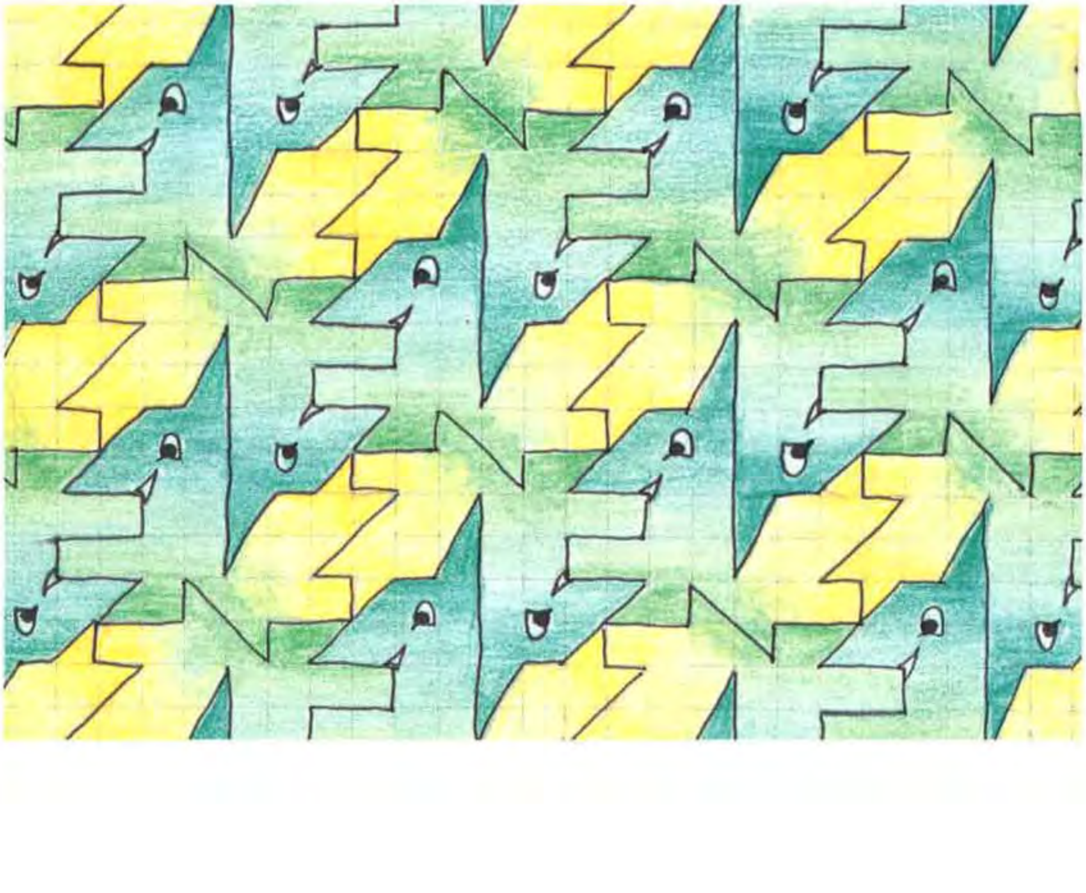
MATH-ÉCOLE 213

Décembre 2004

Un dispositif collaboratif pour le développement du raisonnement mathématique

Évaluation : d'un espace à l'autre

Pourquoi la linéarité joue-t-elle des tours aux élèves ?



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 35.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 45.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 9.–
Anciens numéros : CHF 7.– /pièce de 190 à 205,
CHF 5.– de 150 à 189 (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 2 à 4 ex. CHF 33.– par abonnement
de 5 à 14 ex. CHF 28.– par abonnement
de 15 à 50 ex. CHF 24.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Imprimerie
Fiorina, rue du Scex 34
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Fanny, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

213

Décembre 2004

ÉDITORIAL

À PROPOS DE PISA

François Jaquet

Les premiers résultats de la deuxième enquête *PISA* (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) ont été rendus publics le 7 décembre dernier et largement commentés dans nos médias nationaux. Ils sont décrits dans un rapport substantiel : *Pisa 2003 : Compétences pour l'avenir. Premier rapport national*[1]. que nous avons lu avec beaucoup d'intérêt.

La direction de *PISA* ne lésine pas sur l'information. Rien qu'en Suisse, il y a déjà eu une dizaine de publications parues sur *PISA 2000*, on en attend autant pour *PISA 2003*, puis pour *PISA 2006*, la prochaine étape, en pleine préparation actuellement. On trouve encore sur Internet toute la documentation souhaitée et l'on peut ainsi se rendre compte que ce que nous percevons de l'entreprise n'est que la partie émergente d'un gigantesque iceberg.

PISA, une entreprise coordonnée

PISA concerne actuellement 41 pays, dont 30 états membres de l'OCDE Les centres névralgiques[2] sont en Australie, Japon, Hollande et États-Unis, pour les études statistiques préalables, la définition des structures du programme, les grandes thématiques. Viennent alors les consultations des pays par de multiples échanges et rencontres internationales nécessaires à l'adoption des orientations théoriques et au choix des questions. Ainsi, sur plusieurs années, les tâches centralisées : pondérations, définition des scores, construction de l'indice, validations des items, « nettoyage » des données douteuses etc. alternent avec les tâches qui relèvent de chaque pays : échantillonnage de leurs élèves, traduction des textes et items, passation des pré-tests et des épreuves dans leurs écoles, analyse interne de leurs résultats, publications des résultats nationaux. Notre directrice du projet le dit clairement dans l'avant-propos du rapport : *« ... PISA est tout d'abord une excellente occasion pour la Suisse de mieux cerner les compétences de futures adultes et les effets de nos différents systèmes de formation, dans une perspective internationale. C'est également une occasion unique pour développer la participation à des programmes internationaux, pour apprendre à construire des outils de recherche avec d'autres pays, d'autres cultures et d'autres écoles de pensée... ».*

C'est le premier enseignement, d'ordre méthodologique, à tirer de *PISA* et de la lecture du premier rapport national : on ne part pas seuls dans une entreprise de cette taille aux objectifs si ambitieux, on y va à plusieurs, afin de réunir les forces et les compétences indispensables à sa qualité et à sa rigueur scientifique.

Les compétences

Un des buts affichés de l'enquête est d'obtenir des informations sur des « compétences » en mathématiques (point fort de l'enquête *PISA 2003*), en sciences et en lecture, et aussi en résolution de problèmes au sens large. Au fil des pages du rapport, le terme « compétence » s'efface cependant devant celui de « performance », lui-même étant occulté par les « points » d'une échelle standardisée dont la moyenne a été fixée à 500 et l'écart type de 100 (ce qui signifie que les

1 Éditeurs : Office fédéral de la statistique (OFS) et Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP9, Neuchâtel/Berne 2004. (Commandes OFS. tél 032 713 60 00 ou order@bfs.admin.ch. Fr 12.- ; également disponible sur le site www.pisa.admin.ch.)

2 Le « PISA Project Consortium » est formé de cinq membres : Australian Council for Educational Research (Australie) CITO (Pays Bas), National Institute for Educational Research (Japon) WESTAT et Educational Testing Service (Etats Unis)

deux tiers des élèves obtiennent entre 400 et 600 points). Sur la base de cette échelle, *PISA 2003* a déterminé 6 niveaux de compétence, par tranches égales, le premier allant de 360 à 420 et le sixième se situant au-delà de 670.

Les compétences du premier niveau sont décrites ainsi : *Répondre à des questions qui sont formulées de manière familière, contiennent toutes les informations nécessaires et sont clairement définies. Exécuter des procédures de routine sur instruction directe.* Pour le niveau 6, le plus élevé dans la hiérarchie, les compétences sont les suivantes : *Conceptualiser, généraliser et utiliser des informations se référant à des problèmes complexes. Mettre en relation diverses sources d'information et formes de représentation, puis combiner les divers éléments. Développer de nouvelles approches et stratégies permettant de gérer des situations inconnues.* Il y a donc une nette progression entre le niveau 1 et le niveau 6, mais le lecteur ne peut pas savoir comment elle se traduit en termes d'énoncés des questions posées effectivement aux élèves interrogés et les rédacteurs du rapport ne peuvent pas les illustrer car ils devraient alors publier l'ensemble des items.

Les « compétences », « performances » ou « capacités » ne constituent alors que la trame de fond. C'est sur leur traduction en valeurs de l'échelle que se poursuit le discours, au niveau statistique, avec diagrammes à l'appui, calcul de corrélations, détermination de taux de signification.

C'est le deuxième enseignement de cette première rencontre avec les résultats de *PISA 2003* : on ne sait pas encore ce que sont les « compétences » si souvent évoquées. Dans l'attente, il faut faire confiance à ceux qui ont choisi les questions, qui les ont classées, qui ont pondéré les résultats au travers d'un long processus statistique pour obtenir une échelle standardisée.

Un exemple nous vient à l'esprit pour illustrer les compétences : la lecture du rapport requiert un niveau 6 de compétences, en « mathématiques », mais aussi en « lecture. »

PISA, pour qui ?

Le rapport l'affirme clairement : *L'enquête PISA n'a pas pour objectif de dresser le palmarès des performances moyennes en mathématiques des différents pays, mais plutôt de fournir à ceux-ci des données leur permettant d'évaluer les résultats de leur système éducatif respectif.* ». Les destinataires ne sont donc pas, à l'origine, les enseignants, mais les responsables des systèmes scolaires nationaux qui vont devoir prendre en compte l'influence des facteurs qui déterminent la position de leurs élèves sur l'échelle : le milieu socio-économique, le type de répartition des élèves dans les écoles, la langue maternelle, le climat au sein de l'établissement scolaire, l'image de soi, le sexe, etc.

Les enseignants interviendront en second, dès qu'ils disposeront des analyses, item par item. Mais le travail sera de longue haleine car les résultats, même détaillés, ne seront que bruts : taux de réussite à chaque item ou, pour les questions à réponse « ouverte », taux de répartition des erreurs ou des différentes stratégies de résolution. Il faudra aller fouiller dans les fichiers pour obtenir ces informations, puis il faudra décortiquer les problèmes, comprendre les procédures mise en œuvre pour aboutir aux solutions, identifier les obstacles, déterminer les différentes représentations de la situation.

Il faut espérer que les autorités scolaires s'associeront à cette tâche en soutenant les enseignants désireux de relever le défi, en lançant des groupes d'investigation, en diffusant largement les résultats de ces analyses détaillées

Ce n'est qu'à cette condition qu'on pourra en savoir plus sur les compétences effectives de nos élèves et sur les moyens de les faire progresser vers des niveaux plus élevés.

MATH ECOLE

présente son premier roman-photo

L'année dernière à Marienbad*

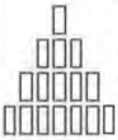
par Denis Odiet

Je vais vous proposer un jeu auquel je ne peux pas perdre !

Si vous ne pouvez pas perdre, ce n'est pas un jeu !

Je peux perdre, mais je gagne toujours...

Cela se joue à deux.
On dispose les cartes ainsi :



Chaque joueur, à tour de rôle, ramasse autant de cartes qu'il le désire, à condition de n'en prendre que dans une seule rangée à la fois. Celui qui ramasse la dernière carte a perdu.

Grand concours !!!

Lisez attentivement les quatre prochaines pages.

Chaque coup est décrit à droite de l'image par le nombre de cartes, allumettes ou dominos restants.
Le premier lecteur à envoyer à Math-Ecole une stratégie permettant de battre notre héros recevra un cadeau-surprise...

"L'année dernière à Marienbad", un film d'Alain Resnais, avec Delphine Seyrig, Giorgio Albertazzi et Sacha Pitoëff. Lion d'Or au festival du film de Venise en 1961.

Première partie

Deuxième partie

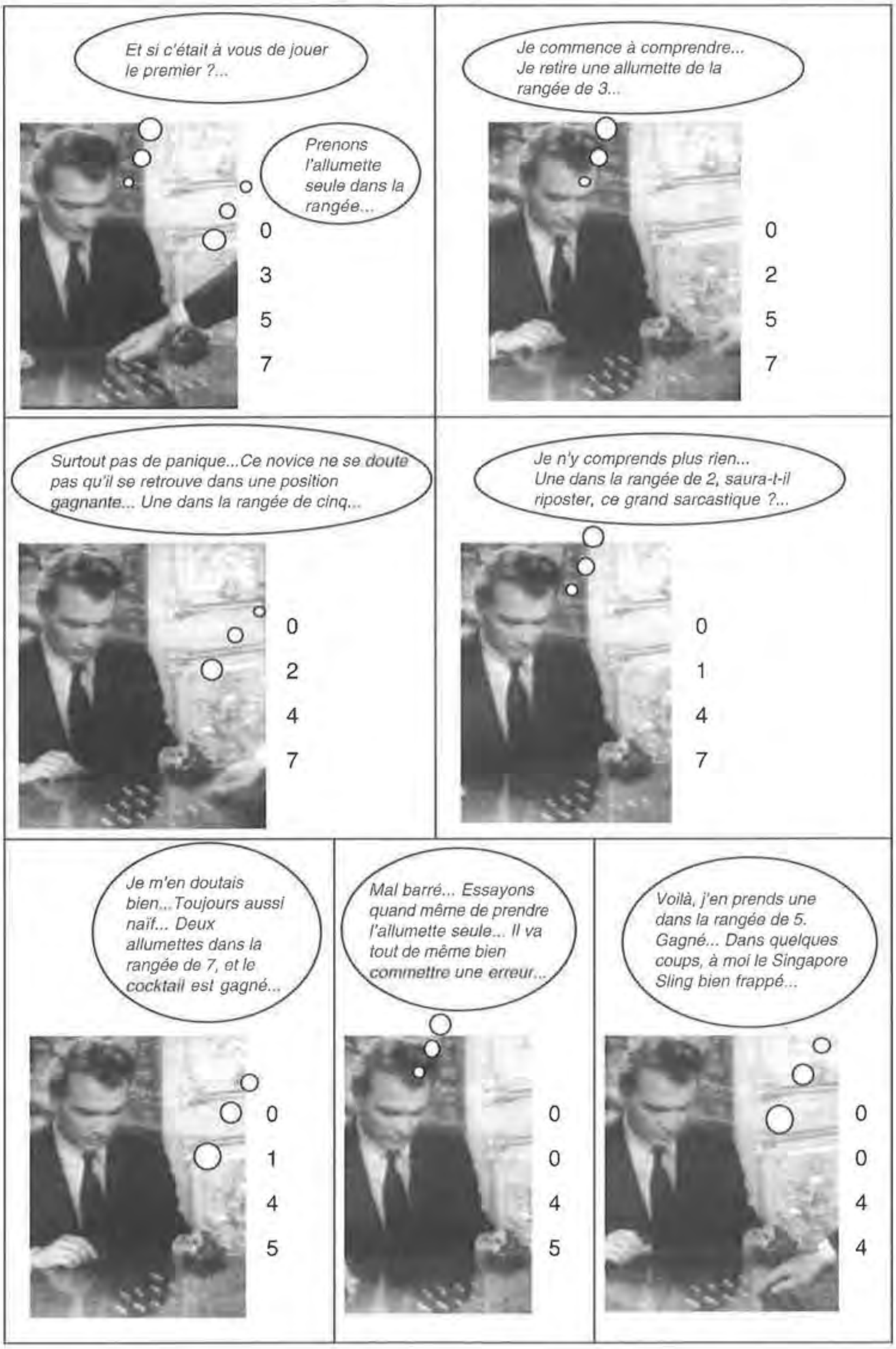
L'adversaire de notre héros se trouve à gauche et ouvre la partie.

La partie ne fait que commencer. Voici la situation après le deuxième coup. Attention, la rangée de 7 est complète...

Notre héros riposte en prenant une allumette dans la rangée de 5.

En jetant ses allumettes en direction de notre héros, l'adversaire se montre particulièrement mauvais perdant...

Troisième partie



Quatrième partie

[ndlr] Le "Jeu de Marienbad" appartient à la catégorie des "Jeux de Nim" à laquelle ***Math-Ecole*** a consacré un article il y a 7 ans déjà : (*Jeux de Nim*, F. Jaquet, n° 176, pages 24 à 34). On en trouve dans nos moyens d'enseignement romands à tous les niveaux, dès l'école primaire, mais on a peu d'information sur leur pratique effective en classe et sur leurs potentialités pour la construction des savoirs.
Il est vraisemblable que certains élèves, les "mordus", y jouent volontiers, mais font-ils des mathématiques à cette occasion ?
La rédaction de ***Math-Ecole*** espère que ce roman-photo engendrera de l'intérêt chez ses lecteurs et permettra de relancer le débat ouvert il y a 7 ans, qui n'avait alors pas suscité de réactions.

UN DISPOSITIF COLLABORATIF POUR LE DÉVELOPPEMENT DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

I. Simitsek[1]

Dans cet article, je vais vous présenter les résultats d'une étude que j'ai menée de 2002 à 2004, avec des élèves du degré 7A[2] d'un cycle d'orientation de Genève, dans le cadre du cours de « développement mathématique[3] ». L'objet de l'étude était de construire et de tester, un dispositif pédagogique qui favorise le développement du raisonnement mathématique de l'élève. Le but visé était de rendre l'élève apte à entreprendre une activité de recherche dans le cadre d'un problème de mathématiques, à formuler une solution et à expliciter le raisonnement qui mène à cette solution.

Au terme de l'utilisation de ce dispositif, nous avons tenté de vérifier, d'une part, si les élèves passent de l'utilisation d'un langage verbal à l'utilisation d'un langage mathématique et d'autre part, si les élèves passent d'un raisonnement de type intuitif à l'explicitation d'un raisonnement déductif.

Ce travail[4] a été réalisé en trois phases : la phase de conception du dispositif, la phase de mise en œuvre du dispositif et l'analyse.

La phase de conception du dispositif consistait à définir le type d'activités proposées et de constituer un recueil d'énoncés des activités. Les modalités de déroulement en classe de ces activités ont ensuite été affinées, notamment le rôle des différents intervenants : l'enseignant et les élèves. Un plan de déroulement en classe des différentes activités sous forme d'étapes a également été élaboré. Lors de la phase de mise en œuvre du dispositif les élèves ont réalisé en classe les différentes activités. Sur le terrain ont ainsi été récoltés le matériel de l'évaluation ainsi que des observations du type analyse a posteriori. Pendant la phase d'analyse et de bilan, nous avons analysé le matériel récolté et nous avons procédé à un bilan de ce qui s'est réellement passé en classe : quelles furent les difficultés rencontrées, quelle fut la progression des élèves par rapport aux objectifs visés.

Nos hypothèses théoriques étaient d'opter pour une stratégie d'apprentissage en collaboration[5] et d'accorder de l'importance au caractère iconique du raisonnement déductif mathématique[6]. Pour cela, les activités proposées étaient réalisées par groupe selon une procédure incitant à la collaboration. Aussi, nous avons insisté pour que les élèves s'approprient l'énoncé en produisant un schéma. Par la suite, nous les avons encouragés à prendre ce schéma comme point de départ de leur raisonnement.

Les activités

Développer le raisonnement mathématique des élèves signifiait dans un premier temps développer les capacités des élèves à chercher, c'est-à-dire à observer, et à passer de l'observation à la déduction. Plus exactement, il s'agissait d'apprendre à identifier les différents éléments d'un énoncé et les relations qui les lient. Dans un second temps, il fallait apprendre à développer ces relations dans des situations de preuves et de validation. Les propriétés perçues comme évidentes faisant l'objet d'une démarche déductive.

1 L'auteure est enseignante de mathématiques au cycle d'orientation. Elle est diplômée en sciences et technologies de la formation et de l'apprentissage, de l'unité TECFA de l'Université de Genève.

2 Elèves de 12-13 ans

3 Ce cours est destiné aux élèves qui n'ont pas choisi le latin. Il est dispensé par l'enseignant de mathématique de la classe.

4 Voir : Simitsek, I. 2004. Travail de fin de formation en mathématiques. Genève, IFMES.

5 Deaudelin, C. & Nault Th 2003. Collaborer pour apprendre et faire apprendre. Presses de l'Université de Québec.

6 Tiercelin, Cl. 1995. Dualité, Triadicité et signification en mathématiques : ou pourquoi Granger ne peut finalement pas être peircien. La connaissance philosophique, 169-186. Paris, P.U.F.

Chercher

Pour développer la capacité des élèves à chercher, il nous a semblé important de varier les activités. Ainsi nous leur avons proposé des problèmes de logique, des problèmes numériques et des problèmes géométriques. De plus, nous avons tenté de choisir des activités ayant un aspect ludique afin de mieux motiver les élèves à entrer dans une procédure de recherche (voir figure 1, ci-dessous).

Observer

Afin d'apprendre à identifier les différents éléments d'un énoncé et les relations qui les lient, nous avons travaillé la compréhension d'un énoncé sous forme de texte et l'observation d'un schéma faisant partie d'un énoncé. Nous avons aussi bien recherché des problèmes dont l'énoncé est textuel que des problèmes dont l'énoncé est basé sur un schéma et une observation visuelle des indices (voir figure 2, ci-dessous).

Déduire

Les problèmes de logique comme celui de la figure 3 ci-dessous, parce qu'ils nécessitent d'entreprendre une démarche déductive, ont été sélectionnés afin de travailler le passage de l'observation à la déduction.

Raisonner

Raisonner implique adopter une posture réflexive et expliciter la démarche déductive choisie. Ainsi avons-nous choisi des activités qui forcent l'élève à retracer mentalement son raisonnement (voir figure 4, ci-dessous).

Un après-bal

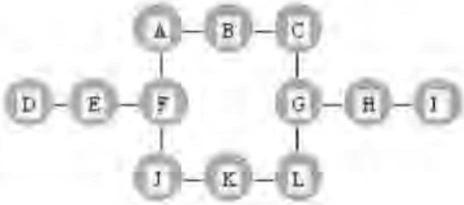
Un groupe de 14 élèves d'une école Polyvalente ont décidé de fêter ensemble l'après-bal des Finissants. Les garçons se sont réparti en parts égales les coûts du transport et de la location d'un chalet, soit un montant total de 160 dollars. Les filles se sont réparti aussi en parts égales les coûts de l'achat des victuailles, soit un montant total de 150 dollars. Après vérification des montants dépensés, ils ont noté qu'individuellement les filles avaient déboursé cinq dollars de plus que les garçons.

Combien y avait-il de filles et combien chaque fille a-t-elle dépensé ?

Figure 1 : « Un après-bal » Activité extraite du site www.recreomath.qc.ca

Des chocolats

Frédérique dispose douze boîtes comme ci-dessous. Elle les marque de A à L. Dans chaque boîte, sauf la H, elle y place au moins un chocolat belge et au moins un chocolat suisse si bien que chaque rangée de trois récipients contient 22 chocolats. Aucune boîte n'a le même nombre de chocolats.



1. La boîte A contient quatre chocolats belges, en plus des chocolats suisses.
2. Les boîtes A et B contiennent le même nombre de chocolats que la boîte C.
3. Les boîtes E et J ont le même nombre de chocolats que la boîte C.
4. La boîte L contient deux fois plus de chocolats belges que de suisses.
5. La boîte I contient au moins 9 chocolats suisses.
6. La boîte L contient un chocolat de moins que la boîte B.
7. La boîte J contient deux chocolats de plus que la boîte A.

Déterminez le nombre de chocolats par boîte.

Figure 2 : « Des chocolats » www.recreomath.qc.ca

Lettres amies

Il y a une certaine logique quant à la façon de disposer les lettres dans cette série de six diagrammes.

A	O	B	M	C	K	A	I	B	G		
X	B	U	N	R	D	O	J	L	C		

Quelles lettres aurait-on dû placer dans le sixième diagramme ?

Figure 3 : « Lettres amies » www.recreomath.qc.ca

Tracés continus

Tracez ces figures, en partant d'un point choisi sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même ligne.

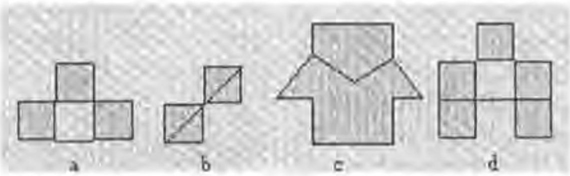


Figure 4 : « Tracés continus » www.recreomath.qc.ca

Le plan de déroulement en classe

Parce que nous étions sensibles au savoir détenu par un groupe, respectivement par une classe, nous avons opté pour une forme collective d'apprentissage : les élèves travaillent en groupe, des présentations à la classe sont organisées. Les apprenants collaborent à la réalisation d'un but commun, ils travaillent ensemble à la réalisation de toutes les tâches.

L'enseignant
Tout au long du déroulement de l'activité, l'enseignant a principalement un rôle de guidage. Il met en place la collaboration. Il constitue les groupes, réparti les rôles. Il encourage les élèves à exposer leurs idées aux autres membres de leur groupe et à s'écouter les uns les autres. Il est à l'écoute des élèves, il saisit les questions que se posent les élèves, les difficultés que ceux-ci rencontrent, afin de créer une situation d'apprentissage. Dans un premier temps l'enseignant propose des activités que les élèves réalisent aisément jusqu'à ce que ceux-ci se sentent à l'aise avec une procédure de recherche. Selon ce qui a été trouvé par les élèves, de manière intuitive, il fixe le niveau d'exigences pour la rédaction de la solution et choisit la prochaine activité à réaliser de manière à augmenter progressivement la difficulté sur l'un ou l'autre plan.

Les élèves
Chaque groupe d'élèves est constitué d'un responsable du temps, d'un responsable de la rédaction de la solution et d'un responsable de la présentation de la solution.

Réalisation d'une activité

- **1re étape : Formation des groupes** – Des groupes hétérogènes sont constitués. Les rôles sont distribués. Les élèves changent de groupes et de rôles d'une leçon à l'autre, de sorte à aborder les activités en ayant des points de vues à la fois différents et complémentaires.

- **2e étape : Démarrage** – Un seul et même énoncé est distribué à chacun des groupes. Le temps de recherche de la solution est fixé à 20 minutes. Au terme de ce délai, chaque groupe énonce l'état de progression de sa recherche et un délai supplémentaire est accordé, si nécessaire.

- **3e étape : Recherche de la solution** – Les élèves cherchent, l'enseignant circule et veille à ce que le dialogue s'instaure au niveau du groupe. Si un groupe n'avance pas, l'enseignant conseille de faire un schéma de la situation. Au terme de cette étape, les élèves ont résolu le problème, au moins de manière intuitive.

- **4e étape : Rédaction de la solution** – Dans cette étape il s'agit de justifier la solution trouvée, de façon complète (c'est-à-dire en tenant compte s'il y a lieu de tous les cas possibles), de la prouver, d'argumenter en utilisant un langage mathématique. Le responsable de la rédaction produit un transparent pour rétroprojecteur qui retrace le raisonnement du groupe et non seulement le résultat de la recherche.

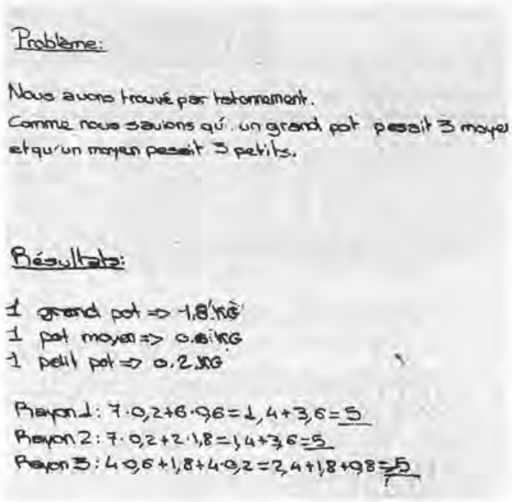
- **5e étape Présentation de la solution** – Sur la base du transparent produit dans l'étape précédente, le responsable de la présentation de chaque groupe présente le raisonnement devant la classe. A la fin de la présentation, les élèves des autres groupes peuvent poser des questions, faire des remarques ou donner leur opinion sur la présentation.

Productions d'élèves

A partir de quelques productions d'élèves, retraçons dans un ordre chronologique, quels furent les principaux jalons d'apprentissage vers l'expression d'un raisonnement mathématique déductif.

Résultat, preuve ou raisonnement

La première difficulté rencontrée par les élèves du dispositif a été de comprendre la différence entre donner le résultat, fournir la preuve que le résultat est correct et expliciter le raisonnement qui permet d'aboutir à ce résultat. Le transparent de la figure 5 ci-dessous montre que des élèves utilisent le résultat lorsqu'ils tentent d'expliquer le raisonnement censé mener à celui-ci. En fait, ils explicitent une preuve plutôt qu'un raisonnement. Les explications sont orales.


Problème:

Nous avons trouvé par tatonnement.
Comme nous savions qu'un grand pot pesait 3 moyens et qu'un moyen pesait 3 petits.

Résultats:

1 grand pot => 1,8 KG
1 pot moyen => 0.6 KG
1 petit pot => 0.2 KG

Rayon 1 : 7·0,2+6·0,6 = 1,4+3,6 = 5
Rayon 2 : 7·0,2+2·1,8 = 1,4+3,6 = 5
Rayon 3 : 4·0,6+1,8+4·0,2 = 2,4+1,8+0,8 = 5

Figure 5 : « Les confitures » - Raisonnement élève : présentation (pour l'énoncé, voir Annexe)

Un langage verbal

Lors de leurs premières tentatives d'expliciter le raisonnement qui même à leur solution, les élèves ont principalement utilisé un langage verbal même lorsqu'il s'agissait de décrire des opérations mathématiques. Plutôt que le pourquoi, c'est ce qui a été fait qui est décrit ou raconté. De plus le lien avec l'énoncé n'est pas explicite : on ne sait ni ce que l'on cherche, ni quels éléments de l'énoncé ont été utilisés.

Les premières activités réalisées ont permis de faire émerger, auprès des élèves, le besoin d'utiliser une notation mathématique afin d'écourter l'écriture du raisonnement. Elles ont également permis de travailler le fait que lorsqu'il s'agit de formuler un raisonnement par écrit, il est important de formuler ce qui est recherché et de mentionner les éléments de l'énoncé utilisés à chaque étape.

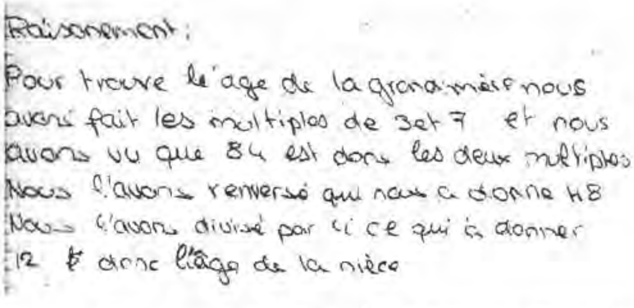


Figure 6 : « Des cachotteries » - Raisonnement élève : présentation (pour l'énoncé, voir Annexe)

Aspects de complétude

Comme le montre la figure 7 ci-dessous, le problème « Chat et souris » place l'élève dans le cas ou plusieurs possibilités sont à examiner. Au niveau de la rédaction du raisonnement, l'utilisation de l'énoncé a été travaillée, les élèves mentionnent des éléments de l'énoncé : «On sait que … ». Cette activité à permis de travailler l'utilisation d'un certain langage mathématique comme l'utilisation du symbole =>, « ce qui implique ». Cette activité a également permis d'introduire le fait qu'un raisonnement mathématique est complet, si tous les cas possibles apparaissent dans le raisonnement avec une justification de pourquoi chaque cas a été rejeté ou accepté.

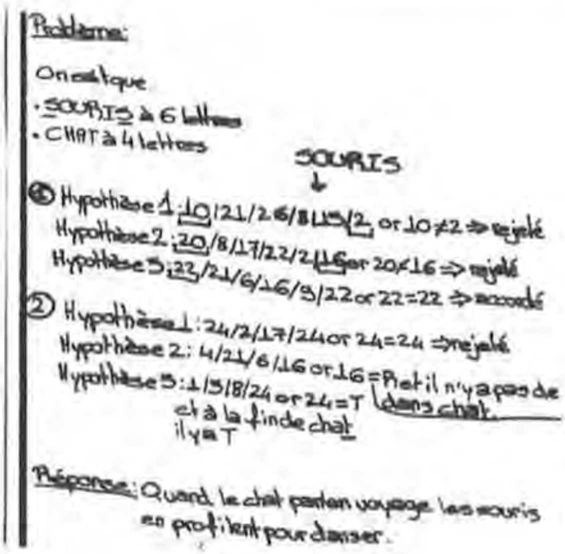
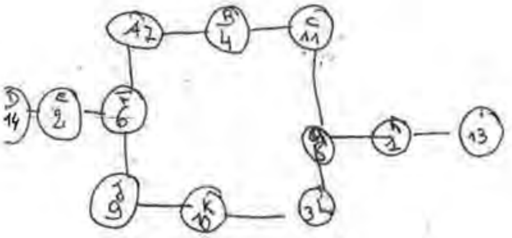


Figure 7 : « Chat et souris » - Raisonnement élève : présentation (pour l'énoncé, voir Annexe)

Ecriture algébrique et utilisation de variables

Comme le montre la figure 8, les éléments de l'énoncé sur lesquels porte le raisonnement sont des lettres. Cette activité (« Des chocolats », pour l'énoncé voir figure 2 ci-dessus) a donc permis de travailler l'écriture algébrique et l'utilisation de variables.



B était 4 et il fallait un chocolat de moins dans L. J + K + L = 22 J = 9 L = 3
⇒ K = 10. C + G + L = 22 C = 11 L = 3
⇒ G = 8. On a fait une hippothèse que "h" était égale à 1 et que "j" = 13.

On a utilisé l'indice 2 pour
trouver que C égal 11 ~~On a utilisé l'indice~~
Et aussi, que A et B mis ensemble doivent
valloir 11. On a fait l'hippothèse que
A et B vallent 7 et 4 ~~on~~ L'indice 7 que
nous disait que ~~j était~~ était neuf.
A + f + f = 22 A = 7 j = 9
donc f = 6. Car grâce à l'indice 3
on a trouvé que E était 2.
Pour f + E + D = 22 f = 6 D = 14
⇒ E = 2. Grâce à l'indice 6
on a trouvé que L était trois car

Figure 8-1 : « Des chocolats » - Raisonnement élève : brouillon

indice 2 : A + B = C
A + B + C = 22
donc C = 11
indice 1 : A > 5 et B < 6
on a fait l'hypothèse A = 7 et B = 4
indice 7 : J = A + 2 or A = 7 ⇒ J = 9
indice 3. E + ~~J~~ = C or C = 11 et J = 9 ⇒ E = 2
A + F + J = 22 or A = 7 J = 9 ⇒ F = 6
D + E + F = 22 or E = 2 F = 6 ⇒ D = 14
indice 6. L = B - 1 or B = 4 ⇒ L = 3
J + K + L = 22 or J = 9 L = 3 ⇒ K = 10

Figure 8-2 : « Des chocolats » - Raisonnement élève : présentation

Extraction des variables de l'énoncé

Dans l'activité de « Un après-bal » (pour l'énoncé, voir figure 1 ci-dessus), c'est au tour de l'élève d'extraire les variables de l'énoncé, de leur attribuer un nom sous forme de lettre afin de pouvoir utiliser l'écriture algébrique travaillée dans les précédentes activités. Cette activité a été l'occasion d'introduire de nouveaux symboles mathématiques. Aussi, elle a fait émerger l'importance d'écrire l'énoncé en utilisant un langage mathématique afin de pouvoir aisément montrer ensuite que la solution vérifie l'énoncé.

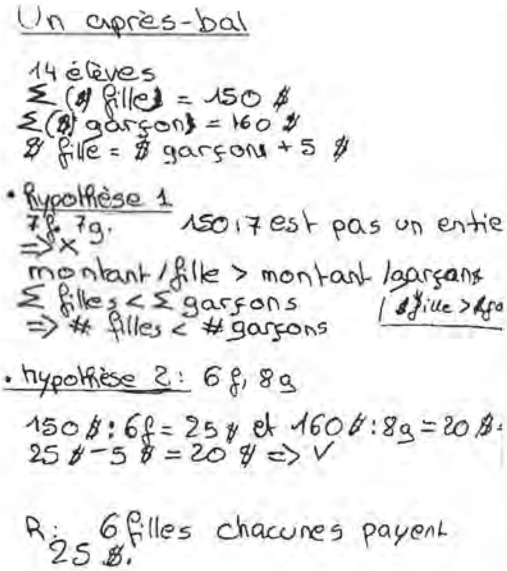


Figure 9: « Un après-bal » - Raisonnement élève : présentation

Un raisonnement déductif complet

L'activité « Jour de l'An » était la dernière activité réalisée. En plus des éléments précédemment cités, elle a fait apparaître l'importance de faire un schéma de la situation. Comme le montre la production élève de la figure 10-2 ci-dessous, l'énoncé (voir figure 10-1 ci-dessous) a été reformulé sous forme de règles, les éléments sur lesquels portent ces règles ont été identifiés par des lettres. Le raisonnement consiste alors à appliquer les règles par étapes successives.

Jour de l'An

Noémie et Wilfrid reçoivent leurs quatre enfants à l'occasion du jour de l'An. Deux des enfants sont accompagnés chacun d'un ami. Les deux autres sont accompagnés chacun de deux amis. Toutes les personnes présentes, sauf les parents, s'échangent une seule poignée de mains. Toutefois, aucune personne ne donne la main à son ou à ses amis.

Combien de poignées de mains seront échangées ?

Figure 10-1 : « Jour de l'An » - Enoncé, extrait du site www.recreomath.qc.ca

Figure 10-2 : « Jour de l'An » - Raisonnement élève : présentation

Quelques réactions d'élèves

Voici quelques réactions d'élèves que nous avons trouvées marquantes :
« Tu expliques mal ! Si quelqu'un entrait dans la classe il ne comprendrait rien… »
« Ah non, Madame, ce n'est pas la meilleure explication, la meilleure explication serait celle obtenue en prenant des éléments de chaque présentation. »
« On a trouvé vite parce qu'on a collaboré. »
« […] ça c'est facile on n'a qu'à faire des hypothèses. »
« Regardez Madame, j'ai réussi à faire cet exercice [de raisonnement], je suis fier, avant je n'y arrivais pas. »

Une méthode de travail

L'analyse des productions ainsi que des réactions de la classe montre que les élèves ont eu l'occasion de s'approprier une méthode de travail dont les principaux éléments figurent dans le tableau ci-dessous. Au fil des activités réalisées, les points de méthode suivants ont été travaillés :

Préparation avant la recherche :

- Lire l'énoncé
- Repérer tous les éléments importants : les conditions, les indications chiffrées, etc.
- Sur le brouillon :
  1. Faire une liste de tous les indices présents dans l'énoncé
  2. Faire un schéma de l'énoncé dans lequel figurent les intervenants et les relations qui les lient.
  3. Reformuler ce que l'on cherche.

Recherche et réflexion :

- Ecrire chaque idée de façon schématique sur le brouillon et l'expliquer aux autres membres du groupe afin de décider si elle sera retenue ou rejetée. Ecouter les idées des autres membres du groupe.

Phase de rédaction :

- Expliquer le raisonnement en mentionnant les éléments de l'énoncé qui permettent de justifier chaque étape. Si plusieurs cas sont possibles, expliciter tous les cas en indiquant à chaque fois pourquoi ils ont été exclus ou retenus.
- Utiliser un langage mathématique.

L'appropriation du dispositif

Les élèves

Une simple comparaison de la première et de la dernière production du semestre met en évidence les progrès réalisés au niveau de l'expression du raisonnement mathématique et de sa complétude. Nous passons d'une description textuelle de la solution trouvée, à l'explicitation du raisonnement qui mène à la solution. Le raisonnement utilise des formes d'écritures algébriques, il comprend des étapes et les élèves explicitent les liens qui permettent de passer d'une étape à la suivante.
La plupart des élèves ont pris goût à raisonner. En effet, bien que les activités proposées soient progressivement plus complexes, le

nombre d'activités réalisées par session a augmenté. Les élèves réalisent une seule activité lors des premières sessions, lors des dernières sessions, ils réalisent jusqu'à quatre activités. Les élèves semblent percevoir les bénéfices de la collaboration. Les élèves comprennent que par l'addition des savoirs des membres d'un groupe on obtient une solution meilleure que celle possible à un niveau individuel. Lors des présentations, le jury d'élèves introduit dans ses critères le degré de collaboration. Enfin, certains élèves ont par moment manifesté un sentiment d'autosatisfaction inhabituel, comme si pour eux, quelque chose s'était produit. Ce phénomène nous a semblé être lié au fait que le dispositif est centré sur l'élève, dans le sens où il propose un cadre dans lequel l'élève est actif. Nous citerons l'exemple d'un élève timide qui pris dans la logique collective, dépasse sa timidité et réalise une présentation devant la classe. Toutefois, il est vrai que chaque classe de 12 élèves dans lesquelles nous avons mis en œuvre ce dispositif comptait un à deux élèves qu'il a fallu pousser tout au long du semestre. Ils ont toujours conservé un important décalage par rapport au reste de la classe.

L'enseignant

Du point de vue de l'enseignant, s'approprier un tel dispositif n'est pas aisé car il implique un changement au niveau de son rôle. Plutôt que de diriger l'apprentissage, l'enseignant devient un partenaire de l'apprentissage aux côtés de l'élève. L'enseignant est un initiateur et un producteur de situations d'apprentissages. A l'écoute des élèves, l'enseignant tente de saisir les questions que se posent les élèves, une difficulté qu'ils rencontrent ; il s'empare d'une situation afin de créer un apprentissage « in live ». La mise en place d'un tel dispositif exige ainsi un investissement considérable de l'enseignant lorsqu'il est dans la classe, notamment au niveau de l'écoute et de l'adaptabilité.

Si 2 ◊ 3 n'est pas égal à 6, ni à 5, mais bien à 4, à quoi pourrait être égal 6 ◊ 7 ?

Voilà une des énigmes que vous pourrez lire dans ***Récréomath***, un site consacré aux mathématiques récréatives. Visitez ce site. Vous y trouverez 84 jeux de société, 84 énigmes et plus de 600 problèmes pour les petits comme pour les grands. Ces jeux et problèmes peuvent distraire et enrichir vos méninges pendant des heures.

Un aide-mémoire vise à rafraîchir, au besoin, des notions mathématiques élémentaires. Un lexique présente notamment des stratégies pour augmenter sa performance en résolution de problèmes. Un dictionnaire définit plus de 1600 termes touchant aux mathématiques récréatives. En prime, des articles à lire et des liens vers d'autres sites mathématiques.

Merci de respecter les droits d'auteur et bonne visite au www.recreomath.qc.ca.

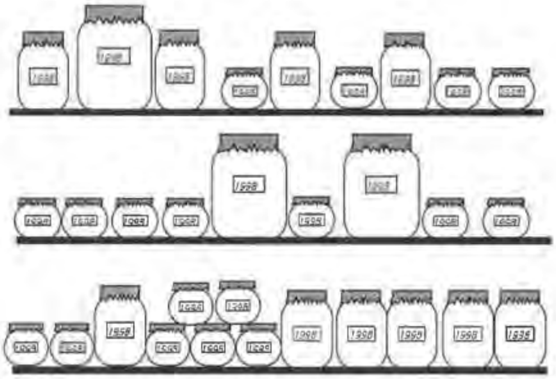
Charles-É. Jean
auteur de Récréomath

[ndlr] *Math-Ecole* remercie l'auteur de ce site de l'avoir autorisé à reproduire ses problèmes dans les pages qui précèdent et qui suivent.

ANNEXES

Les pots de confiture

Maria a fait des confitures et a placé les pots, petits, moyens et grands, sur trois rayons :



Il y a exactement 5 kg de confiture sur chaque rayon.
Combien pèsent un grand pot, un moyen et un petit?

Expliquez votre raisonnement.

Figure 5' « Les pots de confiture » Problème du 6ᵉ RMT, Epr. II 1998

Des cachotteries

Céline est une vieille dame un peu moqueuse. A une nièce qui lui demandait son âge, elle répondit :

- Si tu multiplies le tiers de mon âge par un septième et que tu divises le nombre renversé de mon âge par ce résultat qui lui est un entier, tu obtiendras ton âge.

La nièce reprit :

- je sais que vous avez plus de 70 ans ; mais, vous n'êtes pas encore centenaire.

Quel est l'âge de la nièce ?

Figure 6' « Des cachotteries » Activité extraite du site www.recreomath.qc.ca

Chat et souris

Ce tableau contient une phrase dans laquelle on retrouve les mots CHAT et SOURIS. Une même lettre est remplacée par un même nombre et les mots sont séparés par des cases noires.

14	6	8	17	20	■	5	2	■	1	3	8	24	■	4	8
16	24	■	2	17	■	10	21	26	8	13	2	■	5	2	22
■	22	21	6	16	9	22	■	2	17	■	4	16	21	11	9
24	2	17	24	■	4	21	6	16	■	20	8	17	22	2	16

Déchiffrez cette phrase.

Figure 7' « Chat et souris » Activité extraite du site www.recreomath.qc.ca

EVALUATION : D'UN ESPACE À L'AUTRE[1]

Michel Brêchet

Préambule

Les grandeurs géométriques – longueur, aire, volume – constituent un sujet d'étude considérable de la scolarité obligatoire. Lorsque toutes trois interviennent dans la résolution d'un même problème, les enseignants secondaires se rendent bien compte des difficultés éprouvées par les élèves à se référer successivement, ou simultanément, à des espaces de dimensions différentes. Quelle gymnastique intellectuelle pour passer de l'image mentale d'un objet tridimensionnel à celle d'une surface par exemple ! Gymnastique d'autant plus ardue que la lecture et la compréhension du dessin d'un objet de l'espace physique nécessitent d'inférer l'objet représenté et ses caractéristiques, car la troisième dimension n'est présente sur la feuille de papier que par le biais d'indices conventionnels de profondeur. La complexité d'un problème augmente lorsque la grandeur à calculer n'est pas explicitement nommée dans l'énoncé. Elle doit alors être identifiée à partir de la situation. Des expressions langagières, parfois discrètes, plus visibles dans d'autres cas, peuvent apporter un éclairage bienvenu. Dans le problème « *Une personne désire tondre avec la même machine deux pelouses, l'une carrée de 60 mètres de côté, l'autre rectangulaire, dont les côtés mesurent 45 et 75 mètres. L'herbe de chaque pelouse a la même hauteur. Lui faudra-t-il plus de temps pour tondre l'une des pelouses ?* », l'aire des terrains n'est mentionnée nulle part. Il appartient donc aux élèves non seulement de mettre à jour cette grandeur, mais également le rôle primordial qu'elle joue. Dans ces conditions, il n'est pas étonnant de voir des procédures de résolution fondées sur des calculs de périmètre. Dans le même ordre d'idée, un installateur chargé de mettre en place un appareil de ventilation de l'air (sans e !) d'une salle s'intéressera à son volume et non à l'aire (avec e !) totale de ses faces, alors qu'un jardinier s'apprêtant à marquer les lignes blanches d'un terrain de football sera concerné par leur longueur totale. S'il s'agit d'évidences pour des adultes, il suffit de questionner les élèves de 12 à 14 ans sur de tels sujets pour s'apercevoir que ces associations ne vont pas de soi.

A propos des formules…

Les difficultés inhérentes à l'appréhension des concepts de longueur, d'aire et de volume sont nombreuses. Elles sont parfois sous-estimées des enseignants, peut-être en raison de la « simplicité » à appliquer les formules usuelles dans des situations stéréotypées, par exemple lorsque seules les mesures à prendre en compte dans les calculs sont indiquées sur un croquis ou figurent dans un énoncé. L'abus de telles situations incite les élèves à fabriquer des formules qui ne représentent plus rien dans leur esprit, et ne favorise pas un travail global fondé sur la construction mentale des grandeurs dans leurs multiples aspects. Pour pouvoir utiliser une formule à bon escient, il faut avoir intégré les notions essentielles liées au mesurage (choix d'une unité, report de l'unité, usage de sous-unités, choix d'une procédure…) et quelques-unes des propriétés de la grandeur en jeu. Ainsi, l'aire d'une figure plane est invariante par découpage et recollement, l'aire de la réunion de

1 Le titre pourrait laisser supposer qu'il sera question des frontières de notre cosmos ou d'univers parallèles. Notre exploration sera cependant plus modeste et bien loin du monde des étoiles, puisqu'elle concernera « seulement » les apprentissages des grandeurs et des mesures associées aux objets d'espaces de dimensions un (lignes), deux (surfaces) ou trois (volumes).

deux figures disjointes est égale à la somme des aires de chaque figure, deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire, une unité de forme rectangulaire permet de déterminer l'aire d'un triangle (même si elle ne peut pas le recouvrir exactement). De tels apprentissages nécessitent un engagement intellectuel important et s'élaborent sur une longue durée.

On peut se demander dès lors si l'utilisation des formules n'intervient pas trop tôt dans le curriculum. Les formules généralisent des situations, permettent de communiquer des résultats, offrent un gain de temps appréciable au cours de calculs complexes, déchargent la mémoire de travail lors de la résolution de problèmes, contribuent à structurer la pensée... C'est dire leur importance dans la panoplie des outils mathématiques ! Toutefois, lors des premiers calculs d'aire de triangles et de quadrilatères, ou de volume de prismes droits, seules les formules donnant l'aire du rectangle et le volume du pavé droit sont indispensables. Les autres ne sont d'aucune utilité dans l'immédiat. Au contraire, leur application répétée masque l'essentiel du travail à accomplir en classe. Autant laisser les élèves procéder par décomposition, soustraction ou transformation de figures. Ils travaillent de la sorte sur le sens des concepts en jeu et développent une compétence centrale en géométrie : celle de « voir » des sous-figures ou des sur-figures qui se prêtent bien au calcul. Ils mettent ainsi à jour des propriétés de parallélisme, de perpendicularité, d'isométrie de segments ou d'angles, de symétries... Par exemple, un trapèze peut être assimilé à la réunion d'un rectangle et de deux demi-rectangles, ou être vu comme un rectangle amputé de deux demi-rectangles (figure 1), ou encore comme un demi-parallélogramme (figure 2). C'est la reconnaissance des formes qui est à l'œuvre dans ce type de procédures.


Figure 1


Figure 2

... et des conversions d'unités

Voilà un sujet d'étude qui donne des cheveux gris aux enseignants. Jusqu'aux degrés 5-6, tout va bien, ou presque, car seules les conversions d'unités de mesures linéaires (longueur, masse...) sont abordées. La situation se gâte sérieusement à l'école secondaire lorsque les trois grandeurs géométriques fondamentales sont traitées de front. Les conversions posent alors de grandes difficultés, tour à tour en raison de leur caractère abstrait, de l'absence d'images mentales, et de l'application de règles non intériorisées.

Lorsque la taille d'un objet (de dimension 1, 2 ou 3) est très grande, seule une vision partielle de cet objet est possible. Sa vision d'ensemble ne peut être que le fruit d'une construction intellectuelle, d'où la nécessité, pour exprimer sa mesure dans différentes unités appropriées, de se fier à des règles de conversion abstraites. Dans ces conditions, les égalités obtenues sont difficilement vérifiables, surtout pour des élèves de la scolarité obligatoire. Des savoirs de référence peuvent être d'un bon secours, par exemple pour comparer entre elles des valeurs issues de situations semblables. Dans certains annuaires statistiques, l'aire des plans d'eau des lacs est exprimée en hectares. Ainsi, celle du lac de Neuchâtel est proche de 21'600 ha. Pour convertir cette mesure en km^2, tâche a priori non dénuée d'intérêt, on doit connaître la relation $1\ km^2 = 100$ ha, ou avoir mémorisé le « truc » *je déplace la virgule de deux rangs vers la gauche pour passer des ha aux km^2*. On trouve alors 216 km^2. Mais comment vérifier cette réponse, sinon en la comparant avec la valeur connue de l'aire d'une surface de taille voisine, celle d'un autre lac, de sa commune ou de son canton ?

Dabs une activité, lorsque qu'une conversion d'unités se rapporte à un objet qui peut être manipulé, ou vu globalement, en particulier de façon simultanée, il est impératif d'habituer les élèves à mobiliser des images mentales des unités en présence, voire même à les représenter physiquement : en dessinant sur leur cahier une figure d'un décimètre carré, en traçant approximativement avec le doigt le contour d'un carré d'un mètre carré sur le mur de la classe, en positionnant leurs mains à environ un mètre l'une de l'autre, en utilisant leurs mains pour circonscrire un espace proche d'un décimètre cube ou d'un mètre cube… Tout cela peut paraître banal à première vue. Cependant, rares sont les élèves qui utilisent spontanément leurs mains comme aide à l'évocation. Avec de tels gestes, des absurdités du genre *$750\ cm^3 = 750'000\ dm^3$ ou $750\ cm^3 = 75\ dm^3$* ou… seraient probablement moins fréquentes, surtout si les conversions d'unités étaient systématiquement liées à des contextes concrets, permettant aux élèves d'apprécier l'ordre de grandeur de leurs résultats. Compléter les égalités $1{,}8\ m^2 = ...\ dm^2$ et $1\ dl = ...\ cm^3$ peut devenir une tâche motivante – ou du moins dont la légitimité est reconnue – si l'on sait qu'elles ont trait respectivement à l'aire de la peau d'un adulte et au volume de sang que le cœur éjecte à chaque battement dans les vaisseaux sanguins.

D'une manière générale, ancrer des notions mathématiques par la répétition d'exercices dominés par des techniques vides de sens n'a guère de chances d'aboutir. Et c'est particulièrement vrai dans le domaine qui nous intéresse. Si les routines *je multiplie par 100, je déplace la virgule de trois rangs vers la gauche, j'ajoute un zéro…* peuvent déboucher localement et temporellement sur de bons résultats, par exemple lors de l'étude d'un seul type de conversions, elles deviennent très vite inefficaces lorsqu'une situation regroupant des objets de dimensions différentes impose la gestion des diverses unités de mesure qui leur sont liées. Il s'agit alors de distinguer clairement les grandeurs qui interviennent ; les « trucs » ne sont plus d'aucun secours. Appliquer l'un d'eux au hasard conduit fréquemment à l'erreur. Autant donc insister lors des premiers apprentissages sur les méthodes fondées sur des images mentales et veiller à ce qu'elles ne soient pas supplantées par des procédures automatisées. Par exemple, l'entraînement répétitif des conversions d'unités de mesures linéaires a entre autres une conséquence fâcheuse : les élèves quittent à grand peine la multiplication ou la division par 10 pour passer d'une unité d'aire (resp. de volume) à sa voisine (… m^2, dm^2, cm^2 …). Les opérateurs $\times 10$ et $: 10$ demeurent envers et contre tout de puissants attracteurs.

Dans la suite de cet article, nous illustrons quelques-uns de ces propos[2] par des problèmes de périmètre, d'aire et de volume ainsi que par des travaux d'élèves de degrés 7 et 8.

2 Voir aussi l'article *Longueur ou aire?*, par le même auteur, dans le numéro 206 de Math-Ecole.

Entre périmètre et aire

Antonio a l'œil. Sur ses plaques, il fait à chaque fois des pizzas de même épaisseur.

Il prépare pour Jeanne deux pizzas rectangulaires :
- les côtés de la première mesurent 12 cm et 25 cm ;
- les côtés de la seconde mesurent 20 cm et 30 cm.

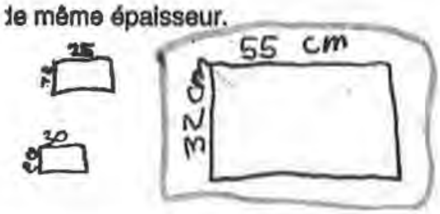
Arrive Elise, qui demande à Antonio de lui préparer une seule pizza carrée, de telle sorte qu'elle ait autant à manger que sa copine Jeanne.

Quelle sera la longueur du côté de la pizza d'Elise ?

Des connaissances acquises au degré 6 suffisent pour trouver la solution. L'énoncé dissimule soigneusement le fait de recourir à l'aire des pizzas pour répondre à la question posée. Il n'y a aucune allusion verbale ou schématique à cette grandeur. La difficulté à visualiser mentalement la situation puis à élaborer une procédure de résolution est bien réelle. Faire le détour par le calcul d'une aire pour trouver une longueur nécessite une appréhension sans faille de ces deux grandeurs. Les travaux ci-dessous, brièvement décrits, témoignent de la fragilité des connaissances de certains élèves de 7e année, peu nombreux fort heureusement :

12 + 25 + 20 + 30 = 87 cm
87 : 4 = 21,75 cm
= 21,75 cm longueur du côté de la pizza d'Elise.

Addition des quatre valeurs numériques de l'énoncé, puis division de la somme par 4, probablement en raison des propriétés de la forme de la pizza demandée par Elise.



Addition des « largeurs » des pizzas de Jeanne suivie du même calcul à propos des « longueurs ».

Si elle prend la première pizza de Jeanne ça fait 12 cm + 25 cm donc moi j'ai prit les mesures de la première pizza et sa me donne 37 donc c'est le plus grand côté des 2888

Incompréhension complète du problème.

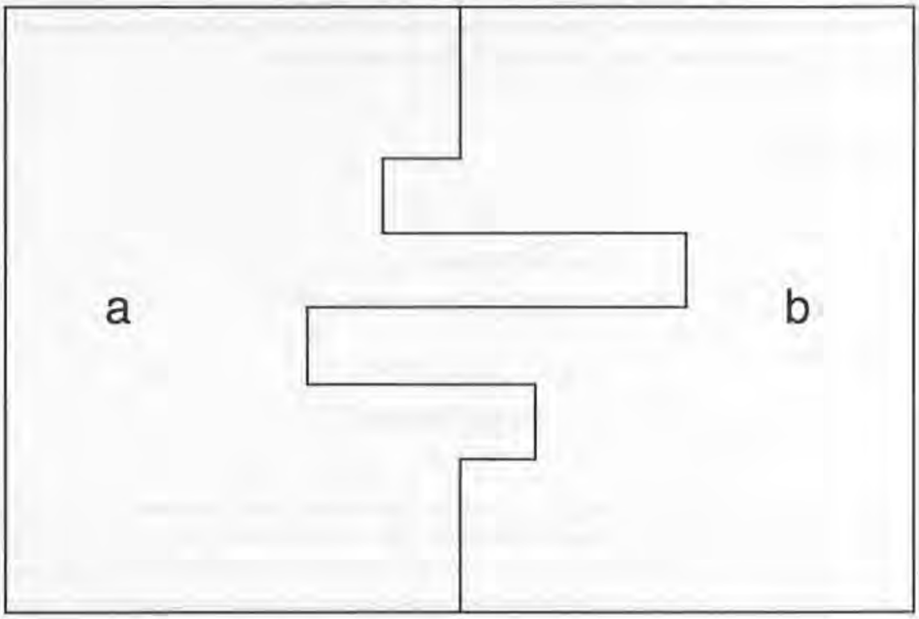
Un autre élève dessine à l'échelle 1 : 2 les deux pizzas rectangulaires de Jeanne, mesure leurs côtés respectifs sur le dessin (6 – 12,5 – 10 – 15 cm) et additionne leurs périmètres. Il écrit comme réponse : « Un des côtés de la pizza d'Elise mesure 43,5 cm ». De cette démarche émergent notamment le besoin de se référer à une représentation proche de la réalité et la difficulté à gérer l'échelle des dessins.

Périmètre et aire sont également en conflit lors de la recherche suivante :

Les figures **a** et **b** sont en vraie grandeur.

Quelle est la figure qui a la plus grande aire ? Et celle qui a le plus grand périmètre ?

Explique ta démarche.



« Ce qu'il faut chercher » est dit dans la donnée. Des calculs ne sont pas indispensables, mais ils sont facilités par les dimensions des figures **a** et **b**. Leurs formes respectives conduisent à d'intéressantes méthodes de résolution, dont celles-ci :

Recherche du périmètre par calcul

a) 6+6+8+2+1+1+4+1+5+1+3+1+2 = 42 cm
b) 6+6+8+2+1+1+4+1+5+1+3+1+2 = 42 cm

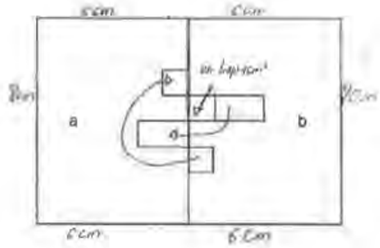
L'élève mesure la longueur des côtés de chaque figure, puis par additions, il constate qu'elles ont le même périmètre. Les propriétés de la figure entière sont donc ignorées. L'élève applique la règle « Pour calculer le périmètre d'un polygone, j'additionne les mesures de tous ses côtés » et il ne voit pas que, dans le registre numérique, les deux sommes ont les mêmes termes.

Réponse par observation des propriétés des figures

Ça revient au même car si une partie resort d'un côté d'un rectangle, ça rentrer dans l'autre rectangle. Et la ficelle a toujour la même longueurs.

Cette réponse laisse entrevoir que le concept de périmètre est bien maîtrisé. Se fier à un raisonnement plutôt qu'à un calcul est signe d'une certaine maturité. Pour les élèves de 7e année, les résultats établis par enchaînement d'assertions sont parfois moins rassurants que ceux obtenus à l'aide d'opérations numériques, plus tangibles et plus convaincants.

De l'aire au périmètre



$6 \times 8 = 48\,cm^2$

$6 \times 8 = 48\,cm^2 + 1 \times 1 = 1\,cm^2$

$6+6+8+8 = 28\,cm$

$6+6+8+8+1+1+1+1 = 31\,cm$

Le segment partageant le grand rectangle en deux parties égales induit quelque peu en erreur. Il permet tout d'abord de constater l'inégalité des aires, par déplacements de parties de figures. Mais l'élève a-t-il saisi que l'une d'elle vaut 47 cm² et non 48 cm²? Probablement pas. Les deux derniers calculs tendent d'ailleurs à confirmer ce point de vue. Ils révèlent également que les formes de ***a*** *et* ***b*** *n'ont pas été prises en compte pour déterminer les périmètres : ceux-ci ont été établis à partir des figures transformées. La dépendance mutuelle de l'aire et du périmètre d'une figure, chère à de nombreux élèves, est-elle à l'œuvre dans cette démarche?*

Recherche de l'aire par calcul

Aire de a :

$4 \cdot 8 = 32\,cm^2$
$2 \cdot 2 = 4\,cm^2$
$1 \cdot 1 = 1\,cm^2$
$5 \cdot 1 = 5\,cm^2$
$3 \cdot 1 = 3\,cm^2$
$2 \cdot 2 = 4\,cm^2$

$32 + 4 + 1 + 5 + 3 + 4\,cm^2 = 49\,cm^2$

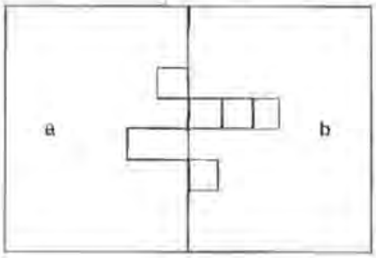
Aire de b :

$8 \cdot 3 = 24\,cm^2$
$3 \cdot 2 = 6\,cm^2$
$4 \cdot 1 = 4\,cm^2$
$5 \cdot 1 = 5\,cm^2$
$2 \cdot 1 = 2\,cm^2$
$3 \cdot 2 = 6\,cm^2$

$24 + 6 + 4 + 5 + 2 + 6\,cm^2 = 47\,cm^2$

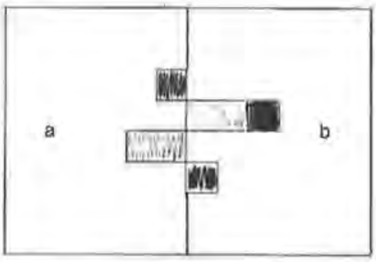
Chaque figure est décomposée en sous-figures rectangulaires disjointes dont l'aire est calculée. C'est une des propriétés fondamentales de l'aire qui est utilisée ici. Comme précédemment, les particularités de la figure entière ne sont pas exploitées.

Calcul des aires par compensation



aire) figure a) $6 \cdot 8 = 48 cm^2 + 4 cm^2 - 3 cm^2 = 49 cm^2$

figure b) $6 \cdot 8 = 48 cm^2 + 3 cm^2 - 4 cm^2 = 47 cm^2$



rep: le a) à est plus grandque le b)

Si on coupe ce rectangle en 2 parties on obtient. On voit que la partie a) à 1 cm de plus que la partie b).

la partie violette est la partie qui fait toute la différence

Economiques, ces deux démarches sont le fruit d'une observation attentive des formes respectives des figures. De tels travaux donnent de précieuses informations sur le niveau de compétences des élèves qui les ont rédigés.

Déduction de l'aire à partir du périmètre

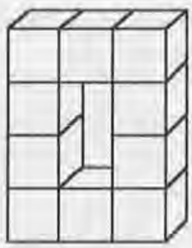
Elles ont le même périmètre (41 cm)

Elle ont la même aire car ce sont les mêmes chiffres pour chaque figure.

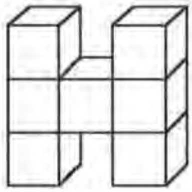
*L'élève a mesuré les côtés de chacune des figures **a** et **b**, a calculé ensuite les périmètres (avec une petite erreur) puis a postulé l'égalité des aires. La conception erronée « si les périmètres de deux polygones sont égaux, alors leurs aires sont égales » est ici bien présente.*

Entre aire et volume

Avec de la colle, Oscar a assemblé des cubes en bois isométriques pour former l'objet représenté ci-contre.
Il a ensuite peint complètement cet objet.
Il a utilisé 60 centilitres de peinture.



Hélène a utilisé les mêmes cubes qu'Oscar pour former l'objet représenté ci-contre.
Elle a ensuite peint complètement cet objet.
Oscar et Hélène ont recouvert leur objet d'une même couche de peinture.



Quelle quantité de peinture Hélène a-t-elle utilisée?

L'élève sera tenté de considérer le nombre de petits cubes utilisés, et non le nombre de leurs faces visibles. Opérer ce choix avec succès nécessite une bonne appropriation de cette situation de proportionnalité. Pour la résoudre, il faut encore dénombrer les faces visibles, et donc interpréter correctement la représentation plane des deux objets. Voici un petit échantillon significatif des travaux des élèves :

Démarche selon le nombre de faces visibles

Oscar a utilisé 10 cubes, 40 faces à peindre
Hélène a utilisé 7 cubes, 30 faces à peindre
1 40 faces = 60 cl — 60 : 40 = 1,5 — 40 · 1,5 = 60,0 cl — 30 · 1,5 = 45,0
1 face = 1,5 cl
30 faces = 45 cl
Hélène a utilisé 45 cl de peinture.

L'élève focalise son attention sur le nombre de cubes puis sur le nombre de faces à peindre, avant de calculer le facteur de proportionnalité.

Démarche selon le nombre de faces visibles, entaché d'un dénombrement erroné

1. 40 faces = 60 centilitres (60 : 40 = 1,5) (1,5 · 26 = 39)
26 faces = 39 centilitres
une face = 1,5 centilitres
Réponse : Hélène a utilisé 39 centilitres de peinture

Cet élève a peut-être compté quatre faces à peindre pour chacun des quatre cubes de l'objet d'Hélène ayant une seule face commune avec un autre ($4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 = 26$).

Démarche selon le nombre de cubes

60 cl → 10 cubes
42 → 7 cubes

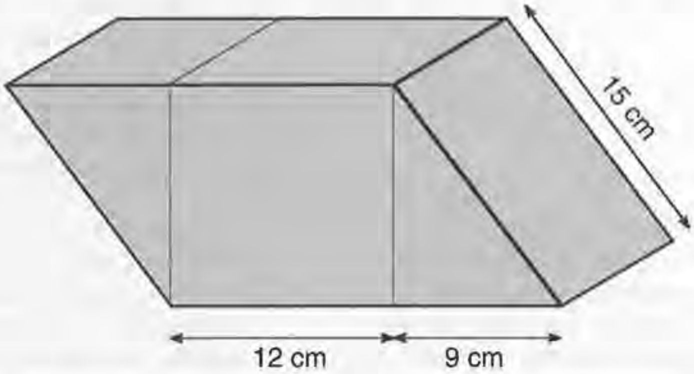
cl	60	120	30	420	42
cubes	10	30	5	70	7

R : Il faudra 42 cl de peinture pour qu'Hélène puisse peindre son objet

Erreur « attendue ». L'énoncé et les dessins incitent à prendre en compte le nombre de cubes de chaque objet.

Dans ce dernier problème, assez classique dans son contenu et sa formulation, les propriétés respectives de l'aire et du volume interfèrent volontiers.

Ce solide est formé d'un cube et de deux prismes isométriques dont la base est un triangle rectangle.



Calcule le volume et l'aire totale de ce solide.

Le calcul du volume ne pose en général pas de difficulté, sinon celle de déduire la hauteur du solide à partir de l'isométrie des arêtes du cube. Deux approches courantes : considérer le solide comme un prisme dont la base est un parallélogramme, ou « voir » la réunion d'un cube et d'un pavé droit formé des deux prismes triangulaires. On devine que la recherche de l'aire est plus délicate :

- l'aire totale n'est pas égale à la somme des aires de chaque pièce, ce que croient certains élèves ;
- l'identification des formes des faces n'est pas immédiate pour quiconque n'est pas habitué à lire un dessin en perspective ;
- la gestion déficiente des résultats intermédiaires, enfin, traduit parfois un manque de rigueur et d'organisation.

En guise de conclusion

Des problèmes inédits, dont la résolution demande de la lucidité concernant « ce qu'il faut prendre en compte » permettent à l'enseignant d'obtenir une image globale des compétences d'un élève. Ce type d'information est d'une grande utilité pour décider de son passage d'un degré scolaire au suivant. Des exercices gouvernés par des automatismes ou des aspects essentiellement techniques – dont le bien-fondé n'est pas remis en question – conduisent à une vision fragmentée de ce qu'est capable de faire un élève. Etre à la barre et prendre soi-même des décisions quant au cap maintenir : voilà une tâche – certes rude – révélatrice de ses capacités.

13E RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

RMT-SR

L'association RMT-SR (Rallye Mathématique Transalpin – Section Suisse Romande) prend en charge l'organisation régionale de cette confrontation internationale qui réunit près de 2000 classes de Suisse romande, du Tessin, d'une douzaine de régions d'Italie, de France voisine (Ain), du Luxembourg, de Belgique, de la République tchèque et d'Israël.

Comme les années précédentes, les **élèves** des classes inscrites des degrés 3 à 8 de la scolarité vont être confrontés à des problèmes pour faire des mathématiques pleines de sens et apprendre les règles élémentaires du débat scientifique car la solution de chaque problème sera construite et discutée en groupe. Le groupe remettra sa solution du problème pour la classe.

Les **maîtres** évalueront les productions de leurs élèves et leurs capacités d'organisation, ils pourront exploiter largement les problèmes pour leur classe. Ils apprécieront, par les analyses des résultats d'ensemble, les différentes procédures mises en œuvre par les groupes, les obstacles rencontrés, le niveau de savoirs mathématiques en jeu. Finalement, ils pourront aussi s'engager eux-mêmes dans l'équipe des animateurs et participer à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Le comité attend avec impatience les nouvelles inscriptions des classes pour participer à l'une ou l'autre de ces différentes étapes.

Comment inscrire sa classe?

- Les collègues qui ne connaîtraient pas encore l'esprit de cette compétition peuvent se renseigner en consultant notre site internet: www.rmt-sr.ch
- La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, éventuellement après une épreuve d'essai que vous trouverez sur notre site.
- Voici le calendrier des quatre étapes de cette compétition:
  - une **épreuve d'essai** d'octobre à novembre 2004, pour déterminer l'intérêt de la classe et décider de son inscription (avant le 30 novembre 2004 si possible, aucune inscription ne pourra être prise en compte, en ligne, après le 22 décembre 2004. Pour les retardataires ou les personnes informées tardivement, il sera encore possible de s'inscrire à l'adresse ci-dessous de notre secrétariat jusqu'aux environs du 20 janvier),
  - une **première épreuve**, en févier 2005 ,
  - une **deuxième épreuve** en mars 2005,
  - une **finale**, le mercredi après midi 15 juin 2005, à Berne.
- Notre site internet www.rmt-sr.ch et la revue *Math-Ecole* diffusent l'information sur le Rallye mathématique transalpin, en Suisse romande et au Tessin.
- Les **frais de participation** (prix souvenirs, certificats, travaux d'élaboration des épreuves, administration,...) se montent à Fr. 45.- par classe inscrites via internet et à Fr. 50.- pour celles inscrites par courrier.
- Le bulletin d'inscription est à compléter en ligne sur le site www.rmt-sr.ch.

Ceux qui ne sont pas connectés à Internet peuvent encore en obtenir un exemplaire auprès du secrétariat de l'association RMT-SR:

Madame Catherine Dupuis,
Chemin du Moulin, 1167 Lussy,
Tél. 021 803 28 67

LE CALCUL AU COLLÈGE

Texte de « l'Inspection Générale » en lien avec les futurs nouveaux programmes de Collège, en France.

[ndlr] En France, les nouveaux programmes de mathématiques de l'école primaire, appliqués dès la rentrée 2004 en CM2 (5e primaire en Suisse romande) vont être prolongés au Collège (premières années de l'enseignement secondaire) à la rentrée 2005. Ces textes insistent beaucoup plus que par le passé – dans la continuité des programmes de l'école primaire – sur la construction mathématique du calcul numérique et du calcul algébrique. L'Inspection Générale a produit un document à ce propos, dont nous reproduisons ici de larges extraits, vu son intérêt qui dépasse largement les frontières. Nous sommes en effet aussi concernés par la problématique du calcul, dans cette période de mise en place d'une réforme qui vient d'atteindre toute la scolarité obligatoire dans nos cantons romands. Nous sommes à la recherche d'un équilibre et d'une intégration du calcul réfléchi, algorithmique, et instrumenté dans un enseignement où il faut accorder une place plus grande à la résolution de problèmes et à la construction de connaissances par l'élève. Nous sommes encore intéressés par la continuité dans l'apprentissage du calcul, tout au long de l'école obligatoire, mais aussi plus tard, pour connaître ce qu'il en advient au secondaire supérieur (dans les transformation et simplification d'expressions algébriques, dans le calcul sur les fonctions puis en calcul différentiel et intégral, pour les limites).
Les auteurs de ce document sont convaincus de l'importance d'un bon enseignement du calcul et de la nécessité d'une réflexion approfondie sur la construction des apprentissages et les pratiques enseignantes au Collège. La rédaction de Math-Ecole pense que cette conviction est aussi partagée par ses lecteurs et souhaite que ces extraits iront alimenter leur réflexion dans ce domaine.

« ...

Les pratiques pédagogiques

On observe souvent des pratiques contestables, surtout dans les champs « travaux numériques » et « organisation et gestion de données - fonctions » :
- passage de l'étude de quelques exemples à une règle générale ;
- présentation de notions à partir de situations débouchant sur un énoncé mathématique dont le statut n'est pas explicité ;
- travail technique excessif non adossé à une réflexion didactique ;
- inversement, travail technique insuffisant ne permettant pas l'assimilation des outils ;
- distorsion préjudiciable à la cohérence d'ensemble du cours de mathématiques dans la place accordée au raisonnement et à la démonstration selon qu'on se situe dans le domaine numérique ou dans le domaine géométrique.

Le souci louable de parvenir à ce que les élèves maîtrisent les techniques de calcul ne doit pas conduire à n'utiliser que des exercices *purement* techniques. Il est souhaitable que l'acquisition de ces compétences se fasse aussi par la résolution de problèmes.

Les activités proposées aux élèves

Le terme « activité » recouvre à la fois l'activité intellectuelle de l'élève : mise de l'élève en activité qui est le but de tout enseignement et un exercice fondé sur une situation mathématique : activité d'approche, activité préparatoire, activité de recherche, etc., le plus souvent menée en classe.
Dans le projet de programme, on peut lire :
« La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées,

elles fournissent à leur tour de nouveaux "outils", qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout.

Les activités choisies doivent :

- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu des notions dont l'apprentissage est visé ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons. »

Cette explicitation figurait déjà dans le programme actuel mais sa position a été revalorisée : du bandeau de la classe de sixième, elle est passée à l'introduction générale pour le collège.

Trop souvent, l'activité des élèves est faible et la recherche n'a pas la place qu'elle devrait avoir. Il faut donc dépasser le cadre des activités pour elles-mêmes et les insérer dans un processus global de recherche et d'argumentation.

Dans leur grande majorité les activités présentées dans les manuels ne remplissent pas les conditions réclamées ci-dessus, car elles sont figées, par le simple fait qu'elles y sont écrites et contiennent un découpage qui présume de leur déroulement en classe. Le professeur qui rend public ce découpage en devient prisonnier, ce qui ne lui permet pas de tirer le meilleur profit des réactions de la classe ; il est ensuite obligé de s'y astreindre, même s'il se rend compte en cours de route de son manque de pertinence. Or les professeurs doivent privilégier le plus souvent possible les situations problèmes, avec une problématisation soignée plaçant l'élève en situation d'autonomie adaptée et de recherche, gérées avec souplesse.

La démonstration[1]

Comme il est indiqué dans l'introduction du projet de programme :

« [...] c'est à travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, que les élèves prennent conscience petit à petit de la nature d'une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution. »

Le passage du constat à la démonstration est un processus complexe nécessitant d'être mis en place dès la classe de 6e pour prendre un tour plus structuré à partir de la classe de 4e : il faut combattre l'idée que la démonstration ne commence qu'en classe de 4e.[2]

Le plus souvent, pour mettre en place des démonstrations, les professeurs privilégient le domaine géométrique. Il est alors nécessaire de travailler progressivement sur la distinction des objets, le codage, la nécessité de justifier, les éléments de justification, le rôle générique de la figure, l'importance de la phase de recherche, l'argumentation et l'intérêt du débat dans la classe, les différents niveaux de preuve, la rédaction ... Il est indispensable de saisir toutes les possibilités d'élaborer des démonstrations dans les domaines numériques et algébriques. Le projet de programme suggère d'ailleurs expli-

1 [ndlr] Alors qu'en France la « démonstration » est au programme du Collège, les plans d'études et moyens d'enseignement romands sont assez vagues sur le sujet. Ils ne parlent que « d'approche de la démonstration », à propos de géométrie, avec beaucoup de réserves comme : *Encourager la déduction ne signifie pas mettre en œuvre une géométrie axiomatique, ni exiger une rigueur mathématique, dont on sait bien qu'elle représente un obstacle difficilement surmontable pour une majorité des séleves de 12 à 15 ans.* ...(Mathématiques 7-8-9 , Géométrie, p.9). c'est là que réside la différence essentielle entre nos programmes et ceux de nos voisins.

2 En France, les classes de 6e et de 4e correspondent respectivement à nos degrés romands 6 et 8.

citement certaines justifications sur des exemples numériques génériques, qui, si l'on est bien au clair sur leur statut, permettent de préparer le passage du numérique à l'algébrique. Il demande aussi des démonstrations de résultats de cours dans le domaine algébrique. Passer de l'expérimentation sur des exemples à la démonstration est difficile, y compris sur le plan conceptuel. Les outils informatiques peuvent jouer un rôle important pour aider à faire émerger des conjectures et pour introduire la preuve. Mais, quelle qu'en soit sa forme, c'est l'activité des élèves qui doit servir à élaborer des conjectures et à rendre visible la nécessité de la démonstration. On évitera donc que la démonstration, imposée par l'enseignant, ne devienne un modèle formel à appliquer sans compréhension.

La résolution de problèmes

C'est le cœur même de l'activité mathématique, ainsi que le rappelle le projet de programme :

« A - Une place centrale pour la résolution de problèmes [...] Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également le moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles ».

Résoudre des problèmes permet de donner du sens aux apprentissages et, par là-même, de susciter l'intérêt et le goût d'apprendre des élèves.

Les résultats à l'épreuve écrite du brevet des collèges[3], frappent par le pourcentage élevé de notes inférieures à cinq sur vingt. Il semble paradoxal qu'autant de candidats ne parviennent pas à glaner davantage de points sur les traditionnels travaux numériques des épreuves alors qu'ils sont souvent très entraînés par les professeurs. Il y a lieu de réfléchir à la façon dont sont perçus ces exercices techniques hors de tout contexte : il semble que, dès lors que les élèves ont répondu, ils considèrent qu'ils ont fait leur travail et ont rarement recours à un contrôle de leurs résultats (substitution d'une valeur numérique, utilisation d'une calculatrice, prise en compte de l'ordre de grandeur, etc.). Ils sont d'ailleurs trop peu souvent invités à le faire en classe.

Le calcul numérique

Dans les évaluations officielles nationales ou internationales, on constate ces dernières années une baisse préoccupante des savoir-faire relatifs au calcul, en particulier en calcul mental et posé[4].

Les erreurs de calcul sont exploitables en cours d'apprentissage de façon constructive par l'enseignant. Mais leur présence devient un obstacle à la progression de l'élève ou du groupe, quand elles sont trop fréquentes ou quand elles manifestent le manque d'assimilation de connaissances préalables.

De nouveaux programmes

Les nouveaux programmes insistent de manière détaillée sur l'apprentissage et la maîtrise du calcul sous toutes ses formes. Dans la dernière année du cycle des approfondissements de l'école primaire (CM2), de nouveaux programmes sont entrés en vigueur en 2004. Des documents d'application et un document d'accompagnement école-collège expliquent et motivent les compétences

3 Cette répartition est de 31 % de 0 à 5 [0 ;5[, 33% sur [5 ;10[, 24% sur [10 ;15[et 12% sur [15 ;20]

4 Les résultats nationaux français de l'évaluation en sixième (2003) sont accessibles sur [http://evace26.education.gouv.fr]

5 Les nouveaux programme français de l'enseignement primaire – Mathématiques – Document d'accompagnement – Articulation école-collège – Disponible sur le site EDUSCOL : http://www.eduscol.education.fr. On trouve aussi sur ce site deux documents d'accompagnement concernant le calcul mental et le calcul posé.

visées, en particulier en ce qui concerne la proportionnalité, les nombres entiers naturels, les fractions et les nombres décimaux[5]. Les compétences sur le calcul mental ou posé, sur le calcul automatisé sont explicitement exigibles. En particulier, ces nouveaux programmes accordent une place importante au calcul mental réfléchi.
Dans les projets de programmes de collège (rentrée 2005) les objectifs sur le calcul figurent clairement dans la deuxième partie « nombres et calcul ». L'acquisition et l'approfondissement des notions liées au calcul sont proposés de façon progressive. Dans les parties « grandeurs et mesures » et « statistique », le calcul intervient aussi dans des situations qui donnent du sens aux nombres, aux opérations.

Le calcul numérique au collège

Les programmes distinguent trois modes de calcul : le calcul posé, le calcul mental et le calcul instrumenté. La notion de nombre est progressivement acquise tout au long de la scolarité par la pratique conjointe de ces trois modes de calcul. Les nombres, leurs propriétés et les techniques opératoires ont besoin d'être « manipulés », « fréquentés » par l'élève pour qu'il se les approprie progressivement.

Calcul posé

Il permet de garder le contact le plus direct avec les nombres, entretient les automatismes, et donne en retour la satisfaction d'une maîtrise totale du résultat. Il favorise le raisonnement sur les nombres et leurs opérations. En sixième, il est en première ligne quant à l'étude de la division décimale.

Calcul mental

Il est une façon spécifique de lier calcul et raisonnement. Il exige pour être pratiqué l'acquisition de certains mécanismes immédiatement disponibles, tant opératoires (distinction entre les diverses opérations) que factuels (table de multiplication). L'acquisition de ces mécanismes est en retour un outil indispensable de connaissance des nombres. Le calcul mental se travaille, se réfléchit, se raisonne. Les procédures de calcul sont souvent multiples : leur usage répété un grand nombre de fois sur des exemples numériques ainsi que le choix de la plus opportune d'entre elles contribuent à préparer l'élève à des tâches de calcul raisonné plus complexes. La comparaison des procédures utilisées sur des exemples numériques prépare les élèves aux propriétés des opérations (commutativité, distributivité) en vue du calcul algébrique. Le calcul mental est aussi un moyen de contrôle et d'anticipation, ainsi qu'une aide à la résolution de problèmes.
Le calcul mental se décline sur les deux domaines du calcul exact et du calcul approché (en ordres de grandeur). Dans les deux cas, mais dans le second en particulier, il entretient un lien privilégié avec l'initiation au raisonnement.

Calcul instrumenté

Le calcul instrumenté est complémentaire du calcul mental et du calcul posé, mais il ne peut les remplacer. L'usage de machines permet une exploration plus vaste, plus variée, plus rapide de l'ensemble des nombres, de leurs relations et des opérations. La calculatrice dispense pour un temps l'élève de l'effort du calcul effectif, manuel ou posé, et facilite ainsi cette exploration. Mais, employée sans une préparation et un encadrement adaptés ou comme supplétif d'une compétence de calcul non maîtrisée, elle peut priver l'élève de manipulation des nombres et d'une réflexion sur les résultats.
En conclusion, l'usage de la calculatrice doit être bien réparti dans le temps ; l'équilibrage entre les divers modes de calcul demande un arbitrage délicat. Les trois modes de calcul sont à mettre en oeuvre de front et sur plusieurs registres, en particulier dans la résolution de problèmes.

La découverte progressive des nombres

Au cours de la scolarité obligatoire l'apprentissage des nombres et des opérations est en jeu à chaque niveau. En sixième, une reprise sur l'écriture décimale est nécessaire, en situation. Il s'agit de solliciter en permanence la compréhension des écritures décimales et d'éviter d'aller trop rapidement vers l'utilisation de techniques non justifiées.
À chaque niveau, il ne faut pas oublier que la notion de nombre n'est jamais définitivement acquise, et que les allers et retours entre l'aspect intuitif lié à certaines mesures (quantité d'objets, longueurs, ...) et le concept de nombre continuent tout au long de la progression scolaire depuis le CP.
La découverte raisonnée des nombres passe par d'autres parties de l'enseignement des mathématiques : la statistique, la géométrie offrent aussi des champs de problèmes qui contribuent de façon significative à cette découverte, par exemple, avec le calcul de longueurs, d'aires et de périmètres.
Alors qu'elle occupe une place limitée à l'école primaire, l'écriture fractionnaire prend une place centrale au collège : c'est un des outils essentiels pour le traitement de nombreux problèmes, par exemple pour la proportionnalité et pour les grandeurs quotients. Cette écriture représente un nombre et non un calcul à effectuer : l'élève fait un pas important vers l'idée de nombre lorsqu'il accepte cela, comme ce sera également le cas avec les nombres relatifs, puis avec les radicaux : l'usage excessif des calculatrices qui incite à tout ramener à des « nombres en ligne » n'y aide pas.
Pour conclure, sur l'apprentissage des nombres au cours de la scolarité obligatoire voici deux suggestions :

- Il faut que l'enseignant garde constamment à l'esprit la nécessité de lier à chaque instant compréhension, sens, raisonnement d'une part, et d'autre part techniques, règles, tables et vocabulaire, c'est-à-dire ce qui est du domaine de la pensée, de la réflexion et ce qui est du domaine de la technique, de l'exécution. La contradiction apparente entre ces deux approches ne doit pas se résoudre seulement par un arbitrage entre les proportions de temps à y consacrer, mais aussi par une élévation en intensité de chaque moment de l'enseignement de manière à ne pas oublier ces deux approches.
- L'idée que l'élève se fait de ce qu'est un nombre doit évoluer :
  - le passage aux fractions comme quotients suppose d'accepter qu'un nombre ne s'exprime pas nécessairement par une suite de chiffres ;
  - le passage aux nombres négatifs suppose de renoncer au fait qu'un nombre exprime une quantité ou la mesure d'une grandeur ;
  - le passage des entiers naturels aux nombres décimaux suppose de renoncer à l'idée de nombres qui se suivent et d'accepter que le processus d'intercalation soit sans fin. ...

Une synthèse sur les nombres est prévue en fin de collège, avec une ouverture sur les nombres irrationnels, mais c'est tout au long de la scolarité obligatoire que ces évolutions qui sont aussi des ruptures devraient être prises en compte.

En conclusion

Il est particulièrement important de renforcer partout où l'occasion en est offerte les liens CM2 – 6^{e}.[6] Un objectif peut être proposé : que tous les enseignants de sixième (mieux : de Collège) aient participé à un travail de réflexion en commun avec des enseignants de l'école élémentaire sur ce sujet, et qu'ils aient une connaissance véritable des programmes et des documents d'accompagnement du CM2.

6. Degrés 5 et 6 en Suisse romande

Du calcul numérique au calcul algébrique : raisonnement et démonstration

Dans cette partie, deux exemples ont été choisis – la construction du quotient et la résolution d'équations – pour illustrer le passage du raisonnement sur des nombres aux démonstrations avec des lettres. Il ne faut pas négliger pour autant d'autres aspects fondamentaux du programme : développement et factorisation, ordre et opérations, calculs sur les radicaux…

Des difficultés constatées

Les visites dans les classes permettent de pointer les difficultés classiques liées :

- aux différentes significations du symbole d'égalité : égalité annonçant un « résultat », égalité de définition (formules d'aires, de volumes), identité, équation ;
- aux différents statuts de la lettre : variable, indéterminée, inconnue.

En général, c'est le contexte qui, implicitement, permet de fixer le statut de la lettre et il apparaît particulièrement important, en phase d'apprentissage, d'éviter d'aborder simultanément ses différents aspects. S'agissant du symbole d'égalité, il convient, dans chaque cas, d'en préciser le sens.

La construction du quotient

Dans les nouveaux programmes, la construction des savoirs concernant les quotients s'opère par une progression cohérente et continue sur les quatre années du Collège, où le passage du numérique à l'algébrique est particulièrement visible. En effet, en classes de sixième et de cinquième un certain nombre de justifications de règles sont attendues sur des exemples numériques. Ces justifications ont une valeur générique en ce sens que la méthode utilisée est transférable à la démonstration générale qui sera conduite, dans le registre des écritures littérales, en classe de quatrième. Le caractère générique des exemples favorise évidemment le passage du numérique au littéral.

En classe de sixième, la définition du quotient est utilisée exclusivement dans le numérique, notamment dans les problèmes relevant du champ de la proportionnalité. On note aussi dans le programme de cette classe, que « Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre est mis en évidence et utilisé ». Du point de vue de la construction du savoir, cette mise en évidence est d'une ambition autre que la simple utilisation. Elle peut se faire au travers de situations de proportionnalité en « révélant » le coefficient de proportionnalité par exemple dans le tableau de proportionnalité suivant :

a	$k \times a$
b	$k \times b$

On a donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{k \times b}{k \times a}$

La justification algébrique pourrait être :
Si $q = \frac{a}{b}$, cela signifie par définition que $a = b \times q$ donc $k \times a = k \times b \times q$.
Le nombre $\frac{k \times a}{k \times b}$ est, par définition, le nombre qui multiplié par $k \times b$ donne $k \times a$: c'est donc q.

Ce raisonnement, formalisé dans le cadre algébrique, peut être envisagé en classe de quatrième ; il peut être mis en œuvre sur des exemples numériques dès la classe de sixième.

De même, s'agissant de l'addition et de la multiplication des quotients, le programme de la classe de cinquième, stipule que :
« Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires … et sur la justification du procédé de calcul. » et « Dans le cadre de la résolution de problèmes, les élèves sont confrontés à des sommes de fractions du type 2/3 + 3/4 : pour les traiter, ils utilisent des procédures réfléchies … mais l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci est établie en 4e ».

On note donc que le souci de justification est très présent mais que, concernant l'addition, il est repoussé à la classe de 4e où elle est, en revanche, réclamée très nettement, les termes employés invitant clairement à une démonstration qui sollicitera inévitablement l'algèbre : de la permanence des propriétés sur les opérations (en particulier de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) on peut déduire que $b \times (\frac{a}{b}+\frac{c}{b}) = b \times \frac{a}{b} + b \times \frac{a}{c}$ ce qui donne $b \times (\frac{a}{b}+\frac{c}{b}) = a + c$, d'où la justification du résultat cherché à l'aide de la définition du quotient. Le passage à l'algébrique pour fournir les justifications précédemment citées est donc de mise en classe de quatrième. Enfin, en classe de troisième, les notions de fraction irréductible et de nombre rationnel constituent un aboutissement autorisant la pratique systématique des simplifications et couronnant le travail conduit depuis la classe de sixième pour construire le statut de nombre d'un quotient.

La résolution d'équations

La résolution algébrique des équations apparaît en classe de quatrième : à cette occasion, s'opère le passage d'un traitement numérique à un traitement algébrique. Pour ce passage, il apparaît nécessaire de mettre successivement en place deux types de problèmes.
Dans un premier temps, il s'agit de problèmes que les élèves savent résoudre par des procédures anciennes, numériques ou arithmétiques :
ils conduisent à des équations du type $ax + b = c$ dont la résolution s'appuie sur les définitions de la différence et du quotient à savoir $a + (b - a) = b$ et $a \times \frac{b}{a} = b$. En effet ces définitions permettent de résoudre « naturellement » $a + x = b$, $ax = b$ et même $ax + b = c$.
On peut également envisager à ce premier stade la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$ dans des cas particulièrement simples où la solution peut apparaître d'évidence ou après quelques tâtonnements.
L'intérêt de ces recherches conduites par les élèves à l'aide de procédures non expertes, est de permettre une première familiarisation avec des équations à second membre non constant. On peut penser à des procédures d'essais-erreurs, de fausse position ou à des démarches utilisant un tableur ou une calculatrice.
Dans un deuxième temps, il s'agit de situations dont la problématisation, plus complexe, doit être soignée et où l'algébrisation devra apparaître comme indispensable. L'introduction de la méthode algébrique, lourde et déstabilisatrice pour les élèves, est alors légitimée par le fait qu'elle est la seule permettant d'atteindre la solution du problème. Cette condition nécessite de recourir à des problèmes conduisant à des équations du type $ax + b = cx + d$ dont la solution ne soit pas facilement accessible par tâtonnement.

On peut noter quelques dérives concernant :

- La mise en équation : les exemples proposés aux élèves pour introduire la mise en équation sont trop souvent peu pertinents. Se ramenant en général à une équation de la forme $ax + b = c$, ils peuvent fréquemment être traités par de simples procédures arithmétiques, ou par un schéma, et ne motivent donc pas vraiment le recours à l'algèbre.
  Ce choix permet de partir des acquis des élèves puis de mettre en évidence une rupture essentielle avec le savoir nouveau.
- La transformation d'écritures : l'image de la balance de Roberval, souvent utilisée, n'est plus familière aux élèves et là aussi, souvent présentée sur des exemples peu convaincants.
- Les règles d'action souvent préconisées par les enseignants (par exemple, mettre les « x » dans le premier membre !) : elles renforcent des automatismes gratuits alors qu'il faudrait développer une « intelligence » des calculs fondée sur l'analyse des expressions algébriques, et habituer les élèves à avoir une lecture « symétrique » des égalités.
- Le raisonnement par équivalences n'est pas pertinent au collège : il est préférable, pour la rédaction des démonstrations, de procéder par conditions nécessaires

suivies d'une vérification qui constitue, en fait, la démonstration de l'implication réciproque.

Textes et sites de référence

1. Le rapport d'étape sur le calcul de la commission Kahane (CREM): http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/
2. Les programmes offciels du primaire et leurs documents d'accompagnement: http://www.eduscol.education.fr/D0048/rprim.htm
3. Les futurs programmes de collège: http://www.eduscol.education.fr/D0082/
4. Les résultats nationaux de l'évaluation sixième 2003: http://evace26.education.gouv.fr
5. Brochures Jeux 2, 5 et 6 de l'APMEP
6. « Pourquoi les mathématiques à l'école? » de Roland Charnay ESF
7. « Apprentissage des mathématiques en cinquième » ERMEL INRP
8. « Calcul mental et automatismes » IREM de Clermont-ferrand 1994
9. « Sur l'introduction au calcul littéral » bulletin vert de l'APMEP nff 445 page 197
10. « Les débuts de l'algèbre au collège » de G.Combier, J-C. Guillaume et A. Pressiat, INRP

Le calcul mental est un dossier du dernier numéro de la revue *Tangente* (no 101, nov. déc. 2004[1]).

Au sommaire:
- *Les calculateurs prodiges*, commentaires historiques
- *Sans papier ni crayon*, panorama des techniques de base et propriétés à connaître
- *Quand le cerveau calcule mal*, les troubles de la dyscalculie
- *La tribu qui ne sait pas compter*, à propos des liens entre langage et capacité de compter des grands nombres
- *Il y a un truc*, quelques tuyaux des calculateurs prodiges, des identités remarquables à des méthodes « contre-nature » pour faire des additions
- *Les outils du calcul formel*, de Pascal à Wolfram via von Neumann
- *Le 12 juillet était un dimanche*, quelques calculs simples pour trouver le jour et la semaine d'une date quelconque
- *Les flops des ordinateurs*, dont les performances sont mesurées en « Mips » ou en « Flops »

Ce premier dossier est suivi d'un second, tout aussi passionnant, sur **Les entiers relatifs**:
- *La lente émergence des nombres négatifs,*
- *Les entiers de N à Z*
- *Stendhal et la règle des signes*
- *Diviser pour régner*
- *Une structure idéale*
- *Diophante et ses équations*

Articles courts, bien illustrés, bien documentés, où l'on apprend beaucoup de choses qu'on devrait savoir mais qu'on ignorait ou qu'on avait oubliées.

1 En vente en kiosque. Abonnements: Tangente – BP 10214 - F – 95106 Argenteuil cedex. Site: http://www.Tangente-mag.com

POURQUOI LA LINÉARITÉ JOUE-T-ELLE DES TOURS AUX ÉLÈVES ?

UNE ÉTUDE APPROFONDIE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE[1]

Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens et Lieven Verschaffel[2]

Mots-clés : linéarité, grandeurs proportionnelles, aire, figures semblables

Quiconque croit que, si l'on double le diamètre d'un cercle, l'aire est également doublée, est tombé dans le piège linéaire. Mais il peut être rassuré : il n'est certes pas le seul à pâtir de l'illusion de la linéarité. L'histoire des mathématiques regorge d'exemples de ce genre. Rappelons-nous, par exemple, l'esclave dans le dialogue «Ménon» de Platon qui devait dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, ou alors Cardan qui pensait qu'il faut lancer 18 fois deux dés avant que la probabilité d'un double-six atteigne les 50 %. A quel point cette illusion est-elle encore présente à ce jour auprès des élèves de 12 à 16 ans? Dans cet article, nous présenterons les résultats des recherches récentes effectuées à Leuven au sujet de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et de la réduction de figures géométriques. Après un aperçu des résultats d'une série d'études collectives à ce sujet, nous décrirons en détails une étude approfondie examinant les causes de ce phénomène par le biais d'interviews individuelles.

1. Introduction

Selon Freudenthal ([7]), la linéarité (ou la proportionnalité directe) est une propriété tellement évidente que l'on est facilement tenté de traiter n'importe quelle relation entre des grandeurs comme si elle était linéaire. Bien souvent, les élèves - mais aussi plusieurs adultes - ont tendance à voir partout des relations linéaires et à appliquer la linéarité même dans des situations où ceci n'est pas justifié. Dans ce cas, on parle parfois de l'*illusion de la linéarité*. Dans la littérature, on trouve d'innombrables exemples de ce phénomène, empruntés à des domaines divers des mathématiques (voir par exemple [2]).

Un exemple élémentaire, dans l'histoire des probabilités, est l'erreur commise par le mathématicien italien Cardan (1501-1576). Cardan, qui raisonna correctement que la probabilité d'un double-six en un lancement de deux dés vaut 1/36, continua son raisonnement en prétendant qu'il faut lancer 18 fois les deux dés afin que la probabilité d'un double-six atteigne au moins 50 %. Cardan s'appuyait donc sur un lien proportionnel (direct) entre le nombre de lancements et la probabilité d'un double-six. Une recherche récente effectuée par Van Dooren, De Bock et Verschaffel [16] démontre qu'aujourd'hui encore les élèves de 15 à 18 ans tombent massivement dans ce piège linéaire. Les élèves de cette recherche avaient vraisemblablement une bonne compréhension qualitative des différentes situations aléatoires qu'on leur avait présentées (ainsi, par exemple, presque tous les élèves estimaient correctement que la probabilité d'un succès augmente avec le nombre de tentatives et diminue avec le nombre requis de succès). En même temps, ces élèves étaient fortement portés à quantifier de façon linéaire cette compréhension

1 **[ndlr]** Cet article a été publié dans la revue *Mathématique et pédagogie* (no. 146, mars-avril 2004) de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. Nous remercions les auteurs et la rédaction de la revue de nous autoriser à le reproduire à l'intention des lecteurs de *Math-Ecole*.

2 Voir l'adresse des auteurs en fin de bibliographie.

qualitative correcte (ainsi, par exemple, la grande majorité de ces élèves pensaient que la probabilité d'un succès est doublée lorsque l'on double le nombre de tentatives et que cette probabilité est divisée par deux lorsque l'on double le nombre requis de succès).

La généralisation à tort de la linéarité est également mentionnée dans le domaine des fonctions et des graphes. Lorsque l'on demande à des élèves de donner un exemple d'une fonction ou d'un graphe, dans la plupart des cas, ils produisent des exemples linéaires. Leinhardt, Zaslavsky et Stein [9] ont catégorisé les différentes méprises des élèves qui surgissent lorsqu'ils dessinent des graphes. Une de ces catégories est nommée « linearity », Les auteurs donnent un aperçu détaillé des études qui constatent que les élèves de différents âges, à qui l'on demande de dessiner le lien entre deux variables d'une situation donnée (comme, par exemple, la taille d'un homme en fonction de son âge), ont grande tendance à dessiner une droite passant par l'origine, même quand le lien en question n'est clairement pas linéaire et quand le graphe ne passe manifestement pas par l'origine.

Ce n'est pas uniquement dans les mathématiques que l'on découvre des exemples de raisonnements linéaires erronés. On en trouve aussi dans divers domaines scientifiques. Galilée [8] décrit dans ses « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorna a due nuove scienze » la théorie naïve d'Aristote sur les objets tombants. Aristote pensait, par exemple, qu'un objet 10 fois plus lourd qu'un autre, atteint 10 fois plus vite le sol que l'autre objet. Un énoncé de Piaget [12], dont le but était de voir si les enfants étaient capables de raisonner de façon linéaire, sous-entend un lien proportionnel direct entre la longueur d'un poisson et ses besoins de nourriture, mais rien ne dit que ceci soit biologiquement justifié : « (...) trois poissons de longueurs 5, 10 et 15 cm. Pour qu'une seule dimension soit à considérer (...) le poisson B mangera deux fois ce que mange le poisson A, et le poisson C trois fois » (p. 51).

Cet article est axé sur l'illusion de la linéarité dans le domaine de la géométrie. Dans ce domaine, l'exemple le plus célèbre est sans doute celui de la duplication du carré dans le dialogue Ménon de Platon. Un esclave, placé devant l'épreuve de dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, propose spontanément de doubler le côté du carré. L'esclave s'appuie donc de façon implicite sur un lien proportionnel entre le côté et l'aire d'un carré.

Un autre exemple de l'Antiquité est le fameux problème « délien » concernant l'impossibilité de construire à la règle et au compas l'arête d'un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné (voir par exemple [1]). L'origine légendaire de ce problème se situe vers 430 av. J.C. dans l'Athènes antique, où une épidémie de peste foudroyante avait abattu près d'un quart de la population. En désespoir de cause, on envoya une délégation à l'oracle d'Apollon à Délos pour demander comment on pouvait mettre fin à ce fléau. L'oracle « répondit » que l'épidémie se terminerait si l'on réussissait à doubler l'autel de forme cubique qui se trouvait dans le temple d'Apollon. Dans l'espoir de satisfaire la divinité, les Athéniens doublèrent chaque arête de l'autel, ce qui ne fit qu'intensifier l'épidémie car le volume de l'autel n'était pas doublé mais multiplié par 8.

Aujourd'hui encore, grand nombre d'élèves, mais aussi d'adultes, ne sont pas toujours conscients des différents facteurs de croissance pour les longueurs, les aires et les volumes de figures semblables agrandies ou réduites. Ainsi, Tierney, Boyd et Davis ([15], p. 308) constatent, dans leur recherche sur les conceptions d'aire auprès de futurs instituteurs, que les variations des dimensions linéaires sont bien souvent étendues aux variations de l'aire : *In responding to questions about the effect of halving or doubling the lengths of the sides of a square, most students said that the area was also halved or doubled.*

Le manque de distinction entre l'accroissement des mesures de longueur, d'aire et de, volume apparaît fréquemment dans des représentations graphiques déroutantes, comme on en voit souvent dans la presse populaire (voir aussi [11]). Le « graphique » de la figure 1 montre la consommation annuelle de bière (en litres par habitant) dans quelques pays européens. Ainsi, il s'avère que les habitants du Bénélux boivent trois fois plus de bière que les Français (respectivement 120 et 40 litres par habitant). L'aire des pots de bière dessinés suggère néanmoins un rapport de 9 à 1, et même de 27 à 1 si l'on considère les volumes des « vrais » pots de bière.

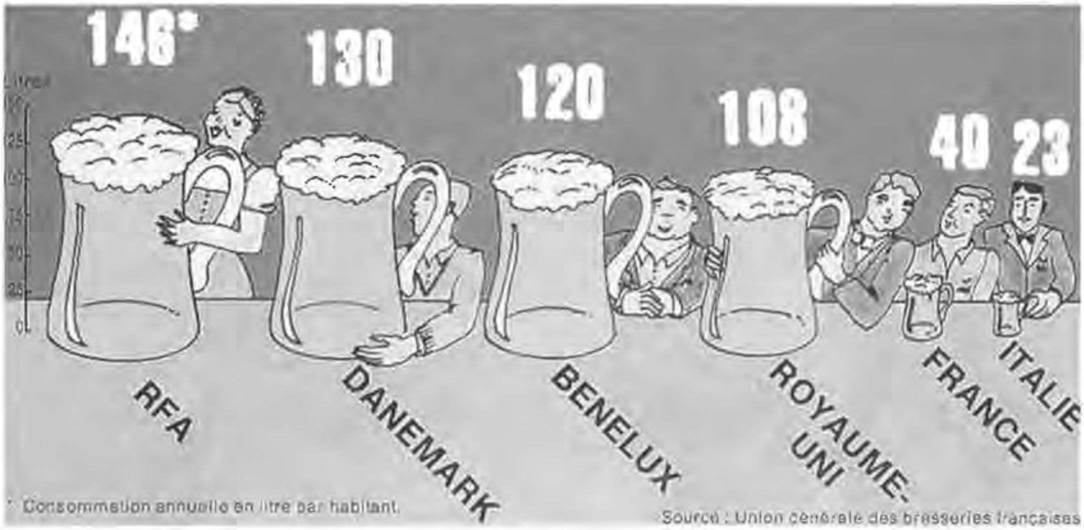


Figure 1 : Bière. L'Europe sous pression (Dans : Le Vif/L'express – 19 août 1988).

Même quelqu'un ayant compris que les aires et les volumes ne sont pas reliés de manière linéaire aux longueurs, s'étonne encore souvent du fait que l'aire et le volume augmentent *tellement* dans le cas d'un agrandissement et diminuent *tellement* dans le cas d'un rapetissement. Ceci est illustré dans le livre « Leven en Werken van de Kabouter » (titre de la traduction française : « Les Gnomes ») de Rien Poortvliet et Wil Huygen [13] (voir aussi [5]). Dans ce livre, on retrouve une analyse détaillée et vraisemblablement réaliste de tous les aspects de la vie du gnome. Une des thèses est que le gnome possède une anatomie très semblable à celle de l'être humain, et qu'un gnome mâle mesure environ 15 cm (sans compter son bonnet) et pèse environ 300 g (figure 2). Quoique ceci puisse sembler acceptable à première vue, c'est une estimation très peu réaliste : si l'on part du fait qu'un gnome de 300 g mesure 15 cm, et qu'un homme adulte mesure 180 cm, alors cet homme (qui est $180/15 = 12$ fois plus grand) devrait peser 12^3 ou 1728 fois plus, c'est-à-dire environ 518 400 g ou 518 kilos !

Depuis quelques années, le Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie de la Katholieke Universiteit Leuven mène une recherche empirique systématique au sujet du phénomène de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et du rapetissement de figures géométriques semblables. Dans une première série d'études, on a étudié l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité dans ce contexte par le biais de tests collectifs. Nous résumons ci-dessous ces études, dont certaines ont déjà été décrites jadis dans cette revue [3]. Pour un commentaire plus complet, nous nous référons à [4].

Toutefois, avec ces tests collectifs, nous n'avions pas obtenu suffisamment d'informations sur les processus de résolution cachés derrière les raisonnements linéaires à tort des élèves. Ainsi, nous basant sur ces tests, nous ne pouvions pas donner de réponse satisfaisante à la question comment et pourquoi tant d'élèves tombent dans le « piège linéaire », ni pourquoi ils s'avèrent tellement insensibles à diverses formes d'aide que nous leur avions fournies lors de ces tests. C'est pourquoi nous avons décidé d'interviewer de façon individuelle un groupe restreint d'élèves et de débrouiller leurs processus de raisonnement lors de la résolution d'un problème non linéaire, en interrogeant les élèves et en leur offrant quelques indices stratégiques. Nous donnerons un compte-rendu détaillé de cette étude dans le reste de l'article.

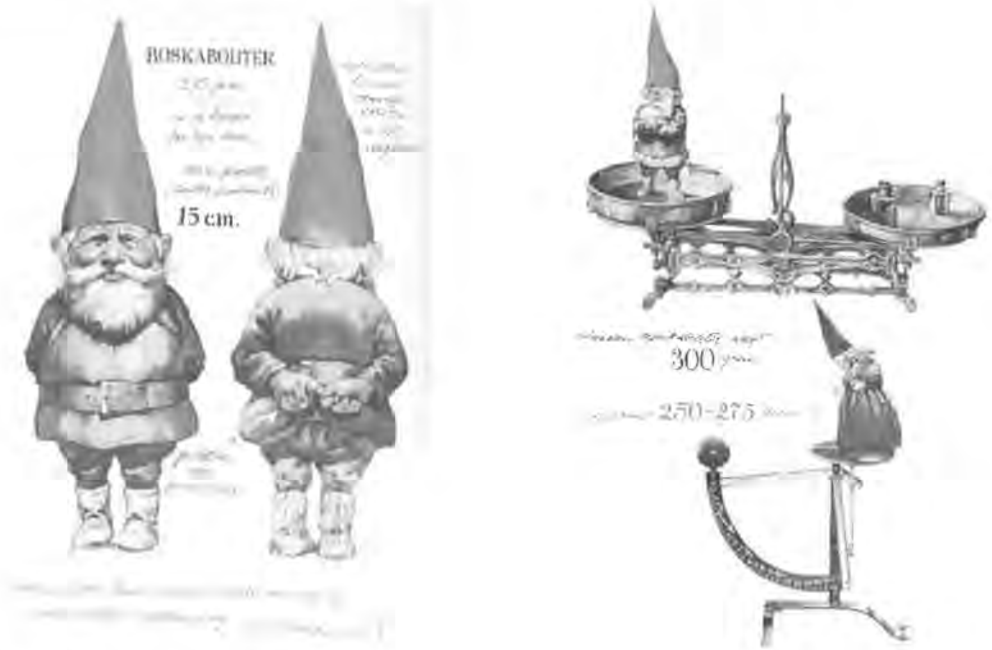


Figure 2: Combien pèse le gnome?

2. Étude basée sur des tests collectifs : un résumé

Les tests collectifs, visant à mesurer l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité, comportaient aussi bien des questions proportionnelles que des questions non-proportionnelles concernant la relation entre les longueurs, les aires et les volumes de figures géométriques semblables (agrandies ou réduites). Nous avons fait passer ces tests écrits à de grands groupes d'élèves de 12 à 13 ans et de 15 à 16 ans, sous des conditions expérimentales différentes. Toutes les questions des tests étaient formulées sous forme de « problèmes » traditionnels et elles concernaient différentes formes de figures géométriques. Voici, par exemple, une question proportionnelle (sur le périmètre d'un carré) :

Pour creuser un fossé autour d'un champ carré de 100 m de côté, le fermier Gustave a besoin d'environ 4 jours. Combien de jours lui faut-il, environ, pour creuser un fossé autour d'un champ carré dont le côté mesure 300 m ?

Voici un exemple d'une question non-proportionnelle (sur l'aire d'un carré) :

Pour fertiliser un champ carré de 200 m de côté, le fermier Charles a besoin d'environ 8 heures. Combien d'heures, environ, lui prendra la fumure d'un champs carré dont le côté mesure 600 m ?

Résumons les principaux résultats de ces études.

- La tendance à raisonner de façon proportionnelle s'avère être extrêmement forte dans le groupe des 12 - 13 ans (seulement 2 – 7 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles), mais les 15 - 16 ans, eux aussi, en sont fortement imprégnés (seulement 17 - 22 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles).
- La nature de la figure géométrique liée au problème influence la tendance à raisonner de façon linéaire : les prestations des élèves étaient meilleures dans les cas de figures régulières (carré, cercle) que dans les cas de figures irrégulières (par exemple, la carte de la Belgique).
- Ni la consigne de faire un dessin pour chaque question, ni même les dessins fournis n'influencent le comportement de résolution des élèves. Les élèves ont rarement suivi la consigne de faire un dessin et ils n'ont, en général, pas prêté beaucoup d'attention aux dessins fournis. Ce n'est que lorsqu'on leur a présenté des dessins sur papier quadrillé, qu'un effet positif a été constaté (les élèves à qui ceux-ci ont été fournis ont résolu 17 % des questions non-proportionnelles de façon correcte, contre 13 % dans les autres groupes).
- L'offre d'une aide métacognitive (la confrontation des élèves, avant le test, avec une question non-proportionnelle au sujet de laquelle ils pouvaient choisir entre la réponse proportionnelle et la réponse correcte) n'avait qu'un effet positif limité sur la résolution des problèmes non-proportionnels du test : dans le groupe avec cette aide, 18 % des problèmes non-proportionnels ont été bien résolus, contre 12 % dans les autres groupes.
- Le raisonnement proportionnel à tort semble être fortement lié à la structure « valeur manquante » de l'énoncé (une structure dans laquelle les élèves doivent calculer l'inconnue en se basant sur trois nombres donnés, comme dans les exemples cités ci-dessus). Les élèves à qui étaient présentées des questions équivalentes quant au contenu mais formulées sous forme de comparaisons (par exemple, la variante de la question non-proportionnelle citée plus haut : *Le fermier Charles a fertilisé aujourd'hui un champ carré. Demain, il doit fertiliser un champ carré dont le côté est trois fois plus grand. Combien de fois plus de temps lui faudra-t-il pour fertiliser ce champ ?*) ont réussi beaucoup mieux aux questions non-proportionnelles que les élèves confrontés aux questions « valeur manquante » (respectivement 41 % et 23 % de réponses correctes). Mais même chez les élèves avec les questions sous forme de comparaison, plus de la moitié des réponses étaient fautives !
- La présentation des questions dans un contexte attrayant et « réaliste », ce qui fut réalisé dans la recherche en montrant une vidéo sur le voyage de Gulliver à l'île des Lilliputiens et en reliant les questions du test à ce contexte, a même eu un effet contraire sur les prestations des élèves aux questions non-proportionnelles (25 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles contre 41 % dans le groupe de contrôle).
- Nous avons constaté, à notre surprise, que quand les prestations des élèves sont améliorées grâce à l'une ou l'autre forme d'aide offerte, ceci allait à chaque fois de pair avec des prestations moins bonnes pour les questions « habituelles » proportionnelles. Bien souvent les fautes commises à ces questions proportionnelles étaient dues à des raisonnements non proportionnels à tort.

La conclusion générale de ces études est qu'un grand nombre d'élèves se laissent induire en erreur par l'illusion de la linéarité, et ceci de façon flagrante, même quand on leur offre une aide mettant en évidence que le modèle linéaire est insoutenable. Les effets de différentes manipulations expérimentales ont été décevants et même, dans certains cas, négatifs. Mais à cause de la méthode de recherche utilisée (des tests collectifs sous différentes conditions expérimentales), ces tests n'ont pas procuré une image suffisamment détaillée des processus de résolution et des modes de raisonnement des élèves qui donnaient à tort des réponses linéaires. C'est pourquoi ces études avec des tests collectifs ont été complétées par une étude approfondie dans laquelle nous avons interviewé un petit nombre d'élèves.

3. Étude par interviews

3.1 Déroulement des interviews et constatations principales

Décrivons tout d'abord le déroulement des interviews ainsi que les principales constatations d'ordre général concernant les réactions des élèves pendant les interviews. Après ceci, nous donnerons les détails de deux interviews d'élèves, que nous avons sélectionnées comme représentatives des réactions de l'ensemble des élèves interviewés.

Nous avons fait passer des interviews individuelles semi-standardisées à vingt élèves de 12 - 13 ans et vingt élèves de 15 - 16 ans de l'enseignement général. Dans ces interviews, nous placions les élèves d'abord devant un problème non-linéaire sur l'agrandissement d'une figure irrégulière. L'énoncé était accompagné de dessins afin de garantir la bonne interprétation du problème par les élèves (notamment comme un agrandissement « semblable »). Grâce aux études avec des tests collectifs, nous savions déjà que le fait de fournir un dessin n'influe pas sur le nombre (massif) de réactions proportionnelles de la part des élèves. Un exemple est donné dans la figure 3.

Bart travaille pour une entreprise qui peint des dessins publicitaires sur les vitres des étalages. À Noël, il doit souvent peindre des arbres de Noël, des Pères Noël, des étoiles et des bonshommes de neige.

Un jour, il dut peindre un Père Noël de 56 cm de haut sur la porte en verre de la boulangerie Dufour. À cet effet, il avait besoin de 6 ml de peinture. Un peu plus tard, il dut peindre une version beaucoup plus grande de ce Père Noël sur la vitre de l'étalage du supermarché Staes. Ce Père Noël devait mesurer 168 cm de haut. Combien de peinture lui fallait-il ?

Boulangerie Dufour

Supermarché Staes

Figure 3 : Exemple d'un problème non linéaire (bonne réponse : 54 ml, réponse fautive : 18 ml).

Pendant la résolution de ce problème, nous faisions penser l'élève à haute voix et nous posions quelques questions supplémentaires. Nous demandions par exemple systématiquement pourquoi ils pensaient que leur réponse était correcte et ils devaient indiquer sur une échelle à cinq niveaux leur degré de certitude (de « sûrement fausse » à « sûrement correcte »). Lorsqu'un élève résolvait le problème de façon linéaire, nous donnions en cours de route des indices supplémentaires. Ces indices soutenaient de plus en plus la solution correcte (non-linéaire) et suscitaient de plus en plus un conflit cognitif auprès de l'élève. Après chaque indice, l'interviewer demandait à l'élève s'il voulait modifier sa réponse. L'interview se terminait lorsque l'élève percevait le caractère non-linéaire du problème et lorsqu'il donnait la bonne réponse. De cette façon, nous pouvions vérifier le degré de persistance de l'élève dans son choix du modèle linéaire. Ces indices n'ambitionnaient pas un trajet d'apprentissage, mais ils ne servaient qu'à détecter le processus de pensée de l'élève. Dans la figure 4, le déroulement de l'interview est représenté de façon schématique.

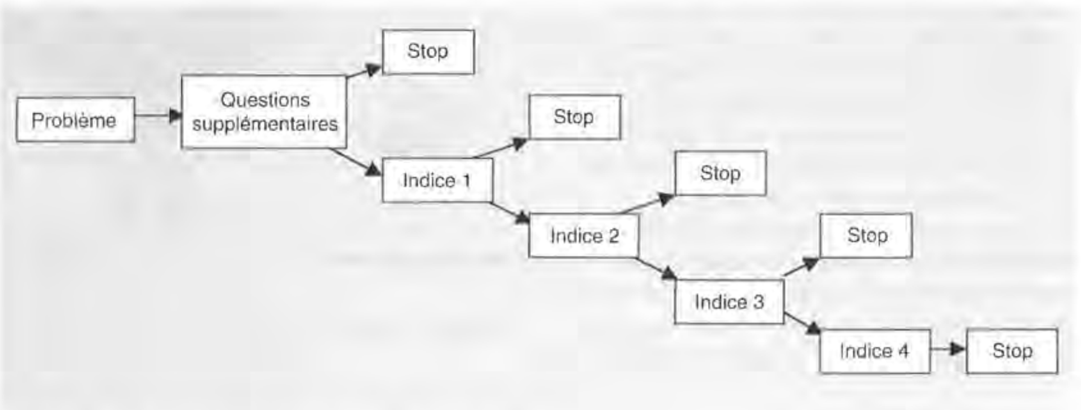


Figure 4 : Schéma du déroulement de l'interview

Lorsque nous présentions le problème non-linéaire, tous les élèves (à deux près dans le groupe des plus âgés) ont donné la réponse linéaire. Dans la plupart des cas, ils trouvaient la réponse linéaire en calculant le rapport des hauteurs des Pères Noël et en raisonnant que ce rapport s'applique aussi à la quantité de peinture requise pour peindre ces figures (la hauteur est multipliée par trois, donc la quantité de peinture doit, elle aussi, être multipliée par trois). La plupart des élèves se montraient assez sûrs du bien-fondé de leur réponse : sur l'échelle à cinq niveaux, vingt élèves ont indiqué que leur réponse était « sûrement correcte », seize « probablement correcte » et les quatre qui restaient n'en avaient « aucune idée ». Par contre, il est apparu plus tard qu'ils avaient grande peine à expliquer et à justifier leur réponse. Pour eux, la réponse était évidente et une autre réponse était impensable.

Au total, quatre indices étaient prévus. Un *premier indice* était la confrontation de l'élève avec un tableau de fréquences, manipulé par nous, indiquant que des élèves fictifs avaient donné la réponse non linéaire aussi fréquemment que la linéaire (voir figure 5). Nous imaginions que ceci aurait semé le doute. De plus, les élèves ayant répondu de façon linéaire uniquement par distraction, auraient pu reconnaître dans le tableau la réponse correcte.

Réponse	Pourcentage d'élèves
18 ml	41 %
54 ml	41 %
Autres	18 %

Figure 5 : Tableau de fréquences fourni comme premier indice

Après la confrontation avec le tableau de fréquences, seulement deux élèves des 38 restants ont changé leur réponse linéaire pour la non linéaire. Les réactions de la plupart des autres élèves étaient superficielles (par exemple, des tentatives vaines d'obtenir le résultat alternatif en effectuant, de façon aléatoire, quelques opérations sur les trois nombres donnés). Grand nombre d'entre eux découvraient ainsi que l'autre solution s'obtient en multipliant la quantité de peinture par neuf (ou deux fois de suite par trois), mais ceci ne les faisait pas hésiter à la propre solution.

Comme *deuxième indice*, l'interviewer présentait l'argument d'un élève (fictif) en faveur de la solution non linéaire. Dans l'exemple, cet indice était formulé ainsi : « Un élève m'a expliqué que si le dessin de Père Noël est trois fois plus grand, alors non seulement la hauteur mais aussi la largeur est multipliée par trois. On a donc besoin de neuf fois plus de peinture et c'est pour cela qu'il a répondu 54 ml. »

Après cet indice, 14 des 36 élèves restants ont décidé de changer de réponse. Ils reconnaissaient qu'avant ils n'avaient pas vraiment essayé de se représenter le problème et qu'ils l'avaient résolu de façon irréfléchie et routinière. Mais même à ce moment, 22 élèves s'en sont tenus à leur réponse originale, quoiqu'ils ne puissent pas (bien) la justifier. Bien souvent, leur argumentation reposait sur une opinion très « scolaire » concernant la résolution de problèmes mathématiques. Ou alors, il s'avérait que les élèves ne comprenaient pas la signification précise de la similitude.

Comme *troisième indice*, on montrait la stratégie de résolution d'un élève fictif qui avait répondu correctement (de façon non linéaire). Cet élève fictif avait dessiné des rectangles autour du petit et du grand Père Noël. Ainsi, il avait remarqué que la figure ne devient pas seulement trois fois plus haute mais aussi trois fois plus large (voir figure 6).

Boulangerie Dufour **Supermarché Staes**

Figure 6 : Des rectangles fournis comme indice

La présentation de la stratégie de résolution a suscité dans neuf des 22 cas restants un véritable « Gestaltwechsel » [18]. Dès la présentation de cet indice, ils ont choisi directement, et convaincus, la solution non linéaire. Les treize élèves qui restaient s'en sont tenus à la réponse linéaire et ont exprimé des réflexions assez générales sur la façon dont, selon eux, les problèmes mathématiques doivent être abordés et sur le rôle (restreint) que les dessins peuvent jouer à leurs yeux.

Finalement, comme *quatrième indice*, on faisait le lien avec la mesure de l'aire. On leur demandait de calculer les aires des deux rectangles de la figure 6 et de les comparer. Pour tous ceux qui restaient encore après ce quatrième indice, l'interview était terminée.

Après ce quatrième indice, encore 5 élèves ont échangé leur réponse linéaire contre la non linéaire. Mais même après quatre indices (de force croissante), il y avait encore 8 élèves qui se tenaient à leur raisonnement initial linéaire. Ils répétaient surtout, et bien souvent avec emphase, leur opinion stéréotypée sur les mathématiques en général et sur la résolution de problèmes en particulier.

3.2 Deux exemples d'interviews

L'interview avec Pieter (12 ans)

L'interviewer montra a Pieter une fiche de travail énonçant le problème des Pères Noël (figure 3). L'interview se déroula comme ceci.

Pieter: [Lit l'énoncé à haute voix.] Euh, attendez, laissez-moi regarder les nombres... Ça y est, je vois, la hauteur change de 56 cm à 168 cm. Ce qui fait fois trois. Je dois donc multiplier la quantité de peinture également par trois. [Pieter dessine le schéma de la figure 7.] La réponse est 18 ml. Bart a besoin de 18 ml pour le grand Père Noël.

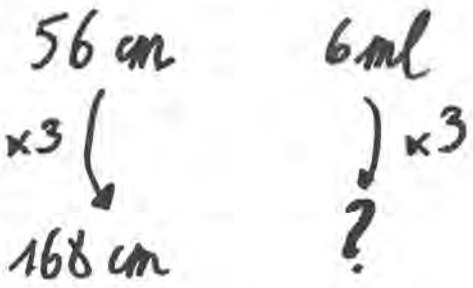


Figure 7 : Le schéma de résolution de Pieter

Interviewer: Pourquoi penses-tu que cette solution est bonne?
Pieter: [silence] Bien, euh... Je ne sais pas... C'est comme ça que je l'ai résolu.

Interviewer: Mais pourquoi as-tu multiplié par trois?
Pieter: Mais c'est logique. Comment faire autrement? Le Père Noël est *plus haut*, donc on a besoin de *plus* de peinture. Et il est *trois fois* plus haut, donc ... *trois fois* plus de peinture. C'est simple.

Interviewer: A quel point es-tu certain de ta réponse?
Pieter: J'en suis très certain. C'est un problème facile. J'ai utilisé les trois nombres et la formule, donc, forcément, c'est juste.

L'interviewer lui fournit le premier indice.

Interviewer: La semaine passée, on a donné ce même problème à des élèves d'une autre école. Leurs réponses sont dans le tableau (figure 5). 41 % des élèves de cette école ont aussi donné comme réponse 18 ml, mais il y a autant d'élèves qui ont répondu 54 ml. Pieter, que penses-tu de cette autre réponse? Et de la tienne? Veux-tu changer?
Pieter: [tout de suite] Non. C'est impossible. Je l'ai calculé et c'est 18 ml. Comment arrivent-ils à 54? Attendez, j'essaie. [Soustrait 54 de 168, essaie quelques combinaisons de 54, 168, 6 et +, -, · et :] Non, je ne vois pas. Ils ont multiplié *deux* fois par trois. Vous voyez, ils se sont trompés. Je reste à ma réponse.

Puisque Pieter se tenait à sa réponse linéaire, l'interviewer proposa le deuxième indice.

Interviewer: Un élève de l'autre école m'a expliqué comment il avait résolu le problème. Il disait que le grand Père Noël n'est pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture.

Pieter : Oh, mais cet élève s'appuie sur le dessin. Je n'ai pas regardé le dessin. Seulement le texte. Dans le texte, il n'y a que la *hauteur*.

Interviewer : Et si tu regardes le dessin ?

Pieter : 18 ml est toujours mieux. Cet élève rend les choses compliquées. Ma réponse est meilleure.

Alors, l'interviewer donna le troisième indice. Il montra les dessins de la figure 6 accompagnés des explications suivantes.

Interviewer : L'élève qui a multiplié par neuf avait dessiné d'abord des rectangles autour des Pères Noël. C'est ainsi qu'il a vu que la figure est trois fois plus grande dans les *deux directions* : en hauteur mais aussi en largeur. C'est pourquoi il faut neuf fois plus de peinture. Que penses-tu de cette solution ? Et de la tienne ? Laquelle préfères-tu ?

Pieter : Ça pourrait être une bonne solution, mais le problème ne dit rien sur la largeur. Ceci est dans le dessin, pas dans l'énoncé. Le problème traite de la hauteur.

Interviewer : Et que penses-tu de ces rectangles ?

Pieter : Ce qu'ils font avec les rectangles est correct : ceux-ci sont agrandis dans deux directions. Mais à l'intérieur des rectangles, il y a une figure irrégulière. C'est autre chose. Regardez ici, et ici ! [Pieter désigne les parties « vides » des rectangles.]

Finalement, le quatrième indice fut fourni.

Interviewer : Peux-tu calculer et comparer les aires des deux rectangles ?

Pieter : [Calcule.] Eh bien, celui-ci est neuf fois plus grand que celui-là.

Interviewer : Et si tu devais peindre la surface de ces rectangles ?

Pieter : [tout de suite] Alors il s'agit de peinture, pas d'aire. Vous rendez les choses trop difficiles. Les maths, c'est logique et multiplier par neuf, ici, n'est pas logique. Il est trois fois plus grand, donc il faut trois fois plus de peinture !

Ici se termina l'interview avec Pieter.

L'interview avec Karen (15 ans)

Karen fut placée devant le même problème des Pères Noël. L'interview se déroula ainsi.

Karen : [Lit le problème.] Ah, je vois. Il faut 6 ml pour 56 cm. Je peux donc calculer combien de peinture il faut pour 1 cm [divise 6 par 56 avec sa calculatrice]. Ça y est. Il faut 0,107 ml par cm. Après, je multiplie par 168 car le grand Père Noël mesure 168 cm. [Calcule.] Il faut 18 ml pour le grand Père Noël.

Interviewer : Pourquoi penses-tu que c'est la bonne solution ?

Karen : Eh... Ça marche, je ne sais pas pourquoi.

Interviewer : Et comment est-ce que ça marche ?

Karen : Il est facile de calculer combien de peinture il faut pour 1 cm. Donc il n'y a plus qu'à multiplier. On appelle ça la règle de trois. C'est tout ce que je peux dire la-dessus.

Interviewer : A quel point es-tu sûre de ta réponse ?

Karen : Je ne suis pas tout à fait sûre parce que je n'ai pas lu l'énoncé attentivement. Mais je crois que j'ai fait ce qu'on attendait de moi. J'ai utilisé les trois nombres et ça marche. Peut-être que j'ai fait une faute de calcul. Ça peut toujours arriver. Mais à mon avis c'est correct.

Puisque Karen avait donné une réponse linéaire, l'interviewer lui montra le tableau de fréquences et remarqua que les élèves de l'autre école ont donné aussi fréquemment comme réponse 54 ml. Karen réagit ainsi.

Karen : 54 ? Je pense que c'est trop. Je trouve ma réponse bien plus logique. D'ailleurs, il est toujours préférable de se tenir à sa première idée !

Interviewer : Un élève de l'autre école m'a dit que le Père Noël ne devient pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture. C'est pourquoi il a répondu 54 ml.

Karen : Non, je ne pense pas. Il est vrai qu'il devient trois fois plus haut et trois fois plus large. Mais ceci signifie, justement, que tout est multiplié par trois. Également la quantité de peinture. Elle est aussi multipliée par trois. 6 ml, c'est pour le Père Noël entier, pas seulement pour la hauteur. Et 18 ml, c'est pour le grand Père Noël entier. [Désigne successivement le petit et le grand Père Noël.] Cette aire entre trois fois dans cette aire, donc il faut trois fois plus de peinture.

Karen persistait donc à préférer la solution linéaire après le deuxième indice, donc on lui fournit le troisième indice : l'interviewer montra et commenta la stratégie avec les rectangles circonscrits. En regardant cette figure, Karen changea tout de suite de réponse.

Karen : Oh oui, maintenant je vois. En effet, il est neuf fois plus grand, parce que le petit rectangle entre aussi neuf fois dans le grand. Avec les rectangles, je comprends. Maintenant je suis sûre. C'est 54 ml.

Interviewer : Peux-tu expliquer pourquoi au début tu répondais 18 ml ?

Karen : Ma réponse paraissait logique : trois fois plus grand, trois fois plus de peinture... De plus, je n'avais regardé que le texte et j'ai tout de suite commencé à calculer. Si j'avais d'abord regardé les dessins, je l'aurais peut-être vu. Mais je ne m'étais rien représenté au sujet de ce problème ... seulement calculé.

Ici se termina l'interview avec Karen.

En guise de conclusion

Cette étude par interviews confirme la persistance du raisonnement linéaire à tort de la part des 12-16 ans lors de la résolution de problèmes de longueur et d'aire de figures géométriques. Presque tous les élèves sont partis d'emblée d'une relation linéaire (au lieu d'une relation quadratique) entre la longueur et l'aire. Même après avoir reçu des indices (forts), beaucoup d'élèves persistaient à préférer le modèle linéaire ou éprouvaient de grandes difficultés à apprécier à sa juste valeur le modèle alternatif.

Nous avons obtenu également des informations précieuses sur les processus de raisonnement à la base du raisonnement linéaire à tort des élèves. De façon globale, on peut distinguer quatre grandes catégories de tels processus de raisonnement. La prépondérance de chaque élément varie d'élève en élève, mais aussi, auprès du même élève, selon les différentes phases de l'interview.

Une première catégorie se réfère au caractère intuitif (au sens de Fischbein, [6]) du modèle linéaire : il possède un caractère d'évidence et il est utilisé de façon spontanée et presque inconsciente. C'est pourquoi les élèves ne ressentent aucun besoin de justifier leur choix de ce modèle. Les modèles intuitifs s'avèrent en outre très résistants à un enseignement formel visant à faire contrepoids. Les modèles non-linéaires sont ressentis par l'élève comme illogiques ou comme allant à l'encontre de l'intuition. On peut donc tracer une parallèle avec les « règles intuitives » comme décrites par Stavy et Tirosh [14]. Dans la recherche de ces auteurs, il apparaît que les élèves se font guider bien souvent par des règles intuitives communes lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes en mathématiques et en sciences. Deux règles reviennent fréquemment dans des tâches de comparaison : « plus de A - plus de B » et « même A - même B ». Dans le problème des Pères Noël, le raisonnement « plus de A - plus de B » est très naturel et correct (plus de hauteur correspond à plus d'aire / de peinture). Mais une réaction « même A - même B » est également possible et a été formulée presque littéralement dans certains cas (les deux Pères Noël ont la même forme, donc il faut multiplier tout par le même facteur).

Une deuxième catégorie est constituée par l'application consciente et voulue du modèle linéaire. Cette catégorie diffère de la première dans le sens que les élèves n'appliquent plus le modèle linéaire de façon intuitive, implicite ou automatique. Certains élèves paraissent vraiment convaincus du fait que tout accroissement est un accroissement linéaire. Ces élèves raisonnaient parfois de façon explicite que si la longueur et la largeur accroissent avec un facteur trois, l'aire augmente avec le même facteur. Pour cette conviction spécifique, le nom « d'illusion de la linéarité » est certainement à sa place : ces élèves sont convaincus que le modèle linéaire est le bon choix.

Troisièmement, cette étude par interviews fait apparaître certaines lacunes dans les connaissances géométriques des élèves (par exemple, la confusion entre l'aire et le volume ou le fait de ne pas reconnaître la quantité de peinture comme mesure indirecte de l'aire). Ces lacunes empêchaient les élèves de « découvrir » la faute dans leur raisonnement et de trouver la réponse correcte. En particulier, il est apparu que plusieurs élèves de 12-16 ans ont des problèmes avec les concepts de similitude et d'aire, surtout pour des figures irrégulières.

Quatrièmement, plusieurs élèves s'avèrent avoir des habitudes et des convictions inappropriées sur la résolution de problèmes mathématiques, comme : « il vaut mieux se baser sur des formules que sur des dessins ; il vaut mieux se tenir à sa première idée ; on ne peut utiliser que les informations mentionnées explicitement dans l'énoncé ; les problèmes mathématiques n'ont rien à voir avec la réalité ; pour la résolution d'un problème, on attend de l'élève qu'il effectue une ou quelques opérations standard. » Ces convictions sont sans doute un sous-produit de l'enseignement des mathématiques que les élèves ont reçu et des expériences scolaires qu'ils ont vécues en ce qui concerne les problèmes en mathématiques ([17]).

La combinaison de ces quatre éléments a entraîné la plupart des élèves à modeler le problème de façon superficielle et défectueuse.

Dans une phase ultérieure de notre recherche, nous voudrions vérifier comment on peut mieux équiper les élèves contre le piège de l'illusion linéaire. À cet effet, nous développons et évaluons en ce moment des cours, élaborés en tenant compte non seulement des résultats de nos études antérieures sur l'illusion de la linéarité, mais aussi de quelques principes plus généraux de l'enseignement « réaliste » des mathématiques (partir de contextes riches, construire le savoir sur les bases des connaissances et des stratégies informelles des élèves, ...).

Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven et EHSAL, Europese Hogeschool Brussel
Wim Van Dooren, Aspirant du Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) de Flandres, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven
Dirk Janssens, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U.Leuven
Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven

Cet article est la traduction d'un manuscrit néerlandais préparé dans le cadre du projet de recherche « L'illusion de la linéarité : analyse et amélioration ». Ce projet est subventionné par le Conseil de Recherche de la K.U.Leuven (OT-2000-10). Les auteurs remercient cordialement Michel Roelens qui s'est chargé de la traduction française.

Bibliographie

[1] De Bock D., Het veld van de construeerbare reële getallen, *Wiskunde & Onderwijs*, 1983, 33, 47-60.

[2] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 120, 39-50.

[3] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Deuxième partie : trois études dans l'enseignement secondaire, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 121, 30-45.

[4] De Bock D., *The illusion of linearity. An empirical analysis of secondary school students' improper proportional reasoning in geometry problems*, Doctoral dissertation, K.U.Leuven, 2002.

[5] Eggermont H., Gewichtige kabouters, *Uitwiskeling*, 1993, 9(3), 3-5.

[6] Fischbein E., *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Reidel, 1987.

[7] Freudenthal H., *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel, 1983.

[8] Galilei G., *Dialogues concerning two new sciences*, New York, Dover, 1954.

[9] Leinhardt G., Zaslavsky O. and Stein M.K., Functions, graphs, and graphing : Tasks, learning, and teaching, *Review of Educational Research*, 1990, 60(1), 1-64.

[10] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA, NCTM, 1989.

[11] Peltier M., Rouche N. et Manderick M., *Contremanuel de statistique et probabilité*, Bruxelles, Vie Ouvrière, 1982.

[12] Piaget J., *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Dordrecht, Reidel, 1968.

[13] Poortvliet R. en Huygen W., *Leven en werken van de kabouter*, Bussum, Van Holkema & Warendorf , 1976. (Ce livre est traduit en français par Maddy Buysse : Huygen W. et Poortvliet R., Les gnomes, Paris, Albin Michel, 1992.)

[14] Stavy R. and Tirosh D., *How students (mis-)understand science and mathematics :* Intuitive rules, New York, Teachers College Press, 2000.

[15] Tierney C., Boyd C. and Davis G., Prospective primary teachers' conceptions of area, in G. Booker, P. Cobb and T.N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)*, Oaxtepex, Mexico, 1990, 307-314.

[16] Van Dooren W., De Bock D. et Verschaffel L., L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités, *Mathématique et Pédagogie*, en presse.

[17] Verschaffel L., Greer B. and De Corte E., *Making sense of word problems*, Lisse, The Netherlands, Swets & Zeitlinger, 2000.

[18] Wertheimer M., *Productive thinking*, New York, Harper & Brothers, 1945.

Adresse de correspondance :
Dirk DE BOCK
Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T)
Vesaliusstraat 2 – 3000 Leuven
dirk.debock@avl.kuleuven.ac.be

QUALIFICATION RÉGIONALE VALAISANNE

POUR LE 19E CHAMPIONNAT DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES[1]

10 novembre 2004

CM : 4es et 5es primaires - ex. 1 à 7
C1 : 6es primaires et premières du CO - ex. 2 à 8
C2 : 8es et 9es années = 2es et 3es années du CO et 1ères du collège – ex. 4 à 11
L1 : 10es années et suivantes, jusqu'à la maturité – ex. 7 à 14

1. La poste (CM) (coef. 1)
Michel habite à l'extrémité d'une longue avenue. À l'autre bout se trouve l'école, et à mi-chemin, la poste. S'il quitte l'école à midi, il se trouve chez lui à 12 h 30. À 15 h 00, il part de sa maison et va à la poste.
A quelle heure arrivera-t-il a la poste ?

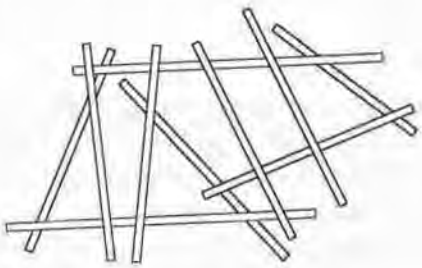
2. Les Dupuis (CM, C1) (coef. 2)
Dans la famille Dupuis, il y a quatre enfants. Il y a une différence de deux ans entre chaque enfant et l'aîné est trois fois plus âgé que le plus jeune.
Quel est l'âge de l'aîné ?

3. La prison (CM, C1) (coef. 3)
Dans cette prison, le gardien habite en A. Il y a un prisonnier par cellule, donc 15 prisonniers. Le gardien veut rendre visite à chaque prisonnier sans passer deux fois dans la cellule d'un même prisonnier (chez lui, il passe autant de fois qu'il veut) et souhaite terminer sa visite en B. Le gardien ne se déplace qu'horizontalement et verticalement.

A			
			B

4. Les grenouilles (CM, C1, C2) (coef. 4)
Thérèse regarde une page de son livre de sciences sur laquelle sont dessinés des têtards et des grenouilles. Tiens, les têtards ont une queue, mais n'ont pas de pattes et les grenouilles (têtards adultes) ont quatre pattes alors que leur queue a disparu. Thérèse compte toutes les pattes et les queues et en dénombre 35.
Sachant qu'il y a le même nombre de têtards que de grenouilles, combien y a-t-il de grenouilles dessinées sur la page ?

5. Les pièces de bois (CM, C1, C2) (coef. 5)
Ces dix pièces de bois, posées sur une table, ont toutes la même épaisseur.
Colorie la ou les pièces qui s'appuient sur trois autres pièces.

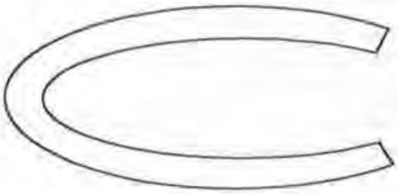


6. Les cousins (CM, C1, C2) (coef. 6)
Grand-père Louis a huit petits-enfants (Fanny, Émile, René, Paul, Tanguy, Luc, Yann et

1 [ndlr.] Nous remercions notre fidèle lecteur et collaborateur Augustin Genoud de nous transmettre, une fois de plus, les problèmes qu'il prépare pour les nombreux concurrents valaisans qui se lancent dans le concours de la FFJM, Ce quart de finale, organisé par le Groupe valaisan des jeux mathématiques (GVJM). (Voir *Math-Ecole* n° 110) a vu le participation de près de 3000 élèves.
On trouvera les solutions et quelques commentaires sur ces problèmes dans un prochain numéro. Autres renseignements sur le site : **http://gvjm.ecolevs.ch**

Jeanne) et ne sait plus lesquels sont frères et sœurs. Peux-tu l'aider sachant que Fanny a un frère et une sœur, que Yann est fils unique, que René n'a pas de sœur, que Paul est le plus jeune de quatre enfants et que Luc a deux sœurs.
Qui sont les frères et sœurs de Jeanne?

7. Le fer à cheval (CM, C1, C2, L1) (coef. 7)
Ce fer à cheval a appartenu à un cheval célèbre. Nombreux sont ceux qui souhaitent en obtenir un morceau. Pour le partager, on utilise une scie ne pouvant faire que des coupes en ligne droite. Les pièces peuvent être empilées mais pas pliées ni tordues. Ainsi, en une coupe, on peut faire 3 morceaux.
En trois coupes, combien de morceaux peut-on obtenir, au maximum?



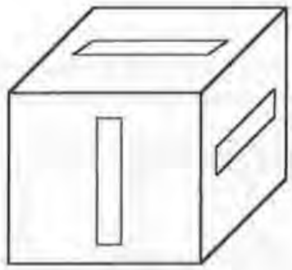
8. Les treize pièces (C1, C2, L1) (coef. 8)
Luc possède 13 vieilles pièces de monnaie. Sa collection est constituée de pièces de 1 centime, 2 centimes, 5 centimes, 20 centimes, 50 centimes, 2 francs et 5 francs, pour un montant de 13 francs.
Combien a-t-il de pièces de chaque sorte?

Note: on donnera la réponse sous forme d'un nombre à 7 chiffres dont le premier indique le nombre de pièces de 1 centime, le deuxième le nombre de pièce de 2 centimes, le troisième le nombre de pièces de 5 centimes, etc.

9. Le télésiège (C2, L1) (coef. 9)
Au moment où Romain qui est assis sur le siège n° 98 croise le siège n° 105, son copain Georges, qui occupe le siège n° 241 croise le siège n° 230. Bien sûr, les sièges, régulièrement espacés sur le câble, sont numérotés à partir du n° 1.
Combien cette remontée compte-t-elle de sièges en tout?

10. L'âge de grand-père (C2, L1) (coef.10)
Mon grand-père a 14 ans de plus que ma grand-mère. Étonnamment, tous les nombres formés de 6 chiffres identiques sont multiples de l'âge de mes grands-parents.
Quel est l'âge de mon grand-père?

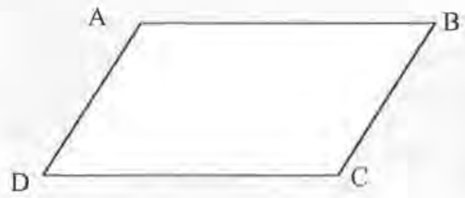
11. Les trous (C2, L1) (coef. 11)
Dans un cube de bois de 10 cm d'arête sont percées de part en part trois fentes rectangulaires parallèlement aux arêtes du cube. Ces fentes mesurent 8 cm par 2 cm et ont le même centre que la face du cube qui le contient.
Quel est le volume, en cm^3, du solide restant?



12. Les poules (L1) (coef. 12)
Tu vois Maria, dit le fermier Henri à sa femme, si nous vendons 100 poules comme je le propose, notre stock de graines durera 20 jours de plus, tandis que si nous achetons 100 poules comme tu le souhaites,

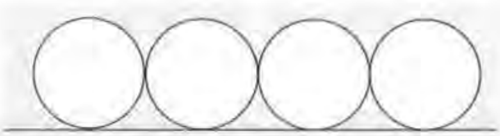
nous serons à court de graines 15 jours plus tôt que prévu.
Combien de poules ont Maria et Henri ?

13. L'héritage (L1) (coef. 13)
Un fermier possède un grand champ en forme de parallélogramme ABCD, à l'intérieur duquel il souhaite mettre une borne en un point O. Il veut ensuite donner à son fils Pierre les 2 champs triangulaires AOB et OCD et tout le reste à son autre fils Jean.
Dessine tous les endroits où il peut mettre sa borne afin que ses deux fils reçoivent un terrain de même aire ?



14. Les euros (L1) (coef. 14)
Quatre euros identiques sont alignés côte à côte sur un support horizontal. La pièce de gauche va rouler par-dessus les autres pour venir se placer sur le support à droite de la dernière pièce.
Combien de tours sur elle-même a-t-elle effectués ?

Note : on donnera la réponse en nombre de tours entiers, plus, éventuellement, une fraction de tours.



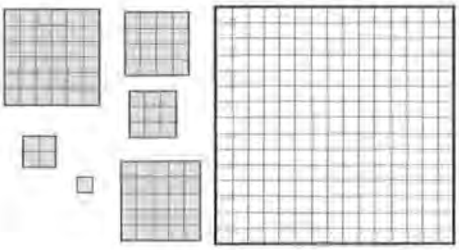
Rappel
Chaque problème vaut 1 point. Le coefficient correspond au numéro du problème.
Les concurrents sont départagés
1. par le nombre de problèmes résolus correctement (1 point par problème)
2. en cas d'égalité, par le total des coefficients donnés aux problèmes résolus correctement
3. en cas de nouvelle égalité, par la durée totale (le plus rapide l'emporte)
4. en cas de nouvelle égalité, c'est le plus jeune qui l'emporte

Origines des problèmes :
1. Panoramath 96, (Kangourou des collèges)
2. A. Genoud
3. A.G., d'après une idée de Science et Vie Juniors, février 2002
4. A. Genoud
5. Jeux et Stratégies
6. Fémina, 11 janvier 2004
7. Adapté de Sam Loyd
8. Origine inconnue
9. Panoramath 96 (Mathématiques sans frontières Aquitaine)
10. A. Genoud
11. Rallye de Bourgogne
12. Sam Loyd
13. Adapté d'un problème du 8e RMT (Epr. I. 2000)
14. Origine inconnue

« COIN MATHS »

François Jaquet

Pavage de carrés



Vous disposez de six sortes de pièces carrées. (Une pièce de chaque sorte est dessinée en gris)
Avec des pièces comme celles-là, vous devez recouvrir entièrement la grille ;
- en utilisant au moins une pièce de chaque sorte,
- sans que les pièces se recouvrent et sans qu'elles dépassent de la grille.

Combien de pièces au minimum faut-il utiliser pour recouvrir exactement la grille ?

Les origines

Ce problème est repris du fichier de l'élève de « Mathématiques 3P », (fiche 30 « Le retour des six carrés »), avec un texte plus complet et un quadrillage des pièces.

Le matériel et la mise en oeuvre

Il y a de nombreuses manières de proposer l'activité en « coin maths ». On peut ne donner que du papier quadrillé et laisser les enfants se débrouiller pour dessiner la grille et les pièces, ou découper les pièces et les coller.
On peut aussi, pour des petits dès la deuxième année, préparer une dizaine de pièces de chaque sorte, en en coloriant éventuellement une de chaque sorte afin de faciliter le contrôle.
L'essentiel est qu'il reste une trace : dessin, coloriage ou collage, pour la validation.
Il est aussi possible d'organiser la recherche simultanément en classe entière ou entre plusieurs élèves, sous forme de concours.

Contenus mathématiques

Plusieurs adultes, membres et amis de la rédaction de *Math-Ecole* se sont penchés récemment sur ce petit problème pour savoir si le minimum de 16 pièces, qu'ils avaient trouvé, était vraiment la solution optimale. Alors que les jeunes élèves vont vraisemblablement faire des essais sans pouvoir expliciter leur démarche, les plus grands, dès la cinquième primaire et jusqu'aux adultes, vont peut-être passer dans le registre numérique et utiliser les mesures d'aires des différentes pièces pour organiser leurs tentatives.

Le défi est lancé. Tous les lecteurs de *Math-Ecole*, et leurs élèves, peuvent se mettre au travail, chercher le minimum de pièces, indiquer lesquelles ils ont utilisées (les différentes configurations de mêmes pièces sont trop nombreuses pour être prises en compte), expliquer comment ils ont procédé et, finalement, dire s'ils sont convaincus d'avoir obtenu le minimum, et pourquoi ? La rédaction attend les comptes rendus et offre un prix aux solutions les plus intéressantes.
Suite au prochain numéro, pour en savoir plus sur les connaissances mathématiques effectivement mobilisées dans cette petite recherche.

SOLUTIONS DES CRYPTA-RITHMES DU NUMÉRO 212

Nous disions, en présentant les cryptarithmes de l'article précédent, que leur intérêt est évident au niveau de la logique, des algorithmes de calcul et de notre système de numérations décimal. Qu'on en juge :

a)[1]

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \\ + & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{G} & \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array}$$

G = 1 Il n'y a qu'une seule possibilité car la somme de deux nombres naturels d'un seul chiffre (M et M) ne peut dépasser 18.

R = 0 Tiré de l'égalité de la colonne des unités : **R** + **R** = **R** (ou en cas de retenue, **R** + **R** = 10 + **R** ou **R** = 10, ce qui n'est pas possible puisque R est un nombre naturel de 0 à 9)

M = 5 Tiré de de **M** + **M** = 10, dans la colonne des centaines de milliers. On en tire qu'il n'y aura pas de retenue issue de la colonne des dizaines de milliers, ce qui signifie que **A** + **A** < 10 ou **A** + **A** + 1 < 10 et donc que **A** < 5.

S = 2 Dans la colonne des centaines, on constate que **S** = 1 + 1 = 2 si **E** + **E** < 10 (sans retenue) ou que **S** = 1 + 1 + 1 = 3 si **E** + **E** ≥ 10 (avec retenue). Mais, dans la colonne des milliers, **S** = 3 est à exclure car il n'y a pas d'apport d'une retenue et que la somme N + N est un nombre pair. On retient en conclusion que **S** = 2 et que **E** < 5.

N = 6 Dans la colonne des milliers, **N** + **N** = 1 + 1 = 2 est à exclure car le « 1 » est déjà pris. Il faut choisir l'autre double qui se termine par 2 : 6 + 6 = 12.

1 tiré du *Kangourou des Mathématiques*

2 création Bernard Lamirel

Comme **A** et **E** sont inférieurs à 5, il n'y a plus que « 3 » et « 4 » de disponibles pour ces deux lettres, ce qui conduit à deux possibilités.

La première convient : **A** = 3 et **E** = 4 => **O** = 7 et **I** = 8.

La seconde : **A** = 4 et **E** = 3 = > **O** = 9 et **I** = 6 est à éliminer en raison du « 6 » déjà affecté à la lettre N.

Il n'y a donc qu'une solution à ce cryptarithme : 536140 + 536140 = 1072280

Le procédure de résolution présentée ici n'est évidemment pas la seule possible. On peut aussi trouver la valeur de certaines lettres sans recherche organisée, où le hasard et le « flair » interviennent de manière prépondérante. Mais, qu'on travaille de manière systématique ou non, les propriétés de l'algorithme d'addition et de notre système de numération émergent clairement, en particulier les retenues lors du passage d'un groupement au suivant.

Pour des élèves, voire des adultes, il y a de fortes chances que toutes ces propriétés n'aient pas été perçues clairement précédemment, enfouies sous les mécanismes de l'algorithme. Il paraît donc intéressant, lorsque des cryptarihmes de ce genre sont proposés en classe, de demander une explication de la méthode adoptée pour les résoudre, même si on ne peut pas s'attendre à des justifications toujours exhaustives.

Math-Ecole propose à ses lecteurs de soumettre ce cryptarithme à leurs élèves, dès la quatrième année ou la cinquième année d'école primaire - en leur demandant d'expliquer comment ils ont procédé - et de lui communiquer ces protocoles de résolution, afin de les publier b)[2]

	R	E	P	A	S
+	R	E	P	O	S
	S	A	N	T	E

Dans ce cryptarithme, il n'y a pas de valeurs obligées de l'une ou l'autre des lettres, comme dans l'exemple précédent. Une première analyse permet toutefois d'affirmer que **R** < 5 et que **E** est un nombre impair. La triple présence du **S** et du **E**, incite aussi à commencer la recherche en émettant des hypothèses sur la valeur de ces lettres, qui, on le découvre rapidement, vont déboucher sur une chaîne d'implications : pour chaque valeur de **E**, il n'y a que deux possibilités au maximum pour **S**, ce qui entraîne un nombre restreint de valeurs de **R** et de **A**, puis de **O** et **T** et enfin de **P** et **N**. On peut ainsi organiser la recherche systématiquement en sachant qu'il y a 5 nombres pairs pour **E** :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**
0	0	imp.					
	5						
2	1						
	6						
4	2						
	7						
6	3						
	8						
8	4						
	9						

Il reste 9 couples possibles (**E** ; **S**) pour la suite de la recherche. Lorsqu'on examine les solutions correspondantes pour les deux lettres suivantes, de nombreuses combinaisons s'éliminent :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**
0	5	imp.					
2	1	imp.					
	6	3	4				
			5				
4	2	1	8				
			9				
	7	imp.					
6	3	1	2				
			3 imp.				
	8	imp.					
8	4	imp.					
	9	4	6				
			7				

On arrive ainsi à ne retenir que 7 combinaisons des quatre lettres **E, S, R, A.**

L'examen des couples (**O** ;**T**) de la colonne des dizaines va tenir compte de l'existence ou de la non-existence d'une retenue issue de la colonne des unités et des possibilités restantes pour **P** et **N**, compte tenu des valeurs déjà attribuées. Par exemple, pour la première des 7 combinaisons envisageables, il s'agit de compléter l'addition lacunaire

	3	2	**P**	4	6
+	3	2	**P**	0	6
	6	4	N	T	2

en attribuant au couple (O ;T) toutes les valeurs, de (0 ; 5) à (9 ; 4), dont les deux termes sont différents de 2, 3, 4 et 6 (déjà utilisés), puis de voir, pour chaque cas retenu, s'il existe une possibilité pour le couple (P ;N). On obtient alors le tableau complet :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**	
E	S	R	A	O	T	N	P	
2	6	3	4	0	5	imp.		
				5	0	imp.		
			5	1	7	9	8	(1)
				4	0	8	7	(2)
4	2	1	8	5	3	imp.		
			9	8	7	6	3	(3)
				6	5	8	7	(4)
				7	6	imp.		
				8	7	6	3	(5)
6	3	1	2	5	7	4	8	(6)
				7	9	4	8	(7)
				8	0	4	9	(8)
8	9	4	6	0	7	1	2	(9)
				3	0	2	5	(10)
				5	2	0	1	(11)
						1	3	(12)
						3	7	(13)
			7	2	0	5	1	(14)
						6	3	(15)
				3	1	imp.		
				5	3	imp.		

Pour établir ce dernier inventaire, il n'y a pas de miracle ! Il faut une feuille de papier, un crayon et une gomme pour écrire les essais

successifs des couples (**O** ; **T**) puis (**P** ; **N**), et il y a malgré tout de nombreuses possibilités d'oublis ou de chiffres pris deux fois.
Les 15 solutions trouvées ici (le lecteur vérifiera) sont :

(1)	32956 + 32916 = 65872
(2)	32856 + 32846 = 65702
(3)	14692 + 14682 = 29374
(4)	14892 + 14862 = 29754
(5)	14692 + 14682 = 29374
(6)	16423 + 16453 = 32876
(7)	16423 + 16473 = 32896
(8)	16423 + 16483 = 32906
(9)	48169 + 48109 = 96278
(10)	48269 + 48239 = 96508
(11)	48069 + 48059 = 96128
(12)	48169 + 42159 = 96328
(13)	48369 + 42359 = 96728
(14)	48579 + 48529 = 97108
(15)	48679 + 48629 = 97308

Ce cryptarithme paraît adapté à des élèves de l'école secondaire, en recherche collective dès qu'une méthode systématique a été établie et que le travail peut donc se répartir efficacement.

c)[3]

$$\begin{array}{rcccccc} & & T & A & B & A & C \\ + & A & L & C & O & O & L \\ \hline & C & A & N & C & E & R \end{array}$$

Voici un plat de résistance. Comme les lettres **A** et **C** apparaissent chacune quatre fois, il semble naturel de commencer par elles, d'autant plus que **C** = **A** + 1, selon la colonne de gauche.

Il y a neuf couples (**A**;**C**) possibles, de (1 ;2) à (8 ;9) . Pour chacun d'eux, il n'y a qu'une ou deux valeurs de N (colonne des milliers). Les couples (**L**;**T**) sont rares aussi et la valeur de R est alors entièrement déterminée.

Par exemple, en choisissant (1 ;2) pour le couple (**A**;**C**), on n'obtient que les quatre combinaisons suivantes des valeurs des six premières lettres, dont une seule aboutit à une solution :

A	**C**	**N**	**L**	**T**	**R**	**O**	**B**	**E**
1	2	3	-	-	-	imp.		
		4	5	6	7	imp.		
		4	6	5	8	imp.		
		4	8	3	0	7	5	9
		4	3	8	5	imp.		

solution : 31512 + 182778 = 214290.

Nous laissons le lecteur chercher les autres solutions, avec les 7 autres couples (**A**;**C**).

Là aussi, la résolution de ce cryptarithme fait appel aux propriétés de l'algorithme d'addition et de notre système de position décimal. Elle demande en outre une grande rigueur dans l'organisation des essais, de la patience et de nombreux contrôles, propres d'une démarche scientifique complète.

3 création Bernard Lamirel

NOTES DE LECTURE

POUR UNE CULTURE ACCESSIBLE À TOUS

Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes

CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)
B-1400 Nivelles, 2002
Michel Bailleu et Marie-France Guissard, coordinateurs (format A4, 576 pages)

Un cinquième ouvrage de la collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, de nos collègues du CREM, vient de paraître, dans l'esprit et l'ouverture des précédents[1], comme le signale toujours la remarque en page de titre: «Cet ouvrage a été conçu comme source d'idées et base de discussion. Souhaitons que personne n'en fasse un dogme».
Les auteurs, une douzaine d'enseignants de tous les degrés, ont réfléchi longuement à ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base; ils cherchent à promouvoir des pratiques pédagogiques s'appuyant sur la vie quotidienne, l'histoire, l'art et le jeu, au travers d'une grande variété de thèmes.

La table des matières en donne un avant-goût:

I. Culture mathématique à partir de 5 ans
- La construction des nombres: dénombrer, compter, comparer, ordonner...
- Le passage de rang: les machines à compter, les bouliers
- À la découverte de notre numération: comparaison de systèmes de numération...

1 Les ouvrages précédents ont été présentés dans les pages de Math-Ecole et sont disponibles auprès de sa boutique (Voir p. 3 de couverture): *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* [1995], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie* [2001], *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001], *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* [2002].

- Rencontre avec les symétries dans l'art africain: les enfants face à la symétrie, chercher des symétries, réalisation de *litema* (décorations murales qui s'inspirent de modèles géométriques traditionnels, dans l'Afrique de langue bantoue)

II. Culture mathématique à partir de 12 ans
- Mathémagiques (multiples et diviseurs composés de 0 et de 1, des problèmes magiques expliqués par l'algèbre ou par la numération de position)
- Produits remarquables (carré d'une somme, binômes conjugés)
- Découpages géométriques (Pythagore, la différence de deux carrés)
- À la découverte des pourcentages (si l'on apprenait à comparer, peut-on additionner des pourcentages? si l'on utilisait la touche % d'une calculatrice! des tableaux de proportionnalité aux calculs de pourcentages, des graphes fléchés pour résoudre des problèmes...)
- Pourcentages et traitement de données
- Des pavages aux polyèdres
- Frises ornementales et groupes

III. Culture mathématique à partir de 15 ans
- Construire une table à la manière de Ptolémée
- Les équations du deuxième degré
- La diagonale du carré (la racine de deux est-elle une fraction? valeurs approchées de $\sqrt{2}$, racine approchée d'un nombre positif quelconque)

Ces trois premiers chapitres occupent les 500 premières pages de l'ouvrage. Ils proposent de multiples activités et de nombreuses fiches à photocopier pour faciliter le travail de l'enseignant qui aurait envie de s'y lancer. Chaque activité est présentée en quelques lignes aboutissant à une première rubrique: *De quoi s'agit-il?* Puis viennent les *Enjeux* qui décrivent les savoirs mathématiques et les compétences visées. Une troisième rubrique, *De quoi a-t-on besoin*, fournit la liste du matériel nécessaire. Vient ensuite la description

détaillée de l'activité, ponctuée d'indications pour la gestion – *Comment s'y prendre* – d'énoncés des questions à poser aux élèves, de descriptions des procédures d'élèves, d'observations à posteriori. Une rubrique, *Échos des classes*, donne des indications sur le déroulement de certaines activités d'une ou plusieurs classes qui les ont expérimentées : les réactions les plus communes mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées. Parfois, des *Prolongements possibles* proposent de nouvelles situations-problèmes comme variantes ou pour des élèves mordus. L'ouvrage se termine par un quatrième chapitre, *Aspects historiques et épistémologiques*, destiné aux enseignants qui veulent en savoir encore plus sur les origines et l'histoire des notions traitées précédemment. On y trouve en particulier des développements sur la science dans le monde arabe, des compléments sur l'évolution de la pensée algébrique, une réflexion sur la nature de l'art de l'algèbre de l'Égypte à l'Occident, l'évolution de la géométrie, de ses débuts, au monde grec, puis aux géométries non euclidiennes et au programme d'Erlangen. Enfin, une vingtaine de pages sont consacrées au « défi de l'irrationalité » des Babyloniens à Newton.
En conclusion, un nouveau « pavé » pour promouvoir des pratiques pédagogiques s'appuyant sur la vie quotidienne, l'histoire, l'art et le jeu et pour alimenter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique au sens le plus large du terme.

Destinataires : les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens, personnes intéressées à une vision verticale de l'enseignement des mathématiques
Mots-clés : culture mathématique, mathématiques

F.J.

RMT ET ÉVALUATION

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin de Mondorf-les-Bains (Luxembourg)

L. Grugnetti, F. Jaquet, J-P. Schmit (Eds). 2004. Éducation nationale Luxembourg, ARMT. Édition bilingue : français - italien, (200 p)

Après les *Profits pour la didactique*[2], *Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*[3] et *Potentialités pour la classe et la formation*[4], le quatrième volume des actes des rencontres internationales traite de l'*évaluation*, thème de la septième rencontre internationale sur le Rallye mathématique transalpin[5],

Il est bien connu que, lorsqu'on parle d'évaluation, on pense en priorité à l'évaluation des élèves, qu'elle soit sommative, formative ou prédictive. Mais chacun sait que les épreuves du RMT s'adressent à des classes entières, que celles-ci s'organisent le plus souvent par groupes et que leurs résultats ne sont analysés que sur une seule feuille-réponse par problème. On ne peut donc imaginer évaluer à travers les protocoles reçus des compétences ou connaissances individuelles. Mais, en revanche, les protocoles donnent des informations très riches sur les problèmes proposés, les obstacles, la manière dont ils sont résolus, selon l'âge des élèves, selon leur contexte régional

2 Rencontres de Brigue, 1997 et 1999 (Voir p. 3 de couverture)
3 Rencontres de Siena, 1999, et Neuchâtel, 2000. (Voir p. 3 de couverture)
4 Rencontres de Parma, 2001, et Torre delle Stelle, 2002. (Voir p. 3 de couverture)
5 Mondorf-les-Bains, Luxembourg, 2004

ou national, ... En plus, les observateurs qui contrôlent la passation de l'épreuve, puis les maîtres, lors des exploitations en classe des problèmes après l'épreuve recueillent d'importantes informations complémentaires sur la manière dont les élèves s'organisent, sur les interactions au sein de la classe, ...

Les organisateurs de la rencontre avaient donc tenté un élargissement des domaines traditionnels du thème pour s'intéresser plus précisément à des évaluations plus spécifiques :

- celle des problèmes : savoirs mathématiques requis pour leur solution, caractéristiques de leurs énoncés, potentialités de discrimination des procédures de résolution, obstacles, variables didactiques...
- celle des stratégies ou procédures de résolution : efficacité, registre des représentations, analyse des erreurs, ... essentielle pour « l'évaluation formative »
- celle des justifications ou des validations, sur le plan du développement du groupe et sur le plan de l'attribution des points.
- celle des capacités de débat scientifique au sein des groupes ou entre groupes, ainsi que des capacités d'organisation de la classe.
- celle des épreuves du RMT en comparaison avec les enquêtes nationales et internationales actuelles et de leurs « retombées » sur les classes : élèves et enseignants.

Les sept communications publiées dans ces actes proposent des réflexions en relation avec les sous-thèmes proposés.
Roland Charnay, parle de *l'évaluation et ses pièges*. S'il reconnaît qu'il y a bien évaluation à travers l'attribution de points et le classement final ou, dans une autre direction à travers les observations qui peuvent être faites pendant le déroulement des épreuves ou au travers de l'analyse des productions des classes participantes, il se concentre plutôt sur l'importance de la signification (ou des significations) à donner au terme « compétence », avant de se demander si une compétence est évaluable et, dans l'affirmative, quelles compétences peuvent être évaluées par l'intermédiaire des problèmes du RMT.
Deux présentations étroitement liées, de Carlo Marchini, Angela Rizza, Vincenza Vannucci, Claudia Mazzoni, Daniela Medici et Maria Gabriella Rinaldi des sections de Lodi et de Parma, sont consacrées aux difficultés de l'attribution des points. L'une et l'autre rapportent les résultats d'une recherche (subdivisée selon les deux ordres scolaires : primaire et secondaire inférieur) développée à partir d'interrogations sur l'influence des pratiques issues du Rallye mathématique transalpin sur l'évaluation. Leur but étant de clarifier le rapport entre évaluation et attribution de points, résumant quelques aspects fondamentaux de la première et en la comparant avec la deuxième, spécifique du RMT.
La section de Siena, par la présentation de Carla Crociani, Lucia Doretti et Lucia Salomone met l'accent sur une évaluation des problèmes du Rallye du point de vue des registres de représentation utilisables et du passage de l'une à l'autre des différentes phases de l'activité de résolution : compréhension de l'énoncé, construction d'une représentation du problème, caractérisation, mise en acte et contrôle d'une stratégie déterminée. En particulier, l'intérêt est de considérer le rôle réservé aux capacités de lecture et aux représentations graphiques, de les interpréter et de représenter visuellement des concepts et des faits mathématiques (*perception et visualisation*).
Jean-Pierre Schmit, de la section du Luxembourg, pour aborder la problématique de l'auto-évaluation par des problèmes ouverts, analyse un exemple spécifique tiré d'un manuel de 6^{e} année d'école primaire.
Trois enseignantes d'école primaire, Clara Bisso et Marta Pretto, de la section de Gênes, et Catherine Dupuis de la section de Suisse romande, traitent, de manières diverses, le dernier des sous-thèmes décrits ci-dessus : évaluation des « retombées » du RMT sur les classes : élèves et enseignants.
En particulier, Clara Bisso et Marta Pretto ont recueilli les opinions des enseignants et élèves, selon quelques paramètres comme : la

retombée sur les maîtres et sur les élèves du point de vue des uns et des autres, exemplifiée par des citations extraites de textes en leurs possession.
Le matériel dont sont tirées les réflexions est constitué de considérations des enseignants qui ont participé avec leurs classes à une ou plusieurs éditions du rallye et de celles des élèves d'une classe de cinquième, au terme de leur participation durant trois ans d'école primaire.
Catherine Dupuis présente un exemple d'évaluation formative dans une classe de troisième année d'école primaire et montre comment elle peut insérer des problèmes du RMT dans une séquence pédagogique. Elle compare en particulier l'un de ces derniers à sa version remaniée proposée dans les moyens d'enseignement de Suisse romande, du point de vue de l'autonomie qu'offrent chacune des versions de ce problème.

Une rencontre du RMT n'est pas faite seulement de présentations, mais aussi de travaux de groupes.
Le premier thème était consacré à l'évaluation de la dynamique de la classe durant une épreuve du RMT. Lucia Grugnetti et François Jaquet présentent les résultats d'une observation de groupes d'élèves en résolution de problèmes lors des finales régionales du 11e RMT, selon une grille préparée à cet effet et remplie par toutes les sections. L'analyse de ces résultats suscite de nombreuses réflexions sur la thématique complexe de la dynamique des groupes au sein de la classe. Les discussions par groupe qui ont suivi cette présentation ont permis de développer ces réflexions ont conduit à des propositions d'amélioration de la grille d'observation.
(L'ancienne et la nouvelle grille figurent en annexe, ainsi que le rapport d'un des groupes de travail, à titre d'exemple, pour montrer l'intérêt de l'observation du fonctionnement des groupes et l'ampleur des recherches à développer dans ce sens.)
Le second thème des travaux de groupes concernait le contrôle de la validité des barèmes d'attribution des points, au travers de la « finale des finales » du 11e RMT. Une fois de plus, les comparaisons des jugements des jurys internationaux avec ceux des correcteurs locaux de chaque section ont montré que la facette « attribution des points » de l'évaluation des copies produites par les élèves lors des épreuves du RMT est riche à plus d'un titre et que les critères élaborés dans les analyses a priori « tiennent le route ». Les résultats de cette « finale des finales », ainsi que les problèmes correspondants figurent dans cette dernière partie des actes.

La lecture de ces actes peut se faire, article par article, sans ordre imposé. Au travers de chacun d'eux, on glane quelques informations, quelques idées pour soutenir sa réflexion sur des aspects novateurs de l'évaluation, sans évidemment faire le tour de ce domaine d'une grande complexité. On constate aussi et surtout, une fois de plus, que le RMT fait office « d'interface » entre recherche en didactique et pratique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Dans ce cadre, il n'y a pas de hiérarchie, chacun s'y exprime et contribue à l'entreprise, selon ses intérêts et ses fonctions .

Destinataires : tous les maîtres, en particulier ceux des classes participant au RMT, formateurs et étudiants en didactique des mathématiques
Mots-clés : mathématiques, résolution de problèmes, évaluation, formation

F.J.

Cycle 1 à la maternelle

DÉCOUVRIR LE MONDE AVEC LES MATHÉMATIQUES

Situations pour la petite et la moyenne section

Dominique Valentin
Hatier, 2004 (152 pages + matériel reproductible)

Qu'est-ce que « faire des mathématiques » quand on a 3 ou 4 ans ? Est-il réellement possible d'en faire ? Comment les mathématiques peuvent-elles aider l'enfant à découvrir le monde, à grandir à s'interroger, à anticiper ? Cet ouvrage propose quelques réponses à ces questions en offrant un ensemble cohérent de situations qui amènent chaque enfant à chercher, à se poser des questions et à construire des connaissances nouvelles.

Le ton est donné et les conceptions de l'auteure sont donc très clairement annoncées. Voici encore quelques extraits de l'introduction :

Apprendre par la résolution de problèmes
Mon travail a donc consisté principalement à essayer de construire des situations qui doivent permettre à chaque enfant de construire des connaissances[6] *nouvelles comme solutions à des problèmes*[7].
C'est le cas, par exemple, de la situation « Des boîtes bien rangées » du chapitre 5 dans laquelle l'enfant est invité à ranger des boîtes gigognes dans une valise un peu plus grande que la plus grande des boîtes. Les boîtes sont présentées en vrac et aucune indication n'est donnée sur le fait qu'elles sont « gigognes », c'est-à-dire fabriquées pour « s'emboîter » très précisément les unes dans les autres, à condition de les organiser, de les ranger de la plus grande à la plus petite ou l'inverse... Parce que l'enfant se trouve devant un but à atteindre – mettre toutes les boîtes dans la valise – il va devoir prendre conscience de l'importance des tailles relatives des boîtes. Ici, on n'a pas d'abord « enseigné » à l'élève la sériation ; de façon qui peut sembler paradoxale, on lui donne l'occasion de la faire fonctionner alors qu'il ne la « connaît » pas encore, de la découvrir et de l'utiliser comme le bon outil pour résoudre le problème. Plus tard, la sériation pourra devenir un objet d'étude, mais ce n'est pas le moment.

Pour d'autres problèmes, l'objectif de la situation n'est pas la construction de connaissances nouvelles mais l'élaboration de méthodes de recherche[8], comme, par exemple, dans la situation « Les embouteillages » du premier chapitre.

Apprendre par imitation
Pourtant les enfants ne peuvent tout construire par eux-mêmes : ils peuvent et doivent profiter de l'expérience acquise par leurs aînés. Par exemple, ils n'inventeront pas le nom des nombres ! Ils les apprendront par la répétition, en entendant un camarade ou un adulte réciter la suite numérique. (...)
De même, lorsqu'un enfant a des difficultés à dénombrer[9]*, il est important de bien repérer la nature de ses difficultés et de l'aider à les dépasser sans avoir toujours besoin de construire des situations spécifiques à cet effet. Par exemple, de nombreux enfants ont du mal à pointer efficacement les objets déjà dénombrés et les recomptent sans beaucoup de méthode. Nous avons choisi de leur montrer à séparer nettement les éléments déjà dénombrés de ceux qui ne le sont pas et*

6 Les connaissances sont ainsi d'abord des « outils », souvent implicites, sans statut explicite de connaissance, avant de devenir de réels « objets » d'étude, désignés par un nom précis qui permet de communiquer à leur sujet et utilisables dans de nouveaux contextes.

7 « Un problème est une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions et d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation où la solution n'est pas disponible d'emblée mais est possible à construire.

8 Plus tard dans la scolarité, on parlera de « problème ouvert ».

9 *cf. les Points clés p. 142 op. cit.*

avons, évidemment, constaté que leurs progrès étaient alors très rapides.
Il n'est pas simple de distinguer ce qui nécessite une réelle problématisation pour prendre sens de ce qui peut simplement s'acquérir par imitation; et je peux m'être trompée parfois malgré toutes les précautions prises. D'autre part, même quand on est convaincu qu'il faut une « bonne » situation-problème pour construire telle ou telle connaissance, il n'est pas toujours facile de la trouver!

Toutes ces citations montrent que cet ouvrage ne va pas être une simple énumération d'activités qu'on pourrait faire pour occuper de jeunes enfants, mais qu'on est en présence d'un projet équilibré et réfléchi dans ses conceptions de l'apprentissage. Et la suite ne le dément pas: l'ouvrage est bien structuré, d'une grande lisibilité, les propos sont clairs et riches, exprimés dans un langage accessible à tout un chacun.
Les situations d'apprentissage proposées se regroupent en 5 chapitres: apprendre à chercher, des quantités aux nombres (2 chapitres), observer pour comprendre, les grandeurs et leurs mesures.
Chaque chapitre est constitué de 5 à 8 situations subdivisées en plusieurs activités. En tête de chaque situation, les objectifs et le matériel nécessaire sont mis en évidence dans un encadré de couleur. Des conseils didactiques et des compte-rendus d'observations réalisées par l'auteure dans des classes de maternelle enrichissent les descriptifs de la mise en oeuvre conseillée pour les activités. Du matériel reproductible complète le tout.
En fin d'ouvrage, toujours rédigés dans un langage clair et proche de l'enseignant, les « points-clés » éclairent quelques sujets qui n'ont pas été explicités au cours des chapitres pour ne pas alourdir la lecture. Il ne s'agit pas de donner des définitions rigoureuses qui d'ailleurs n'existent pas toujours, mais d'indiquer le point de vue retenu dans cet ouvrage sur chaque rubrique.
Aide, essais-erreurs, évaluation, différenciation, jeu et apprentissage, situation, validation sont quelques exemples des « points-clés » que vous trouverez dans cette partie.

Avec une mise en page aérée, des photos noir-blanc et juste ce qu'il faut de couleur dans le texte, « Découvrir le monde avec les mathématiques » est un livre qui invite à la lecture. Parmi les nombreuses qualités de cet ouvrage, on citera encore l'originalité et la richesse des situations proposées, la simplicité du matériel utilisé et le fait qu'un même matériel serve à plusieurs activités.

Pour se faire une idée plus précise, nous reproduisons, dans les deux pages qui suivent, l'activité « Des boîtes bien rangées »

Destinataires: enseignants d'école maternelle et primaire, formateurs
Mots-clés: mathématiques, découverte du monde, situation, maternelle, évaluation, différenciation

M.S.

Situation 4

PETITE SECTION

Des boîtes bien rangées

MATÉRIEL

- **les 12 boîtes dorées ou argentées**
- **une valise[7] (30 cm sur 21 cm, h = 12 cm), pour l'activité 1**
- **une boîte en carton (23 cm sur 18 cm, h = 4 cm), pour l'activité 2**

BUT À ATTEINDRE : *Mettre toutes les boîtes dans la valise (ou tous les couvercles dans le carton) et pouvoir la (le) fermer.*

Les dimensions de la valise et de la boîte en carton ont été choisies de manière à permettre un rangement approximatif mais tout de même assez contraignant : il n'est certes pas nécessaire de ranger les boîtes de la plus grande à la plus petite, mais il faut cependant qu'un grand nombre d'entre elles le soient. Plusieurs solutions sont ainsi possibles.

Atelier dirigé de 3 ou 4 élèves

ACTIVITÉ 1 Ranger les boîtes sans les couvercles dans la valise

L'enseignant présente aux 4 enfants toutes les boîtes en vrac. Les enfants observent ces boîtes, les touchent, les mélangent librement. L'enseignant va alors chercher la valise et demande de ranger toutes les boîtes dans la valise qui doit pouvoir fermer. Chaque enfant, à son tour, essaie de tout ranger dans la valise.

La situation est reprise quelques jours plus tard, avec les enfants qui n'ont pas réussi à fermer la valise...

Pour éviter la simple imitation, il est possible de proposer successivement des contenants de tailles différentes aux enfants d'un même groupe, les dimensions de ces contenants étant de plus en plus contraignantes.

7. On peut obtenir une « valise » aux bonnes dimensions en découpant un carton de ramettes de papier (format A4). La hauteur est ramenée à 12 cm.

En atelier dirigé quelques jours plus tard

Activité 2 Ranger les couvercles dans la boîte en carton

Cette situation est proposée aux 3 ou 4 élèves qui sont parvenus à trouver une solution au premier problème.

On passe de la valise à la boîte en carton et on remplace les boîtes par les couvercles. Ici tous les couvercles, sauf un ou deux, doivent être ordonnés et rangés les uns dans les autres pour que la boîte puisse fermer.

Travail individuel échelonné dans le temps

Activité 3 Problèmes de rangement individuels

La situation est reprise **individuellement** pour permettre à chaque enfant de résoudre seul le problème de rangement. Il est demandé à certains enfants de ranger les boîtes dans la valise, à d'autres de ranger les couvercles dans la boîte en carton, ce qui permet de tenir compte des difficultés rencontrées par les enfants dans la recherche en groupe.

De nouveaux contenants autres que la valise ou la boîte en carton peuvent être proposés de manière à éviter les imitations. Il faut alors en choisir les dimensions avec soin.

L'enseignant n'est pas nécessairement présent pendant la recherche de chaque enfant (il l'est toutefois avec ceux qui peuvent avoir besoin de lui, ne serait-ce que pour aller au bout de la tâche), mais il vérifie avec chaque enfant, à la fin de la recherche ou avec à un autre moment si nécessaire, le rangement effectué.

Travail individuel

Activité 4 Ranger toutes les boîtes dans la plus grande

Après quelques semaines, l'enseignant dispose toutes les boîtes sans les couvercles sur la table, tailles mélangées. Chaque élève doit ranger seul toutes les boîtes dans la plus grande.

Nous n'avons pas proposé ce rangement en situation d'apprentissage car elle nous semble très inductrice de la sériation. Elle permet un réinvestissement individuel.

Les enquêtes ou évaluations à grande échelle quels profits pour les enseignants?

C'était le thème de la *« table ronde »* organisée à Neuchâtel, le 1 décembre 2004, en collaboration entre la HEP Bejune et l'Association *Math-Ecole* (A.M.E.), repris de l'éditorial de notre numéro 212.

La place nous manque ici pour rendre compte de cette manifestation intéressante. Nous y reviendrons amplement dans le prochain numéro, en publiant les textes des interventions de N. Guignard et C. Tièche Christinat sur une comparaison entre *Mathéval* et *PISA*, de F.Jaquet sur une comparaison entre *RMT* et *PISA* ainsi que les propos d'introduction de M. Brêchet.

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s):

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des contes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Pythagore et Thalès,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini,ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
L'Almanach du petit matheux en herbe, Edition Archimède G. Sarcone	...	(ex à Fr. 18.-)**
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	...	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	...	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial Grand N)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	...	(ex à Fr. 55.-)

Problèmes de rallyes et concours:

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 28.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Luxembourg, 03)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	...	*(ex à Fr. 16.-)***
Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans (POLE Editions)	...	*(ex à Fr. 16.-)***

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro): ....

Code postal et localité: .... Tél.: ....

Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à photocopier et à retourner à:
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à:
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel