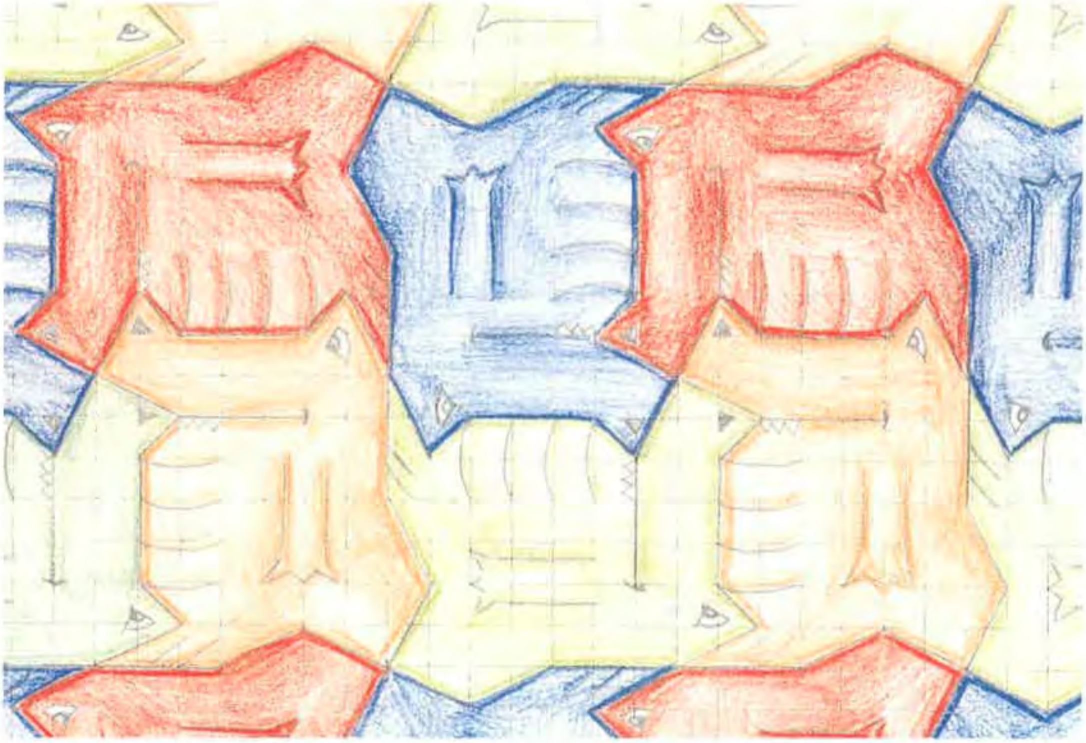
MATH-ÉCOLE 214

Mars 2005

Évaluation : pavages

La mesure du temps

Deux enquêtes sous la loupe



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 35.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 45.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 9.–
Anciens numéros : CHF 7.– /pièce de 190 à 205,
CHF 5.– de 150 à 189 (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 2 à 4 ex. CHF 33.– par abonnement
de 5 à 14 ex. CHF 28.– par abonnement
de 15 à 50 ex. CHF 24.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Stéphane Clivaz
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex
Laura Weiss

Maquette
Raphaël Cuomo
Stéphanie Fiorina Jordan

Imprimerie
Fiorina, rue du Scex 34
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Marie-Aude, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

214

Mars 2005

ÉDITORIAL

UNE ŒUVRE HUMAINE

Michel Brêchet

Les mathématiques sont une des plus belles créations de l'esprit humain. Pourquoi ne pas le souligner à maintes reprises lors de notre enseignement, afin d'éviter que les élèves pensent qu'elles constituent une collection de formules et de règles préexistantes à l'apparition de l'homme ? La référence aux mathématiciens qui ont conçu ce que les livres exposent et ce que les enseignants ou les parents transmettent donne une coloration culturelle et historique aux leçons, dont les contenus paraissent parfois intemporels et coupés de leurs racines. Déambulant ici dans une forêt inextricable de signes ou de figures, soumis à une syntaxe stricte, confrontés constamment à un monument de rigueur, certains élèves ont tôt fait de considérer les mathématiques comme froides, austères, venues de nulle part et à jamais figées. De l'exposé de la vie des inventeurs, des cheminements qu'ils ont suivis et des obstacles qu'ils ont dû surmonter se dégage souvent un peu de chaleur humaine, somme toute bienvenue. Intégrer à petites doses des éléments d'histoire des sciences durant les cours contribue en outre à valoriser l'importance du développement de la démarche critique (par la mobilisation de méthodes et de connaissances adéquates ou la vérification d'hypothèses), de la communication (par la pratique du débat scientifique, la formulation de questions, le travail de groupe), des types de raisonnement (inductif, heuristique, déductif, analogique...), de la pensée créatrice (en imaginant des explications et des expérimentations), de la modélisation enfin (en reformulant des questions dans un environnement épuré et mathématisé). Le passé des sciences recèle en effet de multiples exemples montrant l'importance de ces compétences pour progresser dans les apprentissages.

Tous les thèmes d'étude abordés durant la formation se prêtent bien à la mise en exergue de la lente édification des mathématiques. En voici quelques-uns – en lien avec le programme des dernières années de la scolarité obligatoire –, accompagnés de deux ou trois moments clés de leur évolution.

L'algèbre tout d'abord. Les expressions algébriques telles que nous les écrivons aujourd'hui sont l'aboutissement d'un très long processus d'abstraction, qui trouve ses origines en Mésopotamie et en Egypte. Elles constituent une brillante manifestation de la pensée rationnelle. Pour énoncer et résoudre des problèmes du premier et du deuxième degré à une ou deux inconnues, les Babyloniens (dès 1800 avant J.-C.) s'appuyaient sur un langage géométrique, exempt de symboles mathématiques : l'inconnue était appelée *le côté* et sa puissance deux était *le carré*. Ainsi l'équation $x^2 + x = 3/4$ se traduisaient à cette époque par *La surface du carré ajoutée au côté égale 45'* (en base soixante, 45' = 45/60 = 3/4). Environ trois millénaires plus tard, le mathématicien arabe Mohammed Al-Khwarizmi (788-850) énonce les règles d'équivalence conduisant à la solution des équations. Dans un livre consacré à des problèmes pratiques, il décrit, toujours avec des mots, les deux opérations fondamentales *al-jabr*, qui consiste à éliminer le(s) terme(s) à soustraire dans un membre par addition de termes égaux dans chaque membre, et *al-mukabala*, qui revient à regrouper les termes semblables dans les deux membres. Quant à l'utilisation des lettres et des signes opératoires, elle est relativement récente. Diophante (IIIe siècle après J.-C.) fit les premiers pas avec l'arithme. Ils furent suivis par de nombreux autres pour aboutir à la notation actuelle, mise en place par Descartes au XVIIe siècle. La Coss des écoles allemandes et italiennes et les notations comme *4A cubus in 6A quadratus*

$(4x^3 \cdot 6x^2)$ de François Viète (1540-1603) en sont les témoins. Voilà de beaux exemples pour montrer les détours sinueux et tortueux suivis par la pensée pour arriver au formalisme que l'on connaît et aux méthodes que l'on utilise, comme si elles avaient toujours existé. Brièvement développés et enrichis, ils illustreront aussi l'efficacité du langage algébrique – en comparaison aux anciens procédés rhétoriques – pour traduire et résoudre des problèmes, de par la liberté de manœuvre mentale qu'il offre.

Autre sujet de prédilection pour réaffirmer que les mathématiques sont une construction de l'esprit humain : la perspective. Son élaboration est due notamment aux artistes du début du XVe siècle (Brunelleschi, Alberti). Il s'agit d'une des étapes importantes de l'histoire de la pensée scientifique. L'enjeu de la perspective est de construire sur une surface plane l'image d'un objet tridimensionnel. Nous sommes capables d'apprécier le relief, mais comment s'y prendre pour projeter sur un tableau l'image perçue, pour donner l'illusion de la profondeur ? Avant que n'apparaisse cette géométrisation, les dessinateurs et les artistes ne tenaient pas compte des relations spatiales. Les peintures reflétaient davantage la hiérarchie que les proportions et valorisaient fréquemment le sujet principal, quitte à déformer les autres éléments représentés. De la perspective centrale, qui trouve sa source dans l'expérience visuelle, sont issues les perspectives cavalière et isométrique, enseignées à l'école, qui reposent sur des conventions. De nombreux tableaux illustrent les progrès réalisés dans ce domaine.
Les analyser avec les élèves, c'est mettre en exergue le cheminement de leurs auteurs, les impasses qu'ils ont rencontrées, les techniques qu'ils ont développées pour mettre au point un système de représentation spatiale fiable, un outil au service de l'humanité. C'est aussi relever la complémentarité des travaux accomplis par les artistes et les géomètres, et donc faire un pas dans la direction de l'interdisciplinarité.

Dernier thème abordé ici, les nombres, dont le bestiaire s'est enrichi au fil des siècles. Dans la Grèce antique, les seuls nombres identifiés comme tels étaient les entiers positifs. C'est aux Pythagoriciens (Ve siècle avant J.-C.) que l'on doit la découverte des rapports irrationnels. Auparavant, on pensait que, deux segments m et p étant donnés, il en existait toujours un troisième – si petit soit-il – qui aille un certain nombre de fois dans le premier et un certain nombre de fois dans le deuxième, et donc que le rapport m/p était toujours rationnel, c'est-à-dire quotient de deux nombres entiers. Or, surprise, tel n'est pas le cas. Par exemple, le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté (écrit aujourd'hui $\sqrt{2}$) est irrationnel. π, symbole adopté par Euler en 1737 et dont Archimède avait calculé une approximation, était de son côté considéré par les mathématiciens grecs comme le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, et non comme un nombre. Son caractère irrationnel a été démontré en 1767 seulement. Un nombre irrationnel est une espèce bizarre, car la suite de ses décimales est infinie et ne montre aucune répétition. Il n'est pas étonnant qu'il soit difficilement saisissable par la pensée, pour les élèves comme pour les adultes. La porte du royaume des nombres est également restée fermée aux quantités négatives durant très longtemps. Carnot (1753-1823) écrivait : «Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible.» Il a fallu attendre la deuxième moitié du XIXe siècle pour qu'une structure algébrique incluant les négatifs voie le jour, grâce aux philosophes allemands notamment. On entrevoit à la lueur de ces quelques exemples – très brièvement résumés – que ce thème est lui aussi propice à l'exposé de faits historiques, mais également au questionnement quant à la nature des nombres et à leur écriture. L'étude de ce dernier aspect – la construction de signes et l'élaboration de syntaxes – révèle par ailleurs toute l'ingéniosité et l'ardeur des civilisations passées pour désigner des quantités. Les numérations babylonienne, chinoise, maya, romaine... sont autant de tentatives dans la mise au point d'un système efficace, dépourvu de toute ambiguïté.

Relater la mesure de la hauteur de la pyramide de Khéops par Thalès lors de l'étude des figures semblables, citer des savoirs des peuples de l'Antiquité à propos du triangle rectangle, parler de la quadrature du cercle (réaliser entre autres quelques constructions approchées), raconter l'aventure du système métrique ou le passé du théorème de Fermat : les occasions ne manquent pas pour illustrer la marche de la pensée des mathématiciens, les voies sans issue qui les ont attirés, leurs idées géniales et les échanges menés entre eux. A l'écoute de ces faits, peut-être les élèves auraient-ils une meilleure image d'eux-mêmes en mathématiques, et moins de crainte à l'égard de cette discipline.

Dans ce numéro [ndlr]

La rédaction de *Math-Ecole* cherche à maintenir un équilibre entre pratique et théorie ou entre des articles pouvant être exploités pour la classe et des réflexions plus générales.

Les rubriques *Coin Maths* et *Évaluation* ainsi que la présentation régulière des problèmes du RMT sont nettement orientées sur les pratiques. On y présente, pour ce numéro, des activités sur la numération et sur le recouvrement de figures par des carrés au niveau de l'école primaire, sur les pavages en classes du premier degré de l'école secondaire. On y propose encore une vingtaine de problèmes qui peuvent être repris en classe, des degrés 3 à 8, voire au-delà, dont certains sont accompagnés d'analyses a priori, de résultats et commentaires. *Math-Ecole* cherche, dans la mesure du possible, à dépasser le stade de la simple présentation d'activités ou d'expériences en proposant des modalités de gestion ou en précisant les objectifs du point de vue de leurs contenus mathématiques.

La mesure du temps est d'un intérêt plus général et universel, à l'intention de tous les lecteurs qui aimeraient en savoir plus sur le calendrier qu'ils utilisent quotidiennement.

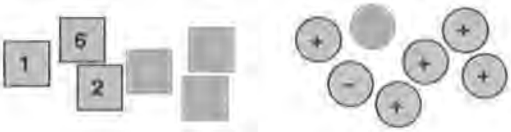
Les réponses à *L'année dernière à Marienbad* et à *La forêt triangulaire* se situent dans l'espace de dialogue que la revue offre à ses lecteurs. Dans cette perspective, les commentaires et les solutions sont toujours les bienvenus, comme contribution à l'ouverture et à l'animation des débats.

Les deux derniers articles de ce numéro sont les textes des deux communications présentées à la *« table ronde »* organisée à Neuchâtel, le 1er décembre 2004, en collaboration entre la HEP Bejune et l'Association *Math-Ecole* (A.M.E.): *Deux enquêtes sous la loupe* et *Confrontations à grande échelle en mathématiques: les apports pour les maîtres.* A leur lecture, on comprendra que les enquêtes régionales, nationales ou internationales sont très différentes les unes des autres dans leurs buts et leurs destinataires. Elles peuvent apporter des renseignements sur l'enseignement des mathématiques, à l'intention des gestionnaires des systèmes scolaires, mais aussi, pour certaines d'entre elles, alimenter la réflexion pédagogique et didactique à l'intention des enseignants.

« COIN MATHS »

AVEC SIX CHIFFRES ET DES SIGNES D'OPÉRATION

En utilisant à chaque fois les six jetons avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et un ou plusieurs signes d'addition ou de soustraction, tu peux représenter beaucoup de nombres.



A. Dans ce premier exemple, avec deux nombres de trois chiffres et une opération, on obtient 858. Mais on aurait pu obtenir un nombre encore plus grand, ou un nombre plus petit, ...

Toujours avec deux nombres de trois chiffres et une opération, essaye d'obtenir...

1. **... le plus grand nombre possible ;**
2. **... le plus petit nombre naturel possible ;**
3. **... un nombre de trois mêmes chiffres, comme 111, 222, 333, 444, ... ;**
4. **... 100 ou le nombre le plus proche possible de 100.**

B. Dans ce deuxième exemple, avec trois nombres de deux chiffres et deux opérations, on obtient 96. Mais on aurait pu obtenir un nombre encore plus grand, ou encore un nombre plus proche de 100...

Toujours avec trois nombres de deux chiffres et deux opérations, essaye d'obtenir ...

5. **... le plus grand nombre possible ;**
6. **... le plus petit nombre naturel possible ;**
7. **... un nombre de trois mêmes chiffres comme 111, 222, 333, 444, ...**
8. **... le nombre le plus proche possible de 100.**

C. Dans ce troisième exemple, on a encore une autre manière de placer les chiffres. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand.

Toujours avec les six chiffres, placés comme tu le veux, et au moins un signe d'addition ou de soustraction, essaie d'obtenir ....

9. **... le plus grand nombre possible ;**
10. **... le plus petit nombre naturel possible ;**
11. **... un nombre de quatre chiffres impairs qui se suivent comme 1357 ou 3579 ;**
12. **... le nombre le plus proche possible de 100 .**

L'origine du problème

Un problème du 10^{e} Rallye mathématique transalpin, destiné aux classes de 4^{e} et 5^{e} primaire, nous avait laissé un sentiment d'insatisfaction en raison de ses difficultés sous-estimées[1].. Il nous a fourni cependant l'idée des activités précédentes, à proposer en « coin mathématique », avec du matériel facile à préparer. Voici son énoncé et l'analyse a priori qui l'accompagnait :

1 Voir *Math-Ecole* 206, mars 2002, p. 20

Le plus grand produit

Claire a six petits cartons: Elle forme deux nombres avec les cartons qui ont des chiffres. Entre ces deux nombres, elle place le carton avec le signe de multiplication.

Comment Claire doit-elle disposer ses cartons pour obtenir le produit le plus grand possible?

Écrivez tous vos calculs.

« - *Remarquer qu'on obtient les produits les plus grands si l'un des facteurs commence par le chiffre 5 et l'autre par le chiffre 4.*
- *Réaliser que deux types de produits sont possibles:*
  Les produits où l'un des facteurs est un nombre de trois chiffres et l'autre un nombre de deux chiffres, puis les produits où l'un des facteurs est un nombre de quatre chiffres et l'autre un nombre d'un seul chiffre.
- *Calculer les produits susceptibles de fournir la solution, notamment:*
  532 x 41 ; 531 x 42 ; 521 x 43 ;
  432 x 51 ; 431 x 52 ; 421 x 53
  puis 5 x 4321, 4 x 5321 et en déduire que 431 x 52 = 22412 est la solution demandée. »

Si les élèves ont bien trouvé plusieurs produits supérieurs à 20000 (à la calculatrice), plus de la moitié ne sont pas arrivés au plus grand. Plusieurs groupes ont même fait de nombreuses tentatives avec des facteurs dont les premiers chiffres étaient différents de 4 ou de 5. Il n'est en effet pas si évident d'anticiper les résultats des multiplications de nombres de plusieurs chiffres et, lorsqu'on en est capable, il est encore plus délicat d'imaginer la décomposition des produits selon la valeur positionnelle des chiffres de chaque facteur. Par exemple, pour comparer mentalement 421 x 53 et 431 x 52, il faut savoir que, après avoir éliminé 400 x 50, 20 x 3 (ou 2 x 30) et 50 x 1 qui figurent dans l'un comme dans l'autre des produits, il faut examiner les valeurs respectives de 400 x 3 et 400 x 2, 20 x 50 et 30 x 50, 1 x 3 et 1 x 2 pour estimer que le premier vaut environ 100 de moins que le second.

En revanche, si l'on passe du champ de la multiplication à celui de l'addition, l'anticipation devient possible sans tomber dans l'évidence et dans la banalité, et des élèves plus jeunes, de 3e, voire de 2e si on réduit la grandeur des nombres, peuvent développer des raisonnements intéressants.

Les questions proposées dans l'activité précédente: Avec six chiffres et des signes d'opération mettent en jeu les propriétés de l'addition et de la soustraction comme la commutativité et l'associativité, mais elles vont surtout développer la perception de la valeur positionnelle des chiffres d'un nombre: un « 5 » vaut 1 de plus qu'un « 4 » dans les unités, mais 10 de plus dans les dizaines et 100 de plus dans le centaines ...
Le matériel doit faciliter la formation des nombres en évitant de les écrire et de les effacer continuellement, lorsqu'ils ne servent encore que de support visuel. La calculatrice interviendra pour les vérifications successives, mais l'essentiel de la réflexion se concentrera sur la répartition des chiffres au sein des termes, pour les sommes comme pour les différences.
Les élèves pourront conduire leurs essais de manière autonome, individuellement ou par groupes de deux ou trois, afin de susciter la confrontation et l'intérêt pour les améliorations successives des résultats obtenus. Il est évidemment indispensable de faire noter toutes les tentatives fructueuses, afin de pouvoir constater et mesurer la progression pour chaque question.

Commentaires généraux

a) Les dispositions prévues des nombres sont « en ligne » et non « en colonne » afin de ne pas inciter l'élève à entrer dans les algorithmes de calcul sans avoir réfléchi à la position des chiffres dans les nombres. Il est aussi important de faire comprendre qu'une écriture additive ne représente pas seulement un « calcul à effectuer » mais aussi le nombre qui sera le résultat de l'opération, sous une forme reflétant sa décomposition en plusieurs termes.

b) Pour éviter un emploi du « 6 » en « 9 » on peut souligner le chiffre « 6 ». Mais on peut aussi profiter de ce degré supplémentaire de liberté pour composer d'autres nombres. (Les développements qui suivent sont rédigés dans une acception restrictive du chiffre « 6 » au « six » de l'écriture littérale.)

c) Le nombre des chiffres à disposition est une variable de cette activité. On peut se contenter des chiffres de 1 à 4 pour des élèves plus jeunes ou en difficultés, et aller au-delà pour des élèves plus grands.

d) D'innombrables variantes sont faciles à créer, par les élèves eux-mêmes également.

Réponses et commentaires particuliers

1) Il y a plusieurs dispositions possibles (ou couples de nombres de trois chiffres) représentant la plus grande somme, il faut que le 5 et le 6 soient placés dans les centaines, le 3 et le 4 dans les dizaines, le 1 et le 2 dans les unités, pour obtenir 1173.

2) Il faut ici penser à la soustraction. Le plus petit nombre, 47, est obtenu par la différence 412 - 365, mais 512 - 463 = 314 – 265 = 49 ne sont pas loin. Avec l'addition, le minimum serait 381.

3) Par une addition, il faut que la somme des centaines, des dizaines et des unités soit la même, inférieure à 10 pour éviter les retenues ; c'est ainsi possible d'obtenir 777, par exemple avec 123 + 654. Par une soustraction, on obtient 111 avec 246 – 135 par exemple, ou encore 333 avec 654 – 321. C'est ici la différence entre les chiffres des centaines, des dizaines et des unités qui doit être constante.

4) Les nombres les plus proches de 100 sont forcément le résultat d'une soustraction. 95 = 526 – 431 et 105 = 531 – 426 sont les meilleures approximations. Il faut ici que les chiffres des centaines soient les plus proches possibles (un de différence) que ceux des dizaines le soient également, et que ceux des unités soient les plus éloignés possibles (5 de différence). Si on ne respecte pas cette dernière condition, on obtient des approximations moins bonnes, par exemple 107 = 361 – 254, 93 = 354 – 261, 91 = 452 – 361.

5) La plus grande somme de trois nombres de deux chiffres est 156, avec 6, 5, 4 dans les dizaines et 3, 2, 1 dans les unités, comme 63 + 51 + 42

6) Le plus petit nombre est 1 = 65 – 43 – 21. Il est impossible d'atteindre 0[2]

7) On peut obtenir 111 par une somme comme 65 + 34 + 12 en formant dix dizaines (6 + 3 + 1 ou 5 + 4 + 1 ou 5 + 3 + 2), les chiffres restants constituant 11 unités.

8) On arrive à 102 par des additions, comme 65 + 24 + 23 (9 dizaines et 12 unités), mais avec une soustraction, on peut atteindre 101, comme 63 + 52 – 14.

9) Pour obtenir la plus grande somme, ce n'est pas le nombre de termes qui compte, mais le nombre de chiffres dont peut se composer l'un d'eux. Il faut penser à additionner un nombre de 5

2 Voir note suivante

chiffres et un autre, d'un seul chiffre : 65432 + 1 = 65433

10) Il n'est pas possible d'obtenir 0, malgré la liberté du nombre de chiffres. On se retrouve dans le cas de la question 6, avec un minimum de 1.
11) On arrive à atteindre le premier : 1357 = 1364 – 5 – 2, on ne peut que s'approcher du second à 3 unités près, par exemple 3564 + 12 = 3576.
12) Enfin, on arrive à atteindre 100, à condition d'insérer une soustraction de 1 dans les opérations[3]. Par exemple : 100 = 65 + 34 + 2 – 1.

Conclusion

Les réponses à ces 12 questions ne sont pas évidentes, même pour un adulte. Il faut faire beaucoup d'essais puis les organiser, pour constater que toute l'activité repose sur la valeur positionnelle des chiffres à disposition. Il paraît nécessaire, pour les élèves, de prévoir une gestion stimulante de l'activité, avec affichage progressif des résultats les meilleurs pour chacune des questions sous forme de « journal » de la recherche. Des mises en commun permettront aussi les bilans, les renforcements et les institutionnalisations nécessaires.

3 Dans l'activité *Le pur cent* introduite en Suisse romande par l'ouvrage « Sur les pistes de la mathématique » (SRP 25, 1983 ou SRP 40, 1991) puis reprise dans les moyens d'enseignement romands « Mathématiques 4P », les élèves doivent essayer d'obtenir 100 comme somme de nombres formés des dix chiffres de 0 à 9. Les documents du maître n'indiquent cependant pas que c'est impossible, ni pourquoi. Pour le comprendre, il faut déjà calculer la somme des « chiffres » considérés comme nombres d'un seul chiffre. Dans le cas de notre activité : *Avec des chiffres et des signes d'opération*, cette somme est 21, dans le cas du *Pur cent*, la somme est 45. Lorsqu'on déplace un chiffre, de la position des unités à celle des dizaines, on augmente la somme d'un multiple de 9. (Par exemple si on remplace 7 unités par 7 dizaines, on augmente la somme de $7x10 - 7x1 = 7x(10 - 1) = 7 \times 9 = 63$) Si un chiffre passe des dizaines aux centaines, l'augmentation est un multiple de 90, s'il passe des unités aux centaines, on augmente d'un multiple de 99, etc. Dans le cas des questions 4, 8, et 12 comme pour *Le pur cent* ci-dessus, les différences entre 100 et 21 ou 100 et 45 ne sont pas des multiples de 9 et il n'est donc pas possible d'atteindre ces nombres par des additions. Lorsqu'on introduit les soustractions, les « chiffres » soustraits sont comptés négativement dans la « somme » initiale, ce qui permet d'arriver au but comme dans la question 12 ci-dessus où il n'y a pas de contrainte sur le nombre de termes et leur grandeur.

Les six carrés, le retour !

Réponse à la question de la rubrique précédente (« Coin Maths », Math-Ecole 213, p. 53)

Nous avons reçu de M. Simonet la réponse suivante :

J'ai donné cette fiche à 6 élèves de ma classe d'accueil. Ils ont l'âge d'être en 3e, en 4e et en 5e années, mais ils n'en ont pas toujours le niveau de compétence. N'étant pas francophones, la première difficulté qu'ils ont rencontrée a été de comprendre l'énoncé. Deux élèves ont rapidement trouvé une première solution respectant les contraintes, mais avec un nombre non optimal de carrés. Un des garçons avait rempli la grille, mais il n'avait pas utilisé chaque carré au moins une fois. Une mise en commun après ces 5 premières minutes de travail a alors permis aux 4 autres enfants de s'approprier la tâche. Tous ont cherché de manière assidue pendant 60 minutes. J'ai fait quelques relances en annonçant régulièrement le nombre record de carrés trouvés par l'un ou l'autre des enfants. Quatre des six enfants ont trouvé une solution avec 16 carrés[4].
Nous avons décrété qu'on ne pouvait pas faire mieux et avons arrêté la recherche. Ils

4 Il s'agit en effet de solutions optimales permettant de recouvrir le grand carré de côté 15,
- 2 carrés de 6x6, 2 carrés de 5x5, 3 carrés de 4x4, 5 carrés de 3x3, 2 carrés de 2x2, 2 carrés de 1x1
- 2 carrés de 6x6, 3 carrés de 5x5, 3 carrés de 4x4, 2 carrés de 3x3, 2 carrés de 2x2, 4 carrés de 1x1

n'avaient pas l'air convaincu et certains d'entre eux voulaient encore essayer. Ceux qui ont trouvé une solution utilisant moins de 16 carrés n'avaient pas respecté la contrainte « utiliser chaque carré au moins une fois ».
Je leur ai ensuite demandé ce qu'ils avaient appris en faisant cette activité. Une élève (5e année) m'a répondu : « à compter ». Je lui ai demandé si elle savait mieux compter maintenant qu'avant de faire ce travail. Elle a ri en secouant négativement la tête ! Une autre élève a dit que ça apprenait « à penser ». Les autres étaient incapables de répondre à cette question.
J'avais cherché la solution avant de proposer cette fiche à mes élèves. J'avais aussi trouvé 16 carrés comme réponse optimale. Je suis intimement persuadée qu'il est impossible de faire avec moins, mais je suis incapable de le prouver !!! Comment les élèves le pourraient-ils alors ?
Je me suis également interrogée sur les objectifs. « Le retour des 6 carrés » se trouve dans le module 7B (« Des problèmes pour mesurer : connaître et utiliser des unités conventionnelles) et est le prolongement de l'activité « Les 6 carrés ». Dans le descriptif de cette dernière, sous « tâche », on peut lire : « Comparer les aires de diverses surfaces à l'aide de mesurants carrés donnés ». J'ai observé mes élèves. Ils ont mesuré le(s) côté(s) de chaque carré pour pouvoir le reporter dans la grille (une élève a dessiné des rectangles à plusieurs reprises. Quand je le lui ai fait remarquer, elle a pris conscience qu'elle ne mesurait/vérifiait qu'un côté). Aucun d'eux n'a calculé l'aire de chaque carré et encore moins l'aire totale. Certains ne voyaient même pas qu'ils pouvaient remplacer les 4 carrés de 2x2 qu'ils avaient disposés en carré, par un carré de 4x4...

« Le retour des 6 carrés »
- *une situation-problème ? (visiblement non puisqu'on le propose en prolongement d'une autre activité)*
- *un problème de réinvestissement des connaissances ? (lesquelles ?)*
- *un problème ouvert ?*

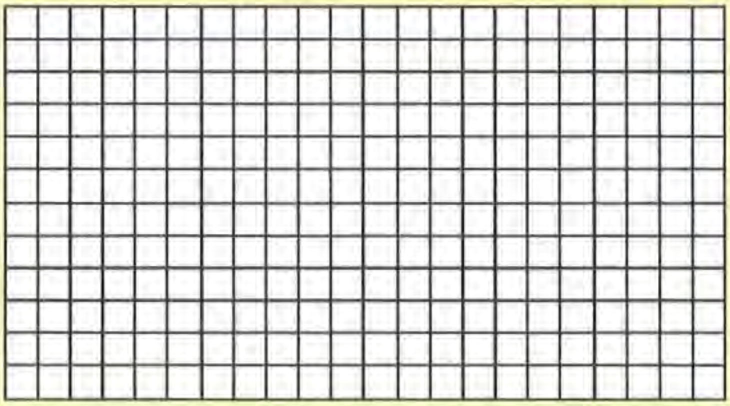
Tous les enseignants ne sont pas des didacticiens (à l'inverse non plus !). Cette activité illustre une nouvelle fois la difficulté, pour les maîtres, de savoir où ils vont et ce qu'ils font avec leurs élèves...

En réponse aux dernières interrogations, nous dirions que « Le retour des six carrés » est une activité au cours de laquelle les élèves, et les adultes qui l'ont essayée, ont assurément l'occasion de réinvestir des connaissances mathématiques. La description ci-dessus le dit clairement : se rendre compte que quatre carrés de 2x2 sont équivalents à un carré de 4x4, respecter les contraintes du problème, distinction carré/rectangle, ...
Du point de vue des élèves plus âgés, qui n'aiment plus trop dessiner et découper et qui passent systématiquement dans le registre numérique, on trouvera encore le passage par les mesures d'aires : comment obtenir 225 (15 x 15) sous forme de somme avec un minimum de termes 36, 25, 16, 9, 4 et 1.
L'élève (ou l'adulte) qui effectue la somme $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$ pour observer la condition « au moins une pièce de chaque sorte », qui calcule ensuite qu'il faudra encore compléter une aire de $225 - 91 = 134$ avec d'autres pièces, et qui commence par placer le plus de carrés 6x6, puis de 5x5, de 4x4 afin de minimiser le nombre total de carrés, arrive alors à la décomposition de 134 en 5 carrés : $134 = 3x36 + 1x25 + 1x1$. S'il oublie le registre géométrique, il dira alors que la solution optimale s'obtient en 11 carrés (en comptant les 6 premiers carrés dont la somme est 91). S'il pense à vérifier, il constatera que cette solution est irréalisable. Il aura alors appris quelque chose de très important en mathématiques : la distinction entre le « nécessaire » et le « nécessaire et suffisant » qu'il faut absolument prendre en compte lorsqu'on veut résoudre un problème de géométrie dans le registre purement numérique.

Un bel exemple nous a été donné par le problème suivant, tiré de la première épreuve du 8e RMT, destiné aux classes de 3e et de 4e primaire :

TAPIS CARRES

Grand-mère n'aime plus le carrelage de son salon, qui est fait ainsi :



Elle décide de le recouvrir entièrement et exactement par des tapis carrés (sans laisser d'espaces vides et sans que deux parties de tapis soient l'une sur l'autre).

De combien de tapis carrés aura-t-elle besoin si elle veut en utiliser le moins possible? Dessinez les tapis de Grand-mère.

L'analyse de la tâche de ce problème (relue et vérifiée par une bonne dizaine d'adultes) prévoyait une solution en 7 tapis :

Comprendre que les tapis ne seront pas tous de mêmes dimensions, procéder par conséquent du plus grand (12 x 12) au plus petit

- *Disposer un tapis de dimensions 12 x 12*
- *Constater qu'il reste un rectangle de 12 x 10*
- *Disposer un tapis de 10 x 10*
- *Constater qu'il reste un rectangle de 2 x 10 et disposer cinq carrés de 2 x 2*

L'algorithme de résolution proposé est typiquement « adulte » : on commence par les plus grands et on procède systématiquement ainsi, dans le registre numérique. De nombreux élèves ont trouvé cette solution, par des dessins ou des découpages, et, ô surprise, certains ont découvert une solution en 6 tapis. 1 de 12x12 comme précédemment, 2 de 6x6 et 3 de 4x4 !!

En conclusion, nous ne chercherions pas à classer « Le retour des six carrés » dans une catégorie ou une autre d'activités. Nous constatons simplement que c'est un problème, qu'on peut qualifier de « bon » ou de « substantiel » au regard de ses contenus mathématiques. Pour autant que le maître sache exploiter ses potentialités pour ses élèves, par des choix appropriés de gestion de la classe, par des mises en commun, par l'organisation de défis, par des aides intermédiaires qui correspondent à de courtes phases d'institutionnalisation… comme le montre si bien l'expérience vécue par les six élèves de M. Simonet.

Et au niveau mathématique, il faut admettre que certaines « démonstrations » ne se font pas par une succession de déductions logiques, mais par un inventaire patient et exhaustif de toutes les possibilités.

EVALUATION : PAVAGES

Michel Brêchet

Peintres, géomètres, architectes... explorent de longue date les pavages du plan, sujet d'étude fascinant, à la frontière des mathématiques et de l'art. La recherche de figures inédites permettant de recouvrir une feuille de papier sans trou ni chevauchement fait émerger de nombreuses notions mathématiques : isométries et leurs invariants, polygones et leurs propriétés, lieux géométriques, distances, angles... Au cours d'une telle activité, globale et cumulative, les interactions entre les différents thèmes de la géométrie sont omniprésentes[1], contribuant de ce fait à la construction des savoirs de l'élève. La création de motifs périodiques originaux reçoit généralement un écho positif de la part des enseignants, d'autant plus qu'elle interpelle voire qu'elle passionne plus d'un élève.

Si les ressources permettant d'élaborer et de conduire des séquences d'apprentissage ne manquent pas (moyens d'enseignement, livres et revues, sites Internet...), les suggestions d'évaluation sont plutôt rares dans ce domaine. D'où l'épineuse question : comment évaluer le travail accompli par les élèves ? Dans cet article, nous présentons quelques pratiques envisageables :

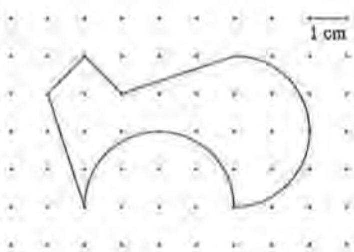
- le premier problème, *Avec un seul type de pavé*, est accompagné de quelques remarques en vue de l'évaluation du travail des élèves, puis des solutions ;
- le deuxième, *Avec des polygones réguliers*, est plus ambitieux ; il est suivi de quelques commentaires et des solutions ;
- *Compléter un motif* est suivi d'une liste des objectifs qu'il permet d'évaluer ;
- *Identifier et décrire des mouvements* est une activité plus courte que les précédentes mais modulable, avec les objectifs correspondants ;
- *Trouver les pièces manquantes*, la dernière activité, est largement développée par une analyse des procédures de résolution, illustrées par des travaux d'élèves.

Il faut souligner ici, en introduction, que ces activités d'évaluation doivent être précédées d'une période de découverte, de recherche et d'appropriation, au cours de laquelle l'élève construit les savoirs « de base » sur les pavages. Ceux-ci doivent être en principe disponibles et la terminologie qui s'y rapporte déjà connue. Par exemple, lorsqu'on demande à l'élève qui vient de réaliser un pavage avec un certain type de pavé de trouver un nouveau motif avec le même pavé, il faut savoir qu'il y a toute une pratique qui permet de reconnaître les différents motifs et de les analyser. Il en va de même avec des expressions comme « configuration autour d'un sommet » et « paver le plan », qui s'appuient toutes sur des expériences antérieures de l'élève.

Avec un seul type de pavé

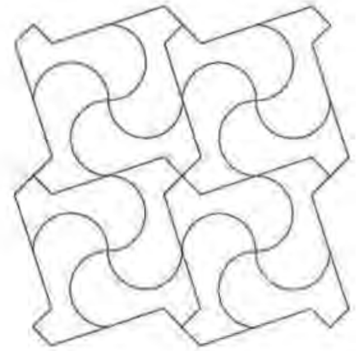
Reproduire 20 fois cette figure en vraie grandeur sur une feuille pointillée ou quadrillée, de manière à recouvrir avec régularité une partie de la feuille, sans trou ni chevauchement.

Même tâche, mais selon un autre motif répétitif.

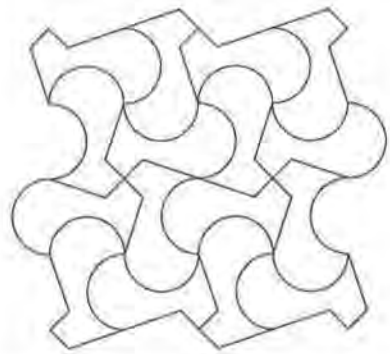


1 Voir la rubrique « Le coin des pavages », du même auteur, dans les numéros 207, 208, 209 et 210 de *Math-Ecole*.

La rotation d'un quart de tour et la symétrie axiale interviennent ici dans la conception, la construction et l'analyse du pavage. Au besoin, en phase initiale, les élèves utiliseront du papier calque ou découperont la figure pour la déplacer physiquement, puis ils devront percevoir les caractéristiques du motif pour organiser et vérifier leurs constructions. Cette activité convient bien aux degrés 7 et 8. Sa première partie est habituellement bien réussie en peu de temps. La deuxième tâche est plus délicate : elle nécessite plusieurs essais (avant de découvrir qu'on peut retourner les pavés) et en conséquence une plus longue durée. Divers critères d'évaluation peuvent être pris en compte : la régularité de chaque recouvrement, la précision des constructions, les tentatives effectuées (qui reflètent la rigueur de la démarche suivie), le respect des consignes... Pour information, voici les deux pavages :



Par rotations de 90°



Par rotations de 90° et par symétries axiales

Avec des polygones réguliers

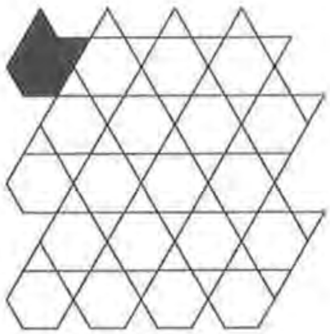
Paver le plan avec des polygones réguliers selon un motif répétitif, de telle sorte que la configuration autour de chaque sommet soit identique et qu'aucun sommet ne se trouve sur le côté d'un polygone[2].

Dans les conditions susmentionnées, 8 pavages sont réalisables. Ils nécessitent tour à tour :

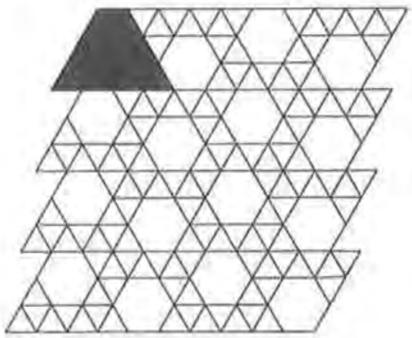
- des triangles et des hexagones (2 pavages possibles) ;
- des triangles et des carrés (2 pavages également) ;
- des triangles, des carrés et des hexagones ;
- des triangles et des dodécagones ;
- des carrés, des hexagones et des dodécagones ;
- des carrés et des octogones.

La construction des polygones utilisés – de 1,5 à 2 cm de côté pour pouvoir en représenter suffisamment – sera dévolue à l'élève ou se fera sur les instructions de l'enseignant, tout comme la recherche d'un duo ou d'un trio de polygones qui convient (le matériel Polydron est à ce stade d'un bon secours). L'activité est de longue haleine. Deux périodes ne sont généralement pas de trop pour la construction de 40 à 60 figures, selon le pavage choisi. Le recouvrement effectué, il est intéressant de se pencher sur le(s) rapport(s) des nombres de polygones de chaque type. Pour le(s) déterminer, il faut repérer une figure formée de la réunion de plusieurs polygones qui permet de paver le plan par une isométrie :

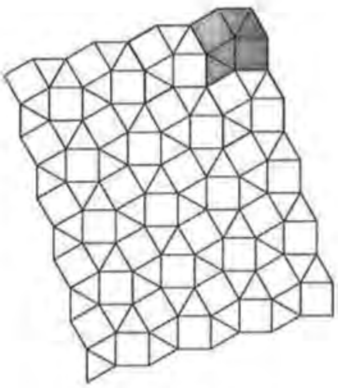
2 Pour plus d'informations sur ce sujet, voir l'article « Art islamique et mathématiques », de Floriane Pochon et de Luc-Olivier Pochon, dans le numéro 206 de *Math-Ecole*.



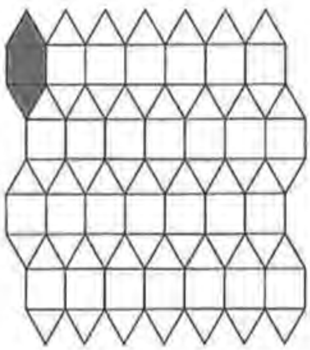
2 triangles – 1 hexagone



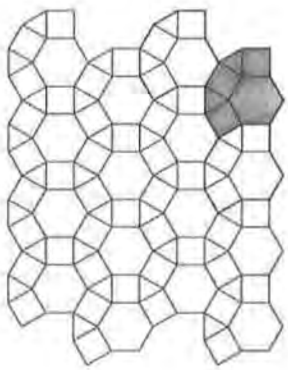
9 triangles – 1 hexagone



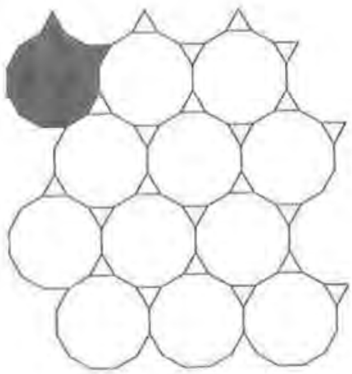
4 triangles – 2 carrés



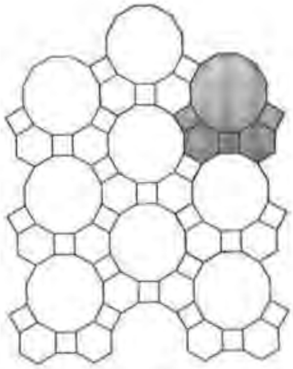
2 triangles – 1 carré



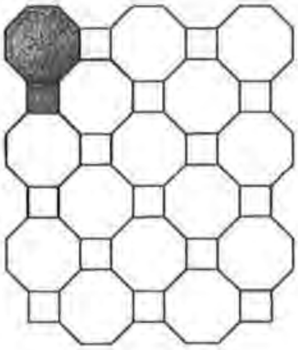
2 triangles – 3 carrés – 1 hexagone



2 triangles – 1 dodécagone



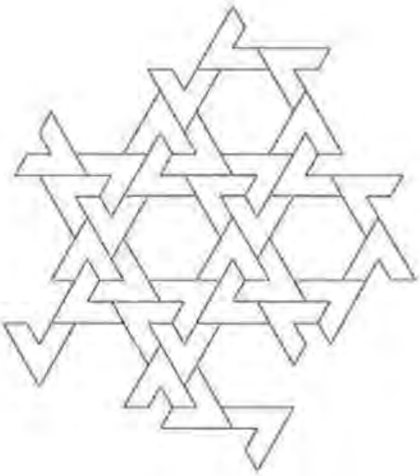
3 carrés – 2 hexagones – 1 dodécagone



1 carré – 1 octogone

Compléter un motif

Poursuivre la construction de ce motif arabe.



Cette activité est à la portée d'élèves de 13-14 ans. Si le long côté d'un élément constitutif en forme de V mesure 2 cm (1 cm sur la figure ci-dessus), il faut compter en général un temps de construction, sur une feuille blanche de format A4, d'une période environ.

La réalisation de chacune des deux activités précédentes (*Avec des polygones réguliers* et *Compléter un motif*) reflètera des compétences géométriques relevant de :

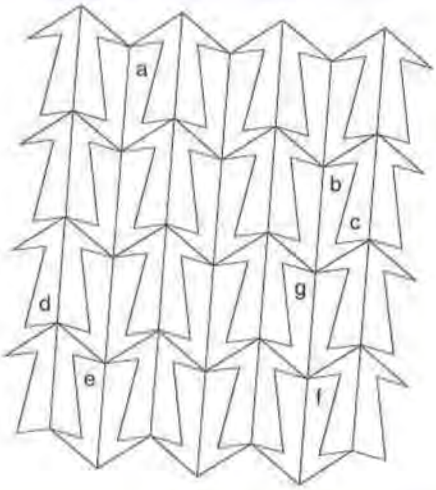
- l'observation : l'identification d'alignements de points ou de segments, de directions de droites supports et d'isométries facilitent grandement les tâches ; des procédures «pas à pas» conduisent, elles, à des figures déformées ;
- la construction : la manipulation adéquate des outils traditionnels de la géométrie (règle, équerre, compas, rapporteur) est une des clés d'un travail efficace.

La rigueur et la concentration devront également être au rendez-vous, tant les sources de distraction et d'égarement (lignes enchevêtrées, motifs semblables…) sont nombreuses.

Identifier et décrire des mouvements

Observer le pavage et décrire le plus précisément possible chacun des mouvements suivants :

– Il amène la figure a sur la figure b
– Il amène la figure b sur la figure c
– Il amène la figure a sur la figure d
– Il amène la figure e sur la figure f
– Il amène la figure f sur la figure g



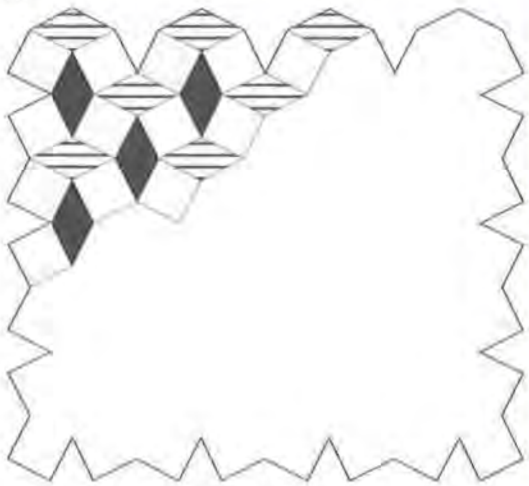
Plus courte et plus classique, cette activité est modulable à souhait. D'autres figures ou d'autres pavages feraient tout aussi bien l'affaire. Plusieurs critères d'évaluation sont susceptibles d'être pris en compte :

- la reconnaissance des isométries (ou composition d'isométries) ;
- la précision du langage utilisé pour les descriptions, qu'il s'agisse de symboles mathématiques ou de mots de la langue française ;
- la position des centres de symétrie (ou de rotation) et des axes de symétrie ;
- la direction, le sens et la longueur des vecteurs de translation.

Trouver les pièces manquantes

Pour terminer ce pavage, combien manque-t-il…

a) … de carrés gris ?
b) … de carrés blancs ?
c) … de losanges noirs ?
d) … de losanges hachurés ?



Nous nous attarderons plus longuement sur ce dernier problème et illustrerons plusieurs méthodes de résolution par des extraits de travaux d'élèves de huitième année. Durant 30 minutes, ils ont eu le loisir de compléter partiellement ce pavage (en esquissant quelques polygones ou en les construisant précisément), puis de repérer des régularités. Ce laps de temps a toutefois été trop court – et c'était bien là une des contraintes souhaitées – pour représenter fidèlement toutes les figures manquantes. Quelques élèves ont bien tenté de procéder de la sorte, mais dans la précipitation, les losanges sont devenus des carrés ou des cerfs-volants, les carrés ont été transformés en losanges ou tout simplement en quadrilatères quelconques… et finalement le caractère périodique du pavage a complètement disparu. La réussite de ce problème rapportait 8 points.

Dénombrement selon les lignes «horizontales»

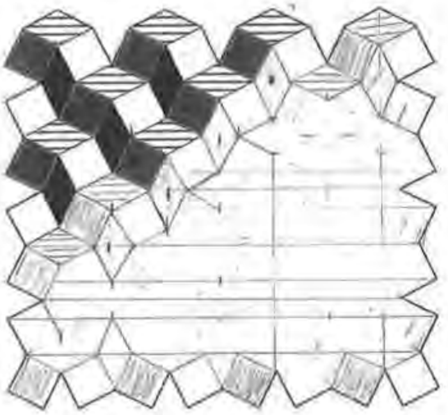
il y a 4 carrés gris à la 1ère ligne et 3 à la 2e ligne puis de nouveau 4 .. etc.
4+3+4+3+4+3+4= <u>25</u>

c) Il y a 4 losanges noirs à la 1ère ligne et 3 à la 2e ligne puis de nouveau 4 .. etc.
4+3+4+3+4+3 = <u>21</u>

L'élève a procédé de la même manière pour compter les carrés blancs et les losanges hachurés. Il a ensuite soustrait le nombre de chaque figure déjà dessinées du nombre total de chacune des figures (28 carrés gris, 28 carrés blancs, 21 losanges noirs et 25 losanges hachurés). Il n'a représenté aucune figure, ce qui témoigne d'une étonnante capacité à prolonger mentalement les motifs existants. En réalité, chaque ligne comporte 4 carrés gris. L'élève a commis une seule petite erreur, lors du premier dénombrement. Il a obtenu *7 points*.

Voici un autre travail s'inscrivant dans le même registre :

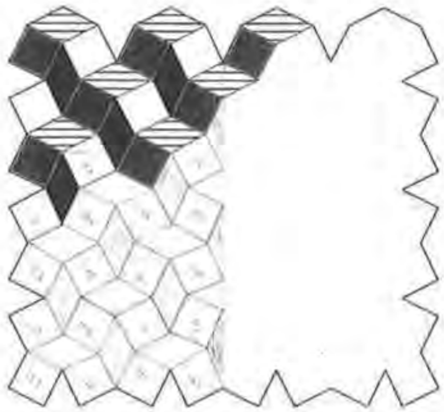
a) 24 **de carrés gris ?** 7·4 − 7 = 24
b) 25. **de carrés blancs ?** 7·4 − 6 = 25
c) 17 **de losanges noirs ?** 3·4 + 3·3 − 4 = 17
d) 18 **de losanges hachurés ?** 4·4 + 3·3 − 7 = 18



La présence de quelques figures supplémentaires est habituellement rassurante et permet de ne pas s'égarer lors de la recherche du nombre de figures manquantes. A part une belle erreur de calcul (7 · 4 = 31), tout est juste. *(7 points)*

Construction d'une partie du pavage

1) J'ai séparé la forme 2 parties égales
2) J'ai construit le pavage d'un côte
3) et j'ai compté ceux qui manquer



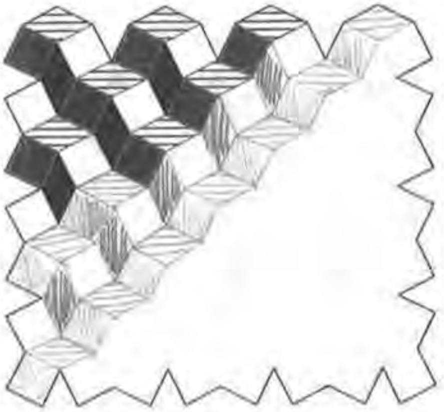
Séparée et complétée de la sorte, la figure facilite le dénombrement et mène sans encombre majeur à la solution du problème. Seule embûche : compter « une seule fois » les six losanges situés sur l'axe de symétrie. *(8 points)*

L'élève qui a réalisé le travail ci-dessous a pensé que la figure possédait un axe de symétrie oblique, ce qui n'est pas le cas. La réponse est ainsi erronée. *4 points* ont été attribués à cette production, notamment pour la clarté de la démarche et pour le dessin partiel du pavage, qui a été réalisé avec succès.

J'ai dessiné la moitié de la figure, donc j'aurais deux fois plus de carré que la moitié dans la figure en entier

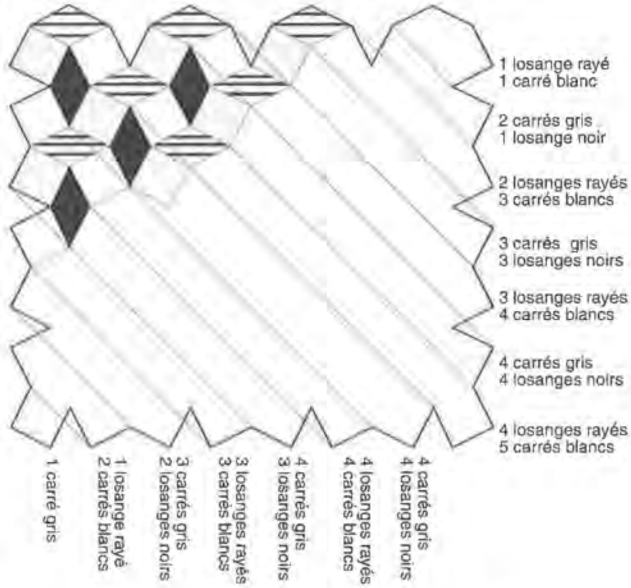
1ère moitiè : 16 gris
12 blancs
9 noirs
16 hachurés

en entier : 32 gris
24 blancs
18 noirs
32 hachurés



Dénombrement selon des lignes «obliques»

Une autre méthode consiste à dénombrer les polygones selon des alignements obliques (en fac-similé ci-contre pour des raison de transparence), sans les dessiner. On constate immédiatement le degré de rigueur nécessaire pour mener à bien une telle tâche. Une concentration sans faille est nécessaire du début à la fin. *(8 points)*



Ce dernier travail reflète, quant à lui, un examen du problème dans le registre numérique.

a) c d) Si dans la première ligne il y en a 1 dans la deuxième ligne il y aura 3 et ainsi de suite (+2). 7 est la plus grande ligne alors on soustrair de 2.

1	2
3	4
5	6
7	8
5	6
3	4
1	2

b) même chose que (a;c;d) sauf qu'on commence avec 2 et le plus grand ligne est de 8.

L'élève a tout d'abord postulé que, d'une ligne oblique à l'autre, les nombres de carrés gris (question a), de losanges noirs (c) et de losanges hachurés (d) augmentaient régulièrement (1 ; 3 ; 5 ; 7), puis que cette suite devenait décroissante, toujours selon la raison «2» (5 ; 3 ; 1). Malheureusement pour lui, cette analyse s'applique uniquement aux losanges hachurés. La situation n'est donc pas aussi simple que cela. Les suites correctes sont :

- pour les carrés gris : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 6 ; 4 ; 2
- pour les losanges noirs : 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 4 ; 2

S'agissant du dénombrement des carrés blancs (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 6 ; 4 ; 2 selon l'élève), l'erreur est du même type. En fait, la suite des carrés blancs est identique à celle des carrés gris, mais en ordre inverse (2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 5 , 3 ; 1). *4 points* ont été attribués pour ce traitement de la situation dans le domaine numérique.

13e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la première épreuve

Le Rallye mathématique transalpin entre dans sa treizième année, toujours plus apprécié puisque de nouvelles régions s'y lancent : en Belgique à large échelle, en Franche-Comté voisine, aux Etats-Unis et en Turquie de manière expérimentale. Ses animateurs se sentent un peu à l'étroit dans l'épithète « transalpin », ils considèrent désormais ce terme au sens large.

Une grande partie des problèmes de cette première épreuve ont été proposés par la section de Suisse romande, ils ont ensuite été relus et décortiqués au cours des travaux de groupe de la huitième rencontre internationale du RMT qui s'est tenue en octobre dernier à Bourg-en-Bresse. Recomposés, ils ont enfin fait l'objet d'une nouvelle consultation de toutes les sections pour aboutir à la forme sous laquelle ils sont présentés dans les pages suivantes. Mais leur vie ne s'arrêtera pas à l'épreuve, passée en janvier et février dans près de 2500 classes, dans 8 pays et dans six langues : français, italien, allemand, hébreu, anglais, turc. Ils donneront lieu à de nombreuses analyses sur la manière dont les élèves les ont résolus, à des publications, à des développements pour les maîtres qui souhaitent les exploiter en classe et à d'éventuelles versions nouvelles pour de futures épreuves. Comme d'habitude, Math-Ecole publiera des résultats et commentaires sur ces problèmes dans ce numéro et les prochains.

On trouvera d'autres informations sur le site de la section suisse romande, RMT-SR : http://www.rmt-sr.ch

1. AUTOCOLLANTS (Cat. 3)

Les autocollants que Julie et Oscar collectionnent se vendent dans des enveloppes.

Dans chaque enveloppe, il y a dix feuilles d'autocollants. Sur chaque feuille, il y a dix autocollants.

Aujourd'hui, Julie et Oscar comptent leurs autocollants. Julie a 4 enveloppes complètes, 24 feuilles complètes hors des enveloppes et 12 autocollants séparés.

Oscar a 6 enveloppes complètes, 3 feuilles complètes hors des enveloppes et 31 autocollants séparés.

Qui a le plus d'autocollants ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2. RMT 2005 (Cat. 3, 4)

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.

Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

Qui utilisera le plus de peinture ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

3. LIVREZ LES COMMANDES (Cat. 3, 4)

Une fleuriste a préparé cinq bouquets de fleurs pour cinq de ses clientes :

- un bouquet d'œillets rouges ;
- un bouquet d'œillets jaunes ;
- un bouquet de tulipes rouges ;
- un bouquet de tulipes jaunes ;
- un bouquet de marguerites blanches.

On sait que :

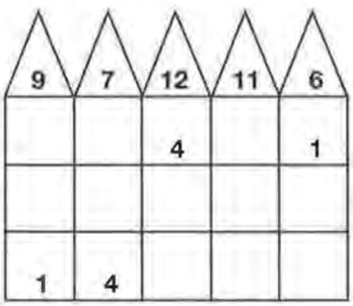
- Mme Andrey achète uniquement des fleurs rouges ;
- Mme Basset habite à Lussy ;
- Mme Carillo et Mme Dardel veulent des fleurs jaunes ;
- Mme Lamartine et Mme Carillo veulent seulement des œillets !

À quelle cliente chacun de ces bouquets est-il destiné ? Notez vos explications.

4. LES BELLES COLONNES (Cat. 3, 4, 5)

Écrivez un nombre dans chaque case en respectant les consignes suivantes :

- Vous utilisez seulement les nombres 1, 2, 3, 4, 5 mais autant de fois que vous le voulez.
- Dans chaque ligne, tous les nombres sont différents.
- Dans chaque colonne, tous les nombres sont différents.
- Pour chaque colonne, le nombre écrit dans le triangle est la somme des trois autres nombres.

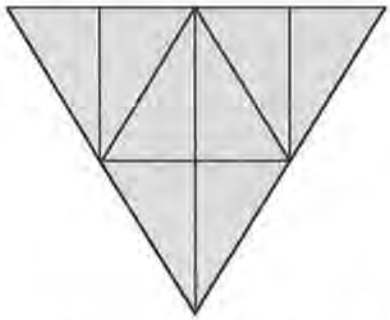


Complétez les colonnes et expliquez votre raisonnement.

5. LE FOULARD DE GRAND-MERE (Cat. 3, 4, 5)

Voici le dessin du foulard de grand-mère.
Camille, sa petite-fille, le trouve très beau parce qu'il a beaucoup de triangles.
Elle essaie de les compter tous, mais elle a du mal à le faire et n'est jamais sûre de sa réponse.

Selon vous, combien de triangles peut-on voir dans ce dessin?



Désignez-les précisément pour qu'on puisse comprendre facilement comment vous les avez comptés.

6. LES TROIS LAPINS (Cat. 4, 5, 6)

Trois lapins mangent des légumes dans mon potager.
Le lapin blanc mange chaque soir une carotte.
Le lapin brun mange chaque soir un navet ou, s'il n'y en a plus, 3 carottes.
Le lapin noir mange chaque soir un chou ou, s'il n'y en a plus, 3 navets ou, s'il n'y en a plus non plus, 5 carottes.
Ce matin, j'ai récolté une partie des légumes de mon potager.
J'ai laissé pour les lapins 45 carottes, 21 navets, 5 choux.

Pendant combien de jours vont-ils pouvoir se nourrir tous les trois ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

7. LA PLAQUE DE VOITURE (Cat. 4, 5, 6)

La police recherche la voiture d'un voleur.
- Un premier témoin a constaté que le numéro de la plaque a cinq chiffres, tous différents,
- un deuxième témoin se souvient que le premier chiffre est 9,
- un troisième témoin a noté que le dernier chiffre est 8,
- un quatrième témoin, qui a 22 ans, a remarqué que la somme des cinq chiffres de la plaque est égale à son âge.

Quel peut être le numéro de la plaque de la voiture que la police recherche?
Écrivez toutes les possibilités et expliquez comment vous les avez trouvées.

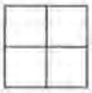
8. POUR QUI SONNE L'HORLOGE ? (Cat. 5, 6)

Pierre possède une horloge qui sonne:
- un coup à la demie de chaque heure,
- le nombre de coups indiqués par la petite aiguille à chaque heure pile.

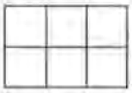
Lorsqu'il est midi ou minuit, elle sonne 12 coups.
Lorsqu'il est midi et demi, elle sonne 1 coup.
Lorsqu'il est 13h, elle sonne 1 coup parce qu'il est une heure de l'après-midi.
Pierre remonte le mécanisme de l'horloge tous les jours entre midi et midi et demi.

Combien de coups l'horloge sonne-t-elle entre deux interventions de Pierre ?
Montrez clairement comment vous avez trouvé.

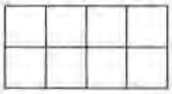
9. GRILLES D'ALLUMETTES (Cat. 5, 6, 7)



Pour construire cette figure, il a fallu 12 allumettes.



Pour cette deuxième figure, il a fallu quelques allumettes de plus !

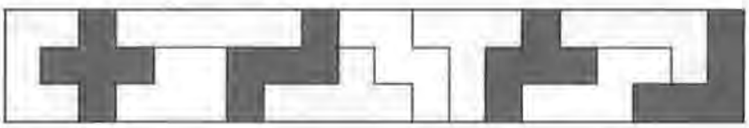


Et pour cette troisième figure, encore davantage d'allumettes !

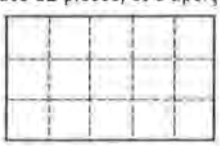
En continuant à construire des figures de la même façon, combien d'allumettes seront nécessaires à la construction de la 100e ? Justifiez votre réponse.

10. AVEC DES PENTAMINOS (Cat. 5, 6, 7)

Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. Il y a 12 pentaminos différents avec lesquels on peut former un rectangle de « 3 x 20 » :



Éric joue avec ses 12 pentaminos et cherche à faire un rectangle de « 3 x 5 ». Il prend une des 12 pièces, et s'aperçoit qu'il n'arrivera pas à finir son rectangle.



Quelles pièces Éric n'arrivera jamais à utiliser pour son rectangle ?
Expliquez pourquoi.

11. LES CHAMPIGNONS (Cat. 6, 7, 8, 9)

Mon oncle et ses quatre enfants, Anna, Bruno, Céline et Daniel, sont allés aux champignons.

- Ils ont cueilli 30 champignons en tout.
- Chacun a récolté au moins deux champignons.
- Anna et Céline ont, ensemble, moins de 8 champignons.
- Ce n'est pas Anna qui a récolté le moins de champignons.
- Le nombre de champignons de Céline est le tiers du nombre de ceux de Bruno.
- Daniel, à lui seul, a récolté autant de champignons que mon oncle et Anna.

Combien chacun a-t-il pu récolter de champignons? Justifiez vos réponses.

12. LES BISCUITS D'EMILIE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Émilie a confectionné des petits biscuits, entre 300 et 500.

Elle réfléchit à la façon dont elle pourrait les emballer dans plusieurs sachets contenant le même nombre de biscuits:

- si elle met 9 biscuits par sachet, il lui en restera 5,
- si elle met 8 biscuits par sachet, il lui en restera 7,
- si elle met 12 biscuits par sachet, il lui en restera 11,
- si elle met 16 biscuits par sachet, il lui en restera 15.

Combien de biscuits Émilie a-t-elle faits ? Expliquez comment vous avez trouvé.

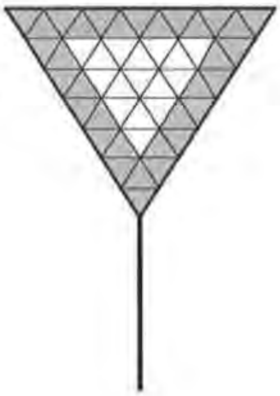
13. LES « BIPALINDROMES » (Cat. 7, 8, 9)

Au pays des Bipalindromes, toutes les plaques de voitures portent un nombre de six chiffres différents de 0 et chaque nombre est formé de deux palindromes de trois chiffres.
Un palindrome est un nombre ou un mot qui se lit de la même manière de droite à gauche et de gauche à droite comme par exemple 121.
Voici des plaques de voitures du pays des Bipalindromes 121 787 ou 444 242 ou 676 141 ou 111 111

Par contre, 131 456 ne convient pas car le deuxième groupe de trois chiffres n'est pas un palindrome.
De même, 303 565 ne convient pas car le premier palindrome contient un 0 qui n'est pas autorisé au pays des Bipalindromes.

Combien de numéros de plaques de voitures différents peut-il y avoir au maximum dans ce pays ? Expliquez votre démarche.

14. DROLE DE PANNEAU ! (Cat. 7, 8, 9)



Ce panneau triangulaire est formé de petits triangles équilatéraux, tous isométriques. 16 d'entre eux forment un triangle intérieur et les 33 autres constituent la bordure extérieure à ce triangle.

Est-il possible de fabriquer un autre panneau triangulaire, de taille différente mais, pour lequel la bordure extérieure, toujours de même largeur, aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieure?

Expliquez votre démarche et justifiez votre réponse.

15. LA SOURIS (Cat. 7, 8, 9)

Un petit blagueur a secrètement mis une souris dans la veste de l'institutrice.

On découvre assez vite que le coupable qui a joué le mauvais tour est un des trois élèves suivants: Claude, Marco ou Pedro.
Claude dit: «Ce n'était pas moi.»
Marco prétend: «C'était Pedro.»
Pedro proteste: «C'était Claude.»

Sachant qu'un seul des élèves dit la vérité et que deux d'entre eux sont des menteurs, aidez le détective à mener l'enquête pour savoir qui ment et qui pourrait être le coupable.

Expliquez votre raisonnement.

16. EXCURSION A LA MER (Cat. 8, 9)

Pour effectuer le trajet entre Dublin et Kinsale, une petite ville de plaisance au bord de la mer, les autobus mettent une heure exactement. À chaque heure pile, il en part, simultanément, un de Dublin vers Kinsale et un autre, de Kinsale vers Dublin.

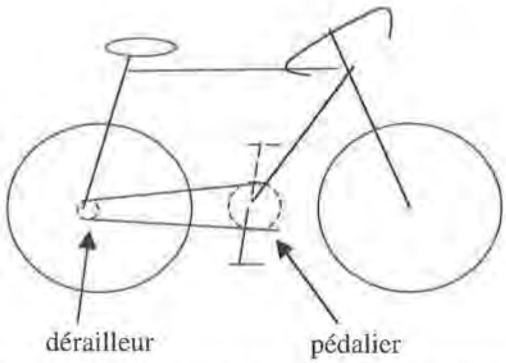
Aldo, est à la station de Dublin. Comme l'autobus est plein, il part à pied, en même temps que le bus, en direction de Kinsale. Après avoir marché 50 minutes, il croise l'autobus qui vient de Kinsale.

Combien de temps Aldo devra-t-il encore marcher avant que le prochain autobus venant de Dublin ne le rattrape, et qu'il puisse éventuellement y monter.

Trouvez la solution et expliquez votre raisonnement.

17. LE VELO DE COURSE (Cat. 8, 9)

Quand il ne pleut pas, Louis se rend à l'école avec son vélo de course



(Le rapport entre le nombre de dents du pédalier et celui du dérailleur donne le nombre de tours que la roue effectue à chaque tour du pédalier.)

À l'aller, pour gagner du temps, il utilise un grand rapport: 55 dents au pédalier et 11 dents au dérailleur. Au retour, plus fatigué, il utilise un rapport plus faible: 42 dents au pédalier et 14 dents au dérailleur.

À l'aller, il lui faut 100 tours de pédales pour arriver à l'école alors qu'au retour, après 100 tours, il lui manque encore 400 mètres pour arriver à la maison.

À quelle distance de l'école se trouve la maison de Louis?

Expliquez votre raisonnement.

18. A LA RECHERCHE DU RECTANGLE (Cat. 9)

Avec 24 trapèzes rectangles identiques, on recouvre entièrement un rectangle dont un côté mesure 12 cm. Chaque trapèze a 16 cm de périmètre et les mesures de tous ses côtés, en cm, sont des nombres naturels, tous différents.

Combien mesure l'autre côté du rectangle? Dessinez le rectangle avec les trapèzes qui le recouvrent.

Expliquez votre raisonnement.

QUELQUES RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

Problème 2 « RMT 2005 »[1]

Nous sommes ici dans la comparaison des aires, avec une intention évidente de faire apparaître la mesure, à un niveau scolaire où ces notions sont en phase d'approche[2], sans encore aucun formalisme ni règle institutionnalisés.

Les élèves doivent se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver un moyen de les comparer : par recouvrement et découpages, par pavage avec une ou plusieurs formes et, en cas d'adoption d'un pavé unité, par comptage.

Parmi les unités les plus naturelles pour ce contexte, il y a la « brique » (rectangle) et la « demi-brique » (carré), mais, dans un cas comme dans l'autre, il faudra tenir compte des triangles (demi-carré) et des trapèzes (3/4 de brique ou 1 carré et demi) qu'il faudra convertir en briques ou en carrés.

L'unité choisie, les règles d'échanges bien assimilées, il faut encore organiser le comptage de manière rigoureuse car les différentes formes qui apparaissent sont nombreuses et disposées différemment dans le « 2 » et le « 5 » qui restent à peindre.

Au passage, on peut remarquer qu'il n'est pas très utile de calculer l'aire des « 0 », en faisant appel à un principe d'équivalence, encore intuitif. On peut ainsi s'éviter bien des comptages et des sources d'erreur.

1 Enoncé en page 19

2 Selon les moyens d'enseignement de Suisse romande « Mathématiques 3P et 4P », RMT 2005 aurait sa place dans le module 7 « Des problèmes pour mesurer » visant à faire « prendre conscience de la nécessité d'une unité pour mesurer et comparer des grandeurs », aux côtés d'activités comme, en 3e : *Faux jumeaux, Quelle forme, Les six carrés,* en 4e : *Du plus grand au plus petit, Empreintes, Mosaïques.*

Il ne reste plus alors qu'à conclure : expliquer que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en disant par exemple que le « 2 » correspond à 17 briques alors que le « 5 » correspond à 18 briques.

Analyse des résultats

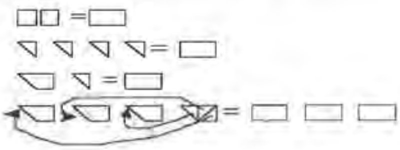
(sur 68 copies de Suisse romande : 25 de catégorie 3 et 43 de catégorie 4)

1 Dénombrement des briques

C'est la procédure « experte » par mesure d'aire, selon une même unité, la « brique » rectangulaire.

31 copies (46 %)

- dont 8 correctes, qui ne prennent en compte que deux briques[3] :
  C'est Marc qui utilisera le plus de peinture. On a compté les briques du cinq et du deux. Il y a 17 briques dans le deux et 18 briques dans le cinq.
  ou les quatre briques :
  C'est Marc qui peindra le plus parce qu'il peindra le zéro qui = 21 briques et le 5 qui a 18 briques. ...Il peindra 39 briques. Sophie peindra que 38 briques. Comment est-ce qu'on a fait. On n'a compté les briques des deux 0 du 5 et du 2.

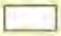


- dont 8 avec une seule erreur de comptage des briques,
- dont 6 avec deux erreurs de comptage, ou inachevées mais avec une description précise des échanges, par type de pièce, comme :
- dont 9 sans donner le résultat du comptage, du genre :

3 L'orthographe des copies citées a été partiellement corrigée, mais la syntaxe et les expressions ont été maintenues.

C'est Marc qui a peint le plus. On a compté les briques
ou avec des détails du comptage imprécis et des transformations erronées comme:

C'est Sophie qui doit peindre le plus, on a compté les carreaux en calculant, Sophie va en peindre 36 et Marc 32,5.

Sophie *10 + 9 = 19* 	*Marc* *10 + 10 = 20* 
4 + 10 = 14 : 2 = 7 	10 + 6 = 16 : 2 = 8 
5 + 9 = 14 et le 3/4 est 6.8 	4 + 6 = 10 et le 3/4 est 2.5 
9 + 4 = 13 : 3 = 3.20 	4 + 2 = 6 : 3 = 2 
19 + 7 + 6.8 + 3.2 = 36	20 + 8 + 2.5 + 2 = 32.5

(Les comptages des formes sont exacts, on remarque au passage la division par 3 pour les triangles, une transformation « 3/4 » pour les trapèzes avec, vraisemblablement, l'usage de la calculatrice et l'apparition de nombres décimaux sur son écran, que ces élèves n'ont encore pas étudiés en classe.)

2. Dénombrement des formes (ou parties) à l'intérieur des lettres

Dans cette procédure, les nombres de rectangles, de carrés, de triangles et de trapèzes sont additionnés, sans tenir compte de la grandeur de ces figures; c'est-à-dire sans la définition d'une unité commune.

24 copies (35 %)

- dont 10 indiquent 59 pour Sophie et 56 pour Marc, du genre:
  Sophie peindra le plus avec le plus de peinture.
  On a compté les briques du 2, 0 et du 0, 5. Alors le 2, 0 (59) sont les plus grands et le 0, 5 (56) sont les plus petit.
- dont 14 indiquent des résultats de comptages proches de 59 et de 56, dans lesquelles une ou deux formes ont été oubliées ou comptées à double.

3. Comparaison par superposition/décomposition ou par recouvrement pas à pas

Dans cette procédure, on ne s'intéresse pas à l'aspect numérique de la mesure. Il n'y a pas de nombre de parties ou d'unités

7 copies (10 %),

- dont 4 parlent de superposition du « 2 » et du « 5 » du genre:
  Marc peindra plus que Sophie. On l'a retourné et on a vu que le cinq avait plus de briques.
  ou, de manière un peu ambiguë, vu l'erreur:
  Nous avons décalé le deux et nous avons découpé le tour du deux puis on l'a plié sur le cinq et nous avons dû encore les découper et nous avons vu que le deux a besoin de plus de peinture que le cinq. Nous avons vu que les zéros sont

identiques. Ce sera Sophie qui utilisera le plus de peinture.
- dont 3 montrent que les élèves ont marqué ou colorié simultanément le « 2 » et le « 5 » pièce par pièce.
  Par exemple, une copie présente un coloriage avec des couleurs (une dizaine) identiques pour les différentes pièces des deux zéros et une progression du coloriage à partir du haut dans le « 5 » et le « 2 » : les 3 rectangles de la première ligne du « 5 » en vert, orange et jaune, comme ceux des deux premières lignes du « 2 », puis les 2 carrés de la deuxième ligne du cinq en bleu comme les 4 triangles des deux premières lignes du « 2 », puis les deux rectangles de la deuxième ligne du « 5 » en violet et brun comme le rectangle de la troisième ligne du « 2 » et le trapèze et le triangle de l'extrémité supérieure droite du « 2 », etc. À la fin, il reste deux parties triangulaires signalées par « vides » et correspondant à une brique, dans le bas du « 5 » avec l'indication *« si on les colorie on utilisera plus de peinture »* et la conclusion *« Le 05 utilise plus de peinture. »*

4. Prise en compte des périmètres des lettres pour déterminer la quantité de peinture.

6 copies (9 %)
- dont 5 mesurées en cm, qui aboutissent à de longues additions de nombres décimaux et des sommes proches de 17 cm.
- dont 1 compte les segments du périmètre : *On a compté les traits du 5 et du 2 et on a vu que le 5 avait plus de traits. Comme les deux 0 sont les mêmes on ne les a pas comptés et alors le 5 a 15 traits. Et le 2 a 14 traits.*
  C'est Marc qui peint le plus!

Attribution des points

Lors de l'analyse a priori, il avait été prévu d'attribuer les points selon le barème suivant :

4 La réponse juste (Marc) avec l'aire des lettres « 2 » et « 5 » et les explications sur la manière de les obtenir (si les aires des « 0 » sont aussi indiquées, 42 carrés, sans erreur, on les accepte)

3 La réponse juste, avec les aires, mais sans indication sur la manière dont elles ont été obtenues
ou la réponse juste et expliquée, avec une erreur dans le calcul de l'aire de « 0 »

2 Une seule erreur dans le comptage des unités d'aire du « 2 » ou du « 5 », avec explication et réponse cohérente

1 La réponse juste (Marc), sans explications sur la détermination de l'aire (« on a vu que... »)

0 Incompréhension du problème ou prise en compte des périmètres, estimations visuelles

La richesse des procédures découvertes lors de l'analyse des résultats a conduit les évaluateurs à assouplir légèrement ce barème :
3 points ont aussi été accordés aux procédures de dénombrement des briques, avec unité de mesure unique (1) ne présentant qu'une seule erreur de comptage ;
2 points ont été attribués aux réponses justes avec deux erreurs de comptage ;
1 point a été attribué, après négociations difficiles entre évaluateurs, à des procédures de dénombrement par formes (2) sans le respect de l'unicité de l'unité, mais avec un comptage exact. On considère alors que cette insuffisance est pénalisée par un retrait de 3 points mais que le travail de comptage et la cohérence de la conclusion méritent tout de même 1 point.

Certains évaluateurs trouvent parfois que les critères d'attribution des points du RMT sont trop complexes et aspirent à une échelle réductrice du genre : « 4 : tout juste – 3 : juste – 2 : moyen – 1 : faux – 0 : tout faux » évitant les longues énumérations de types de réponses et de types d'erreurs.
Le cas du « RMT 2005 » est certes complexe. L'analyse a priori n'avait pas prévu toutes les procédures, en particulier la « non-constance »

de l'unité. Mais le phénomène se retrouve pour la majorité des problèmes : la complexité est inhérente à la résolution de problème. On ne pourrait l'éviter qu'en se limitant à proposer des tâches algorithmiques, beaucoup plus faciles à noter.
Pour attribuer des points aux problèmes du RMT, il faut se mettre dans la tête des élèves qui les ont résolu et tâcher de reconstituer leur cheminement intellectuel à partir des indices qu'ils sont capables de fournir.

Potentialités du problème pour la classe

« RMT 2005 » s'est révélé difficile en catégorie 3 comme en catégorie 4 (avec des moyennes des points attribués respectivement de 1,24 et 1,6).
On pourrait le regretter ou craindre un effet de découragement chez les élèves.
On peut au contraire se réjouir de la « consistance » du problème et, vu qu'aucune copie n'est blanche, des efforts entrepris par les groupes qui se sont engagés dans la résolution.
Dans les manuels scolaires, la tendance actuelle est de simplifier la tâche des élèves, d'écarter les obstacles éventuels, de faciliter les comptages en agrandissant les figures et en diminuant leur nombre. De là à dire qu'on « cherche à ce qu'il n'y ait plus de problème », il n'y a qu'un petit pas.
On est ici dans une problématique de « dévolution ». Quelle partie de la tâche va-t-on laisser au groupe d'élèves, quelle partie va-t-on confier à l'énoncé du problème ?
Dans « RMT 2005 », on laisse beaucoup de tâches aux élèves et aux maîtres qui voudraient exploiter ce problème pour la classe, en lieu et place d'activités bien progressives qui vont guider l'élève vers des automatismes non intégrés. La notion « d'invariance de l'unité » dans la construction d'une procédure de mesure est une découverte essentielle, qui ne deviendra consciente que par la confrontation de cas où elle est prise en compte avec des cas où elle est oubliée.

Au vu des 68 copies analysées, on peut être presque certain que les principales stratégies relevées doivent apparaître au moins une fois dans une classe. Ceux qui n'ont pas encore reconnu l'importance d'une unité constante pourront se confronter avec ceux qui l'utilisent, peut-être inconsciemment, avec ceux qui n'ont pas encore de méthode rigoureuse de comptage, avec ceux pour qui les règles d'échanges entre rectangles, carrés, triangles et trapèzes sont encore vacillantes.
Il y a de la place, dans ce contexte, pour des argumentations, des validations entre élèves, puis des développements et des variantes (il y a d'autres lettres ou d'autres chiffres à peindre sur le mur) pour aller jusqu'aux institutionnalisations de la part du maître.
À condition, bien sûr, qu'on ne fasse pas « RMT 2005 » en plus des autres activités du programme sur les mesures d'aire, mais *à la place*.

Corrections : une équipe d'étudiants de la HEP Bejune, de la classe de A. Gaggero, avec la collaboration de F. Jaquet

Problème 7 « Grilles d'allumettes »[4]

Ce genre de problème est courant dans le RMT. Sans encore avoir de connaissances explicites sur les fonctions, les élèves doivent percevoir qu'il y a deux suites en correspondance très étroite : celle des figures, dans l'espace réel ou dans celui de la feuille, et celle des nombres d'allumettes permettant de les réaliser. Lorsqu'on passe entièrement dans le registre numérique, la suite des figures devient celle de leurs numéros d'ordre : les nombres naturels ordonnés.
L'analyse a priori du problème, fondée sur des années d'expérience et d'analyses, s'est révélée assez précise, en voici une partie :

4 Enoncé en page 21

Analyse de la tâche

- *Continuer éventuellement la suite de figures et compter pour chacune d'elles les allumettes, constituer une liste de nombres associée à celle des figures pour la compléter ensuite,*
- *Constater que dans la suite 12, 17, 22, 27, 32, ... on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.*
- *Ajouter 99 fois 5 à 12 pour obtenir 12 + 99 x 5 = 507.*

Ou / et : présenter les résultats sous forme de tableau :

figure no.	*1*	*2*	*3*	*4*	*...*	*9*	*10*	*...*	*20*	*...*	*80*	*...*	*100*
allumettes	*12*	*17*	*22*	*27*	*...*	*52*	*57*	*...*	*107*	*...*	*407*	*...*	*507*

et observer les séquences des chiffres 2 et 7 pour les unités, et des chiffres des dizaines pour sauter des étapes en travaillant de 10 en 10, de 20 en 20, etc.

Ou : Trouver la loi de passage qui permet ensuite de déterminer l'image de 100.

Ou : Utiliser la relation « multiplier par 5 et ajouter 7 » (l'écriture algébrique f(x) = 5x+7 n'est pas attendue en catégorie 5 et 6) pour trouver la réponse attendue (507).

Ou : Sans construire la suite, ni passer par une procédure fonctionnelle, se rendre compte que la 100e figure aura une longueur de 101 et calculer les segments horizontaux : 3 x 101 et les verticaux 2 x 102.

Les procédures relevées

1. L'opération 12 + 99 x 5 = 507

C'est la procédure la plus efficace dite « experte », qui se passe dans le registre numérique, avec un minimum de références à la « suite des figures ».

Le « 12 » est donné dans l'énoncé.

Le « 5 » est induit par le « il a fallu quelques allumettes de plus » de l'énoncé

Le « 99 » vient de la différence entre la première figure et la centième.

L'erreur la plus fréquente liée à cette procédure est 512 (100 en lieu et place de 99).
On la rencontre surtout chez les groupes de catégorie 6 et 7, mais elle n'est pas majoritaire.

2. Le passage par le modèle d'une suite de figures

Cette procédure correspond à l'intention de l'énoncé du problème et est largement développée dans l'analyse de la tâche.
Le modèle géométrique se traduit par la progression arithmétique 12, 17, 22, ... dont il s'agira de calculer le 100e terme.
Les copies font apparaître de nombreux moyens de l'atteindre :

- Le plus « élémentaire » est l'écriture des cent termes de la progression, mais il demande un contrôle précis par correspondance avec la suite des nombres naturels de 1 à 100. Les risques d'oublis sont élevés et, effectivement, les omissions ont été fréquentes dans ce long inventaire.
- Les élèves qui veulent « gagner du temps » par rapport à la longue écriture précédente vont jusqu'à 50 (257) et multiplient par 2 pour atteindre 514, d'autres vont jusqu'à 10 (57) et multiplient par 10 pour atteindre 570, d'autres encore considèrent que, vu qu'il y a 12 allumettes pour 2 rangs, il suffira de multiplier par 50 pour 100 rangs et 600 allumettes. Tous ces cas relèvent d'une « linéarisation » abusive, très courante dans tous les problèmes de ce genre où les élèves appliquent aveuglement des procédures « algorithmiques » consistant à reproduire des opérations d'une suite sur l'autre.
- Les procédures « fonctionnelles » consistant à trouver la loi de passage directe entre la suite des nombres naturels et la suite des nombres d'allumettes sont très rares. Pour les découvrir, il faudrait considérer la figure « zéro » composée de 7 allumettes et passer par la loi

« multiplier par 5 et ajouter 7 », pour la centième figure : 100 x 5 + 7.

3. Le passage par les carrés et leurs côtés
De nombreuses erreurs sont dues à une intuition fautive selon laquelle, comme la première figure est composée de 12 allumettes en 4 carrés, il faudra 3 allumettes par carrés, ce qui entraîne des réponses proches de 600, compte tenu des imprécisions dans le calcul du nombre de carrés de la centième figure.

Attribution des points

C'est ainsi que le barème a été établi, lors de l'analyse a priori du problème :

4 *Réponse correcte (507) avec explication correcte de la démarche (12 + 99 x 5 ou 3 x 101 + 2 x 102, etc.)*
3 *Réponse correcte (507) avec explication peu claire ou incomplète*
2 *Valeur proche de 507, avec explications mais erreur sur le nombre de « pas » (réponse comme 502 ou 512), ou réponse correcte sans explication ou procédure correcte mais avec une (seule) erreur de calcul conduisant à une réponse plus éloignée de 507*
1 *Suite définie jusqu'à 10, puis erreur en « linéarisant » et en multipliant l'image de 10 par 10 pour avoir celle de 100 (réponse 570)*
0 *Incompréhension du problème*

On pourrait détailler la rubrique « 1 point » de ce barème en ajoutant d'autres exemples de « linéarisation », de 50 en 50, voire 2 en 2. Les linéarisations abusives de la catégorie (2) accompagnées de fautes de calcul et le passage par les carrés et leurs côtés (3) constituent l'essentiel des copies qui ont reçu « 0 point ». Il n'y a eu qu'une ou deux feuilles blanches témoignant d'une réelle « incompréhension du problème » ou d'un manque d'organisation de la classe qui aurait oublié le problème.

Selon ce barème, les résultats des classes de Suisse romande sont les suivants :

en nombre de classes et (pourcentages)

	cat. 5		cat. 6		cat. 7		total	
4 pts	7	(15)	23	(33)	22	(47)	52	(32)
3 pts	4	(08)	7	(10)	4	(08)	15	(09)
2 pts	6	(13)	8	(12)	6	(13)	20	(12)
1 pt	8	(17)	13	(19)	4	(08)	25	(16)
0 pt	22	(47)	18	(26)	11	(24)	51	(31)
total	**47**		**69**		**47**		**163**	**(100)**

On relève une nette progression de la catégorie 5 à la catégorie 7.
Les copies de 17 classes de Franche-Comté ont aussi été analysées et ont fait apparaître les mêmes procédures et des tendances comparables dans les résultats. Comme il ne s'agissait que d'une première expérimentation du RMT dans cette région où les programmes et manuels sont très différents de ceux de la Suisse romande, des comparaisons plus poussées n'auraient pas de signification.)

Corrections : une équipe d'étudiants de la HEP Bejune, de la classe de A. Gaggero, avec la collaboration de F. Jaquet et de l'équipe du RMT de Franche-Comté

Problème 11 « Les champignons »[5]

Ce problème se traduit par un système d'équations et inéquations à 5 inconnues, dont la résolution n'est pas évidente vu qu'il y a de nombreuses solutions.
Les élèves dont les connaissances en algèbre ne sont pas encore disponibles, peuvent le résoudre par inventaire des possibilités selon les relations les plus simples, ou par un tableau, puis par éliminations successives.

L'analyse de la tâche

Celle-ci a évolué sensiblement entre le début de l'élaboration du problème et la version définitive. À sa lecture, on perçoit la complexité de la recherche conduisant à toutes les solutions :

- *Chercher les répartitions possibles des champignons dans les paniers d'Anna et de Céline et trouver les 5 possibilités respectant les contraintes de l'énoncé : 5 et 2 ; 4 et 3 ; 4 et 2 ; 3 et 3, 3 et 2, à ce moment de la recherche.*
- *Calculer le nombre correspondant de champignons de Bruno dans les cinq cas puis la différence entre le nombre total de champignons et la somme des champignons récoltés par Anna, Céline et Bruno, c'est-à-dire ceux de mon oncle et Daniel ensemble.*
- *Calculer enfin les deux derniers nombres, à partir de la somme connue: D + O et de la relation donnée par l'énoncé: D = O + A. On peut procéder par essais successifs ou par un raisonnement arithmétique avec substitution, correspondant à une procédure algébrique. (Par exemple, en substituant O+A à D dans l'expression connue D + O, on obtient 2xO + A, puis en enlevant A on arrive à 2xO.*

Les résultats peuvent être organisés en tableau, par exemple :

Anna	*Céline*	*Bruno*	*A+B+C*	*D + O*	*Daniel*	*Oncle*
5	*2*	***6***	*13*	*17*	***11***	***6***
4	***3***	***9***	*16*	*14*	***9***	***5***
4	***2***	***6***	*12*	*18*	***11***	***6***
3	*3*	*9*	*15*	*15*	*9*	*6*
3	***2***	***6***	*11*	*19*	***11***	***8***

- *Le contrôle de la condition « Ce n'est pas Anna qui a récolté le moins de champignons » élimine la 4^e^ hypothèse et il ne reste que les solutions, remises dans l'ordre A, B, C, D, O : (5, 6, 2, 11, 6) ; (4, 9, 3, 9, 5) ; (4, 6, 2, 11, 6) ; (3, 6, 2, 11, 8).*

Résultats (Tableau 1)

nb points	*niveau 6*	*niveau 7*	*niveau 8*	***totaux***	***% du total***
non rép.	*1*	*1*	-	***2***	***~1***
0	*29*	*8*	*5*	***42***	***28***
1	*39*	*27*	*16*	***82***	***55***
2	*2*	*7*	*6*	***15***	***10***
3	-	*1*	*4*	***5***	***~3***
4	-	*3*	*1*	***4***	***~3***
totaux	***71***	***47***	***32***	***150***	

5 Enoncé en page 22

Erreurs commises
(Tableau 2) pour les 42 classes ayant obtenu 0 pt

erreur	*nb classes*	*% du total*
la somme Anna + Céline est égale ou supérieure à 8	***12***	*29*
Anna a autant ou moins de champignons que Céline	***10***	*24*
le résultat de Daniel n'est pas égal à O + A	***10***	*24*
le résultat de Bruno n'est pas égal à 3 x C	***5***	*12*
la répartition des champignons n'est pas terminée	***4***	*10*
le total des champignons n'est pas égal à 30	***1***	*2*

Répartition des solutions
(Tableau 3) pour les 82 classes ayant fourni une seule réponse correcte, donc ayant obtenu 1 pt

solution	*niveau 6*	*niveau 7*	*niveau 8*	**totaux**	***en %***
4-9-3-9-5	*27*	*20*	*8*	**55**	***67***
5-6-2-11-6	*5*	*1*	*6*	**12**	***15***
4-6-2-11-7	*3*	*4*	*1*	**8**	***10***
3-6-2-11-8	*4*	*2*	*1*	**7**	***9***

Les résultats sont médiocres, très peu de classes sont arrivées au bout de la démarche, avec à la clé les 4 réponses correctes ! (tableau 1) A cet égard, il faut reconnaître que le barème est sévère car il pénalise ceux qui ne sont pas allés au-delà de la première solution.
Trois erreurs sont assez fréquentes et réparties équitablement (tableau 2). Elles correspondent au non-respect de l'une des nombreuses contraintes de l'énoncé.
La répartition des solutions uniques est intéressante avec l'émergence nette de la solution 4-9-3-9-5 (tableau 3).
Les classes les meilleures ont, pour la plupart, argumenté comme l'analyse de la tâche le suggère et quelques classe ont travaillé avec un tableau dans lequel elles ajoutaient des champignons à chacune des personnes en partant de 2.
Deux classes seulement expliquent clairement des procédures systématiques pour les 5 possibilités respectant la contrainte A + C < 8 !

Corrections et commentaires : Didier-Michel Thiebaud et Catherine Meyer, Peseux (NE)

LA MESURE DU TEMPS

Antoine Gaggero, HEP-BEJUNE
site de Bienne

Préambule

Les premières traces écrites de l'humanité montrent que l'homme observait déjà les phénomènes naturels tels que les phases de la lune, le mouvement des astres, les phénomènes astronomiques rares et les variations climatiques. Des vestiges archéologiques attestent que l'homme a observé des phénomènes naturels, comme le site de Stonehenge, qui témoigne que ses bâtisseurs connaissaient les dates du solstice et d'autres phénomènes astronomiques. Des fragments d'œuvres anciennes montrent que la première observation attestée de la comète de Halley fut faite par les Chinois en –1057 et que Thalès a annoncé à l'avance l'éclipse solaire qui eut lieu en –585 à Milet.
Pour les besoins de l'agriculture ou de la religion ou encore pour prévoir la crue du Nil lors du lever de l'étoile Sirius ou Sothis, par exemple, l'homme a utilisé ses observations et créé ainsi un partage du temps qui est devenu peu à peu le calendrier utilisé par les différentes cultures de la planète.
Toutes les civilisations ont ainsi construit un partage du temps et je ne peux parler de chacune de ces méthodes. J'ai donc choisi de tracer la voie qui a mené au calendrier actuellement en vigueur en Europe et commercialement utilisé dans le monde entier.

La problématique

L'observation des cycles de la lune ou du soleil a donné naissance à trois types de calendrier :

- Le calendrier lunaire
  Le mois lunaire est le nombre de jours qui s'écoulent entre une lune pleine et la suivante par exemple. Ce nombre de jours est 29 ou 30 selon les cas.
  Le calendrier musulman est de ce type. En définissant l'année sur 12 mois, ce type de calendrier provoque un décalage de 12 jours par rapport au cycle solaire.
- Le calendrier solaire
  L'année solaire est le nombre de jours qui s'écoulent entre deux mêmes positions du soleil dans le ciel. On peut repérer, par exemple, l'ombre portée par un bâton au moment où celle-ci est la plus courte.
  On divise ce nombre de jours par 12 et on obtient le mois solaire. Or la révolution de la Terre autour du soleil est de 365, 2422... jours, soit environ 365 jours 5 heures 48 minutes 46 secondes.
  Le calendrier grégorien, le nôtre, est de ce type.
- Le calendrier luni-solaire
  Ce type de calendrier essaie de prendre en compte les caractéristiques du mouvement de la lune et du soleil.
  Le calendrier juif est de ce type.

Le calendrier égyptien

Quatre mille ans avant J.-C., les Egyptiens utilisaient un calendrier lunaire qui totalisait 354 jours et les douze mois comptaient alternativement 29 et 30 jours. Ce calendrier, toujours en usage comme calendrier religieux chez les musulmans, aboutit à un décalage annuel de 12 jours par rapport à l'année solaire, ce qui explique que les fêtes musulmanes ou le mois du Ramadan sont progressivement décalées dans l'année.

En 2800 ans avant J.-C., l'Egypte se dota d'un calendrier fondé sur l'apparition annuelle d'une étoile très brillante, Sirius ou Sothis. Le lever simultané du soleil et de Sirius en Egypte coïncidait avec la crue du Nil, pendant l'actuel mois de juin. Ce lever simultané n'étant visible en

Egypte qu'une fois par an, on le prit comme premier jour de l'année de 365 jours, répartis en 12 mois de 30 jours, et de 5 jours épagomènes[1]. Puis, les Egyptiens se rendirent compte qu'il manquait un jour tous les quatre ans. Ptolémée III corrigea le décalage, en 238 avant. J.-C. à Canope, près d'Alexandrie, avec l'aide des prêtres égyptiens astronomes. Il ajouta un jour tous les quatre ans, à chaque année du cycle de Sirius. Cette décision est connue sous le nom de « décret de Canope », dont les musées du Caire et du Louvre possèdent un exemplaire. Ce jour est ajouté aux jours épagomènes.

Le calendrier romain

Selon la légende, que certaines fouilles récentes semblent confirmer, Romulus devint le premier roi de Rome, qui fut fondée le 21 avril 753 av. J.-C. Par la suite, les Romains exprimeront leurs dates à partir de la fondation de Rome, Ab Urbe Condita.
Le calendrier des origines n'était pas très performant. Il comptait en effet 10 mois pour un total de 300 jours. Il fallait donc chaque année faire des corrections.

Numa Pompilius, premier successeur de Romulus, entreprit une correction du calendrier primitif et décida d'ajouter les 50 jours manquants sous la forme de deux mois supplémentaires. Mais le total ne faisant que 355 jours, Numa décida d'ajouter un mois intercalaire, nommé Mercedonius, tous les deux ans, de longueur variable, afin de faire coïncider le calendrier et l'année solaire. Mais qui déciderait du nombre de jours intercalaires? On confia au Collège des Pontifes la tâche de donner à Mercedonius la longueur qu'il fallait. Les Pontifes étaient beaucoup plus guidés par leurs intérêts financiers, eux-mêmes liés au nombre de jours du mois intercalaire. En effet, ils avaient ainsi la possibilité de modifier la durée du mandat politique de leurs amis ou ennemis.
Après quelques siècles de manipulations, en 46 av. J.-C. le calendrier romain était en retard de trois mois par rapport aux saisons et donc au calendrier solaire.
Telle était la situation que trouva César, en 46 avant J.-C. Le nom des mois fait référence à un calendrier précédent qui ne comptait que dix mois et pour lequel l'année commençait en mars. Avec l'adjonction des deux mois supplémentaires, le début de l'année passa en janvier.

Noms des mois	**Durée en jours**	**Signification**
Januarius	29	Janus, le dieu à deux visages
Februarius	28	Febro, le dieu des enfers
Maritius	31	Mars, le dieu de la guerre
Aprilis	29	Aphrodite, en latin Venus
Maius	31	Maia fille d'Atlas
Junius	29	Junon, épouse de jupiter
Quintilis	31	Le cinquième
Sextilis	29	Le sixième
September	29	Le septième
October	31	Le huitième
November	29	Le neuvième
December	29	Le dixième
Mercedonius	Décision des Pontifes	

1 Les jours épagomènes comblaient le décalage entre l'année civile et l'année solaire. En Egypte ces 5 jours représentaient l'anniversaire des cinq dieux les plus populaires: Osiris (14 juillet.), Horus (15 juillet.), Seth (16 juillet.), Isis (17 juillet.) et Nephthys (18 juillet.).

Le calendrier Julien

César prit le pouvoir en 45 avant. J.-C. et put alors légiférer à son aise et réformer les institutions romaines, dont le calendrier.
Pour entreprendre cette réforme, César suivit les conseils de Sosigène, astronome d'Alexandrie. Sosigène est l'héritier d'une longue lignée d'astronomes qui ont travaillé à la bibliothèque d'Alexandrie, comme Aristarque, vers –270, qui conçut une horloge solaire, mena des observations sur le Soleil et prétendit que la terre se déplaçait par rapport au soleil, ou encore Eratosthène (-276 à -194) qui mesura l'inclinaison de l'axe de la Terre et le périmètre de la Terre. Une mention spéciale pour Hipparque qui, vers – 130, découvrit la précession des équinoxes et calcula la durée de l'année solaire à six minutes près, soit 365 jours, cinq heures et cinquante-cinq minutes.
La tâche de César était énorme et il la connaissait bien puisqu'il était lui-même pontife :

- Rattraper le temps perdu et faire correspondre l'année solaire aux saisons.
- Mettre en place un nouveau calendrier, sûr, fiable et qui ne sera plus soumis au bon vouloir des pontifes.

Pour rattraper le temps perdu, César ordonna d'ajouter à l'année 46 avant J.-C. 90 jours intercalaires. Ainsi cette année, nommée par les Romains année de la confusion, compta 445 jours. Le nouveau calendrier commença donc en 45 avant J.-C. Il est défini de la manière suivante :

➢ Le début de l'année est le 1 januarius.
➢ On respecte l'équinoxe de printemps fixée au 25 mars.
➢ L'année compte 365 jours avec un jour intercalaire tous les quatre ans. Ce jour sera placé avant le 24 februarius qui se nommait sextilis et le jour supplémentaire prit le nom bis sextilis ce qui donna année bissextile.
➢ Le nombre de jours par mois est alternativement de 31 et 30 jours sauf pour février qui comptait 29 jours ou 30 pour l'année bissextile.

Puis la politique influença ce bel édifice. Le Sénat, sur proposition de Marc Antoine consacra le mois de Quintilis à César et le nomma Julius. Plus tard, le Sénat décida de dédier Sextilis à Auguste et le nomma Augustus. Mais comme ce mois ne pouvait compter moins de jours que celui dédié à César, le Sénat préleva un jour à Februarius pour le donner à Augustus.

Le calendrier julien tel qu'on le connaît est ainsi formé. Constantin le Grand, devenu chrétien en 312, ajouta les éléments suivants :

➢ La reconnaissance des fêtes chrétiennes à des dates fixes.
➢ La reconnaissance officielle de la fête de Pâques comme fête mobile selon le Concile de Nicée en 325.
➢ L'introduction du dimanche comme jour férié dans la semaine de sept jours.

Le calendrier grégorien

Le problème induit par le calendrier julien est que l'année vaut 365,25 jours et que l'année solaire en vaut 365,2422... Avec les siècles cette différence de 11 minutes et 12 sec se cumula et devint significative. Le pape Grégoire XIII, sensibilisé au problème de la dérive de la date de Pâques dans le calendrier, décida une réforme que bien de ses prédécesseurs n'arrivèrent pas à imposer.
La tâche du pape était de même nature que celle de César :

- Rattraper le décalage du calendrier julien par rapport à l'année solaire qui était plus courte.
- Mettre en place un nouveau calendrier en apportant de petites modifications au calendrier julien.

Par la bulle pontificale du 24 février 1582, le pape promulgua que :

➢ Pour rattraper le décalage de 10 jours entre le calendrier julien et l'année solaire, le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 serait le vendredi 15 octobre 1582.
➢ Le principe des années bissextiles serait maintenu avec une condition supplémentaire. Les années divisibles par 100 ne sont pas bissextiles sauf celles qui sont divisibles par 400. Par exemple, 1900 n'est pas bissextile alors que 2000 l'est.

Le calendrier grégorien tel qu'on le connaît est ainsi formé. Depuis lors il n'a plus été modifié.
Mais avec ce calendrier on a une année de 365,2425 jours, soit une erreur de 0,0003 jours donc environ 25 sec par année !!! Ce qui fera une dérive de 2 à 3 jours dans 10000 ans : on a donc le temps de voir venir.
L'application de cette réforme ne se fit pas simultanément dans tous les pays.

Par exemple :
- en France elle fut appliquée entre le 9-12-1582 et le 20-12-1582
- en Irlande elle fut appliquée entre le 16-11-1700 et 28-11-1700 avec 11 jours de décalage.
- En Appenzell, selon la tradition locale, on fête le nouvel an avec dix jours de décalage.

L'Annus Domini

En 525, le pape Jean Ier demanda à l'abbé Dionysius Exiguus, dit Denis le Petit, d'étudier les problèmes liés à la dérive du calendrier julien et de calculer la date de Pâques pour l'année suivante.
Dionysius sera connu par la suite pour avoir mis en place l'Annus Domini.
Jusqu'à ce moment-là, les années étaient comptées à partir de la fondation de Rome. Dionysius suggéra de compter les années en partant de la réincarnation du Christ et il fit les recherches nécessaires pour placer la naissance du Christ 525 ans auparavant.
On estime maintenant que cet abbé s'est trompé de 3 ou 4 ans et que l'on serait maintenant en 2008 au lieu de 2005 ou encore en 2758 de l'année de Rome.

A quelle date vivons-nous ?

C'est une question légitime que nous pouvons nous poser en observant toutes ces erreurs, ces corrections, un abbé qui se trompe semble-t-il !!!!!
Des historiens suggèrent même que lors de la chute de Rome et du chaos qui suivit, le comptage des années ne fût pas strict et que l'on a ainsi égaré plusieurs années voire même un siècle. Ils en veulent pour preuve la date du couronnement de Charlemagne, qui a eu lieu à Rome le jour de Noël de l'an 800. Une date facile à retenir pour mettre les pendules à l'heure. Je pense que cette idée est farfelue car l'empire Byzantin était organisé et tenait bien les comptes.
La régularité de certains phénomènes astronomiques et les relevés qu'on en a faits pendant l'Antiquité pourraient peut-être nous aider à fixer une date précise. Mais cet investissement énorme aurait-il un sens ? Je laisse la question ouverte d'autant plus que je n'ai pas connaissance de travaux allant dans ce sens.
Je vais être téméraire et affirmer qu'au moment où j'écris cet article, nous sommes le 15 février 2005.

Aspects techniques

Procédé pour calculer le nombre de jours écoulés entre deux dates du calendrier grégorien
Pour chacune des deux dates, date1 et date2, il s'agit de calculer le nombre « Résultat » pour la date1 et la date2, puis de faire la différence. Voici la démarche à suivre pour calculer « Résultat » :

J	numéro du jour	
M	numéro du mois	
A	nombre de l'année	
B	= 365*A	nombre total de jours sans prendre en compte les années bissextiles.
C	= 31 * (M - 1)	nombre total de jours compté sur des mois entiers de 31 jours.
D	= Integer(0,4 * M + 2,3)	est la correction du nombre C due au fait que l'on a calculé des mois de 31 jours. D=0 pour une date du mois de janvier D=0 pour une date du mois de février car le calcul de C ne demande aucune correction.

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	0	0	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7

E	si (M <=2) et (M>2)	est le nombre de jours supplémentaires dû aux années bissextiles, y compris les années séculaires. La formule est différente si (M <=2) et (M>2)
H	si (M <=2) et (M>2)	est la correction de H due au problème des années bissextiles séculaires. La formule est différente si (M <=2) et (M>2)

Voici le raisonnement :

```
SI (M=1 OU M= 2) faire
   { D = 0
     E = Integer ((A - 1)/4)
     H = Integer (0,75 * (ENT (( A - 1 ) / 100) + 1 ))
   }
SI (M>2) faire
   { D = Integer(0,4 * M + 2,3)
     E = ENT (A/4)
     H = ENT (0,75 * (ENT (A/100) + 1 ))
   }
```

Résultat(date) = J + B + C - D + E – H

Pour obtenir le nombre de jours entre la date1 et la date2, il faut calculer :
Nombre de jours = résultat(date2) – résultat(date1)

Le mathématicien enseigne la chronologie en septième

Voici 4 ans, on m'a confié l'enseignement de l'histoire en septième, classe dans laquelle j'enseignais également les mathématiques. Le thème des nombres relatifs étant terminé et assimilé, je pensais ne pas avoir de problème de ce côté-là. En lançant la discussion avec mes élèves, je me suis rendu compte que les représentations sur l'échelle du temps des événements importants n'étaient pas les mêmes pour tous et se chevauchaient agréablement dans un espace à dimensions plus que torsadé !!
La classe était formée d'élèves issus de différentes cultures et de différents milieux culturels. J'ai donc utilisé ce tissu pour mieux rebondir.

- J'ai commencé par demander à chacun de chercher la plus vieille information familiale que leur famille possédait. Cela nous a permis de remonter le temps jusqu'en 1800 environ. Avec une exception, un élève avait des documents remontant à trois siècles.
- Puis chaque enfant a pu construire une échelle du temps avec des affichettes que j'ai apportées et qui faisaient appel à leur culture. Le travail fut réalisé avec enthousiasme et a suscité beaucoup de questions qui ont permis de développer leur représentation de l'échelle du temps. Voici deux affichettes :

- Après avoir aplani ces difficultés, j'ai pu parler de chronologie et apporter des tableaux de ce genre :

365 j	365 j	365 j	365 j	365 j	365 j

-2 -1 0 +1 +2

Le soir du 31 décembre de l'an -1 à minuit a été immédiatement suivi par le premier janvier de l'an +1. L'année zéro n'existe pas !! C'est un repère mathématique commode pour se situer dans le temps.

- A mon avis, le thème a été bien compris par la majorité des élèves et il a permis d'aborder de nombreuses questions comme la généalogie, les documents, l'origine des civilisations, des religions... J'envoie volontiers ce cours aux personnes qui le souhaitent.

Sources

- http://louisg.levillage.org/C_gregorien.htm
  http://perso.wanadoo.fr/palladia/calendrier_romain.htm
- Dans tangente numéro 79, année février 2001

Calendrier perpétuel

Fin du millénaire						
00	01	02	03		**04**	05
06	07		**08**	09	10	11
	12	13	14	15		**16**
17	18	19		**20**	21	22
23		**24**	25	26	27	
28	29	30	31		**32**	33
34	35		**36**	37	38	39
	40	41	42	43		**44**
45	46	47		**48**	49	50
51		**52**	53	54	55	
56	57	58	59		**60**	61
62	63		**64**	65	66	67
	68	69	70	71		**72**
73	74	75		**76**	77	78
79		**80**	81	82	83	
84	85	86	87		**88**	89
90	91		**92**	93	94	95
	96	97	98	99		

Début du millénaire																	
Julien			Grégorien										Les mois				
0	**7**	**14**		17	21	C	B	A	G	F	E	D	Jan				Oct
1	**8**	**15**				D	C	B	A	G	F	E			Mai		
2	**9**	**16**		18	22	E	D	C	B	A	G	F		Fév_b		Août	
3	**10**	**17**				F	E	D	C	B	A	G	Février	Mars			Nov
4	**11**	**18**	15	19	23	G	F	E	D	C	B	A			Juin		
5	**12**	**19**	**16**	**20**	**24**	A	G	F	E	D	C	B				Sept	Déc
6	**13**	**20**				B	A	G	F	E	D	C	Jan_b	Avril	Juillet		

V	S	D	L	Ma	Me	J	1	8	15	22	29
S	D	L	Ma	Me	J	V	2	9	16	23	30
D	L	Ma	Me	J	V	S	3	10	17	24	31
L	Ma	Me	J	V	S	D	4	11	18	25	
Ma	Me	J	V	S	D	L	5	12	19	26	
Me	J	V	S	D	L	Ma	6	13	20	27	
J	V	S	D	L	Ma	Me	7	14	21	28	
							Les jours				

Emploi du calendrier perpétuel

Exemple :

1) Quel jour de la semaine correspond à la date du 5 mai 1950 ?

- Séparer le nombre de l'année en début du millénaire (= nombre de siècles) et fin du millénaire (= nombre d'années formés par les dizaines et unités). Donc 19 et 50.
- L'intersection de la ligne 19 du calendrier grégorien et de la colonne 50 nous donne la lettre **A**.
- Dans le pavé des mois, on repère le mois de **mai** et la position de la lettre **A** sur cette ligne.
- Descendre dans la colonne définie par la lettre **A** jusqu'à la ligne décrite par le nombre 5. L'intersection donne **vendredi**
- Le 5 mai 1950 était un vendredi, jour de naissance de votre scribe !

2) Quel jour de la semaine correspond à la date du 29 mai 1453 ?

- Séparer le nombre de l'année en début du millénaire (= nombre de siècles) et fin du millénaire (= nombre d'années). Donc **14** et **53**.
- L'intersection de la ligne 14 du calendrier julien (en effet cette date est située avant l'année du changement) et de la colonne 53 nous donne la lettre **G**.
- Dans le pavé des mois, on repère le mois de mai et la position de la lettre G sur cette ligne.
- Descendre dans la colonne définie par la lettre G jusqu'à la ligne décrite par le nombre **29**. L'intersection donne **mardi**
- Le 29 mai 1453 était un mardi, jour de la chute de Constantinople.

RÉPONSE AU JEU DE MARIENBAD DU NUMÉRO 213

Au jeu de Marienbad[1] le joueur qui commence reçoit une configuration de quatre rangées qui se composent respectivement de 7, 5, 3 et 1 objets. Il la transforme en une nouvelle configuration en retirant un objet au moins d'une seule rangée et la laisse au second joueur. Celui-ci retire à son tour un objet au moins d'une seule rangée pour obtenir une nouvelle configuration que reçoit le premier joueur. Ainsi de suite. Le perdant est celui qui doit prendre le dernier objet.

Une analyse de ce jeu commence par l'inventaire des configurations des quatre rangées qui, à l'origine, se composent respectivement 7, 5, 3 et 1 objets. Un « coup » consiste, pour un joueur, à passer d'une configuration des objets reçue à une nouvelle, qu'il laisse à l'adversaire.

Voici une manière de présenter cet inventaire des 142 configurations, en colonnes, selon le nombre total d'objets présents, qui peut varier de 16 à 1 (« 1357 » à « 1 ») et selon le nombre de rangées, qui varie de 4 à 1 (IV, III, II, I)

	16	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
(IV)	**1357**	1356	1355													
		1347	**1346**	1345	1344											
			1337	1336	1335	1334	1333									
		1257	**1256**	1255												
			1247	1246	1245	1244										
				1237	1236	1235	1234	1233								
					1227	1226	1225	1224	1223	1222						
			1157	1156	**1155**											
				1147	1146	1145	**1144**									
					1137	1136	1135	1134	**1133**							
						1127	1126	1125	1124	1123	**1122**					
							1117	1116	1115	1114	1113	1112	1111			
(III)		357	**356**	355												
			347	346	345	344										
				337	336	335	334	333								
			257	256	255											
				247	**246**	245	244									
					237	236	235	234	233							
						227	226	225	224	223	222					
				157	156	155										
					147	146	**145**	144								
						137	136	135	134	133						
							127	126	125	124	**123**	122				
								117	116	115	114	113	112	**111**		
(II)					57	56	**55**									
						47	46	45	**44**							
							37	36	35	34	**33**					
								27	26	25	24	23	**22**			
									17	16	15	14	13	12	11	
(I)										7	6	5	4	3	2	**1**

1 Le jeu de Marienbad appartient à la catégorie des jeux de Nim : « caractérisé par un ensemble fini (E) de positions en présence desquelles se trouvent placés alternativement deux joueurs, avec une règle unique du jeu définissant pour toute position (x) donnée à l'un des joueurs, celles qu'il peut offrir à son adversaire (G(x)) et déterminant le gain (ou la perte) de la partie pour celui qui ne peut plus jouer (ou qui se trouve dans une position bloquée) ».

Après l'inventaire des configurations, il faut analyser le jeu à partir de la dernière « **1** » qui est gagnante pour celui qui la laisse à son adversaire (notée en caractères gras dans le tableau).
On remarque que « **1** » peut s'atteindre à partir des 6 configurations de (I) où il y a plus d'un objet dans un seul rang (dernière ligne du tableau) ou des 7 configurations de deux rangs d'objets (II) dont l'un n'a qu'un seul objet (avant-dernière ligne du tableau).
Si vous offrez l'une de ces 13 configurations à votre adversaire, c'est lui qui vous battra en jouant l'un des 13 coups: « 2 » –> « **1** », « 3 » –> « **1** », « 4 » –> « **1** », ..., « 16 » –> « **1** », « 17 » –> « **1** », pour autant qu'il joue bien, c'est-à-dire qu'il ne gaspille pas cette chance de gagner en jouant un autre coup.
Au-delà de ces 13 configurations que nous appellerons perdantes, il n'y a plus de possibilité d'obtenir « **1** » en un coup. Les deux configurations qui viennent alors, en remontant dans le nombre d'objets, sont « **22** » et « **111** ». De la première on ne peut atteindre que « 12 » ou « 2 » (« **22** » –> « 12 », « **22** » –> « 122) et de la seconde, seulement « 11 » (« **111** » –> « 11 »), qui sont des configurations perdantes. On peut donc conclure que « **22** » et « **111** » sont des configurations gagnantes, qui vont contraindre l'adversaire à jouer sur une position perdante à partir de laquelle on pourra atteindre le « 1 ».
On poursuit l'analyse à partir de ces deux nouvelles configurations gagnantes pour déterminer leurs antécédents directs. Il y a 12 configurations d'où l'on peut atteindre « **22** » en un seul coup: dans (II), celles qui vont de « 23 » à « 27 », (dans la 3e ligne depuis le bas du tableau), et dans (III), celles qui présentent deux fois 2 objets, « 122 » et de « 222 » à « 227 ». Il y a 13 configurations d'où l'on peut atteindre directement « **111** »: dans (III), celles de « 112 » à « 117 » et, dans (IV), celles qui présentent trois fois une allumette seule sur son rang : de « 1111 » à « 1117 ».
On arrive ainsi à noter 25 nouvelles configurations, perdantes, desquelles un bon joueur peut atteindre « **22** » ou « **111** » en un seul coup et s'assurer ensuite d'atteindre « **1** » à son prochain coup.
Toujours en remontant, avec 6 objets, on tombe sur les trois configurations « **33** », « **123** » et « **1122** » non relevées dans l'inventaire précédent et l'analyse reprend, après avoir vérifié que ces dernières configurations sont gagnantes car elles ne conduisent qu'à l'une des 25 configurations perdantes identifiées lors de l'étape précédente.
Finalement, on trouve 20 configurations gagnantes: « **1** », « **111** », « **22** », « **33** », « **123** », « **1122** », « **44** », « **1133** », « **55** », « **145** », « **1144** », « **246** », « **1155** », « **257** », « **347** », « **356** », « **1247** », « **1256** », « **1346** », « **1357** ».
On peut alors les mémoriser et gagner à coup sûr au jeu de Marienbad, en remarquant que, puisque la position de départ, « **1357** » est gagnante, il faut l'offrir à son adversaire et jouer en second.

Cette analyse permet d'expliquer les commentaires des personnages du roman-photo présenté dans *Math-Ecole* 213. Par exemple, dans la première partie, le personnage de droite, machiavélique, sait qu'il peut gagner puisqu'il a laissé son adversaire commencer. À partir de la configuration « 1356 » que ce dernier lui laisse, il lui est facile d'obtenir une des trois configurations « 356 », « 1256 » ou « 1346 ».
Autre exemple. Dans la deuxième partie, le machiavélisme devient de la suffisance: sur « 236 » il aurait fallu répondre « 123 » en prenant 5 allumettes dans le rang de 6, mais notre grand sarcastique sait que son adversaire ne connaît pas la règle et fait le malin. Le même exemple se retrouve dans la troisième partie où notre prétentieux joue les généreux en commençant. Il sait très bien qu'il va pouvoir retomber sur ses pieds face à un adversaire démuni.
Il en va souvent ainsi dans les jeux de Nim. Celui qui sait abuse souvent de sa situation en prenant des grands airs et la plupart des perdants abandonnent rapidement, avec ressentiment. Lorsqu'on pratique ce genre d'acti-

vité en classe, il faut essayer d'éviter ces confrontations déséquilibrées; les élèves ne sont pas dupes longtemps et vite démotivés quand ils sentent que l'autre connaît le « truc ». Et il ne faut pas se faire d'illusion, l'analyse complète du jeu est rarement à la portée de nos élèves et la stratégie gagnante ne peut donc pas dépasser le statut de « truc » appris de quelqu'un d'autre. Il faut se contenter, pour la classe, de jeux plus simples que celui de Marienbad et de stratégies « locales » ou partielles, valables en fin de partie.

Remarque complémentaire sur des critères de reconnaissance des configurations gagnantes

Mémoriser les 20 configurations n'est pas très difficile car beaucoup d'entre elles présentent des répétitions dans les nombres d'objets des différentes rangées.
En revanche, lorsqu'on joue avec plus de 4 rangs et plus de 7 allumettes par rang, il faut un critère infaillible et rapide de reconnaissance des configurations gagnantes. Celui-ci, bien connu des passionnés de jeux de Nim, repose sur des parités entre les nombres d'objets des rangées, exprimés dans un système de numération binaire « base deux ».
Un de nos lecteurs, M. André Montavon, de Moutier, que nous remercions, illustre ce critère par l'exemple suivant, avec 5 tas de 15, 9, 7, 5 et 3 allumettes :

« Voici ces 5 nombres, écrits en base deux et disposés en colonne :

1	1	1	1
1	0	0	1
	1	1	1
	1	0	1
		1	1

Cette configuration est dite « impaire » car, dans l'une au moins de ses colonnes, il y a un nombre impair de chiffres « 1 ». (Dans le cas présent, il y a un nombre impair dans toutes les colonnes sauf dans celle des groupements de 3e ordre (8 ou 2^3).

Il y a deux lois qui régissent le jeu de Nim :
1. Si un joueur laisse à son partenaire une position paire, ce dernier est obligé de rendre une position impaire, puisqu'il modifie un seul tas, donc au moins une colonne.
2. On peut toujours transformer une situation impaire en une paire.

Pour rendre une situation paire, je peux par exemple, enlever trois allumettes dans le quatrième tas :»

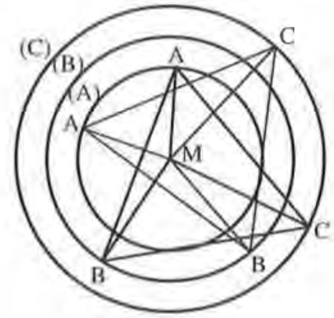
1	1	1	1
1	0	0	1
	1	1	1
		1	1
		1	1

Avec les règles particulières du « Jeu de Marienbad », où le joueur qui prend la dernière allumette perd, les configurations paires sont gagnantes sauf dans les cas où il ne reste plus qu'un seul élément dans chaque tas : « 1 », « 111 » sont impaires et gagnantes, « 11 » et « 1111 » sont paires et perdantes. Pour toutes les autres, le joueur initié rendra toujours à son adversaire une configuration paire pour gagner la partie.
Il sera particulièrement attentif à ne pas appliquer cette stratégie aveuglément en fin de partie lorqu'il y a un ou plusieurs tas d'une seule allumette. Par exemple s'il reçoit « 1113 » (configuration impaire), il ne doit pas rendre « 1111 » (paire), mais « 111 » (bien qu'impaire) à son adversaire.

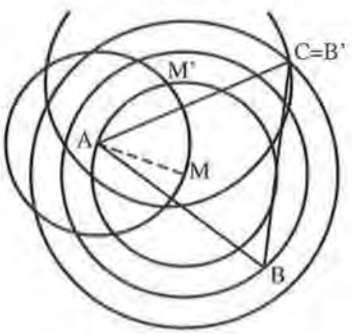
RÉPONSES AU PROBLÈME « LA FORÊT TRIANGULAIRE » (SUITE)[1]

Analyse du problème

1. L'énoncé ne donne aucune indication sur l'orientation de la forêt. On peut donc placer le triangle (ABC) dans le sens que l'on veut. Cela revient à dire que le triangle peut se déplacer autour du point M de telle façon que A décrive un cercle (A), B un cercle (B), C un cercle (C), les trois cercles centrés sur M et de rayons respectifs 6 ; 8 ; 10.

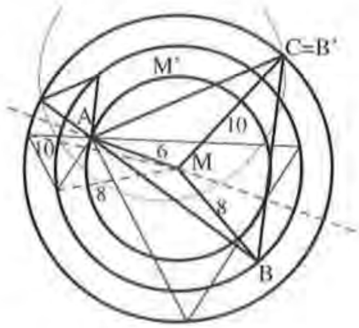


2. Fixons le point A sur le cercle (A). Alors le point C est l'image de B dans une rotation de centre A et d'angle 60°. Il est donc à l'intersection du cercle (C) et du cercle (B′) image du cercle (B) dans cette rotation… Nous avons donc une construction du point C et donc d'un triangle (ABC).



. Conclusion sur les triangles (ABC) possibles.

À une rotation près autour de M, il y a deux paires de triangles (ABC) symétriques par rapport à la droite (AM). Pour chacune des deux paires il y a un triangle avec le point M à l'intérieur et un triangle avec le point M à l'extérieur.

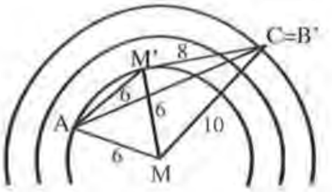


4. Aire du triangle

Reste à déterminer la longueur du côté du triangle et son aire. L'angle MM′C est droit à cause des côtés 6, 8, 10, donc par Al Kashi :

$$AC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(150°)$$

et donc l'aire du triangle ABC est $36 + 25\sqrt{3}$ en km² soit environ 79,30 km².

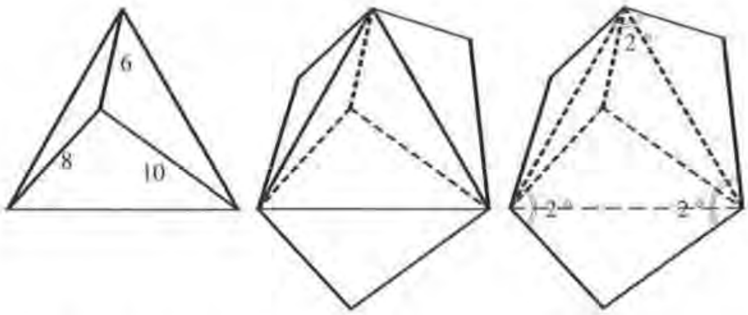


1 Extrait du *Bulletin de l'APMEP* no. 456, janvier-février 2005, pages 27 à 30. Voir notes et énoncé en fin d'article.

Remarque. Cette solution montre l'importance de l'information « **au cœur d'une forêt** ». On pourrait imaginer l'histoire plus réaliste d'un Mathias perdu, dont les seuls repères seraient trois points A, B, C disposés selon un triangle équilatéral. Alors, selon la situation – à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle – la réponse ne serait pas la même (l'aire du triangle dans le cas extérieur est $25\sqrt{3} - 30$ soit environ 7,30).

II.6. Autre solution de Bruno Alaplantive

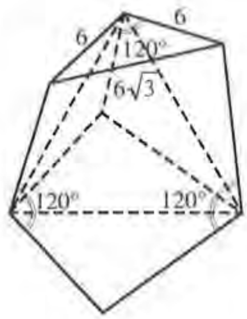
Voilà, dit-il, ce que j'ai trouvé d'autre que les cercles concentriques auxquels j'avais d'abord pensé.
Dans ma démarche, j'ai imaginé voir un tétraèdre non régulier et, en prenant pour base un triangle équilatéral de côté au moins supérieur à 4 et au plus inférieur à 14 et des faces latérales d'arêtes 6 et 8, 6 et 10, 8 et 10, je pensais pouvoir calculer la hauteur du tétraèdre obtenu et faire tendre ensuite cette hauteur vers O...
Trop compliqué pour les circonvolutions de mon petit cerveau !
Mais comme j'ai quand même pris le temps de faire différents patrons sur Cabri (et de les découper pour VOIR) j'ai remarqué le triangle et l'ai reconnu pour être le 3,4, 5 à la taille près et comme en plus les rapports des longueurs obtenues à 6, 8 et 10 donnaient 1.74, 1.73 et 1.73, j'y ai reconnu racine de 3..., etc.
Attaqué comme ceci, c'est très riche !

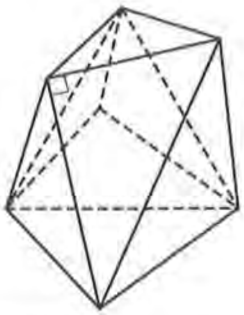


On ouvre « l'enveloppe » par les côtés 6, 8 et 10 et on déplie selon le contour équilatéral.
La demi-base vaut $6 \times \sin 60°$,

soit $6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

et la base vaut bien $6\sqrt{3}$.





De même les autres côtés valent-ils 8 $\sqrt{3}$ et 10 $\sqrt{3}$, ce qui assure que le triangle est rectangle : agrandissement du triangle 6, 8, 10 lui-même double du fameux 3, 4, 5.

Remarque : la construction du triangle 6 $\sqrt{3}$, 8 $\sqrt{3}$, 10 $\sqrt{3}$ assure celle du triangle équilatéral.

CALCULS

1. Al Kashi permet d'écrire :

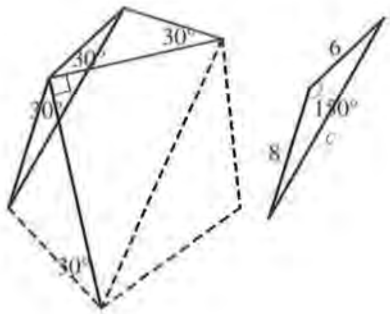
$$c^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 150°,$$

c'est-à-dire

$$c^2 = 100 + 2 \times 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

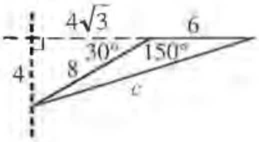
soit

$$c^2 = 100 + 48 \times \sqrt{3}.$$



L'aire d'un triangle équilatéral étant donnée par la formule $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, on obtient finalement ici :

$$\text{Aire} = 36 + 25\sqrt{3} \text{ (en unité d'aire)}$$



2. **Mais pas besoin d'Al Kashi** (on reste au niveau collège) : un peu d'imagination et Pythagore fait le reste ... :

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(4\sqrt{3} + 6\right)^2 + 4^2 \\ &= 48 + 36 + 48\sqrt{3} + 16 \\ &= 100 + 48\sqrt{3}. \end{aligned}$$

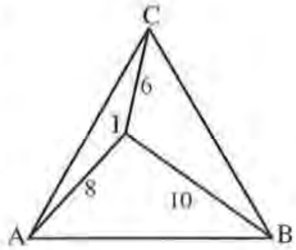
II.7. Solution de Henri Bareil

qui prend le problème autrement et avec une désinvolture finale...

On suppose que, ayant un « matériel sophistiqué », et prêt à de « savants calculs », notre égaré (physiquement seulement) dispose aussi d'une règle graduée, d'un compas, qu'il sait diviser un segment dans un rapport donné, et que, A et B étant donnés, le lieu des points M (d'un plan qui les contient) tels que MA/MB = k ($k \neq 1$ donné) est le cercle de diamètre [UV] (U et V divisant [AB] dans le rapport k). Dès lors :

a) Principe d'une solution :

– *Dessinons un triangle équilatéral* A′B′C′ *de côté arbitraire* (appelons l sa longueur). Ce triangle est semblable au triangle-forêt ABC.



– Plaçons-y l'homologue I′ du point I :
$I'C'/I'B' = 6/10$ (= 3/5). Donc I′ est sur le cercle Γ_1 …
$I'B'/I'A' = 10/8$ (= 5/4). Donc I′ est sur le cercle Γ_2 …
Ces deux cercles ont un point commun, et un seul, à l'intérieur du triangle A′B′C′. Ce point est I′ (et l'on a bien $I'C'/I'A' = 6/8$).

– *Il suffit, dès lors, de mesurer, par exemple,* I′B′. Le rapport $I'B'/IB$ est aussi $A'B'/AB$. D'où le côté du triangle-forêt, etc.

b) Mais comment mesurer I′B′ ?

Méthode 1 – calculatoire – :

Prendre un repère orthonormé. Déterminer les équations de Γ_1 et Γ_2. D'où les coordonnées de I′, etc.

Méthode 2 – « Mesurages » – :

Eh oui ! La précision attendue d'un calcul n'est-elle pas illusoire s'agissant d'une forêt (bords « flous », etc.). Et que penser de la précision de ces 10 km, 8 km, 6 km ?
Alors, si mon dessin est assez grand et « bien fait », je mesure I′B′ à la règle graduée … et le tour est joué !

La morale de l'histoire :

Voilà un joli problème … habillé en forêt. C'est parfois dangereux. Cf. la forêt qui marche sur le château de Macbeth ! Ici, c'est dangereux pour la précision mathématique, récusable ! Pourquoi ne pas en profiter ? … en s'appuyant sur un principe de résolution peu usité, mais efficace…

[ndlr] Le problème de « La forêt triangulaire[2] », présenté dans nos numéros 210 (pages 4 à 8) et 212 (pages 47 à 53) réapparaît dans le bulletin vert de l'APMEP avec quatre de nos solutions et trois nouvelles, d'un genre différent qui en fait tout leur intérêt. Nous remercions nos amis français de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public de nous autoriser à les reproduire ici et, en particulier, Henri Bareil, animateur infatigable de leur revue, qui fait connaître régulièrement *Math-Ecole* auprès de ses collègues et lecteurs.

2 *Mathias est perdu au coeur d'une forêt en forme de triangle équilatéral. Il ne connaît pas les dimensions de cette forêt, mais grâce à un matériel sophistiqué et à de savants calculs, il peut établir qu'il se trouve à 6 km d'un sommet de la forêt, à 8 km d'un autre et à 10 km du troisième.* ***Quelle est l'aire de la forêt ?*** (Finale 2003 du championnat de la FFJM)

Les enquêtes ou évaluations à grande échelle, quels profits pour les enseignants?
Table ronde organisée par MATH-ECOLE Neuchâtel, 1er décembre 2004

DEUX ENQUÊTES SOUS LA LOUPE : PISA ET MATHÉVAL

Ninon Guignard, SRED, Genève
Chantal Tièche Christinat, IRDP, Neuchâtel

INTRODUCTION

L'objet de notre communication est de comparer deux enquêtes à large échelle. La première, bien connue du moins par les réactions plurielles qu'elle a engendrées, est une enquête internationale, portant sur les compétences des élèves de 15 ans; la seconde, Mathéval, est une enquête pratiquée en CH romande et porte sur une population de 1900 élèves de 2e degré primaire. La taille des échantillons de l'une et de l'autre est extrêmement différente voire antinomique. En effet, dans la première enquête, l'échantillon est composé de ~250'000 élèves dispersés dans 32 pays. La Suisse étant plus intéressée par les compétences des élèves de 9e degré a constitué un échantillon d'environ ~10'000 élèves; dont ~4'500 proviennent de Suisse Romande. A première vue, nous cherchons à comparer de l'incomparable...Cependant, c'est souvent de la différence que naît la possibilité de mieux saisir les ressemblances, et surtout peut-être de mieux analyser et interpréter les résultats de ces deux enquêtes.

Ces deux enquêtes visent à connaître les compétences des élèves dans des disciplines semblables, puisque les deux s'intéressent aux mathématiques. L'enquête PISA 2000 ne comportait que 32 items regroupés en 2 champs généraux:

1. espace et formes géométriques
2. croissances et variations

Ces champs portaient sur les domaines mathématiques suivant: géométrie, mesure, arithmétique, algèbre, fonctions et statistiques.

L'enquête Mathéval est composé de 18 items (10 individuel, 8 collectifs) et porte sur:

1. le nombre et les opérations arithmétiques (5 individuels - 5 collectifs) ,
2. l'espace et la mesure (5 individuel - 3 collectifs).

Ces premières indications montrent que, de prime abord, les deux enquêtes ne sont guère comparables. Toutefois, l'une et l'autre font appel aux mathématiques, et cherchent à définir les compétences des élèves touchés par l'enquête.

Le terme «compétence» appelle à beaucoup de prudence. Galvaudé, en constante élaboration, il fait partie du vocabulaire commun tant à l'école qu'en milieu professionnel. On pourrait certes montrer le degré de confusion, dont on voit poindre l'essentiel en lisant la synthèse du rapport national PISA qui souligne «l'enquête PISA a pour but de fournir aux pays membres de l'OCDE des indicateurs sur les <u>performances</u> des jeunes de 15 ans en lecture, en mathématiques et en sciences» (p. 8). Le terme semble avoir perdu sa spécificité linguistique pour devenir homonyme de connaissances et savoir-faire. Mais ce terrain ne nous semble guère pertinent.

Chaque enquête a, de fait, tenté de répondre à la question des compétences des élèves, en ciblant certaines tâches qui relèvent de savoir et savoir-faire. De fait, Mathéval prend le soin de définir clairement le terme en se référant à Jonnaert (2002) .
A travers une compétence, un sujet mobilise, sélectionne et coordonne une série de ressources (dont certaines de ses connaissances, mais aussi une série de ressources qui seraient affectives, sociales et celles reliées à la situation et à ses contraintes) pour traiter

efficacement une situation. Une compétence suppose, au-delà du traitement efficace, que ce même sujet pose un regard critique sur les résultats de ce traitement qui doit être socialement acceptable (p.41).

Dans PISA, la mesure touche à la fois les connaissances des élèves et leur capacité à réfléchir sur ces connaissances, sur leur expérience, et à les appliquer à des questions et situations du monde réel. (OCDE, 2001).
Au vu des considérations précédentes, ces deux enquêtes nous semblent être suffisamment proches, pour nous permettre de les comparer dans le but de mieux saisir leurs différences essentielles, leur complexité et la manière dont toutes deux rendent compte des compétences. Après examen des buts des enquêtes et comparaison de deux tâches, nous pourrons poursuivre en inférant les utilisations possibles ou souhaitables des résultats dans la classe et en dernier lieu montrer la limite de telles enquêtes.

But et forme des enquêtes

MATHEVAL s'inscrit comme un volet d'une recherche large, qui consistait à suivre l'innovation de l'enseignement des mathématiques, qui a été initié dès 1997 au 1er degré en Suisse Romande. Le suivi scientifique de l'innovation a pour objectif de saisir ce qui se joue à chaque pôle du triangle didactique et entre ces pôles. Ainsi l'enquête MATHEVAL-2P allait-elle prendre en charge le pôle *élève* et le pôle *savoir* de manière centrale, et interroger de manière secondaire le pôle *enseignant*. De fait, les trois questions principales[11] (Antonietti & al, 2003) permettent d'évaluer l'enseignement donné avec les nouveaux moyens tant sur le plan des compétences des élèves de 2P que sur leur utilisation. En d'autres termes, l'enquête permet de cerner quelle efficacité ont ces moyens sur les savoirs mathématiques des élèves et les compétences mesurées jouent ainsi le rôle d'un révélateur de l'efficacité du moyen d'enseignement et complémentairement de son utilisation.
La forme de MATHEVAL va, étant donné cette fonction, mesurer les compétences des élèves à partir de problèmes qui relèvent de la même conception didactique que ceux proposés dans la méthodologie. En aucun cas cependant, il ne s'agit de reproduire des problèmes possiblement résolus en classe en modifiant leur habillage; au contraire il s'avère nécessaire de créer des situations-problèmes inédites pouvant s'inscrire dans les champs-cible de l'enquête. Procédant ainsi, les chercheurs contrôlent la variable de la *présentation formelle* des items, et font varier les modes de résolution, les types de connaissances et savoir-faire à mettre en œuvre. La forme de l'évaluation respecte le contrat didactique tacite établi entre l'élève et la situation mathématique et les usages de la classe (ou du moins ceux prônés par la méthodologie). Ces conditions expérimentales respectées, MATHEVAL peut ainsi prétendre établir un bilan des compétences des élèves et parler de la transférabilité des connaissances.

Les prétentions de **PISA** sont beaucoup plus vastes: l'enquête a pour but d'évaluer dans quelle mesure les adolescents sont aptes à s'inscrire dans le monde réel et d'en relever les défis. L'évaluation est assurée par des épreuves en lecture, en mathématiques et en sciences, ainsi que par un questionnaire aux élèves. PISA tente de mettre en rapport les compétences en culture linguistique et scientifique des élèves avec leurs caractéristiques personnelles (âge, sexe, origine, langue maternelle, niveau socio-économique et culturel, parcours scolaire), leurs intérêts et l'image d'eux-mêmes dans les branches

[11] Nous reprenons ici les trois questions (p. 3).

1. les objectifs décrits dans le plan d'étude sont-ils atteints, les compétences attendues sont-elles manifestes?
2. Les connaissances mathématiques construites mobilisées en classe sont-elles transférables à d'autres situations-problèmes?
3. Dans quelle mesure les capacités mathématiques des élèves sont-elles influencées par les pratiques enseignantes ?

concernées. En Suisse, l'enquête portant sur la population des 15 ans est doublée par une recherche portant sur la population des 9^{e}. Celle-ci met encore en relation toutes les données précitées avec les types de filières scolaires.
Tous les trois ans, PISA évalue les trois domaines, avec un accent particulier sur l'un d'eux. L'enquête 2000 mettait l'accent sur la lecture, 2003 le mettra sur les mathématiques: au lieu des 32 items, on en aura près du triple.
Etant donné ses buts, les épreuves mathématiques de PISA consistent toutes en situations-problèmes qui se veulent proches de la vie réelle. Elles ne visent donc pas à évaluer des savoirs particuliers mais obligent les élèves à faire appel à leurs connaissances et savoir-faire, scolaires ou autres. Certains de ces problèmes sont relativement simples, d'autres assez complexes, nécessitant des raisonnements élaborés.

Analyse comparative de deux tâches: Au cinéma (Mathéval) – Aire d'un continent (PISA)

La situation-problème ***Au cinéma*** est composée de 6 tâches et touche un seul domaine, à savoir le champ conceptuel de l'addition, qui relève du nombre, des opérations logiques de réunion et de transformation. Particulièrement ciblées pour des élèves de 2^{e} année primaire, deux catégories de problèmes sont présentes, à savoir la composition d'états EEE, et la composition d'état et de transformation ETE. La 1re catégorie de problèmes peut se formaliser au moyen de l'équation $a + x = b$; cependant l'élève peut traduire la situation en terme de recherche de la complémentaire de a par rapport à b, et se pose sous la forme $a - b = x$); dans la deuxième catégorie, nous avons trois problèmes portant, l'un sur la recherche de l'état final avec une transformation négative, et les deux autres sur la recherche de l'état initial, dont un également avec une transformation négative. ***Ces 6 tâches s'avèrent nécessaires pour pouvoir rendre compte des compétences de l'élève dans le domaine des problèmes additifs.*** Le choix des items a été fait en fonction du plan d'études; ainsi aucune tâche ne comportait la recherche de la transformation, qui est étudiée plus tardivement.
Les résultats des élèves sont analysés en deux temps: dans un premier temps l'analyse quantitative s'effectue selon le critère de réussites, réussites partielles ou échec. Ainsi, si 5 ou 6 problèmes sont résolus correctement, c'est-à-dire présentent le bon résultat, l'item *cinéma* est considéré comme réussi; si moins de 2 problèmes sont réussis, l'item est considéré comme étant échoué et entre 2 et 4 résolutions correctes, sa réussite est partielle. Dans cette première analyse, seul le résultat est pris en compte. Aucune marge d'erreur dans l'opération arithmétique n'est admise, la solution peut être présentée comme une réponse numérique isolée. La procédure fera l'objet d'une deuxième analyse. Elle se base sur un tableau de distribution des fréquences de chaque résolution repérée dans les copies d'élèves, prend en compte deux variables possibles, à savoir l'explicitation ou non des calculs et la présence ou non d'un dessin. Cette deuxième analyse permet d'inférer, en fonction de la catégorie de problèmes et les procédures décrites, le type de travail effectué en classe et le lieu des difficultés. En quelque sorte, l'analyse qualitative est une reconstitution a posteriori du travail de l'élève, comme l'indique le passage ci-dessous du rapport Mathéval 2003.
"Bien que pour chaque problème, l'opération canonique soit la démarche la plus fréquente, on observe une belle variété de démarches s'appuyant sur le dessin ou le calcul réfléchi. Certaines classes se signalent par le recours à l'opération en colonnes bien que cet algorithme ne soit pas au programme de 2P." (p. 43)

Cette approche par items est complétée dans un deuxième temps par de nouvelles analyses statistiques qui ont pour fonction de déterminer le niveau de compétence des élèves de 2^{e} année. En effet, indiquer les compétences des élèves dans le champ numérique par exemple, nécessite de regrouper les items relevant de ce domaine. Antonietti (2003, p. 67) a ainsi déterminé un outil statistique qui permet de situer les réussites moyennes de chaque item dans un intervalle de confiance [-1; +1].

La démarche analytique des résultats institue un regroupement progressif des tâches et des items qui permet ainsi de répondre à la question des compétences dans différents domaines de la mathématique. Le traitement statistique joue un rôle important, mais il est effectué en fonction des variables retenues et le choix des items a une haute importance.

La situation-problème **l'Aire d'un continent**

Figure 1 : aire d'un continent et deux questions (OCDE, Extrait de l'étude PISA 2000)

Question 59:
Quelle est la distance entre le Pôle Sud et le mont Menzies? (Utilisez l'échelle de la carte pour faire votre estimation).

A. distance est comprise entre 1 600 km et 1 799 km
B. distance est comprise entre 1 800 km et 1 999 km
C. distance est comprise entre 2 000 km et 2 099 km
D. on ne peut pas déterminer cette distance

Question 60
Estimez l'aire de l'Antarctique en utilisant l'échelle de cette carte.
Montrez votre travail et expliquez comment vous avez fait votre estimation. (Vous pouvez dessiner sur la carte si cela vous aide pour votre estimation).

Cette situation-problème nécessite, pour sa résolution, la connaissance de la notion d'échelle, la mesure de distance et la mesure d'aire. Mais ces connaissances supposent le relais de la compétence à aborder une situation non scolaire, où il s'agit d'organiser un mesurage susceptible d'approcher une aire non "conventionnelle", qui n'est pas formée d'un assemblage de polygones réguliers. C'est en cela que cette question relève plus d'une tâche "real life" que d'une tâche proche des programmes scolaires.
Avant même les analyses statistiques, chaque réponse a été codée en fonction de différents types de démarches possibles, prévues a priori. 5 codes caractérisent les réponses correctes, 4 les réponses partiellement correctes et 3 les réponses totalement incorrectes ou absentes. Le premier chiffre du code renseigne sur le niveau, le second sur la démarche. Nous vous en livrons ci-dessous un exemple. Ensuite, ces premières analyses subissent une série d'ajustements, d'abord en fonction des résultats au pré-test, puis des épreuves, enfin des résultats sur le plan international.

Crédit complet (les codes suivants sont à attribuer aux réponses où l'approche utilisée et les résultats sont corrects, c'est-à-dire que la réponse est comprise entre 12'000'000 et 18'000'000 km².)

Code 21 estime l'aire en dessinant un carré ou un rectangle
Code 22 estime l'aire en dessinant un cercle
Code 23 estime l'aire en additionnant l'aire de plusieurs figures géométriques régulières
Code 24: estime l'aire de manière correcte en utilisant une autre méthode *(ex: dessine un grand rectangle et soustrait de ce rectangle l'aire de diverses portions vides)*
Code 25 réponse correcte sans indication sur la méthode utilisée.

La première question, qui porte sur la mesure de la distance entre deux points, avec transformation en fonction de l'échelle donnée, est réussie par 62% des élèves romands de 9e, avec une variation de 47 à 69% en fonction des cantons. En ce qui concerne les erreurs, 5% des élèves pensent qu'on ne peut pas estimer la distance, 16% sous-estiment la distance et 12% la sur-estiment.

La deuxième question porte sur l'estimation de l'aire du continent antarctique en utilisant l'échelle donnée. Le taux de réussite totale descend à 21%, avec une variation de 11 à 28%, suivant les cantons. Les méthodes les plus utilisées consistent à calculer l'aire d'un rectangle ou à additionner l'aire de plusieurs figures géométriques régulières. Le taux de réussite partielle est de 24%, le crédit partiel ayant été accordé aux démarches correctes suivies de calculs erronés ou incomplets.
Seuls quelques rares élèves ont pensé à calculer l'aire du disque, figure régulière semblant pourtant la plus proche de la configuration de la carte. Il semble donc que les élèves qui ont su approcher ce problème, l'ont fait avec des démarches probablement élaborées à l'école primaire, grâce à des activités de mesurage et de pavage, activités qui ne s'appuient pas encore sur l'aire du disque, dont la mesure ne fait pas partie des objectifs de l'école primaire.
En résumé, **moins d'un élève romand sur deux est capable d'approcher l'aire d'une figure "non géométrique" et d'appliquer une technique de mesurage.**

Utilisation des résultats des enquêtes en classe

Dans un document très récent, l'inspection académique de la Sarthe (2004) fait le constat que l'évaluation nationale de 6e est insuffisamment exploitée tant par les professeurs du cycle 3 de l'élémentaire que par les professeurs de collège. Ainsi même dans un pays où la pratique de l'évaluation a plus de 15 ans, où des associations de professeurs ont tenté de mettre sur pied des bases de données permettant de constituer et d'exploiter des fiches d'évaluation (APMEP) par la création d'un observatoire de l'enseignement des mathématiques, l'utilisation ne semble guère être générale.
Cependant, en accord avec leurs espoirs, il apparaît que les enquêtes PISA et Mathéval peuvent ou pourraient ou devraient avoir des incidences sur la pratique enseignante. Les quelques pistes d'utilisation suggérées par l'APMEP en 1997, à savoir la préparation des séquences d'enseignement et des évaluations en classe, la compréhension de l'évolution des notions enseignées et des capacités acquises par les élèves au cours de leur scolarité nous semblent particulièrement intéressantes.
Nous retiendrons prioritairement les deux premières pistes.

La préparation des séquences d'enseignement:
Pour Mathéval, qui détermine, dans une certaine mesure, quelques compétences-seuil voire quelques balises, les résultats décrits permettent de situer les élèves de sa classe par rapport aux compétences attendues. La distance qui sépare les élèves de celles-ci détermine l'orientation du travail à effectuer en classe. La résolution d'un problème mathématique amène à une réponse correcte à travers des procédures qui peuvent être variées. Idéalement, la situation-problème devrait contenir des éléments qui la rende auto-validante. Cependant, à défaut de ceux-ci, la

résolution devrait contenir des éléments de preuve de la justesse de la réponse. Ainsi poser les procédures de résolution constitue une étape, mais n'est pas suffisante.

De plus, les analyses plus qualitatives effectuées en deuxième temps, permettent de fixer des pistes de travail. En reprenant par exemple le champ conceptuel de l'addition, les résultats montrent que la difficulté réside dans la recherche de l'état initial, lorsque la transformation est négative.

Problème n°5: EEE / $a + x = b$: E doit fournir la complémentaire à a

Le cinéma possède 75 places. Il y a 19 places vides. Combien y a-t-il de spectateurs qui regardent "Ali Baba et les 40 voleurs ?"

Les résultats à ce problème semblent indiquer que le distracteur *40 (voleurs)* induit la réponse fréquente de 115. La difficulté réside dans la soustraction, posée souvent en colonnes, pas prévue pour les moyens avant la 3P et que peu d'élèves recourent au dessin (10 % de la population). Réunir deux ensembles disjoints est peu travaillé, par ailleurs le fait que l'ensemble total apparaisse au début de la consigne semble également contribuer à la difficulté de la tâche.

Problème n°6: ETE/ $x +(+ a) = b$. E doit fournir la complémentaire à a

Après le film, Simon et Julia jouent aux POG. Julia est plus forte que Simon, elle gagne 12 POG. Elle en a maintenant 35. Combien en avait-elle avant la partie ?

Les résultats montrent que le verbe gagner induit l'addition pour quelques élèves et que les termes de la soustraction peuvent être inverser. (12-35)

La transformation négative qui s'avère sémantiquement et opérativement plus difficile devrait être l'objet d'une attention particulière en classe.

Les problèmes sur lesquels repose l'évaluation Mathéval, soulignent que les notions mathématiques et les compétences attendues doivent être travaillées dans des situations riches, complexes, mettant en jeu des connaissances et des savoirs de nature variée. Mais en même temps, afin de fixer ceux-ci, toute acquisition doit être reprise, consolidée et enrichie, pour permettre à l'élève de reconnaître la situation non en fonction de sa forme, mais en fonction de son sens.

L'évaluation dans la classe:

Mathéval nous semble également exploitable, en montrant d'une part la possibilité d'évaluer des élèves sur des situations-problèmes, faisant ainsi un lien entre la didactique et l'évaluation.

Les évaluations doivent être en rapport avec le programme, avec ce que les élèves ont appris et être représentatives du travail effectif de la classe et non du travail espéré ou exécuté par d'autres collègues dans leur classe. Il y a ici différence d'objectifs entre une enquête telle que Mathéval et une évaluation en classe. Ainsi pour Mathéval, il s'agissait d'évaluer le degré de manifestation des objectifs décrits dans le plan d'étude ; en classe, il s'agit de porter l'évaluation sur des connaissances stabilisées et travaillées en proposant des situations qui nécessitent leur recours. Il n'y a donc pas lieu de tester les connaissances séparées, ni de vouloir les évaluer en dehors d'une utilisation qui leur donne sens. Ainsi, savoir si l'élève maîtrise ou non le concept de l'addition nécessite d'aménager des situations dans lesquelles les transformations négatives et la complémentarité d'ensemble disjoint soient présentes dans des situations contextualisées, donnant du sens à l'utilisation de l'opération additive.

Le recours à des corrections multi-critériées: Mathéval- 2P s'appuie sur différents critères pour coder les réponses des élèves. Nous avons montré par ailleurs (Tièche Christinat , 2004) qu'il est utile pour se faire de lier à la fois les analyses a priori de la tâche et les objectifs, afin de déterminer quels critères s'avèrent être les plus valides. Toutefois, comme l'a souligné Roegiers (2004) trop de critères diminuent la pertinence de l'évaluation.

En ce qui concerne PISA, les situations-problèmes ne sont pas rendues publiques. Comme l'enquête recommence tous les trois ans, la plupart des questions sont reportées. En 2000, seules quatre situations ont été publiées, dont l'Aire du continent. Le rapport romand, qui paraîtra vers mai-juin 2005, pourra s'appuyer sur de plus nombreux exemples.

Nous avons ciblé les usages positifs qui peuvent être fait des enquêtes, Toutefois, les enquêtes à grande échelle peuvent également engendrer des pratiques peu favorables au développement des savoirs mathématiques.

La restriction à certains domaines:
Les enquêtes ont établi un choix d'items en fonction d'objectifs précis, qui a priori ne recouvrent pas l'entier des objectifs de l'école. Une utilisation trop centrée sur le contenu des épreuves, dans la perspective de mieux préparer les élèves à l'évaluation ou dans le but de montrer que les élèves ont de bonnes compétences dans les domaines visées, voire dans une ré-interprétation des objectifs de l'enseignement des mathématiques pourrait apparaître comme une utilisation dangereuse et abusive des enquêtes. Une trop grande attention au type d'objets évalués aurait pour conséquence d'omettre certains savoirs qui, de fait, font partie des objectifs du plan d'étude, voire de les reléguer à des périodes d'études facultatives (fin d'année par exemple).

Une institutionnalisation trop ciblée:
Dans les moyens d'enseignement, la phase d'institutionnalisation a pour rôle de faire reconnaître à l'élève les formes de savoir reconnues par l'institution sociale et culturelle. Il y aurait danger d'assimiler les enquêtes à cette institution ou de définir les savoirs officiels en fonction des domaines et des formes de d'évaluation. Dans Mathéval, aucun item ne porte sur le travail de la preuve ou sur l'établissement de conjectures et d'hypothèses et pourtant ce type de savoir est important pour la communauté mathématique, il serait ainsi inadéquat de ne jamais institutionnaliser de tels savoirs dans la classe et de laisser les élèves s'engager dans ce type de travail sans jamais en signifier l'importance, voire ultérieurement les formes possibles.

Les grandes enquêtes mettent en évidence un certain nombre d'indicateurs dont l'intérêt dépasse celui de la classe sans toutefois lui être étranger. Le fait que, quel que soit le degré évalué, le niveau de réussite dépende du niveau socio-économique et culturel, de la langue parlée à la maison, de l'origine et du sexe (sauf en 2P pour ce dernier facteur), interroge le système éducatif mais aussi l'enseignant dans sa classe.

Conclusion.

Mathéval est un maillon important dans la connaissance de l'innovation. Toutefois, ces données ne sauraient être suffisantes pour mieux orienter le travail des enseignants. Faisant une place importante au pôle *savoir* en lien avec celui de *l'élève*, il y a lieu de comprendre les pratiques enseignantes, non seulement dans leur discours, mais au sein même de la classe. Le deuxième volet du suivi scientifique apporte d'autres pistes; en interrogeant les différentes phases didactiques et leur poids réel dans la pratique, la recherche plus qualitative, d'approche éthnométhodologique, montre que si effectivement les situations-problèmes sont utilisées en classe, la gestion des différentes phases didactiques et non didactiques, la difficulté de dévoluer réellement le problème, la durée trop élevée de certaines phases par rapport à d'autres phases sont des aspects que les grandes enquêtes ne sauraient aborder et qui cependant contribuent à éclairer et guider la pratique quotidienne de la classe.
Pour détecter et comprendre les causes de la réussite et de l'échec, on peut procéder à l'analyse d'erreur et essayer de cerner les obstacles à l'apprentissage. Cette approche, centrée sur la matière elle-même d'enseignement

– et d'apprentissage- est plus favorable à l'enseignant et aux concepteurs de programmes ou de moyens. Les grandes enquêtes, relativement coûteuses, et demandées plus particulièrement par les dirigeants scolaires ou politiques, ont besoin d'autres critères. Ils réclament des indicateurs qui, s'ils peuvent paraître quelque peu schématiques, ont le mérite d'être clairs pour tout le monde.
Ainsi, on observe que, quelque soit le niveau concerné de l'école obligatoire, la réussite en mathématiques est fortement influencée par l'origine sociale et culturelle de l'élève, par la langue qu'il parle à la maison et par son genre. En ce qui concerne ce dernier critère, notons qu'on n'observe pas encore de différence significative entre les deux sexes en 2P, mais que la différence va s'accroître en faveur des garçons. Les enquêtes internationales, telles que PISA 2002, montrent à cet effet que la Suisse est un des pays où l'école a le plus de peine à agir pour diminuer les effets des différences socio-économiques et culturelles de ses élèves.

Bibliographie:

ANTONIETTI, J.P. (Ed.).(2003) *Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire: Résultats de la première phase de l'enquête* MATHEVAL. Neuchâtel: IRDP.

EVAPM 6e (1997) *Observatoire de l'enseignement des mathématiques Par des enseignants, Pour les enseignants*, Paris: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.(avec le concours de l'INRP).

INSPECTION ACADEMIQUE SARTHE/ACADEMIE DE (2004). Exploiter l'évaluation 6e. Nantes: Edusarthe. Ressources: des outils pour enseigner. http://www.ac-nantes.fr/ia72/publications/edusarthe/index.php

JONNAERT, P. (2002) *Compétences et socioconstructivisme: Un cadre théorique*. Bruxelles: De Boeck.

MOSER, U. (2001) *Préparés pour la vie ? Les compétences de base des jeunes – Synthèse du rapport national* PISA 2000. Neuchâtel: OFES / CDIP.

OCDE (2001) *Connaissances et compétences; des atouts pour la vie*. Premier résultats de Pisa 2001.Paris : les Editions de l'OCDE.

OCDE: Extrait de l'étude PISA 2000. http://www.script.lu/documentation/pdf/publi/pisa/pisa-exemples-francais.pdf

ROEGIERS, X. (2004) Comment évaluer les compétences? *Conférence* donnée à Fribourg, HEP –Fribourg, 25 novembre 2004

TIECHE CHRISTINAT, C. (2003) Pinocchio: un problème du rallye dans un contexte d'évaluation des compétences. IN: L Grugnetti et al. (éds.), RMT, *potenzialità per la classe e la formazione. Potentialité pour la classe et la formation* (pp 122-134). ARMT,: Università di Parma, Università di Cagliari

CONFRONTATIONS À GRANDE ÉCHELLE EN MATHÉMATIQUES : LES APPORTS POUR LES MAÎTRES[1]

L'APPROCHE DU RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN ET SES SPÉCIFICITÉS

François Jaquet,
animateur international du RMT

INTRODUCTION

Il y a de nombreuses enquêtes, évaluations, compétitions qui proposent des questions de mathématiques à de très grands nombres d'élèves, simultanément, dans les mêmes conditions de passation.

Nous les classons ici en trois grandes catégories :

I. Enquêtes comparatives, sur mandat politique, (*TIMSS, PISA, HarmoS,* Tests d'orientation, ...) organisées aux niveaux international, national, régional

II. Enquêtes évaluatives *(Mathéval, EVAPM* (F), Évaluation à l'entrée en CE2 et en 6e (F), ...), à l'échelle nationale ou régionale

III. Concours, rallyes et autres confrontations, qu'on peut classer en plusieurs groupes selon le type de participation (individuelle ou collective) et l'analyse des réponses (de la simple réponse juste à la prise en compte des erreurs et/ou des justifications : *FFJM, Olympiades, Kangourou, Maths sans frontières, RMT* ...)

Les commanditaires de ces confrontations sont différents d'une catégorie à l'autre :

I. Les autorités politiques (fonds importants, par millions)
II. Centres de recherche, associations de maîtres, responsables de l'évaluation (crédits limités)
III. Initiatives collectives indépendantes (bénévolat)

Toutes ces confrontations sont « jeunes » dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques, de dix à trente ans au maximum. Leurs objectifs et les justifications de leur existence varient aussi d'une catégorie à l'autre :

I. Améliorer l'enseignement et les systèmes scolaires, harmoniser, définir des standards et des niveaux de compétences, contrôler.
II. Évaluer des innovations scolaires, prendre des données pour conduire les réformes et les guider.
III. Promouvoir l'intérêt pour les mathématiques, améliorer leur image auprès des élèves et du public en général, résoudre des problèmes, pour tous les concours.
Élargir le répertoire d'activités à disposition des maîtres et suggérer de nouvelles pistes d'animation et de renouvellement, pour certaines compétitions.
Contribuer à la réflexion sur la didactique des mathématiques, pour une minorité de concours.

Les modalités d'organisation des confrontations à grande échelle sont aussi, évidemment, fort diverses. Elles ont cependant, a priori, quelques caractéristiques communes :

- le public interrogé : des élèves
- les questions posées : sur les connaissances mathématiques ou sur les capacités à les mobiliser
- la durée de passation : limitée et contrôlée, la même pour tous
- le traitement des données : une classification reposant sur la qualité des réponses recueillies

Mais une analyse plus détaillée de ces caractéristiques générales fait apparaître des différences sensibles d'une catégorie de confrontations à l'autre à propos de l'échantillonnage, des types de questions posées, et du traitement des données (analyse des résultats, exploitations ...).

1 Texte d'une présentation lors de la rencontre organisée par l'Association *Math-Ecole*, à Neuchâtel le 1er décembre 2004 sur le thème : Les enquêtes ou évaluations à grande échelle, quels profits pour les enseignants ?

La question qui se pose pour nous est de savoir dans quelle mesure les différentes confrontations, par leur diversité mais aussi par leurs analogies, peuvent aboutir à des retombées positives réciproques. Pour tenter d'y répondre, il est nécessaire de dépasser les partis pris ou les antagonismes et d'approfondir les analyses comparatives des contenus de chaque type d'enquête. Nous présenterons ici deux exemples où des confrontations à grande échelle offrent un espace commun de réflexion :

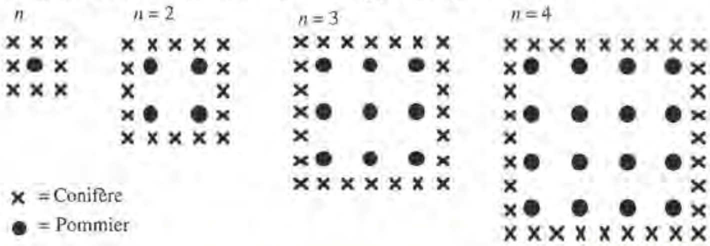
Dans le premier, il s'agit d'un problème analogue proposé par *PISA*, enquête de la catégorie I déterminée ci-dessus et le *RMT (Rallye mathématique transalpin)*, de la catégorie III. Le second exemple compare un sujet de *Mathéval*, enquête de la catégorie II, à sa transposition dans le *RMT*.
Dans les deux cas, nous tentons de distinguer au travers des énoncés, des analyses a priori et a posteriori, les apports pour les maîtres des deux types d'enquêtes.

I. DU PROBLÈME « *LES POMMIERS* » DE PISA AUX « *TAPIS CARRÉS* » DU *RMT*

I. 1. Les énoncés

I. 1. 1. *Les pommiers* (*PISA* / 1999 M136Q01-03.)

Un fermier plante des pommiers en carrés. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger.
Vous pouvez ci-dessous un schémas présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :



Question 1
Complétez le tableau :

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

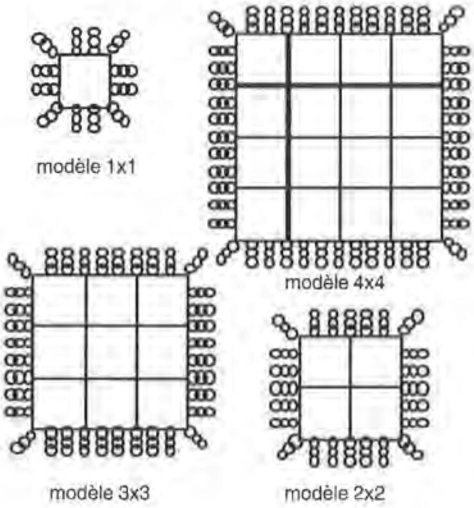
Question 2
Il existe deux expressions que vous pouvez utiliser pour calculer le nombre de pommiers et le nombre de conifères dans cette situation :
Nombre de pommiers = n^2 Nombre de conifères = $8n$
où n est le nombre de rangées de pommiers.
Il existe une valeur de n pour laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre de conifères. Trouvez cette valeur de n et expliquez votre méthode pour la calculer.

Question 3
Supposez que le fermier veuille faire un verger beaucoup plus grand, avec de nombreuses rangées d'arbres. Lorsque le fermier agrandit le verger, qu'est-ce qui va augmenter le plus vite : le nombre de pommiers ou le nombre de conifères ?
Expliquez correctement comment vous avez trouvé votre réponse.

I. 1. 2. *Tapis carrés* (*9RMT II*, Problème 14, Cat. 7 - 8, 2001)

La maison MOMBO TAPIS S.A. ne fabrique que des tapis carrés, constitués de carrés blancs et d'une bordure de chaînettes.
Voici les quatre premiers modèles : 1x1, 2x2, 3x3, 4x4. Les modèles 5x5 à 12x12 sont en stock. La maison fabrique encore des modèles plus grands, sur commande.
Un client, M. Ali, demande un modèle où le nombre de carrés blancs est le même que celui des chaînettes.
Un autre client, M. Baba, demande un modèle où il y a 40 carrés blancs de plus que de chaînettes.

La maison MOMBO TAPIS pourra-t-elle répondre à leurs demandes ?
Expliquez vos réponses.



I. 2. Les analyses a priori

I. 2. 1. *Les pommiers*

Thème général : « croissance et variation » **Domaine :** algèbre
Compétences : mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes, mathématisation, généralisation et compréhension en profondeur)

I. 2. 2. *Tapis carrés*

Domaine de connaissances
- Arithmétique: dénombrements, suites de nombres
- Algèbre: expressions littérales ou généralisation et notion de fonction

Analyse de la tâche
- Trouver les nombres de carrés et de chaînettes des premiers tapis et leur expression générale (avec ou sans lettres) :

numéro	1	2	3	4	5	....	n
carrés	1	4	9	16	25	....	nxn, n^2, ou « le nombre au carré »
chaînettes	12	24	36	48	60	....	n x 12 ou 12n

- Continuer, pour M. Ali, les suites jusqu'à 12 et 144 ou résoudre l'équation $12n = n^2$ et en déduire que la demande pourra être honorée, pour le modèle 12x12.
- Poursuivre, pour M. Baba, la suite au-delà de 12 : 13 —>169 et 156, 14 —>196 et 168, 15 —>225 et 180 pour constater qu'on ne trouve pas une différence de 40, ou résoudre l'équation $n^2 - 12n = 40$ et voir que ses solutions ne sont pas des nombres entiers.

I. 3. Les analyses a posteriori

I. 3. 1. *Les pommiers*

	Suisse romande (cantons)	France	OCDE
	taux de réussite, en %		
Question 1			
entièrement juste (les 7 cases)	59 (de 53 à 65)	42	50
une seule erreur	14 (7 – 19)	15	13
plus d'une erreur	27 (23 – 31)	43	36
non-réponse	1 (1 – 5)	1	2
Question 2			
réponse n = 8	56 (41 – 68)	26	25
réponse fausse	41 (32 – 48)	18	24
non-réponse	57	57	51
Question 3			
réponse juste et explication algébrique	13 (8 – 20)	6	8
réponse juste, avec exemples	18 (13 – 22)	10	10
réponse fausse	66 (58 – 75)	57	53
non-réponse	3	26	29

Ces résultats sont ceux d'élèves de 15 ans, qui ont été interrogés individuellement et qui avaient à répondre à une vingtaine d'autres questions, réunies dans un des cahiers de l'enquête *PISA*. Les pays ont la possibilité d'examiner les réponses de leurs élèves par des analyses approfondies des commentaires et procédures notés sur les cahiers de réponses.
Les élèves de Suisse romande obtiennent, pour la première question du problème « Les pommiers » des résultats significativement supérieurs à ceux de France et des pays de l'OCDE. Comme ces différences ne se retrouvent pas sur l'ensemble des questions de mathématiques, on peut émettre l'hypothèse qu'elles sont dues à un effet des programme scolaire ou des moyens d'enseignement : la pratique des tableaux à compléter pour mettre en évidence des relations fonctionnelles est effectivement courante dans les manuels romands, dès l'école primaire et dans les manuels cantonaux de l'école secondaire, utilisés à l'époque.

I. 3. 2. *Tapis carrés*

Problème résolu par des élèves de 13 à 15 ans, dans les conditions du RMT : par groupes, avec réponses collectives, dans le contexte d'une confrontation par classes, selon le barème suivant :

4 Les deux réponses justes (oui pour Ali et non pour Baba) avec les détails des suites ou des calculs
3 Les deux réponses sans explications cohérentes
2 Une des réponses seulement, correctement justifiée
1 Début de raisonnement cohérent, et réponse négative pour les deux car les suites n'ont pas été étudiées jusqu'au 12e terme
0 Incompréhension du problème

Points attribués pour les 67 classes participantes de Suisse romande (taux correspondants) :

	4	3	2	1	0	total
degré 7	15 (.41)	7 (.19)	5 (.14)	2 (.06)	7 (.19)	36
degré 8	15 (.48)	5 (.16)	7 (.23)	1 (.03)	3 (.10)	31
total 30	(.45) 12	(.18) 12	(.18) 3	(.04) 10	(.15) 67	

Procédures relevées :

- Élaboration d'un tableau ou d'une liste et procédure pas à pas, non fonctionnelle encore, pour la grande majorité des classes, à la lecture des protocoles (voir *Figure 1*)

Pour 1 carré il faut 12 chainettes.

Pour : il faut ... chainettes:

4 carrés	→	24
9 carrés	→	36
16 carrés	→	48
25 carrés	→	60
36 carrés	→	72
49 carrés	→	84
64 carrés	→	96
81 carrés	→	108
100 carrés	→	120
121 carrés	→	132
144 carrés	→	144

Pour Mr. Ali c'est possible Il devra commandé le modèle 144 x 144.

Pour ... carré il faut ... chainettes:

144	→	144
169	→	156
196	→	168
225	→	180
256	→	192
289	→	204

Pour Mr Baba ce n'est pas possible Car avec 196 carré il y a 28 chainettes de plus que de carré et avec 225 carré il y a 45 chainettes de plus que de carré.

Figure 1, copie d'une réponse d'une classe de degré 7

- Élaboration d'un tableau ou d'une liste et procédure pas à pas, mais avec des signes manifestes d'une conception fonctionnelle : notation littérale caractéristiques d'une généralisation pour quelques classes
- Passage à une représentation graphique, signification d'une conception fonctionnelle, une seule classe (voir *Figure 2*)

Nous avons d'abord essayer de trouver une suite :

		nbre de carrés	nbre de chaînettes
modèle	1 × 1	$1^2 = 1$	12 · 1 = 12
	2 × 2	$2^2 = 4$	12 · 2 = 24
	3 × 3	$3^2 = 9$	12 · 3 = 36
	4 × 4	$4^2 = 16$	12 · 4 = 48
	5 × 5	25	60
	6 × 6	36	72
	7 × 7	49	84
	8 × 8	64	96
	9 × 9	81	108
	10 × 10	100	120
	11 × 11	121	132
	12 × 12	144	[illegible]
	X × X	x^2	12 x

autant de carrés que de chaînes

M. Ali veut acheter un modèle 12 × 12

M. Baba ne pourra pas acheter de tapis car le modèle qu'il cherche n'existe pas...

	différence entre le nbre de carrés et de chaînes
1×1	12 − 1 = 11
2×2	24 − 4 = 20
3×3	36 − 9 = 27
4×4	48 − 16 = 32
5×5	60 − 25 = 35
6×6	72 − 36 = 36
7×7	84 − 49 = 35
8×8	96 − 64 = 32
9×9	108 − 81 = 27
10×10	20
11×11	11
12×12	0

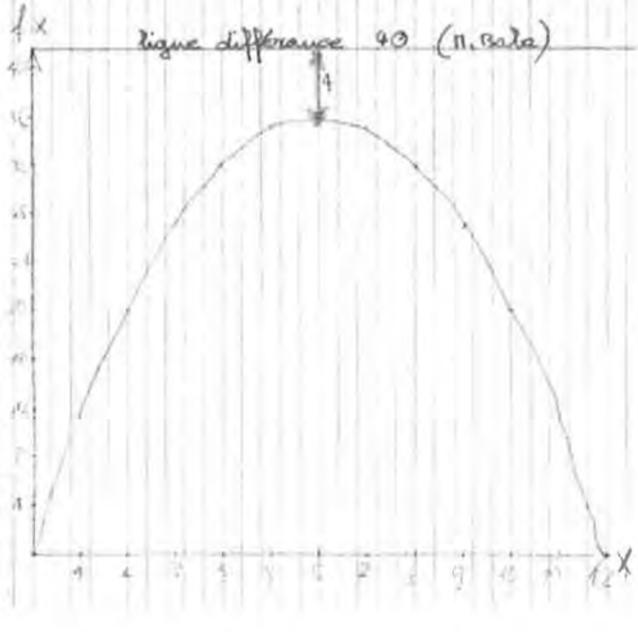


Figure 2, copie d'une réponse d'une classe de degré 8

- Découverte de l'égalité, par tableaux ou essais non notés, mais ferme conviction que le nombre de carrés est toujours inférieur à celui des chaînettes, erreur la plus fréquente.

I. 4. Les apports pour les maîtres des problème *Les Pommiers et Tapis carrés*

Les deux versions du problème et les résultats correspondants apportent des informations aux enseignants de mathématiques. La différence réside dans le type d'informations relevées : d'un côté, on cherche à mesurer les connaissances ou savoirs produits, de l'autre, on s'intéresse aux connaissances ou savoirs en construction.

PISA est une enquête pour *comparer des niveaux de compétences* globaux, par pays. L'institution en demande une analyse statistique.

Les « niveaux de compétence » comme ceux du problème *Les pommiers* : « mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes, mathématisation, généralisation et compréhension en profondeur », sont libellés en termes généraux, d'intentions généreuses. dans l'enquête *PISA*. Mais, pour cet exemple, il est évident que leur interprétation est subjective : on ne peut pas mesurer objectivement une « compréhension en profondeur », une « mathématisation »...

Leur utilité pour l'enseignant est donc extrêmement réduite, voire nulle.

Les résultats permettent, en revanche, de juger la capacité des élèves à remplir un tableau préparé, à appliquer une formule, et aussi de leur incapacité à percevoir les deux fonctions en présence et leurs croissances relatives, lorsque la question est formulée algébriquement.

Un des buts explicites du *RMT* est « d'observer la manière dont les élèves résolvent des problèmes », d'un point de vue didactique. Il n'y a pas de niveaux de compétences pour le RMT, mais seulement une définition du « domaine de connaissance » dans lequel est plongé le problème. L'attribution de points est nécessaire dans le contexte d'un concours par classe, mais ceux-ci n'ont qu'une valeur qualitative. L'élaboration des critères impose cependant une grande finesse et une rigueur de l'analyse a priori, dans la description de la tâche et des procédures de l'élève et des obstacles qu'il peut rencontrer.

L'analyse a posteriori met en évidence les caractéristiques des procédures de résolution. Pour *Tapis carrés*, par exemple, il est capital, du point de vue du maître, de savoir si les solutions du problèmes sont obtenues par essais successifs ou par la méthode « experte » du mathématicien, reposant sur le concept de fonction. C'est cette information qui va, entre autres, lui permettre de régler la progression de ses élèves dans le délicat passage à l'algébrisation, par adaptation des variables et du temps didactiques.

II. DU PROBLÈME « *LES REMPARTS* » DE MATHÉVAL À « *PAVAGE* » DU *RMT*

II. 1. Les énoncés

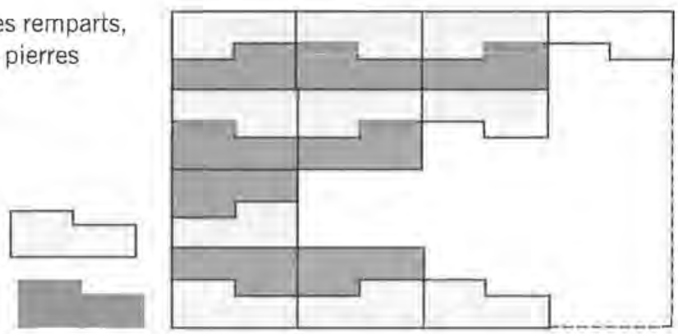
II. 1. 1. *Les remparts* (*Mathéval*, questions individuelles, 2P, 2002)

Pour terminer la construction des remparts, combien dois-tu commander de pierres claires et de pierres foncées?

Il faut commander:

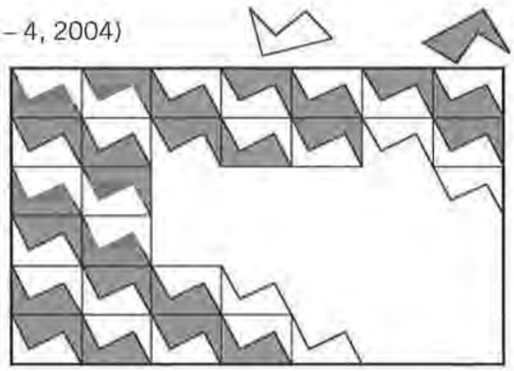
________ pièces claires

________ pièces foncées



II. 1. 2. *Pavage* (*12RMTF.* Problème 2, Cat. 3 – 4, 2004)

Combien manque-t-il de pièces blanches et de pièces grises pour terminer le pavage de ce rectangle ?



Indiquez le nombre de pièces blanches et le nombre de pièces grises qui manquent.

Expliquez comment vous avez trouvé.

II. 2. Les analyses a priori

II. 2. 1. *Les remparts*

Contenu mathématique

Les remparts sont un problème de pavage.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème il faut être capable de :

- Comprendre la structure de l'ornement en repérant les axes et les centres de symétrie
- Poursuivre la construction du pavage en rajoutant le nombre de pierres adéquat

II. 2. 2. *Tapis carrés*

Domaine de connaissances

- Géométrie : isométries (pavages)
- Arithmétique : dénombrement

Analyse de la tâche

- Pour dénombrer les pièces qui manquent, les élèves ont plusieurs méthodes à leur disposition :
  - percevoir la trame rectangulaire et le motif en « diagonale » et compléter le dessin,
  - ne compléter que la trame rectangulaire, remarquer que chaque rectangle est formé d'une pièce grise et d'une pièce blanche et compter,
- Calculer le nombre total de rectangles, 6 x 7 = 42, en déduire qu'il y aura 42 pièces de chaque sorte, et calculer la différence pour chaque sorte : blancs 42 - 27 = 15, gris 42 - 24 = 18, (procédure évoluée, par passage dans le registre numérique).
- Compléter la trame rectangulaire et constater que les 14 rectangles vides se remplissent par 14 pièces grises et 14 blanches ; noter qu'il reste 5 rectangles avec une seule pièce : dans l'un il manque la pièce blanche (14 + 1 = 15) et dans les quatre autres la pièce grise (14 + 4 = 18).
- Effectuer un comptage par lignes horizontales, ou verticales, ou selon les motifs, sans dessin (procédure délicate).

II. 3. Les analyses a posteriori

II. 3. 1. *Les remparts*

Grille de correction

L'indication du bon nombre de pierres claires à commander rapporte 1 point, celle du bon nombre de pierres foncées aussi. Le problème est réussi si ces deux nombres sont corrects. Le problème n'est réussi que partiellement si un seul de ces deux nombres est correct. Il est échoué si aucun de ces deux nombres n'est indiqué.

Résultats

	Réussite	Réussite partielle	Échec	Total
Effectif	499	166	315	980
Fréquence	51%	17%	32%	100%

L'analyse des procédures montre que la poursuite du dessin du pavage, par les lignes horizontales et verticales est le moyen le plus sûr d'arriver à la bonne réponse.

II. 3. 2. *Pavage*

Attribution des points et résultats (sur 84 classes finalistes de 15 sections du RMT, en France, Luxembourg, Italie et Suisse, de 3e et de 4e primaire)

4 Réponse « 15 blanches, 18 grises », avec une justification claire (dessin ou autre procédure décrite ci-dessus)
Fréquence : 18 / 84

3 Réponse « 15 blanches, 18 grises », avec une justification partielle (dessin très peu clair ou « on a compté »)
Fréquence : 6 / 84

2 Réponse fausse mais avec un total de 33 ou une erreur de comptage d'une ou deux unités pour l'une des pièces, avec une justification correspondante ou la réponse juste sans aucune justification
Fréquence : 33 / 84

1 Plus d'une erreur de comptage Fréquence : 20 / 84

0 Incompréhension du problème ou estimation erronée Fréquence : 9 / 84

Procédures observées

La procédure la plus fréquente est celle du dessin des tous les pavés, après avoir rétabli la trame rectangulaire. Certains groupes ont colorié les pavés gris, d'autres se sont contentés de distinguer les pavés par « G » et « B ». La difficulté réside alors dans le comptage car les pavés blancs déjà placés sur la figure initiale ne se distinguent pas de ceux qui ont été ajoutés.

Une procédure, plus rare mais également prévue dans l'analyse a priori, consiste à compter les rectangles entiers à compléter, mais les compléments ont souvent donné lieu à des erreurs.

On a encore observé plusieurs cas de collages, qui aboutissaient en général à la solution correcte car les pièces blanches collées se distinguaient de celles qui étaient dessinées dans la figure initiale.

Les erreurs de comptage ont été nombreuses, (53/84), la plupart à propos du nombre de pavés blancs.

II. 4. Les apports pour les maîtres des problèmes *Les Remparts et Pavage*

Les deux versions du problème et l'analyse de leurs résultats sont proches et doivent intéresser les maîtres. On découvre à cette occasion des savoirs géométriques souvent ignorés par les auteurs de listes d'objectifs ou de compétences. À propos des « compétences » visées par *Mathéval* », on constate les ambiguïtés habituelles de la terminologie : si « comprendre la structure de l'ornement... » est bien nécessaire pour terminer le pavage, il semble en revanche que « en repérant les axes et les centres de symétrie » n'est pas caractéristique de la tâche. De même, le problème n'est pas vraiment à classer dans le domaine de connaissance «symétries ». Il s'agit en réalité de mettre en place des savoirs liés à l'alignement, de points et de côtés de pavés, de repérer les directions plutôt que de travailler objet par objet.

Les analyses de ce problème permettent encore au maître de constater que le dénombrement d'objets, même bien ordonnés, ne se fait pas spontanément de manière optimale par l'élève et que les activités de pavage sont bien utiles dans ce domaine.

Les contraintes institutionnelles de l'enquête *Mathéval*, à propos de la « réussite » ne sont évidemment pas d'intérêt primordial pour les maîtres, mais c'est cependant grâce à elles qu'ils peuvent en savoir plus sur la manière dont leurs élèves résolvent ses problèmes et quels sont les savoirs mathématiques en jeu. Les analyses de procédures du *RMT* donnent des informations plus précises sur ces savoirs ; elles révèlent en particulier que ce sont les procédures de comptage qui sont au cœur du problème.

Fait intéressant à signaler sur les influences réciproques des deux enquêtes : En 1994, le problème « Le trou » de l'épreuve II du 2e *RMR* (Rallye mathématique romand) a montré que le comptage de pièces manquantes dans un pavage régulier (en l'occurrence des briques dans un mur) n'est pas évident chez des élèves de degré 3. L'enquête Mathéval. a créé un problème sur le même thème pour ses questions individuelles du domaine de la géométrie : *Les remparts.* Le *RMT* a repris le thème, avec un dessin plus complexe dans *Pavage.* Cette évolution montre l'intérêt des échanges et contacts entre les différentes enquêtes. Chacune d'elles peut tirer profit des résultats obtenus par l'autre pour développer ses propres questions.

III. QUELQUES REMARQUES EN GUISE DE CONCLUSIONS

- Chaque confrontation a ses propres buts, ses propres modalités de questionnement des élèves, ses propres contraintes. Il n'y a pas lieu d'en rejeter l'une ou l'autre, parce qu'elle ne correspond pas à ses intérêts personnels.
- Certaines confrontations sont conçues explicitement à des fins didactiques, afin d'offrir des données directement utiles aux maîtres. D'autres sont conçues pour le pilotage des innovations, à l'intention, par exemple, des formateurs, des rédacteurs de plans d'études ou de moyens d'enseignement. D'autres enfin pour la gestion globale du système d'enseignement, à l'intention de la « noosphère ». Nous avons tenté de montrer que, dans ces dernières confrontations, on trouve aussi des éléments potentiellement intéressants aux niveaux pédagogique et didactique : *Les pommiers de PISA*, ont donné le prétexte à un développement et un approfondissement au travers des *Tapis carrés* du *RMT*, les analyses des *Remparts* de *Mathéval* sont proches de celles de *Pavage* et d'autres problèmes du *RMT.*
- D'autres enquêtes à grande échelle, donnent aussi des idées ou des pistes de réflexion pour les maîtres. Par exemple, les résultats du concours *Kangourou* et de ses questions à choix multiples, montrent que certaines erreurs l'emportent de loin sur les réponses justes et jugées « faciles » par ceux qui maîtrisent les procédures « expertes ». C'est l'occasion de se poser des questions sur les procédures ou représentations qui sont à l'origine de ces erreurs et sur leurs origines et leurs liens avec l'enseignement.
- On pourrait croire qu'il suffit de se baisser pour ramasser les idées laissées dans le sillage des diverses enquêtes à grande échelle. C'est nécessaire, oui, mais ce n'est cependant pas suffisant. La perception d'une piste à explorer, par le maître ou par le didacticien n'est qu'un premier pas, il faut encore du temps ensuite, de l'énergie et des efforts en commun pour aller au-delà. Aucune grande enquête n'est gérée par un ou deux individus. Ce sont des équipes qui y travaillent, et c'est en leur sein que doivent agir chercheurs et enseignants pour veiller à maintenir le cap et éviter de tomber dans la facilité des « compétences » ou « standards » en oubliant que les apprentissages ne sont jamais figés.

IV. BIBLIOGRAPHIE

ANTONIETTI, J.P. (Ed.).(2003) *Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire : Résultats de la première phase de l'enquête* MATHEVAL. Neuchâtel: IRDP.

EQUIPE DU KANGOUROU (2004) Commentaires sur les questions du Kangourou dees mathématiques 2004, IN *Math-Ecole* 212 (33-46)

EVAPM 6e (1997) *Observatoire de l'enseignement des mathématiques Par des enseignants, Pour les enseignants. Paris:* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

MOSER, U. (2001) *Préparés pour la vie ? Les compétences de base des jeunes – Synthèse du rapport national* PISA 2000. Neuchâtel: OFES / CDIP.

OCDE (2001) *Connaissances et compétences; des atouts pour la vie.* Premier résultats de Pisa 2001.Paris : les Editions de l'OCDE.

OCDE : Extrait de l'étude PISA 2000.
http://www.script.lu/documentation/pdf/publi/pisa/pisa-exemples-francais.pdf

ZAHNER ROSSIER, C. et all. (2004) *PISA 2003 : Compétences pour l'avenir, premier rapport national.* Neuchâtel/Berne : OFS et CDIP

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des contes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Pythagore et Thalès,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini,ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
L'Almanach du petit matheux en herbe, Edition Archimède G. Sarcone	...	(ex à Fr. 18.-)**
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	...	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	...	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial Grand N)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	...	(ex à Fr. 55.-)
Problèmes de rallyes et concours:		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 28.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Luxembourg, 03)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

N ~~1033~~ 1
OPTI - Aigle
H.-A. Anner
CP 327
1860 Aigle

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à:
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel