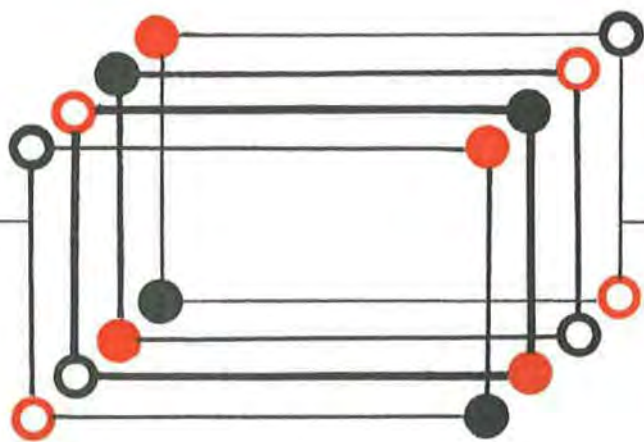


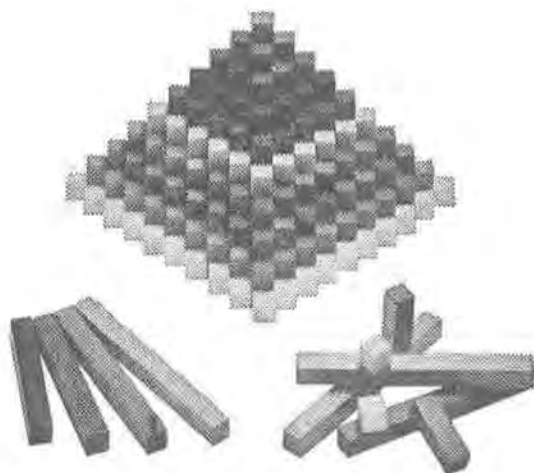
65



**MATH
ECOLE**

NOVEMBRE 1974
13^e ANNÉE

Un choix exceptionnel de matériel didactique



Blocs d'attributs (Blocs logiques) en différentes exécutions.

Blocs multibases

Edition Dienes et édition en couleurs (se rapportant aux réglottes Cuisenaire).

Réglottes Cuisenaire

Balance algébrique

Matériel pour exercices ensemblistes:

gommettes, animaux miniatures en bois, jetons en cartons, etc.

Logimath

Boîte à fiches perforées pour l'apprentissage de l'usage des fiches d'ordinateurs.

Matériel en papier velouté

pour l'emploi au tableau molleton.



Demandez nos prospectus spéciaux

Franz Schubiger, 8400 Winterthour

Mattenbachstrasse 2

L'acte mathématique: retour d'information

Le double numéro 61/62 de «Math-Ecole», consacré au début de cette année à l'Acte mathématique, devait, selon nous, susciter des réactions. Ces dernières sont venues, moins nombreuses que nous l'espérions, mais cependant bien réelles et substantielles. Nous les devons à des amis suisses engagés, comme nous, dans la lourde et périlleuse tâche du renouvellement de l'enseignement de la mathématique. Ce sont les professeurs d'université André Delessert et Henri Carnal; ce sont aussi les enseignants eux-mêmes qui s'expriment par l'entremise de Jean-Jacques Walder, instituteur et, depuis peu, collaborateur de Raymond Hutin, au service de la recherche pédagogique de Genève. Ce sont ensuite des amis français qui, spontanément et très promptement, nous ont fait part de leurs remarques: Simonne et Jean Sauvy de l'équipe «Activités Recherches Pédagogiques» et Bernard Charlot, professeur de psychopédagogie à l'École normale d'institutrices du Mans. C'est le professeur Hermann Maier, titulaire de la chaire de didactique de la mathématique de l'Université de Regensburg (République fédérale d'Allemagne). C'est enfin un quatuor de maîtresses d'application des écoles normales du canton de Vaud. S. R.

Le numéro 61/62 sur l'ACTE MATHÉMATIQUE est encore disponible. On peut se le procurer au prix, très réduit, de 3 Fr.

Dans son article, le professeur Delessert précise une pensée qui lui est propre et que, à cause de quelques négligences typographiques, le lecteur de «Math-Ecole» 61/62 n'aura pas pu entendre convenablement. La mathématique, dit le professeur, est la «science des systèmes formels» et il ajoute: «Le système «formel» marque l'acte de pensée qui enferme en quelque sorte juridiquement le système des données». La mathématique, dirons-nous, «encode» les données. Ces données appartiennent au réel. Elles peuvent être concrètes ou abstraites. Elles n'en sont pas moins des données; et comme telles, elles sont brutes et peu utilisables. L'esprit alors s'en empare et les organise pour en tirer parti. Cette manipulation exige cependant un encodage de ces données qui sont alors exprimées d'une manière abstraite. De plus, la manipulation elle-même implique que l'on se donne des règles (le juridisme de l'affaire) et qu'on s'y tienne. Faire jouer termes et règles dans l'abstrait, dans le «formel», économise des forces et, surtout, permet des combinaisons et des inventions qui seraient impossibles si on n'avait pas résolument décidé de se décoller du réel. Le jeu de la pensée «formelle» est créateur. Le professeur Delessert insiste là-dessus. La mathématique n'a, ainsi, rien de desséchant. Cependant si sa fonction est d'opérer au sein de systèmes formels qu'elle institue (autre aspect créateur), cette fonction ne s'oppose pas à un retour au réel. L'Acte mathématique a ses retombées. Le décodage fait passer ses découvertes au sein du réel. Et ce dernier, qui se trouve dès lors, organisé ou réorganisé, devient utile.

En guise de rectification

par André Delessert, professeur à l'Université de Lausanne

Le numéro 61/62 de «Math-Ecole», consacré à l'acte mathématique, m'a mis en cause de plusieurs manières. Mes propos ont été déformés, j'ai été accusé et réfuté à l'avance sur un point que je crois trop important pour qu'on y laisse subsister des confusions. J'ai donc demandé à M. Roller la permission, non pas de me dédire, mais au contraire de m'exprimer avec plus de netteté encore. Je tiens à le remercier vivement de me l'avoir accordée.

J'ai utilisé à plusieurs reprises le terme de «système formel». Rappelons que la logistique désigne ainsi une collection d'assemblages formés de «signes sans signification», assemblages qui s'engendrent et se combinent suivant des règles expressément énoncées. Avec de tels systèmes, on peut reconstituer l'aspect purement logique de certains discours sans faire appel au contenu sémantique des termes qui y figurent. On voit bien pourquoi on emploie l'adjectif «formel», mais je propose cependant d'attribuer ici l'étiquette de «système logistique» à cette notion, comme on le fait parfois. On peut alors affirmer que la *mathématique n'est pas la science des systèmes logistiques*.

Rares sont ceux qui savent vraiment ce que sont les systèmes formels logistiques, et les mots «forme» ou «formel» appartiennent à la langue commune. J'ai pris le risque calculé d'appeler «système formel» une notion très différente et qui, sauf erreur, n'avait pas été isolée jusqu'ici.

Je considère un système correspondant à la description suivante. On voit apparaître d'abord:

- la donnée d'une collection de termes;
- (A) — la donnée d'une collection de relations compatibles entre ces termes.

Pour fixer les idées, pensons par exemple au groupe des isométries du plan euclidien ou encore à l'échiquier, aux pièces d'échecs et au recueil des règles des échecs qui se trouvent là, devant moi. Je laisse au lecteur le soin d'imaginer ce que sont les données dans ces deux cas particuliers. Comme c'est loin d'être simple, il préférera peut-être songer à l'exemple du groupe ou du jeu de Nim à un tas de haricots.

On peut s'intéresser à un tel système de bien des manières. Ainsi on pourrait envisager comment modifier l'une ou l'autre des relations données sans qu'elles cessent d'être compatibles. Mais si l'on se borne à étudier les seules propriétés du système qui sont compatibles avec les données (A), je propose de dire que l'on considère le «système formel» donné par (A). Par exemple, on peut essayer de dénombrer toutes les configurations de pièces possibles sur l'échiquier, ou toutes celles qu'on peut atteindre à partir d'une situation donnée, ou encore étudier une fin de partie sans tenir compte de la psychologie

d'un adversaire éventuel. Le terme «formel» marque l'acte de pensée qui enferme en quelque sorte juridiquement le système dans les données (A).

Il y aurait lieu de commenter longuement les mots apparaissant ci-dessus en (A). Bornons-nous à quelques remarques. La «donnée» est parfois une livraison effective (d'une boîte de pions, par exemple) ou parfois une simple évocation (soit un ensemble infini...). Elle peut être verbale ou non (la règle non exprimée suivant laquelle on n'a pas le droit de mettre deux pièces sur la même case peut être donnée par le fait que les pièces sont trop grandes pour qu'on puisse en disposer plus d'une par case). Les «collections» peuvent être ou non des ensembles mathématiques. Le mot «terme» peut couvrir en particulier un «signe sans signification» ou un objet matériel. Sans entrer dans le détail, disons qu'une «relation» peut être donnée par des termes dérivés des termes donnés: collections de couples de termes, collections de sous-collections, par exemple.

Il est naturel de dire que deux systèmes décrits par des données du type (A) sont équivalents lorsqu'il existe une correspondance fidèle entre leurs termes et entre leurs relations. Ainsi l'échiquier, les pièces et les règles des échecs forment un système équivalent à celui qui est présenté verbalement dans un traité des échecs. Il convient de ne considérer que des systèmes formels qui admettent des équivalents verbaux finis.

Cette notion étant un peu dégrossie, nous appelons mathématique la science des «systèmes formels» en tant que tels. Relevons que cette description est non seulement imprécise (pour des raisons pratiques), mais encore réellement ouverte, en ce sens qu'elle se prête à une évolution de la mathématique. En effet, on peut sans doute inventorier les sortes de collections et de relations que les mathématiciens considèrent aujourd'hui. Mais cela peut changer demain, comme on l'a vu par exemple avec l'apparition de la notion de catégorie.

Il convient maintenant de mettre en relief un fait important. Certains systèmes formels apparaissant en mathématiques sont si pauvres qu'ils ne dépassent guère le cadre de leur donnée. Pensons aux notions d'ensemble, de groupe, d'espace topologique. Mais il suffit, par exemple, d'exiger qu'un groupe soit muni d'une topologie compatible avec la loi de groupe pour déclencher la curiosité et l'imagination. Si l'on demande encore que cette topologie soit localement la même que celle d'un espace euclidien, c'est une explosion d'interrogations passionnantes et de phénomènes surprenants. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'aller jusqu'aux groupes de Lie pour rencontrer des situations analogues. Un groupe de déplacements opérant discrètement dans l'espace euclidien ordinaire ou un simple graphe coloré fini possèdent également ce pouvoir de mobiliser l'esprit. Non seulement ces systèmes formels ne se laissent pas faire, mais ils sont capables d'engendrer la réflexion et de l'orienter. Ils sont de véritables *objets de pensée*, aussi consistants, aussi reconnaissables, aussi chargés d'énergie dans leur ordre que peuvent l'être des objets matériels dans le leur.

On peut entrevoir les perspectives qu'ouvre la constatation de ce fait. Bornons-nous à observer qu'elles nous mènent aux antipodes de la doctrine trop

généralement admise aujourd'hui. En effet, on considère souvent la mathématique comme une science sans objet(s), une entreprise formalisatrice qui ne peut être fécondée que de l'extérieur. Le mathématicien ne serait qu'un bricoleur parfois génial, toujours maniaque, qui fabrique des fers à bricelets, mais qui ignore le goût des bricelets parce que seuls les physiciens, les ingénieurs, les sociologues connaissent le secret de la pâte à bricelets. D'où il résulte que chacun peut accéder à l'acte mathématique, à l'exception du mathématicien. En dépit de son absurdité, cette opinion a le plus grand succès auprès des profanes, sans doute à cause de son caractère démagogique. Elle va de pair avec celle qui affirme qu'en matière d'enseignement, tout le monde est compétent, sauf précisément les enseignants.

Cela rappelé, il convient de revenir aux textes en question. Dans mon exposé, «Math-Ecole» 61/62, page 27, ligne 34, après avoir décrit sommairement les données d'un «système formel», j'ajoute: «**Étudier un système formel**, c'est découvrir entre ces termes de nouvelles relations qui soient compatibles avec les axiomes». Malheureusement le passage écrit en lettres grasses, qui figurait sur le manuscrit, a été omis par le typographe. La phrase ainsi défigurée évoquait justement le point central, à savoir l'acte de pensée par lequel un système devient «formel» au sens que je propose de considérer. Cette lacune est d'autant plus sensible qu'elle touche à l'objet de notre controverse. J'ajoute qu'à la page 28, ligne 6, il faut lire: «... en ce sens qu'on ne peut toucher à l'un des axiomes du groupe sans que celui-ci perde son statut de groupe.». C'est le contraire de ce qui est écrit et cela obscurcit définitivement les commentaires touchant la notion de système formel. On ne peut s'empêcher de penser à une conspiration...

Dans son introduction, M. Roller reprend l'affirmation suivant laquelle «la mathématique est la science des systèmes formels». Comme on n'y précise pas ce qu'il faut entendre par «système formel», le lecteur non prévenu découvre que la mathématique est la science des systèmes logistiques. Dans une âme bien née, cela ne peut que déclencher la réprobation ironique. C'est ce qui s'est produit, semble-t-il, chez M. J.-B. Grize, dont l'exposé s'organise autour de la réfutation de cette thèse. Comme M. Grize ne précise pas — et c'est bien explicable — que les systèmes formels (logistiques) ne sont pas ceux dont on parle quinze pages plus haut, le lecteur voit dans son article la négation pure et simple de ce qui fait la substance du mien. Il en résulte de fâcheux malentendus. Ainsi, lorsqu'il est dit (page 45, ligne 3): «Nous ne l' (l'enfant) amènerons pas (à) l'école primaire, à construire des systèmes formels», c'est vrai sans doute des systèmes logistiques. C'est certainement faux des systèmes formels au sens où je les considère: le jeu de Nim à un tas donne naissance à un tel système formel; des enfants peuvent y faire des recherches en n'utilisant que les règles du jeu et ils peuvent inventer des jeux analogues. Donc, malgré les apparences, l'article de M. Grize n'est à aucun titre une réfutation de mon exposé.

M. Leresche me cite: «La mathématique est la science des systèmes formels» et il signale le danger que je fais ainsi courir à l'enseignement mathématique. Je tiens à préciser que je n'ai jamais écrit la phrase ci-dessus sans décrire soi-

gneusement — avec la bénédiction des typographes — ce que j'appelle «système formel», ni sans montrer combien cela ouvre le champ des activités propres au mathématicien. Aucun lecteur, même distrait, n'a pu y trouver prétexte à se réfugier au niveau purement formel. Si danger il y a, c'est à une citation sommaire qu'il est dû et je m'étonne que M. Leresche me fasse endosser avec tant de désinvolture la responsabilité de sa propre imprudence.

Mais y a-t-il danger? Si la mathématique est bien la science des systèmes formels (au sens considéré ici), on voit mal pourquoi il serait plus dangereux de le dire que de le taire ou de dire le contraire. Et cependant le danger existe. En lisant la phrase citée, beaucoup de lecteurs entendent: «La mathématique est une activité ingrate et formaliste, s'épuisant dans des formalismes desséchants à propos de formes vides», parce qu'ils demandent à être confirmés dans leur doctrine de la mathématique considérée comme une fabrique de fers à bricoler. Voilà l'origine profonde du malentendu. M. Leresche lui-même ne contribue-t-il pas à l'entretenir en ne détectant l'activité mathématique qu'au dehors du travail du mathématicien? Et pourtant il part d'un exemple rêvé: la mathématicien apportant l'idée de graphe — ce magnifique système formel — grâce à laquelle la réflexion d'une équipe de psychiatres est bouleversée, puis éclairée et organisée. Ne serait-ce pas l'occasion de montrer que les notions mathématiques ne sont pas des formes creuses, mais des objets de pensée efficaces? qu'elles peuvent être étudiées en elles-mêmes et que c'est justement le travail du mathématicien?

J'ajoute que je n'ai jamais tenté de réduire l'enseignement mathématique au seul apprentissage des faits mathématiques, bien au contraire. Le point de départ de mes réflexions est justement celui des motivations et des applications de la mathématique. Mais la mathématique étant aujourd'hui indépendante de ses applications, leur articulation est plus délicate à décrire et c'est pour cela justement que j'ai introduit les notions de «codages» et de «systèmes formels».

Voilà ce que je tenais à préciser, car au-delà des malentendus liés au choix de ma terminologie — et dont j'assume toute la responsabilité — résident des confusions plus graves qui doivent être dissipées.

Le professeur Carnal souligne trois aspects de l'enseignement de la mathématique: la progressivité, la liberté et l'interdisciplinarité. La progressivité, selon lui, consiste à faire passer peu à peu les élèves du concret à l'abstrait, du réel au formalisé. On retrouve ici le professeur Delessert. L'expérience au sein du tangible n'est vraiment «expérience» qu'à partir du moment où ce tangible devient intelligible. Et il devient tel quand il s'inscrit dans des «modèles» qui, eux, sont abstraits et de nature formelle. Du tangible à l'intelligible, il y a des degrés d'intensité et de durée. Une dialectique relie les deux termes. Ce n'est que progressivement que l'esprit se détache du concret pour opérer dans l'abstrait et c'est, d'autre part, en retournant au concret que l'abstrait se prouve à lui-même sa propre valeur et peut rebondir.

La liberté n'est pas l'anarchie. Elle peut consister à inventer des lois, des règles de jeu; elle est ainsi création. Mais elle consiste aussi à accepter de se soumettre aux lois: je me sou mets, mais je sais que je me sou mets.

L'interdisciplinarité est à l'ordre du jour. Elle devra faire l'objet d'études dans le cadre de l'élaboration des programmes scolaires. La mathématique, sous-tendant les activités cognitives — en géographie, en sciences naturelles — peut servir à structurer les savoirs et à les relier entre eux par le truchement de cadres — formels une fois de plus — susceptibles de s'appliquer à des disciplines très diverses et, apparemment, peu susceptibles d'appariement.

Réflexions sur l'acte mathématique et son apprentissage

par H. Carnal, professeur à l'Université de Berne

Le cahier de «Math-Ecole» 61/62 consacré à l'acte mathématique aura certainement été une utile base de réflexion pour tous ceux que préoccupe l'enseignement de cette discipline. Certains seront peut-être déçus de ne pas y trouver de critère permettant de distinguer à coup sûr un «acte mathématique» d'une autre forme d'activité intellectuelle. Mais cela ne devrait guère surprendre: il n'existe pas non plus de frontière à partir de laquelle une suite de sons devient musicale, une suite de mots poésie, une activité musculaire performance sportive.

Cette imprécision dans la définition même de ce qui est mathématique explique en partie les contradictions, plus apparentes que réelles, entre les différents auteurs. Il est tout à fait légitime que chacun, selon ses affinités personnelles, mette l'accent sur tel ou tel aspect de la question. Il est même indispensable de déplacer cet accent lorsqu'on passe d'un certain niveau scolaire à un niveau plus élevé et maintes divergences s'expliquent par le fait que tel auteur se réfère aux premières années de scolarité, tel autre à l'enseignement secondaire supérieur. L'enfant doit tout d'abord apprendre à observer, puis à décrire, puis à ordonner, bien avant d'axiomatiser et de travailler à l'intérieur de systèmes formels. Lorsqu'il aura atteint ce dernier stade, il fera inversement passer au second plan des activités qui étaient auparavant prioritaires: compter, mesurer, construire manuellement. Il sait (ou il

devrait savoir) que de telles opérations peuvent ne pas être banales, mais qu'il est utile, et parfois nécessaire, de les dissocier du travail théorique effectué ultérieurement. Tout cela fait partie de l'apprentissage mathématique. Au contraire, le schéma de G. Walusinski, qui met en lumière la multiplicité des opérations réalisées par le mathématicien, et la nécessité soulignée par A. Revuz de distinguer soigneusement entre ces opérations, concernent essentiellement l'acte mathématique.

Personne n'exigera que le dispositif entier soit mis en place dès la première leçon de géométrie ou d'algèbre. Il est même judicieux, pour commencer, de ne pas marquer de façon trop nette la frontière entre aspect expérimental et aspect théorique. Comme le démontre F. Gonseth, en particulier dans «La géométrie et le problème de l'espace», ce n'est que peu à peu, et pour répondre à des nécessités de plus en plus impérieuses, que s'impose l'idée d'une séparation entre la situation concrète et le modèle mathématique destiné à la représenter.

Cet apprentissage progressif, où la prise de conscience de ce que l'on fait se développe au même rythme que l'étendue des connaissances, exclut bien sûr l'idée d'une construction rigoureuse et sans faille de tout l'édifice mathématique à partir de la théorie des ensembles, idée qui semble avoir été à la base de certaines réformes et qui me paraît aussi vaine que celle d'un enseignement «linéaire» de l'histoire, des anthropopithèques à nos jours.

Un aspect remarquable, et certainement inattendu, de la série d'articles publiés dans «Math-Ecole» est l'importance que presque tous les auteurs accordent à la notion de liberté. G. Walusinski voit dans l'enseignement des mathématiques un «apprentissage de la liberté» et je pense que la formule exprime un idéal auquel chacun peut se rallier, même Z. P. Dienes qui brosse un tableau très caricatural de l'école traditionnelle, école-prison où de malheureux bambins seraient soumis au pire des esclavages. En réalité, je constate (avec quelque étonnement, je l'avoue) que mes propres enfants se rendent très volontiers en classe et je suis porté à croire que, tout en rêvant parfois d'un monde magique où tout leur serait permis, ils éprouvent également un profond besoin d'ordre et de régularité. Les enfants de leur âge — 6 à 10 ans — acceptent facilement certaines contraintes, selon des critères toutefois fort différents de ceux des adultes. Profitant de ces dispositions, l'école primaire devrait donc être en mesure de préparer un terrain favorable à l'enseignement des mathématiques, en apprenant à l'enfant à ordonner sa perception du monde et en lui faisant découvrir, sans toujours les nommer, quelques lois élémentaires. Beaucoup de maîtres possèdent le doigté nécessaire pour faire sentir aux élèves que ces lois ne sont pas forcément une entrave à leur fantaisie, mais qu'elle peuvent au contraire servir de point d'appui à son épanouissement (en musique, par exemple). Il est évident que les conseils des psychologues sont, à ce stade, plus précieux que ceux des mathématiciens. La tâche du maître me semble beaucoup plus ardue au niveau supérieur.

Même si les programmes sont rédigés d'une manière assez vague (ce qui est souvent le cas en Suisse), ils comportent une série de sujets que chaque enseignant estime indispensables, comme l'étude des fonctions réelles ou le calcul vectoriel. Très souvent les élèves ne voient là que des jeux stériles et se sentent menacés dans leur liberté lorsqu'on leur demande d'étudier des notions dont l'utilité n'est pas immédiatement évidente. Comment, par exemple, leur expliquer d'emblée l'intérêt porté au produit scalaire de préférence à toute autre loi de composition entre vecteurs? L'idéal serait sans doute de leur donner confiance, progressivement, en leur présentant des problèmes pratiques que l'appareil mathématique permet de résoudre. C'est dans cette optique que j'ai insisté, plus haut, sur le rôle préparatoire de l'enseignement primaire. Au degré secondaire, la difficulté réside dans le fait que les différentes disciplines, enseignées par des maîtres différents, sont soumises à un cloisonnement difficilement évitable et qui n'est d'ailleurs pas, il faut le reconnaître, l'apanage de l'école. Il est donc rare d'assister à la collaboration, si souvent prônée, entre le maître de géographie, par exemple, et le maître de mathématique: le premier invitant ses élèves à recueillir des données et à formuler quelques hypothèses, le deuxième leur apprenant à trouver un modèle mathématique adéquat et à y effectuer les calculs nécessaires.

Faute de mieux, il faudra donc se résoudre à construire des modèles à partir de situations déjà plus ou moins schématisées. Malheureusement, même cette exigence restreinte est rarement satisfaite: la plupart des problèmes soumis aux élèves sont construits, ou en tout cas choisis en fonction des méthodes de résolution souhaitées, alors que le chemin inverse est peu fréquenté. De ce fait, les élèves ne savent pas choisir la méthode la plus efficace lorsque, exceptionnellement, il en existe plusieurs. Exemple-type: on donne une droite d du plan, deux points A et B situés dans le même demi-plan, et l'on demande de trouver un point P de d tel que la somme des distances $\overline{AP} + \overline{BP}$ soit minimum. Présenté à un examen de maturité, ce problème de géométrie est invariablement résolu par des méthodes de calcul différentiel!

Rappelons ici, sans vouloir être trop cruel, le programme proposé tout à l'heure aux enseignants des mathématiques: apprentissage de la liberté, d'une liberté fort différente de l'anarchie et qui serait avant tout réflexion sur les contraintes imposées de l'extérieur, sur les moyens de s'en accommoder et sur les perspectives qui viendraient à s'ouvrir si l'une ou l'autre de ces barrières était supprimée. Faudrait-il, après avoir comparé l'idéal à la réalité scolaire, se résigner à abandonner le premier? Je ne le pense pas. Tout d'abord il existe des réussites, certes fragmentaires, démontrant que le but recherché peut être approché. Et puis le maître de mathématiques, mieux que tout autre, saura distinguer, dans les articles soumis à sa réflexion, ce qui est théorie de ce qui pourrait devenir pratique. En pédagogie aussi, la notion de modèle peut se révéler fructueuse.

Jean-Jacques Walder, au nom de ses collègues, les praticiens, plaide pour un allègement des programmes et pour que liberté soit donnée aux maîtres de pouvoir laisser les enfants aller leur train et se livrer à des activités de recherche et d'intention en quoi consiste, pour une très large part, l'activité mathématique elle-même.

Les réactions de la base

présentées par Jean-Jacques Walder, instituteur, Hermance (GE)

Les réactions que j'ai recueillies à propos du double numéro 61/62 de «*Math-Ecole*» ont été très diverses. Elles proviennent donc de collègues «de la base» et peuvent être résumées de la façon suivante:

Il est très intéressant de lire des articles qui montrent une vision globale, profonde, de l'acte mathématique. Cela donne une idée théorique et pédagogique de ce que l'on entend par «enseignement moderne» de la mathématique. Ces articles montrent bien le chemin à suivre, passionnant, et le but à atteindre, encore... lointain!

Ces vues intellectuelles éliminent bien sûr les controverses et difficultés dites «mineures». C'est pourtant à ces dernières que se heurtent quotidiennement les collègues. Ils ont donc fait remarquer que ces textes ressemblent beaucoup à une œuvre pie, car ils mettent en relief un de leurs principaux problèmes:

Comment parcourir un programme surchargé en laissant l'enfant découvrir, en le faisant communiquer avec ses voisins, par groupes, par ateliers, par recherches personnelles?

Les notions sont si étendues, le «fundamentum» (surtout numérique) si copieux qu'il leur devient impossible d'enseigner valablement. A vouloir «caser» à tout prix une certaine quantité de notions (parfois même trop avancées pour l'enseignement primaire, puisque reprises au CO), on annule purement et simplement la valeur de ce nouvel enseignement.

Si l'on ajoute à cela l'effort important qui est demandé au corps enseignant pour son recyclage, on comprendra aisément certaines réactions désabusées...

La réforme entreprise, d'un grand intérêt (les articles précités l'ont bien montré), ne pourra conserver sa raison d'être qu'en laissant aux maîtres la possibilité de la poursuivre sans être «ligotés» par un programme gonflé et contraignant.

Permettez-moi de citer quelques phrases de ces articles à l'intention des responsables du programme de mathématique 5e-6e (CIRCE II):

- «Il faut aussi laisser faire le temps, ne rien précipiter.» (S. Roller);
- «Une pédagogie active qui suscite la recherche et le travail personnel s'impose à tous.» (L. Jeronnez);

- «Ce que je voudrais souligner, c'est que ce qui compte ce n'est pas le contenu mathématique, mais les habitudes de penser que nous pouvons développer chez l'enfant et dont il aura besoin dans la vie.» (Z. Dienes);
- «Le centre de gravité de l'enseignement se déplace de l'acquisition de notions vers l'initiation à la recherche.» (A. Delessert);
- «L'enseignement élémentaire sert à constituer un fonds d'expériences mathématiques.» (W. Senft);
- «Mon vœu serait le suivant: qu'on ne réduise pas artificiellement les activités mathématiques aux seuls comportements qui sont mesurables.» (A. Calame).

Pour terminer, je partage l'inquiétude de M. G. Leresche qui nous dit:

- «Je ne saurais assez dire combien m'inquiète la possibilité de voir l'enseignement nouveau se figer à son tour au niveau purement formel.»

Nous serions bien tentés de dire 2, 3, 5 sont des nombres. S'ils sont des symboles de nombres, alors que sont les nombres? Une des premières grandes conquêtes intellectuelles de l'humanité a sans doute été quand on a désigné par un même qualificatif un couple de chameaux, un couple d'outres, un couple d'arbres, un couple d'hommes et aussi par un même qualificatif un groupe de chameaux ayant autant de chameaux que la main a de doigts, un ensemble d'outres ayant autant d'outres que la main a de doigts, etc. La découverte en somme que «deux», «cinq» sont des propriétés, des qualités caractéristiques d'ensembles, quels que soient les éléments qui forment ces ensembles.

*N. Picard in
«Une expérience d'enseignement de
la mathématique», Le Courrier
de la recherche pédagogique, Paris,
mars 1966, p. 24.*

C'est en praticiens de l'enseignement que Simonne et Jean Sauvy abordent l'Acte mathématique. Ils le font à partir d'un corpus très riche d'expériences vécues avec des enfants. Trois exemples — un problème de parité, l'étude de schémas topologiques, une discussion sur «Le jeu du mot de quatre lettres et ses variantes» — amènent les auteurs à montrer comment les situations se sont peu à peu mathématisées à la faveur d'une activité orientée vers un ordonnancement du réel. «Dans nos exemples, disent S. et J. Sauvy, ce que nous voyons en œuvre chez les enfants, c'est bien une attitude, une sorte «d'esprit investigateur» qui, face à une situation sonnée, se déploie avec l'espoir d'améliorer l'intelligibilité de ladite situation».

L'acte mathématique en devenir

analysé à partir de quelques exemples par Simonne et Jean Sauvy
membres de l'équipe «Activités Recherches Pédagogiques»

Dans le numéro 61/62 de «Math-Ecole» l'acte mathématique a surtout été étudié du point de vue des idées générales.

Nous voudrions pour notre part utiliser une démarche inverse. Nous partirons d'actes *présupposés* mathématiques tels qu'on peut les observer *in vivo*, dans la réalité vécue des situations d'apprentissage, et nous tenterons de découvrir les caractéristiques spécifiques de ces actes.

Appartenant à une équipe de praticiens de l'enseignement élémentaire et moyen, qui étudient systématiquement ces problèmes, nous avons pu multiplier depuis une dizaine d'années les observations quasi «cliniques» d'enfants de 9 à 11 ans aux prises avec des questions présentant des aspects mathématiques.

Dans la plupart des cas nos collègues ou nous-mêmes avons participé avec les enfants aux activités en questions mais nous l'avons fait en nous efforçant d'être également observateurs afin de pouvoir rendre compte dans les pages de la revue «A.R.P.»¹ des séances en question.

Dans quelques cas nous avons procédé à des enregistrements au magnétophone d'enfants en train de participer à des recherches collectives sur une question comportant des aspects mathématiques.

Dans d'autres cas nous avons directement interrogé des enfants sur leur façon d'aborder telle ou telle question et nous avons enregistré leurs propos.

C'est dans ce «corpus» que nous nous proposons de puiser pour présenter nos vues sur «l'acte mathématique».

1. Un premier exemple: un problème de parité

Ce problème s'est posé à des enfants de 9 à 11 ans à l'occasion d'un «jeu» qui consistait à lancer une paire de jetons bicolores et où les enfants compa-

¹ ARP, 27, avenue du 11-Novembre, 92 190 Meudon, France.

raient les résultats de dix jets avec les paris qu'ils avaient faits avant la série des lancers (voir ARP 10, 11 et 12). Pour un lancer donné trois cas pouvaient se présenter: les deux jetons tombaient sur leur face bleue, les deux jetons tombaient sur leur face jaune, l'un tombait sur une couleur et le second sur l'autre. Pour une série de 10 jets les paris, comme les résultats, se présentaient sous forme de triplets de nombres consignés sur un tableau dont nous donnons ci-dessous un extrait.

	Nombre de doubles jaunes		Nombre de «panachés»		Nombre de doubles bleus		Récapitulation des écarts et écart total (score)
	pari	réalité	pari	réalité	pari	réalité	
1re épreuve (10 lancers)	3	3	4	5	3	2	$0 + 1 + 1 = 2$
2e épreuve (10 lancers)	3	1	3	6	4	3	$2 + 3 + 1 = 6$
3e épreuve (10 lancers)	2	3	5	3	3	4	$1 + 2 + 1 = 4$

Au début de la pratique du jeu ce qui comptait pour les enfants c'étaient les scores qu'ils faisaient, mesurés par l'amplitude de l'écart total: plus l'écart total était faible, meilleur était le pari. Mais, progressivement, l'intérêt des enfants, au moins de certains d'entre eux, s'est déplacé. Ils ont reconnu qu'il y avait dans le score une part irréductible de hasard. Même en pariant très astucieusement on pouvait avoir un mauvais score!

Cette constatation les a amenés à réfléchir à la notion de hasard mais aussi à examiner les scores et leur composition (le score total s'obtenant par addition de trois écarts partiels).

Dans un groupe, l'attention s'est portée sur le fait que le score (écart total pour une série de dix jets) était toujours *pair*.

Un des participants au jeu, la jeune Odile, après avoir fait une erreur d'addition qui lui avait fait attribuer un score impair, a l'intuition que ce n'est pas «par hasard» si les scores sont toujours pairs. Elle se met aussitôt à chercher intensément à *prouver* cette hypothèse.

Après divers tâtonnements elle découvre — et formule tant bien que mal — la démonstration de ce qu'elle avance. Elle dit par exemple: «Si on a fait une (première) faute (qui donne un écart partiel de 1), si on a mis 3 au lieu de 2, y en a forcément 1 de moins dans une case, alors notre pari (elle veut dire notre score) y peut pas être impair».

Certes le discours démonstratif n'est pas parfait mais tel qu'il est il peut emporter la conviction des interlocuteurs. Il adopte d'ailleurs spontanément la forme du raisonnement hypothético-déductif («Si... alors...»). Et les termes ou expressions tels que «forcément»..., «y peut pas» qu'utilise Odile indiquent bien qu'elle est certaine de ce qu'elle affirme.

C'est ce passage à la certitude — ce que Piaget appelle le «statut de nécessité» d'une proposition — qui marque l'entrée en scène de quelque chose de plus que les constatations faites par les autres enfants.

Quand on analyse ce qui s'est passé on découvre d'abord que le sujet raisonnant (Odile) s'est dégagé des cas particuliers figurant sur sa feuille pour traiter du cas général². Son affirmation revient à déclarer: «*quels que soient les nombres en cause si j'ai 1 de moins dans une case j'aurai forcément 1 de plus dans une autre case et au total ça fera 2, c'est-à-dire un nombre pair*».

En second lieu la démarche sous-revue implique un raisonnement faisant intervenir plusieurs propositions s'articulant logiquement entre elles, *suivant le schéma suivant*:

- a) D'après la règle du jeu (10 lancers) la somme des nombres composant un triplet est toujours égale à 10 ($p + q + r = 10$).
- b) Donc si on a 1 en moins à une place ($p' = p - 1$) on a forcément 1 de plus à une autre place ($q' = q + 1$ ou $r' = r + 1$).
- c) Comme la somme des deux nombres impairs est paire alors la somme des écarts est paire.

En troisième lieu l'apparition du raisonnement s'explique parce que la seule «lecture» directe de la situation ne permet pas de conclure. Le fait que tout les scores trouvés soient pairs constitue une présomption (cela un des enfants le dit). Mais ce n'est pas une preuve. Un travail de «déchiffrement» de la situation doit donc être entrepris, déchiffrement qui n'est ni immédiat ni trivial³. En d'autres termes le raisonnement intervient ici comme un *moyen* pour arriver à une certaine *fin* et l'ensemble de la démarche est sans conteste une *démarche orientée vers un but*.

Au vu de ces diverses considérations on est tenté de décerner à la démarche dont nous venons de rendre compte le statut de «démarche mathématique» parce qu'elle s'applique à des «objets mathématiques» (des triplets de nombres ou vecteurs), parce qu'elle met en œuvre un *raisonnement* (ensemble de propositions logiquement articulées entre elles) et parce qu'elle se propose de *démontrer* une *propriété générale* non immédiatement lisible dans la situation.

² Plus tard un enfant se demandera si ceci est encore vrai quand on fait un nombre impair de lancers, par exemple 11.

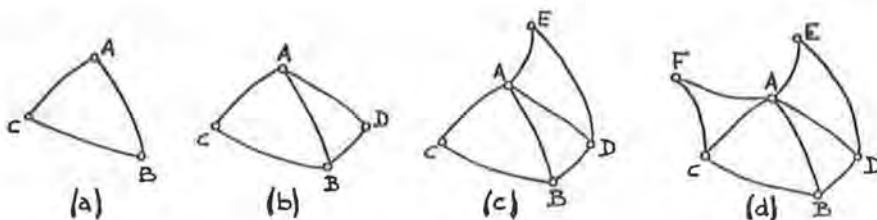
³ La preuve en est qu'un autre enfant, Erik, qui est parti sur une autre piste et envisage un autre type de problème (sans que personne n'en prenne clairement conscience) n'arrive pas à démontrer ses propres affirmations.

Toutefois, adoptant une attitude de doute méthodique, nous ne prenons pas tout de suite position et préférons examiner d'autres exemples.

2. Un deuxième exemple: schémas topologiques

Il s'agit cette fois de l'activité d'une classe entière (enfants de 9 à 10 ans) et d'une séance de recherches sur des schémas topologiques (graphes planaires). On en trouvera le compte-rendu détaillé dans ARP 5, avril 1972, p. 37-40, sous le titre: «Etablissement et exploitation d'un tableau de résultats».

Les enfants partent d'un triangle ABC, qui peut être curviligne (a). Ils obtiennent (b) en y ajoutant un triangle dont un des côtés est confondu avec l'un des côtés du triangle de base, le troisième sommet étant à l'extérieur du triangle initial.



De la même façon ils passent de (b) à (c) puis de (c) à (d) et ainsi de suite. On compte chaque fois le nombre de sommets du graphe correspondant, le nombre d'arcs et le nombre de triangles (ou faces). Les résultats sont transcrits sur un tableau récapitulatif.

Graphe	Nombre de sommets	Nombre d'arcs	Nombre de triangles
(a)	3	3	1
(b)	4	5	2
(c)	5	7	3
(d)	6	9	4

Un enfant, observant ce tableau, remarque que «en doublant le nombre de la colonne «triangle» et en ajoutant 1 on retrouve le nombre de segments».

C'est ce qu'on pourrait exprimer par la formule

$$\boxed{} \times 2 + 1 = \boxed{}$$

nombre de triangles nombre d'arcs

par exemple pour la figure (d) on a:

$$\boxed{4} \times 2 + 1 = \boxed{9}$$

Analysons les démarches mises en œuvre par les enfants dans l'exploration de la situation que leur offre la série des graphes réalisés.

Nous remarquons que ces démarches portent sur des «objets mathématiques», en fait sur deux grandes catégories de tels objets, d'une part des objets de nature topologique (sommets, arcs, faces), d'autre part des objets de nature numérique.

Nous remarquons en second lieu que l'investigation porte sur une *série* de graphes. Ceux-ci découlent les uns des autres par l'application d'un procédé qui demeure invariant («ajouter au graphe précédent un sommet extérieur et les deux arcs nécessaires pour obtenir une nouvelle face»). On peut donc dire que la situation, par sa dynamique même, entraîne tout naturellement les enfants vers la généralisation. C'est bien ce qui se produit. En observant le tableau des résultats un enfant remarque que dans tous les cas de figure une relation simple existe entre le nombre d'arcs d'un graphe et le nombre de triangles:

$$|A| = 2 |T| + 1$$

|A| : nombre d'arcs

|T| : nombre de triangles

Cependant, contrairement à ce qui se passait dans l'exemple précédent, cette relation est simplement *constatée*. Aucun enfant — semble-t-il — ne ressent le besoin de la *démontrer*.

En ce sens la démarche sous-revue semble plus éloignée d'une démarche mathématique digne de ce nom que ne l'était la démarche analogue dans le premier exemple.

Pourtant ce deuxième exemple, dans la mesure où il conduit un des enfants à quelques pas à peine de la transcription de la relation trouvée en langage algébrique, fait apparaître, *a contrario*, que la démarche du premier exemple est, mathématiquement parlant, incomplète, puisqu'on n'y trouve pas cette sorte de couronnement que constitue le passage à un langage symbolique approprié.

Nous devons donc, ici encore, suspendre notre jugement et recourir à de nouveaux exemples dans l'espoir qu'ils nous apporteront quelque lumière complémentaire.

3. Deux autres exemples

La matière de ces exemples nous est fournie par l'enregistrement d'une discussion entre deux fillettes, âgées respectivement de 10 ans et 10 ans et demi, d'une école de la région parisienne et un des auteurs de la présente communication (voir l'article «Le jeu du mot de quatre lettres et ses variantes», ARP 15, mai 1974, p. 12-22).

Dans ce jeu il s'agit de découvrir un mot pensé par un partenaire (par exemple «cane») en proposant soi-même une succession de mots, par exemple «rôti», «pape», «rime», etc. Dans chaque cas le partenaire annonce le score du mot proposé, toute lettre exacte à sa place valant un point, les autres étant comptées 0. Ainsi «rôti» vaut 0 point, «pape» 2 points (le «a» et le «e»), «rime» vaut 1 point (le «e» final), etc. On peut opérer de la même façon en utilisant des nombres de quatre chiffres à la place des mots. C'est de cette dernière variante dont il sera question ici.

Les deux enfants en question jouent à ce jeu depuis environ deux ans. Désormais ce qui les intéresse c'est de découvrir la meilleure stratégie possible permettant de deviner le nombre. Autrement dit l'intérêt a glissé de la pratique du jeu à l'analyse du jeu.

Dans l'une des interviews auxquelles nous nous référons, celle dans laquelle s'exprime Juliette (10 ans et demi), nous voyons successivement «en acte» la mise en œuvre de deux raisonnements intéressants à étudier.

Dans le premier cas la fillette explique sa «nouvelle méthode» (qu'elle a découverte récemment et qu'elle applique désormais systématiquement). Pour ce faire elle indique les déductions auxquelles elle se livre dès qu'elle obtient une nouvelle information.

Joignant celle-ci à celles dont elle disposait déjà elle élimine un certain nombre de possibilités et peut, à un certain moment, décider sans crainte d'erreur que tel chiffre doit *forcément* occuper telle place dans le nombre.

Peut-on dans ce cas parler de démarche mathématique?

Considérons d'abord la matière sur laquelle opère le raisonnement. Certes il s'agit de chiffres occupant certaines positions et constituant un nombre mais on ne peut pas dire pour autant qu'il s'agisse d'objets mathématiques. La preuve en est qu'on peut jouer au dit jeu avec des lettres ou même avec des objets matériels.

Par contre nous sommes en présence d'un authentique raisonnement logique qui conduit à une certitude et qui fait constamment appel au jeu des hypothèses et de la déduction.

Enfin il est clair que nous ne saurions «mettre en formule» le problème en question. Ce qui est en cause ici c'est un schéma de raisonnement logique.

Devant décider si nous sommes en présence ou non d'une démarche mathématique, nous voilà de nouveau embarrassés et une fois encore, nous suspendons notre jugement tandis que nous abordons un dernier exemple fourni par la suite de l'interview.

Dans cette suite, voici que la question surgit de déterminer combien on doit poser au minimum de questions pour trouver le nombre cherché (dans l'hypothèse, naturellement, où l'on n'a pas de chance).

Juliette se lance dans cette nouvelle recherche avec son esprit d'entreprise habituel et sa quête la fait déboucher rapidement sur un problème de *permutations*: combien peut-on faire de «mots» différents avec quatre lettres disposées de toutes les façons possibles.

Après avoir pensé que la réponse est $4 \times 4 = 16$, après pas mal de tâtonnements et une aide légère de l'adulte, la solution est trouvée: il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ façons de placer les quatre lettres (ou les quatre chiffres) disponibles.

Etablissons un bilan rapide de ce nouvel et dernier exemple.

Nous avons affaire ici à une démarche à laquelle nous conférerions volontiers le label de «mathématique». Il s'agit — le mot n'a pas été prononcé mais peu importe! — de *permutations*, c'est-à-dire d'objets mathématiques par excellence.

D'autre part la réponse n'est pas donnée par une simple «lecture». L'enfant doit construire tout un édifice, inventer une méthode, pour aboutir à une conclusion inattaquable.

Enfin nous sentons que la généralisation, et même la mise en formule ($P_n = n!$), sont à portée de la main. Toutefois cette généralisation n'est pas intervenue et elle se serait d'ailleurs située bien loin du problème initialement posé.

4. Que conclure?

Au terme de l'examen de cette série d'exemples, est-il possible de présenter un ensemble de critères qui permettent de reconnaître sans ambiguïté, parmi les démarches examinées, celles qui étaient mathématiques et celles qui ne l'étaient pas?

Compte tenu des nombreuses réserves que nous avons mentionnées dans nos commentaires précédents, on ne s'étonnera pas que notre réponse soit dubitative.

Et s'il en est ainsi c'est sans doute parce que la préoccupation sous-jacente à la question posée («comment reconnaître l'acte mathématique?») n'est pas la préoccupation essentielle qui sous-tend les activités dont nous avons parlé.

Sur ce point nous rejoignons J.-B. Grize quand il met l'accent sur l'*attitude commune* que l'on décèle dans des démarches «géométriques» aussi différentes que celles d'Euclide et de Hilbert.

Dans nos exemples, ce que nous voyons en œuvre chez les enfants, c'est bien une attitude, une sorte «d'esprit investigateur» qui, face à une situation donnée, se déploie avec l'espoir *d'améliorer l'intelligibilité* de la dite situation.

La situation, voilà la chose importante.

La situation fait naître la recherche, soit parce qu'elle comporte une *structure cachée* que l'investigation est susceptible de dévoiler, soit parce qu'elle traîne

avec elle une *marge d'incertitude* gênante pour l'esprit, marge qu'une démonstration est susceptible de dissiper.

Face à des situations de ce type la démarche qu'entreprend l'enfant n'est pas gratuite. Elle est utilisée pour atteindre un certain but. C'est cela qui motive la recherche.

Pour la mener à bien, l'enfant doit observer, abstraire, éventuellement dénombrer. Il doit se méfier des premières impressions ou de certaines intuitions. Il doit dépasser le particulier en direction du général. Il doit mettre en place des certitudes et procéder pas à pas comme un grimpeur aux prises avec une paroi difficile. Au total il doit construire un édifice qui organisera hypothèses et déductions en un ensemble cohérent.

L'enfant pour y parvenir met en œuvre tous les moyens dont il dispose, allant même parfois jusqu'à en créer qu'il ne connaît pas.

Dans cette activité, on l'a vu, bien des moments évoquent irrésistiblement certains aspects de l'activité du mathématicien. Mais c'est une «mathématique-outil» qui est ici mise en œuvre, une mathématique introduite et utilisée à des fins utilitaires et non spéculatives.

Dans des processus de ce type, les actes mathématiques (ou présumés tels) n'ont pas besoin d'être des actes «mathématiquement purs». Ils n'ont pas besoin d'être des actes mathématiquement achevés. Ils sont des pierres dans un édifice, des pierres presque toujours mal dégrossies que le mathématicien a parfois de la peine à reconnaître comme siennes, des pierres qui, souvent, sont maladroitement agencées. Mais elles n'en sont pas moins précieuses pour l'enfant et pour sa formation parce qu'elles sont à sa mesure et parce qu'il a su et pu se les approprier.

Notre réflexion a voulu être en prise directe avec des situations d'apprentissage. Mais ce contexte a fait que nous nous sommes progressivement écartés du thème initialement fixé — l'acte mathématique — pour nous centrer de plus en plus sur «l'acteur» et sur sa démarche investigatrice.

A ce niveau nous n'avons pas eu l'occasion de rencontrer d'édifice mathématique sorti des cerveaux des axiomaticiens modernes. Nous étions donc mal placés pour formuler des réponses à la question posée et nous ne nous y sommes pas hasardés. Notre intervention ne pouvait donc pas apporter d'éléments positifs au débat en cours.

Tout au plus pouvait-il le faire rebondir vers d'autres rivages, plus accueillants peut-être aux praticiens de la pédagogie...

Bernard Charlot intervient aussi en tant que pédagogue. Il n'y a de mathématique qu'à la faveur d'une «mathématisation»; celle-ci est «actes» qui, à la fois, pose des objets et les relie les uns aux autres. L'enfant mathématise au sein du concret; le mathématicien le fait au sein de relations, voire de systèmes de relations. Il s'ensuit que l'apprentissage de la mathématique implique activité du sujet, et activité libre. Avec, pourtant, une précaution: l'enfant, de lui-même, ne mathématise pas, ou très peu. Il faut que le maître crée des situations riches et stimulantes qui suscitent son activité mathématisante.

L'acte mathématique chez l'enfant et chez le mathématicien

par Bernard Charlot, professeur
de psychopédagogie à l'École normale d'institutrices du Mans (France)

Qu'est-ce que l'acte mathématique? Ainsi formulée, cette question implique deux présupposés. Premièrement, la spécificité mathématique est à rechercher du côté de l'acte et non du côté de l'objet. Deuxièmement, il existe un acte spécifiquement mathématique.

S'il existe des êtres mathématiques spécifiques (nombres, triangles, systèmes formels, etc.) faire des mathématiques, c'est étudier ces êtres, c'est-à-dire inventorier leurs propriétés et leurs relations. Les mathématiques sont alors définies par leurs objets et non par un acte mathématique; d'ailleurs, les caractéristiques de l'acte mathématique (évidence, nécessité, etc.) sont présentées comme une conséquence de l'idéalité des être mathématiques. Mais — et c'est là le fondement de la conception moderne des mathématiques — il n'existe ni êtres mathématiques en soi, ni vérités mathématiques en soi; les mathématiques étudient des relations entre des objets qui n'ont d'autre existence que celle que leur confère le mathématicien lui-même en formulant dans des axiomes les propriétés de ces objets. Dès lors, la spécificité mathématique ne doit pas être cherchée du côté des êtres mathématiques, mais du côté de la mathématisation ou, si l'on veut, de l'acte mathématique.

Mais la notion d'acte mathématique a-t-elle une signification univoque? Des actes mathématiques divers, par exemple ceux mis en œuvre par l'élève et par le mathématicien, présentent-ils suffisamment de caractères communs pour que l'on puisse définir *La Mathématique* par *L'Acte mathématique*? Dans la conception traditionnelle des mathématiques, la convergence des différents types d'activités mathématiques vers un objet commun permettait de penser que, à travers la diversité de ses formes, l'acte mathématique était un. Mais sur quoi peut-on fonder l'univocité de la notion d'acte mathématique lorsqu'on ne définit plus les mathématiques par leur objet? Est-ce à bon droit que l'on emploie le même mot de mathématisation pour le mathématicien et pour l'élève? Là réside à mon avis le problème pédagogique essentiel. En effet:

— ou bien l'élève est capable de mathématiser et le processus pédagogique devra alors être l'analogue du processus de création mathématique;

- ou bien la mathématisation véritable est hors de portée de l'élève et les mathématiques modernes ne seront alors pour lui qu'un contenu nouveau à assimiler selon des méthodes traditionnelles; en effet, les résultats de l'activité du mathématicien se présenteront à l'élève sous forme d'objets mathématiques indépendants de sa propre activité.

La définition de l'acte mathématique comme *création* semble d'abord résoudre le problème. Le mathématicien construit des vérités mathématiques à l'intérieur d'un système qu'il a créé librement. L'enfant apprend à mathématiser, c'est-à-dire à créer de la mathématique. La mathématisation de l'enfant et celle du mathématicien se rejoindraient ainsi dans une conception de l'acte mathématique comme création. Mais, outre qu'il resterait à préciser en quoi cette création peut être dite mathématique, le problème n'est que reculé: la notion de création mathématique a-t-elle une signification univoque au regard de l'enfant et du mathématicien?

Mathématiser, à l'école élémentaire, c'est partir d'une situation donnée et la structurer en y introduisant des relations qui permettent d'en rendre compte. Mathématiser, quand on est mathématicien, c'est construire des énoncés mathématiques vrais à l'intérieur d'un système d'axiomes que l'on s'est donné. L'acte mathématique de l'enfant consiste à construire des relations au sein d'un réel donné. L'acte mathématique du mathématicien consiste à construire des relations entre des relations qu'on se donne. La mathématisation de l'enfant et celle du mathématicien impliquent toutes deux *la construction de relations*. Mais l'enfant construit des relations entre des choses qui lui sont données, alors que le mathématicien construit des relations entre des relations qu'il se donne.

Mathématiser, c'est donc d'abord, pour l'enfant comme pour le mathématicien, poser l'être comme relation, traiter le réel comme relationnel. L'acte mathématique est l'acte par lequel on opère sur l'être après l'avoir posé comme relation. Toute opération mathématique suppose cette opération plus originale par laquelle le réel se trouve appréhendé comme relationnel. Lorsqu'un enfant énumère comme une litanie, ou, mieux, comme une comptine, la suite des nombres naturels, il ne se livre pas à un acte mathématique: loin de réduire le réel au relationnel, il goûte poétiquement la qualité sonore des nombres. De même, lorsqu'un enfant appréhende intuitivement une collection de cinq objets, sans compter, il n'y a pas acte mathématique car le nombre est perçu alors comme une qualité de la collection elle-même. Par contre, lorsque, au cours d'une activité motrice, les enfants se rangent par taille, se groupent par âge, ou constituent une file de garçons face à une file de filles, il y a acte mathématique car les rapports entre enfants sont alors appréhendés en termes de relations.

Mais encore faut-il s'entendre sur les notions de réel et de relationnel. Il n'y a pas de réel en soi; il n'y a que des niveaux de réalité. Un système formel de relations peut devenir le réel à partir duquel on construira un nouveau système de relations. L'enfant mathématise des situations concrètes; le mathématicien mathématise le plus souvent des systèmes de relations. L'enfant de

l'école élémentaire se trouve au stade des opérations concrètes, c'est-à-dire à celui de la structuration directe des données actuelles; il part du concret et y introduit des relations. Il part du donné, tandis que le mathématicien part de ce qu'il se donne. A la pensée concrète de l'enfant s'oppose la pensée éminemment formelle du mathématicien; les relations que le mathématicien pose dans ses axiomes sont conçues comme des possibilités. L'enfant pose la relation elle-même comme réelle alors que le mathématicien la pose comme possible.

Structurer le réel en y introduisant des relations, c'est déjà mathématiser. Cette activité appelle une démarche pédagogique de recherche, de création; en effet, la spécification de l'acte mathématique réside avant tout dans une certaine attitude face au réel, et une attitude ne peut se transmettre par un enseignement dogmatique. Cependant, il ne faut pas confondre un enfant qui mathématise et un mathématicien. L'acte mathématique de l'enfant se heurte à deux limites, dont chacune appelle l'intervention du maître. D'une part, l'enfant ne recherche pas spontanément des relations entre les relations qu'il a dégagées au sein d'une réalité donnée. Abandonnée à elle-même, son activité de mathématisation ne peut donc pas le mener bien loin. Elle ne peut progresser que grâce au maître, qui présente à l'enfant des situations offrant des possibilités mathématiques de plus en plus riches. D'autre part, l'enfant ne prendra clairement conscience des implications de son acte mathématique que lorsqu'il sera apte à comprendre la nature hypothético-déductive de la mathématique (à partir de 14 ans seulement). Il faudra pour cela attendre l'école secondaire. Mais le maître peut, dès l'école élémentaire, préparer cet approfondissement en encourageant chez l'enfant les activités de systématisation des relations et de changement de système de référence (utilisation de bases différentes dans la numération par exemple).

L'activité de l'enfant doit donc être la base de la pédagogie mathématique à l'école élémentaire. Mais cette activité ne prend toute sa valeur éducative que grâce à l'intervention du maître. Activité de l'enfant et intervention du maître traduisent la parenté et les différences entre l'acte mathématique de l'enfant et celui du mathématicien.

C'est par sa propre pratique et par sa propre exploration que l'enfant comprend une situation nouvelle et non par des références à l'expérience d'autrui... La réponse correcte passe au second plan; l'aptitude essentielle consiste à savoir trouver son chemin à travers des situations de plus en plus complexes: il faut mettre l'accent sur l'activité dynamique de recherches, plutôt que sur l'activité statique de la «réponse».

*Z. P. Dienes in
«La mathématique moderne dans
l'enseignement primaire», O.C.D.L.*

Pour le professeur Hermann Maier, il faut se garder de deux extrêmes: le formalisme et la pensée «quelconque». Les «modèles» pourraient être proposés aux élèves (non pas imposés) avec une précaution: que le va-et-vient soit entretenu entre le réel et le modèle. Enfin, il faut prendre soin d'assurer la communication des découvertes par l'usage d'un langage univoque.

Professeur Dr Hermann Maier, chaire de didactique de la mathématique,
Université de Regensburg (République fédérale d'Allemagne)
(Résumé de sa lettre du 16 avril 1974)

La méthodologie de l'enseignement de la mathématique ne peut pas, en effet, ne pas tenir compte des fondements mêmes de la mathématique. Une telle démarche fondamentale s'impose chaque fois que l'on veut approfondir la didactique d'une discipline. Deux extrêmes sont à considérer et, du même coup, à éviter. D'une part, on pourrait ramener l'acte mathématique à une manipulation pure et simple de signes verbaux et graphiques. Avantages: simplicité, délimitation aisée du champ d'activité, évaluation aisée, efficacité dans ce cadre-là. Inconvénients: inculquer un certain formalisme (ce que fait parfois l'enseignement traditionnel) ne saurait suffire à assurer la maîtrise de l'acte mathématique lui-même. Aucun des auteurs qui se sont exprimés sur cet acte n'a défendu ce terme de l'alternative. D'autre part, on pourrait ramener l'acte mathématique à un acte quelconque de penser. (Et, il faut le reconnaître, les mathématiciens ont tendance à considérer la pensée mathématique — pensée essentiellement contraignante — comme une «vertu» qui autoriserait à faire de la mathématique la reine des sciences). Cela privilégierait l'autonomie de la pensée mais donnerait au travail des maîtres un caractère particulièrement exigeant et astreignant. Comment exploiter dès lors avec fruit les pensées singuliers des enfants? Il faut en conséquence se tenir à égale distance des deux extrêmes si l'on veut que les réformes réussissent.

A propos des «modèles», on peut se demander s'il ne serait pas utile de présenter aux élèves des modèles déjà montés et dont la valeur a déjà été éprouvée. L'essentiel cependant, eu égard à ces modèles, demeure le va-et-vient de l'esprit de la réflexion à la réalité. Il faut, par ailleurs, que ce que l'enfant élabore pour lui-même — actions concrètes, expressions verbales, notations qui sont le reflet de sa propre compréhension — soit ajusté à la compréhension de ses condisciples: problème de communication.

Si désormais l'enseignement de la mathématique contribue à rendre transparents puis disponibles des fragments de la réalité, il crée les conditions favorables à l'éclosion d'actes mathématiques authentiques.

L'Acte mathématique a des effets profonds. Il atteint les êtres aux lieux de leurs motivations et de leurs décisions. C'est, entre autres, le cas pour les élèves-maîtres du canton de Vaud. Quatre maîtresses d'application nous en apportent le témoignage.

De l'impact de la mathématique actuelle sur les étudiants en pédagogie

par Annette Ferrari, Marie-Thérèse Jonneret, Suzanne Lassueur et Françoise Waridel, maîtresses d'application dans les écoles normales du canton de Vaud

De quel sujet peuvent bien s'entretenir quatre maîtresses d'application se rencontrant autour d'un verre, au hasard d'un moment de liberté? De pédagogie? Soit. Des élèves qui leur donnent du souci? Naturellement. De l'avenir de certaines méthodes? Quelque peu. Mais encore? De mathématique. Et elles en parlent avec enthousiasme. N'en déplaît à certains esprits chagrins, les maîtres ont aussi de bonnes nouvelles à se transmettre au sujet de leurs étudiants; les quelques remarques suivantes le prouvent.

L'enseignement de la méthodologie de la mathématique a provoqué un renouvellement souvent spectaculaire de l'attitude de l'étudiant face à la pédagogie en général et à la didactique en particulier. Ce renouvellement peut se décrire à trois niveaux différents:

- a) la formation de la personne du futur enseignant; ;
- b) la relation de l'enseignant avec autrui;
- c) l'auto-analyse de l'élève-maître.

a) Grâce à la pratique avec les enfants, beaucoup de jeunes ont laissé entendre, avec un discret soupir de soulagement, qu'enfin ils pouvaient établir un lien entre leur culture générale en mathématique et leur vie d'apprentis en pédagogie. L'approfondissement personnel et professionnel prend un sens, l'étudiant est mieux motivé pour «l'étude pure». Et l'on entend souvent dire: «Si l'apprentissage est difficile et insécurisant, la pratique est satisfaisante sur le plan personnel». La mathématique oblige nos futurs collègues à considérer l'enseignant d'un autre œil, leur ouvre de nouveaux horizons et les oriente vers la pédagogie actuelle. L'aspect psychologique n'est pas moins négligeable: les jeunes apprennent plus rapidement à observer les enfants grâce aux comportements non-scolaires décelables lors des leçons de mathématique; ils peuvent alors facilement dresser un portrait d'élève, en esquisser un profil.

b) Sur le plan des relations, les étudiants sont amenés très tôt à accepter la rupture de la barrière entre enseignant et enseigné... sans pour autant se précipiter sur sa réédification. Ils comprennent «sur le tas» ce que leurs maîtres de pédagogie entendent par la collaboration $M \longleftrightarrow E$ et $E \longleftrightarrow E$, ils n'en

font plus des dissertations, mais des applications concrètes immédiates. Il est frappant de constater encore l'accroissement de vertus telles que la patience, la modestie devant l'omniscience, la confession de l'erreur, voire l'humour...

c) Quant à l'auto-analyse, elle devient à la fois plus naturelle et plus rigoureuse pour beaucoup de nos jeunes. La remise en question, le changement d'itinéraire, l'exploitation de l'erreur sont mieux acceptés. Les élèves-maîtres s'émerveillent volontiers de l'accent mis sur le raisonnement, sur la logique, et de leurs retombées sur tous les autres travaux. Et ce qu'ils constatent chez les enfants se remarque dans leurs propres prestations, nous en témoignons fortement. Le report de la logique en général agirait-elle de 7 à 77 ans? Nous notons encore une amélioration dans les domaines de l'expression orale (où la rigueur est de mise), de l'imagination, de la spontanéité, amélioration qui facilite grandement la maîtrise de didactiques autres que celle de la mathématique.

Enfin, la méthodologie et le programme romands correspondent fort bien au besoin qu'ont nos jeunes de «passer les frontières». Ils apprécient également l'abolition du cloisonnement entre les diverses didactiques, et l'établissement de relations étroites entre les diverses disciplines. La parenté entre la méthodologie de la mathématique et celle de la connaissance de l'environnement leur saute à l'esprit.

N'en jetez plus, direz-vous. La pédagogie court à la perfection... et vous savez bien qu'il n'en est rien: nos jeunes sont inquiets sur le plan quantitatif; ils redoutent souvent d'avoir à enseigner autrement qu'ils n'ont été enseignés; ils ont de la peine à admettre que les notions enseignées ne soient pas assimilées par tous à la fois et avec la même efficacité. A ce sujet, constatons avec eux un sujet de contradiction assez fréquent: la théorie des objectifs véritables souvent inapplicable aux situations vécues.

Ces propos «à bâtons rompus» n'ont pas d'autres buts que de montrer les retombées inattendues de la mathématique (dite moderne...) sur le travail de nos jeunes. La pratique de la mathématique ne résout pas tous les problèmes, mais elle aide grandement l'étudiant dans son approche du métier qu'il a choisi. Ce n'est pas là son moindre mérite.

*Il y a au fond deux manières d'enseigner les mathématiques:
On peut les enseigner à partir de réponses ou à partir de questions.*

*A. Wittenberg in
«Redécouvrir les mathématiques»,
Delachaux et Niestlé, Neuchâtel 1963.*

● Périodiques consacrés à l'enseignement de la mathématique reçus à l'IRDP

- *Instantanés mathématiques* (cinq numéros par an)
Association pour l'avancement des mathématiques à l'élémentaire.
Case postale 433, succursale Westmount. Montréal 215. H3Z2T5.
Abonnement annuel: 3.00 dollars.
- *Mathematica et paedagogia* (trimestriel)
Société belge des professeurs de mathématique.
Quartier de l'Europe 126, 6070 Châtelineau (Belgique).
Abonnement annuel: 350 FB.
- *Nico* (irrégulier)
Centre belge de pédagogie de la mathématique.
Avenue Albert 224, 1180 Bruxelles.
Abonnement annuel: Belgique 250 FB, étranger 300 FB.
- *Activité, recherches pédagogiques* (bimestriel)
Association «Activités et Recherches Pédagogiques».
Avenue du 11-Novembre 27, F - 92190 Meudon.
Abonnement annuel: 27 FS.

● Rappel

Dans son article «Concrétisation des figures logiques», paru dans le dernier numéro de «Math-Ecole», le professeur E. Fischbein cite, entre autres, les ouvrages de Z. P. Dienes «*Mathématique vivante*» et «*Les ensembles et leur logique*». Nous rappelons aux lecteurs de «Math-Ecole» que ces ouvrages sont édités, en France, par l'O.C.D.L., rue Claude-Bernard 65, F - 75005 Paris.

● Congrès

Le Centre belge de pédagogie de la mathématique annonce une quatorzième rencontre internationale qui aura lieu à Knokke-Heist du 1er au 4 avril 1975. Thème: *Continuité et premiers ébats catégoriels*.
Adresse: avenue Albert 224, B - 1180 Bruxelles.

Lu pour vous

● Activités, recherches pédagogiques

Revue (ARP) 15, vol. 3, mai 1974.

Différentes activités menées en classe avec des enfants de 9 à 11 ans sont relatées de façon détaillée et vivante. On sent les auteurs désireux avant tout de stimuler la recherche chez les enfants et leur faire découvrir des méthodes d'investigation. Pour ce faire, les maîtres ne se font pas guides, mais suivent au contraire les idées et les inventions des élèves, se contentant de leur faire préciser leurs idées par des questions ou de leur proposer des prolongements, mais sans insister s'ils ne mordent pas. Les activités touchent généralement à plusieurs disciplines à la fois. Souvent elles se déroulent sur plusieurs mois et la revue en donne alors périodiquement le compte-rendu.

Voici le sommaire du numéro de mai 1974:

Réalisation de masques et travail de recherche sur l'Afrique Noire (classe de C.M. 2, élèves de 10 à 11 ans).

A vous de jouer:

1. Combinatoire binaire.
2. Cordes et régions dans un cercle.
3. Phrase-Pirate, «une musique de mots».
4. Le jeu des parcours sur un plan de maison. Camouflage et découverte de mots (enfants de 9 ans).

Le «jeu du mot de quatre lettres» et ses variantes (II) (comment le raisonnement vient aux enfants). *

Topologie: baudruche, escargots, labyrinthes.

Débat: difficultés rencontrées par les jeunes enfants dans les questions de mesure (V). «Eau, sable, vent» (fin): moulins à vent et balançoires de sable.

Nouvelles brèves. Notes de lecture. Courrier.

I.R.D.P./C.R.

● La mathématique commence

Collection publiée sous la direction de Marcel Dumont et Daniel Gilis. Office central du livre, Paris 1972.

«La mathématique commence» est un livre du maître du premier degré de l'enseignement primaire. La matière correspond grosso modo à l'avenue «Ensembles, Relations» du livre du maître de première année de l'ouvrage romand de mathématique. La numération est à peine effleurée et l'on ne propose qu'une première approche de l'addition, de la soustraction et de la

* Dans son article que nous publions dans ce même numéro, M. Sauvy fait allusion à ce jeu. Voir page 15.

multiplication. «Un guide parallèle, «Conseils pratiques pour le commencement», comprend surtout des jeux exploitant l'environnement conduisant aux concepts de mesure.» (Introduction).

Il semble que cet ouvrage concerne des enfants de 5 ans, ce qui explique partiellement la minceur du programme. Je pose néanmoins les questions suivantes:

1. Le programme romand de première année n'est-il pas surchargé?
2. L'introduction du concept de la mesure ne vient-elle pas trop tard dans nos programmes?
3. La remarque suivante, préalablement dûment motivée, m'a beaucoup frappée: «L'usage prématuré des signes «+» et «-» entraîne à leur mauvaise utilisation, ainsi qu'à un avenir mathématique désastreux.» (Page 44).

Les auteurs de «La mathématique commence» en tirent les conséquences: ces signes ne sont pas utilisés en première année et les opérations sont notées comme les relations. Exemple: $(2 ; 6) \longrightarrow 8$.

Je pose donc la question suivante:

L'introduction de ces signes est-elle suffisamment préparée dans notre programme et sommes-nous sûrs que les enfants les interprètent correctement?

Les maîtresses de première année liront ce petit livre avec profit: il présente le programme de mathématique moderne sous un éclairage différent, explique les difficultés des enfants selon le stade piagétien qu'ils ont atteint (conservation du nombre, par exemple) et donne des suggestions pour des applications nouvelles.

I.R.D.P./C.R.

● Je fais et je comprends

Collection publiée sous la direction de Marcel Dumont et Daniel Gilis. Office central du livre, Paris 1972.

Ce petit livre expose les principes et les modalités possibles d'une réforme complète de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire, telle qu'elle est prônée par le «Projet mathématique Nuffield» (Grande Bretagne). La réforme proposée est essentiellement basée sur la manipulation et l'expérimentation personnelle ou par groupes des enfants («Je fais et je comprends», justement). Un soin tout particulier est apporté au traitement des résultats: suivant les cas, ils pourront être simplement exposés (jeunes élèves), transcrits dans un classeur ou présentés sous forme de graphique, maquette, etc. Les sujets étudiés sont tirés surtout de l'observation de l'environnement et des questions d'ordre mathématique que les enfants se posent, généralement fonctions du stade piagétien qu'ils ont atteint.

La réforme décrite est beaucoup plus totale que la réforme en voie d'introduction en Suisse romande, puisqu'elle se détourne de tout programme fixé

d'avance, de tout horaire rigide, de l'obligation pour tous les groupes de demeurer dans la salle de classe, et que l'évaluation semble basée sur les observations du maître principalement.

Il est clair qu'une telle réforme ne saurait être imposée par un décret ou une ordonnance: elle se propage lentement. Chaque maître est libre de ne s'y lancer qu'au moment où les discussions avec des collègues et les exemples autour de lui l'ont suffisamment convaincu du bien-fondé de la réforme proposée et qu'il se sent suffisamment sûr de lui. Il introduit alors peu à peu ces activités mathématiques libres dans sa classe.

Ce livre intéresse tout enseignant à la recherche des formes possibles à donner au renouvellement non seulement de l'enseignement des mathématiques, mais encore de tout l'enseignement primaire.

I.R.D.P./C.R.

● **Langages logico-mathématiques et langues naturelles**

J.-B. Grize. In: Revue française de pédagogie (Paris), No 23, avril-mai-juin 1973, p. 31-36.

Grize soutient dans cet article la thèse de la dualité des langues naturelles et des langues logico-mathématiques: les unes et les autres, tout en ayant leurs caractéristiques propres sont néanmoins interdépendantes, compte tenu de trois postulats qui sont précisés.

L'auteur décrit successivement les propriétés des langues logico-mathématiques, puis des langues naturelles, pour en déduire et expliquer comment les unes servent de métalangues aux autres. Il termine par quelques questions pédagogiques qu'il se pose en relation avec le problème soulevé.

I.R.D.P./C.R.

A quoi servira à un étudiant d'entrer de plain-pied dans le rez-de-chaussée de l'imposant édifice des mathématiques contemporaines, s'il s'essoufle bien vite en grimpant les escaliers? Ce n'est pas tant le niveau de départ qui compte, c'est surtout le muscle intellectuel: la pratique et l'habitude d'une pensée mathématique fructueuse et pleine de ressources... Nous voulons peupler les universités d'étudiants qui savent penser. Il n'y a qu'un seul moyen pour cela: former ceux-ci à penser par eux-mêmes dès leur plus jeune âge.

*A. Wittenberg in
«Redécouvrir les mathématiques»,
Delachaux et Niestlé, Neuchâtel 1963.*

Recherche et expérimentation individuelle ne sont pas l'apanage du seul enseignement des mathématiques



Les méthodes pédagogiques qui président à l'acquisition des mathématiques modernes à l'école primaire peuvent également s'appliquer avec bonheur aux autres disciplines, particulièrement à l'étude de la langue maternelle.

Nous sommes en mesure de vous fournir un matériel nouveau conçu dans cet esprit:

«Les Images et historiettes»

Huit séries de cartes-images permettent de créer chacune une histoire originale. Les histoires en images et les bandes dessinées proposent toujours une intrigue déjà élaborée, à laquelle le rédacteur du texte ne peut quasiment rien changer. Nos «Images et historiettes» sont d'une conception fondamentalement différente. Les dix cartes-images qui composent une série peuvent être ordonnées librement par l'enfant. L'unité d'une série réside dans le fait que les dix cartes mettent en scène des personnes semblables dans un décor commun.

L'élève classe les scènes évoquées dans l'ordre qui lui convient: il crée ainsi vraiment l'intrigue de son histoire, au gré de son imagination, des sentiments qui l'habitent, de sa personnalité.



Demandez nos prospectus spéciaux

Franz Schubiger, 8400 Winterthour

Mattenbachstrasse 2

Mathématique

A. FERRARI

ANNUAIRE DE MATHÉMATIQUES

2012 Lausanne

TABLE DES MATIERES

L'Acte mathématique: retour d'information, <i>S. R.</i>	1
En guise de rectification, <i>André Delessert</i>	2
Réflexions sur l'acte mathématique et son apprentissage, <i>H. Carnal</i>	6
Les réactions de la base, <i>Jean-Jacques Walder</i>	9
L'acte mathématique en devenir, <i>Simonne et Jean Sauvy</i>	11
L'acte mathématique chez l'enfant et chez le mathématicien <i>Bernard Charlot</i>	19
Réflexions, <i>H. Maier</i>	22
De l'impact de la mathématique actuelle sur les étudiants en pédagogie, <i>Annette Ferrari, Marie-Thérèse Jonneret, Suzanne Lassueur et Fran-</i> <i>çoise Waridel</i>	23
Divers	25

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. B. Beauverd,
L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame,
D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin,
F. Oberson, L. Pauli, J. J. Walder,
S. Roller, rédacteur.

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—,
CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an.
Institut romand de recherches et de
documentation pédagogiques; 43, fbg
de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel.
(Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311

1975
10 Fr.

Math-Ecole freine l'inflation.

Faites usage, dès aujourd'hui, du bulletin de
versement ci-inclus.

Une demande: **PROCUREZ-LUI** de nouveaux
abonnés. Merci!