problème de l'éducation mathématique.

4. Contenu de l'ouvrage

… La première partie, qui comporte quatre chapitres, concerne les élèves de deux ans et demi à douze ans. Elle propose d'abord des situations-problèmes sur les balances et les poids à l'école maternelle. Elle se poursuit par diverses activités destinées à l'école primaire et utilisant le tangram. Viennent ensuite un chapitre sur les comparaisons et mesures de capacités, et un autre, destiné à la fin du primaire, sur les grandeurs, les pourcentages et leurs représentations graphiques.

La deuxième partie vise les élèves de douze à quinze ans. et comprend deux chapitres, numérotés 5 et 6. Le chapitre 5 prend la suite du dernier chapitre de la première partie. Il traite d'abord des pourcentages et de divers supports géométriques qui permettent de les visualiser, puis du thème général de la proportionnalité, dans ses expressions numérique (les tableaux de proportionnalité), graphique et algébrique (les formules). Les contextes des questions posées sont divers : problèmes de troc, d'épargne, remplissage d'un réservoir d'essence. … Le chapitre 6 traite de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en géométrie, avec des questions de périmètres et d'aires et enfin une introduction au théorème de Thalès conjointement avec des notions de perspective cavalière.

La troisième partie concerne les élèves de quinze à dix-huit ans…

La quatrième partie est entièrement orientée vers l'histoire et l'épistémologie des vecteurs. …

La cinquième partie enfin ne comporte qu'un seul chapitre, ce qui peut paraître assez singulier. Cela se justifie par le fait qu'elle propose une synthèse de tout l'ouvrage : en renvoyant systématiquement à tous les autres chapitres, elle dégage la notion de structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. C'est donc à ce chapitre que le lecteur est invité à se reporter chaque fois qu'il éprouve le besoin de savoir où il en est.

Notons que nous n'avons pas couvert toutes les matières qui relèvent de l'idée linéaire. Et certaines de celles qui manquent au tableau peuvent même être considérées comme particulièrement importantes. Pour n'en citer que trois : les équations et les systèmes algébriques linéaires, ainsi que le calcul matriciel, la différentielle, qui est l'application linéaire tangente à une fonction, et les équations différentielles linéaires. Mais ce qui relève de la structure linéaire dans le corpus entier des mathématiques est gigantesque, et nous ne pouvions tout traiter. Nous espérons, quoi qu'il en soit, avoir au moins montré une certaine direction de pensée.

Ajoutons enfin que ce travail résulte de la collaboration de toute une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer sa sensibilité. Nous avons cherché davantage la qualité dans la diversité, que l'expression d'une pensée par trop monolithique. »

Destinataires : les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens, personnes intéressées à une vision verticale de l'enseignement des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, linéarité et proportionnalité, similitude, grandeurs, vecteurs, épistémologie

ÉVALUATION DES COMPÉTENCES EN MATHÉMATIQUES EN FIN DE 2e ANNÉE PRIMAIRE
RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE PHASE DE L'ENQUÊTE MATHÉVAL
IRDP, Neuchâtel 2003 (03.2)
Jean-Philippe Antonietti, coordinateur avec la collaboration de Ninon Guignard et al.
(format A4, 134 pages, IRDP Case postale 54 CH-2007 Neuchâtel CHF 15.80) 4

Dans le dernier numéro de *Math-Ecole*[5], Jean-Philippe Antonietti présente un des problèmes de cette large évaluation des « compétences mathématiques développées par les élèves de deuxième année primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens d'enseignement romands ».

L'enquête conclut que « l'évolution des compétences des élèves se déroule normalement et que les objectifs fixés par le plan d'études romand sont visiblement atteints ». Ceci, c'est pour l'institution qui a commandité le travail. Lorsqu'on sait combien les expressions « évolution des compétences » et « objectifs atteints » dépendent des interprétations de chacun, des questions posées pour les mesurer, des conditions de passation, on ne s'attardera pas sur ces jugements.

En revanche, lorsqu'on pénètre dans l'analyse des problèmes, on découvre la richesse des procédures des élèves et, par conséquent, l'intérêt d'une évaluation qui va au-delà de la simple solution.

Un autre intérêt de cette enquête est la méthodologie proposée par l'enquête, l'échantillonnage des élèves et des classes et les explications des différences observées, en fonction des caractéristiques des élèves, des classes et des maîtres.

D'un point de vue pratique, l'enseignant des premières années d'école primaire dispose ici d'une vingtaine de problèmes, résolus par des centaines d'élèves ou de groupes d'élèves de deuxième année primaire, avec une description succincte des contenus mathématiques et des compétences visées, et un solide inventaire des procédures suivies par les élèves, éléments essentiels pour une analyse a priori.

Il n'est pas simple de créer des énoncés de problèmes tels que des élèves de deuxième année primaire puissent s'engager seuls dans la résolution – c'est une des plus grandes difficultés que rencontrent les animateurs du *Rallye mathématique transalpin* pour les degrés 3 et 4. Les responsables de l'enquête ont fait un gros effort dans le domaine de la clarté des textes, pour réduire au minimum la part de l'enseignant dans la lecture des énoncés. C'est encore un autre aspect positif des problèmes proposés, qui, dans le domaine numérique tout au moins, permettent un travail autonome des élèves.

C'est avec intérêt que nous attendons les problèmes et les résultats de la deuxième phase de l'enquête « Matheval ».

Destinataires : les maîtres des premières années de l'école primaire, formateurs et didacticiens

Mots-clés : mathématiques, évaluation, école primaire, résolution de problèmes

4. Cette publication est également disponible sur le site IRDP http://irdp.ch/publicat/publi-cd.htm

5. *Math-Ecole* 208, pp 37 à 45 : « Apprendre les mathématiques sans parler l'espéranto »

RMT : POTENTIALITÉS POUR LA CLASSE ET FORMATION

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin de Parma (2001) et de Torre delle Stelle (2002)

L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.-G. Rinaldi, M. Polo (Eds). 2003. ARMT, Universités de Parma et de Siena. Edition bilingue : français – italien, (288 pp.)

Après les *Profits pour la didactique*[1] et *Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*[2]. Le troisième volume des actes des rencontres internationale traite, dans sa première partie, de ***l'exploitation du RMT pour la classe : du problème à la situation didactique*** thème retenu pour la cinquième rencontre internationale.[3]

On trouvera dans cette **première section**, des communications sur la manière de proposer des problèmes du RMT et de les exploiter en classe. En particulier :

Clara Bisso y voit un « antidote à la peur des mathématiques ». Ces problèmes s'insèrent, selon elle, dans une approche plus vivante, plaisante, ludique des mathématiques tout en développant la rigueur scientifique chez les élèves au travers des phases de discussion et de défense des solutions. À une plus large échelle, Roberto Battisti décrit l'utilisation des problèmes du RMT dans le cadre de laboratoires de mathématiques, intégrés dans le programme de classe par plus d'une vingtaine de maîtres du Trentino. Les résultats positifs de cette pratique ouvrent des perspectives plus vastes pour l'avenir.

Des enseignants ont utilisé des problèmes du RMT comme situations-problèmes, dans l'intention d'aborder, pour leurs classes, certains thèmes de leur programme. Daniela Medici et Lorenza De Micheli rendent compte d'un travail sur les variables didactiques qui a permis d'adapter deux énoncés aux besoins de l'enseignement. Michèle Vernex utilise un problème, en crée un deuxième et un troisième, de même structure, pour s'intéresser au transfert de connaissances du premier aux autres.

Les problèmes du rallye ne sont toutefois pas conçus pour se substituer à l'ensemble des activités d'un parcours didactique. Graziella Telatin décrit les obstacles qui se dressent devant leur utilisation régulière : les conditions dans lesquelles se résolvent les problèmes lors des épreuves du RMT sont privilégiées, par rapport à celles de la classe au quotidien.

D'un point de vue plus analytique, Lucia Grugnetti et Maria Gabriella Rinaldi examinent l'aptitude des problèmes du rallye à devenir des situations didactiques. Certains se prêtent bien, par leurs potentialités à faire émerger des savoirs bien définis et reconnus importants pour la construction de nouvelles connaissances, d'autres sont plutôt destinés à des activités où les savoirs mis en oeuvre sont déjà en place.

En partant du point de vue de la recherche en didactique, Chantal Tièche-Christinat tente, à partir des résultats de plusieurs centaines de groupes d'élèves, d'insérer dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud, un problème du rallye et les procédures de résolution analysées.

L'intérêt, pour les maîtres, de certains problèmes pour la classe est évident. Il l'est aussi pour les formateurs.

La sixième rencontre internationale[4] a ainsi pu se pencher sur le thème : ***RMT et formation des enseignants***. La plupart de ses travaux sont reportés dans ce troisième volume des actes des rencontres, en **deuxième section** :

1. Rencontres de Brigue, 1997 et 1999 (Voir p. 3 de couverture)
2. Rencontres de Siena, 1999 et Neuchâtel, 2000. (Voir p. 3 de couverture)
3. Parma, 2001.

Angela Rizza, Vicenza Vanucci et Vera Mori, étudiante, refont le parcours de formation initiale de cette dernière, qui, inspirée par le rallye, choisi d'utiliser certains de ses problèmes comme approche des systèmes linéaires à l'école secondaire. Carlo Marchini, Daniela Medici et Maria Gabriella Rinaldi examinent les incidences des problèmes du RMT sur la formation des maîtres, à la lumière du modèle du triangle didactique.

En formation continue, Georges Combier rend compte d'un stage organisé à la demande des inspecteurs de l'enseignement primaire de sa région afin d'exploiter la dynamique engendrée par la participation au RMT et de développer des pratiques d'enseignement qui accordent à la résolution de problèmes la place centrale qui devrait être la sienne dans la construction des savoirs. L'analyse a priori des problèmes a été introduite progressivement dès les premières années du RMT, puis sans cesse développée et affinée pour devenir systématique. Tout enseignant en formation doit savoir de quoi il s'agit, à quoi elle sert et comment la conduire. Roland Charnay apporte une contribution à la définition de cet outil professionnel d'aide aux décisions et aux choix de l'enseignant, sur la base d'un problème du rallye. Michel Henry va au-delà et montre, du point de vue de la recherche en didactique, plusieurs aspects de l'analyse a priori qu'il présente comme un « concept à géométrie variable ».

Dans la **troisième section** de ces actes, on trouvera encore quelques textes sur la ***dynamique du RMT***.

Luc-Olivier Pochon propose un mode de gestion du RMT par Internet, expérimenté par la section de Suisse romande et, plus généralement, présente une exploitation possible des concours mathématiques par Internet.

La « finale des finales » du 10e RMT a permis aux participants à la sixième rencontre (Torre delle Stelle) de se livrer à un exercice fort instructif. Il s'agissait, lors de cette confrontation fictive, de refaire le travail d'attribution des points, déjà fait précédemment par chaque section lors des finales régionales, pour toutes les classes gagnantes de leur catégorie. L'expérience a permis d'estimer la fidélité et la validité des attributions de points, sur la base des critères définis lors de l'analyse a priori des épreuves.

Le dernier texte est une brève présentation du RMT (p. 282 à 285) destinée aux lecteurs qui voudraient en savoir plus sur cette compétition ou qui souhaiteraient s'y associer.

Ces derniers textes, comme les précédents, montrent que le RMT est une entreprise vivante, évolutive, couvrant un vaste domaine d'activités, allant des tâches administratives à la recherche en didactique des mathématiques, dont les acteurs sont les dizaines de milliers d'élèves, les classes et les enseignants par milliers, les animateurs.

Lors des rencontres, les communications ne sont pas l'apanage d'une catégorie de participants. Chacun peut s'exprimer, avec ses propres termes, pour exposer ses pratiques et ses réflexions. C'est dans ce sens que l'on peut affirmer que le RMT fait office « d'interface » entre recherche en didactique et pratique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

Destinataires : tous les maîtres, en particulier ceux des classes participant au RMT, formateurs et étudiants en didactique des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, résolution de problèmes, analyse a priori, procédures de résolution, formation

F.J.

4. Torre delle Stelle (Sardaigne)

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des comptes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	...	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	...	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial *Grand N*)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide	...	(ex à Fr. 55.-)

Problèmes de rallyes et concours :

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel