MATH-ÉCOLE 217

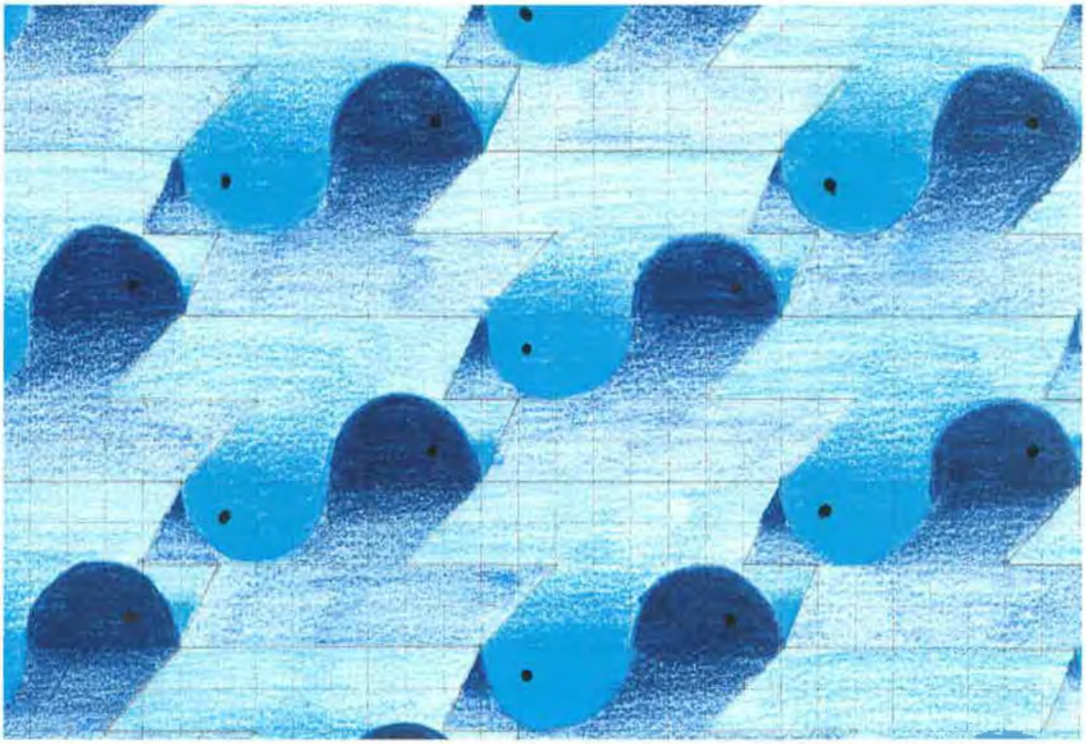
43e Année

Décembre 2006

Variations sur un problème connu

Évaluation : lieux géométriques

Du Sudoku
à la brique de Pythagore



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : secretariat@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Anciens numéros:
CHF 5.– de 150 à 217 (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)
CHF 3.- de 1 à 149 (nombreux numéros épuisés, possibilité d'obtenir des photocopies, CHF 8.- le numéro)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Stéphane Clivaz
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Laura Weiss

Maquette
Raphaël Cuomo
Stéphanie Fiorina Jordan

Imprimerie
Fiorina, rue du Scex 34
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Alessia, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

217

Décembre 2006

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

Comité de *Math-Ecole*

UNE PAGE SE TOURNE

Chers lecteurs et abonnés,

Plusieurs d'entre vous s'inquiétaient de ne plus recevoir leur revue. Ce numéro de *Math-Ecole* vous parvient en effet avec un an de retard, nous vous devons donc des excuses et des explications.
Ce long silence est dû aux incertitudes sur l'avenir de notre revue. Le comité a évalué le « cahier des charges » de l'édition de *Math-Ecole*, qui va du secrétariat à la rédaction finale, en passant par la recherche d'abonnés et d'articles, la gestion du fichier, la comptabilité, l'aide à l'écriture pour ceux qui veulent bien faire part de leurs expériences, mais hésitent à la mettre sous forme de textes à publier. Il a bien fallu admettre que les disponibilités personnelles des membres du comité n'étaient plus suffisantes pour assurer l'avenir de la revue. Nous nous sommes alors adressés aux institutions scolaires romandes pour obtenir un soutien, puis avons envisagé des partenariats avec d'autres revues.

Ces recherches sont restées vaines et le comité de Math-Ecole doit malheureusement renoncer à la parution sur papier de la revue, après 45 ans de « bons et loyaux services », selon la formule consacrée. Nous allons désormais nous tourner vers une proposition d'édition électronique. Vous trouverez prochainement, sur notre site : **http://www.math-ecole.ch**, de nouveaux articles, une tribune et des informations, dans le cadre de l'*Association Math-Ecole*, qui prendra le relais de la revue.

Votre abonnement prendra fin avec ce numéro 217 qui vous est encore dû. Nous n'avions pas lancé d'appel pour le renouvellement des abonnements en 2006 en prévision de cette issue malheureuse mais inéluctable.
Nous donnons donc rendez-vous sur notre site à tous les lecteurs de *Math-Ecole* qui restent intéressés par le débat et la réflexion sur l'enseignement des mathématiques, dans notre petite région de Suisse romande et au-delà de nos frontières. C'est l'intérêt et la participation des visiteurs de ce site, comme l'engagement des membres de l'association, qui feront vivre cet espace virtuel de rencontre et de réflexion. Il n'est pas exclu que certains de nos futurs articles se réalisent en une version imprimée, que certains débats se poursuivent lors de rencontres ou de journées d'études. Les perspectives sont ouvertes, y compris celle de la reprise de l'édition sur papier de *Math-Ecole* par une nouvelle équipe ou une institution qui serait intéressée.
Nous prenons donc congé de vous par la voie postale et sous la forme palpable de la revue sur papier pour vous retrouver, comme internautes, dans le cadre de l'*Association Math-Ecole*, avec nos remerciements pour votre fidélité et nos meilleurs messages collégiaux.

REMERCIEMENTS PARTICULIERS

De 1961 à 2006, *Math-Ecole* a vécu grâce au travail bénévole de tous ceux qui se sont occupés de sa gestion et ont rédigé ses 7000 à 8000 pages. Leur contribution vaut bien un remerciement.

Il faut citer en premier lieu le fondateur de la revue, Samuel Roller, rédacteur responsable de 1961 à 1975, puis ses deux successeurs : Raymond Hutin de 1976 à 1990 et François Jaquet, de 1991 à 2006.
Les relectures et contacts avec l'imprimerie ont été assurés plus de vingt ans par François Brunelli, puis par Yvan Michlig qui a aussi mis en page la revue des numéros 150 à 173, avant que ces travaux ne soient rétribués puis confiés à des professionnels.

Pour la gestion du fichier des abonnés, il faut citer les secrétaires du Service de la recherche pédagogique de Genève, Mme Hutin, et de l'IRDP, Mmes L. Cattin, E. Egger et M. Steudler qui ont bien souvent consacré du temps à *Math-Ecole* au-delà de leurs fonctions officielles et, surtout, Martine Simonet qui a pris en charge le fichier et la « boutique » dès que la revue a quitté l'IRDP en raison de la retraite de son rédacteur.

En 45 ans, plusieurs institutions ont offert leur soutien administratif qui s'est révélé indispensable pour l'existence de notre revue : le Service pédagogique de Genève sous la direction de Samuel Roller, puis de Raymond Hutin, l'IRDP, sous la direction de Samuel Roller, puis de Jacques-André Tschoumy et Jacques Weiss. Finalement, le département de mathématiques de l'Université de Neuchâtel, par son directeur Alain Valette, a mis un local à disposition de *Math-Ecole* dès son départ de l'IRDP en 2001.

De la part de certains cantons romands, les contributions ont aussi été importantes. Nos trente premiers numéros étaient insérés dans la revue cantonale *L'école valaisanne*, sous le titre *Les nombres en couleurs* (numéros 1 à 25) puis *La MATHématique à l'ECOLE* (numéros 26 à 30). Le canton de Genève a offert l'abonnement à *Math-Ecole* à tous ses enseignants, de 1968 à 1994 puis à tous ses établissements scolaires. Les cantons de Vaud et Neuchâtel ont aussi souscrit à de nombreux abonnements collectifs.

Nous avons recensé environ 280 auteurs, qui ont écrit près de 1400 articles dans *Math-Ecole*. Il n'est pas question de les remercier tous ici, nous nous contenterons de rappeler quelques noms qui ont alimenté nos colonnes et ont ainsi été associés le plus souvent à notre revue : S. Roller (dont les contributions vont des numéros 1 à 170), Th Bernet, J-J. Walder, A. Calame (des numéros 31 à 190) R. Hutin, R. Delez, M. Chastellain, L-O. Pochon, M. Brêchet et F. Jaquet (des numéros 70 à 217, avec plus de 120 articles).

Nos remerciements vont encore à l'Imprimerie Fiorina, à Sion, dont les presses ont vu passer les 217 numéros des *Nombres en couleur* puis de *Math-Ecole*, de 1961 à 2006. La famille Fiorina et ses collaborateurs ont suivi fidèlement l'évolution de notre revue, ils ont tenu à lui assurer la meilleure qualité graphique et se sont toujours montrés patients et indulgents envers ses auteurs parfois très « amateurs » au niveau typographique.

Et finalement, merci aux lecteurs qui nous sont restés fidèles de très longues années, et que nous espérons rencontrer sur notre site.

Les visiteurs du site http://www.math-ecole.ch trouveront prochainement, dans le numéro 218 :

- une enquête sur les attentes à propos de la version virtuelle de *Math-Ecole* accompagnée de réflexions du Comité sur l'existence d'une revue pour ceux qui enseignent les mathématiques en Suisse romande,
- quelques épreuves du RMT avec commentaires,
- un article sur les évolutions récentes dans la manière de définir les programmes et de les diffuser publiquement,
- une analyse comparative des raisonnements mis en oeuvre dans le SUDOKU et le KAKURO
- de nouvelles notes de lecture,
- de nouvelles activités pour le « Coin maths »
- ...

VARIATIONS SUR UN PROBLÈME CONNU[1]

Luc-Olivier Pochon

L'enseignement des mathématiques en Suisse romande s'appuie fortement sur la résolution de problèmes. Cette option pose aux auteurs de moyens d'enseignement, comme aux enseignants, le défi de trouver des familles de situations qui organisent l'apprentissage grâce à des « obstacles » bien choisis[2]. Se situant dans cette optique, cet article part d'un problème et en explore quelques variations afin d'essayer de tisser ce que les didacticiens appellent un « espace de problèmes »[3].
Le point de départ est tiré des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques 7-8-9. Il s'agit de « La girafe »[4] dont l'énoncé est donné ci-dessous:

La girafe

Une girafe est installée dans un pré qui a la forme d'un triangle rectangle.
Les côtés de son angle droit mesurent respectivement 16 m et 12 m.
Grâce à son long cou, la girafe peut brouter l'herbe jusqu'à 2 m à l'extérieur de la clôture.

Quelle est l'aire de la surface d'herbe susceptible d'être broutée par ce charmant ruminant ?

1 L'impulsion à cette analyse a été donnée par le Groupe mathématique Harmos-SR qui a pris cette activité comme référence lors de l'établissement d'une grille d'analyse de tâches. Toutefois, les propos tenus dans cet article n'engagent que leur auteur.

2 Procédé minutieusement décrit par Cardinet, J. (1987). L'adaptation des objectifs à la réalité. In GRAPMATH. *L'ajustement des programmes expérimentaux de mathématique en Suisse romande.* Neuchâtel: IRDP, Ouvertures, 87.401.

3 Fabre, M. (1999). Situations-problèmes et savoir scolaire. Paris: PUF.

4 Brêchet, M. Calame, J.-A. & Chastellain, M. (2003). *Mathématiques 7-8-9, Grandeurs et mesures, Analyse de données.* Lausanne: LEP. Fascicule: Grandeurs et mesures, Analyse de données, activité 84, p. 41.

Habillage et variantes

Il est possible d'imaginer de nombreuses variantes de cet énoncé. On peut par exemple remplacer la girafe par le bras d'une grue. Cette modification rend plus perceptible qu'une construction géométrique se cache derrière l'énoncé. On peut aussi, en supprimant l'habillage (en parlant de « lieu de points », par exemple), faciliter l'accès aux notions mathématiques. Mais en même temps, on supprime une partie du processus de modélisation, voire de mathématisation.

Les notions

L'activité mêle un aspect de géométrie synthétique[5] - la recherche d'un « lieu de points » - et des éléments de géométrie métrique (en l'occurrence liés au triangle rectangle) et le calcul d'aires. C'est son intérêt. Cela fournit une étape de planification plus riche et intéressante. De plus, chacun de ces aspects appartenant à un registre particulier, la recherche de la solution demande une certaine décentration pour passer d'un registre à l'autre.

À noter qu'une variante pourrait confiner l'activité dans le registre des mesures de longueurs en se contentant de demander le périmètre de la surface broutée (en prenant au niveau de l'habillage, le prétexte d'ajouter une nouvelle barrière de protection).

L'obstacle noyau

Le premier «obstacle» à surmonter est évidemment la recherche de la frontière de la nouvelle surface, notamment aux alentours des som-

5 Le nom de géométrie synthétique a été créé au XIXe siècle par opposition à la géométrie analytique, ou géométrie des coordonnées. La géométrie analytique peut se développer sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures. La géométrie synthétique s'appuie sur des considérations d'espace, de figures et de postulats liés à notre perception. (voir *l'Encyclopedie des sciences mathématiques*, édition française, Gauthier-Villars, 1915 rééd. Jacques Gabay, Paris, 1991, t. III, vol. 1, p. 185-259.

mets du triangle initial. Cet obstacle principal, ou obstacle noyau, peut être précédé de « jalons » ou être suivi d'activités de consolidation (cela dépend de l'agencement didactique qui est adopté). Par exemple, pour reprendre des suggestions[6] de Michel Brêchet :

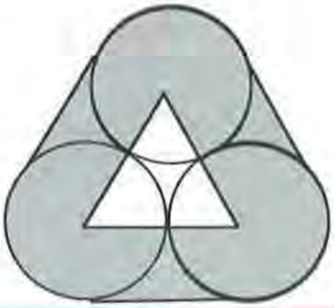
** Représentez tous les points situés à 2 cm d'un rectangle donné.*

Ou encore :

** Coloriez la partie de la feuille qui se trouve à moins de 3 cm d'un point P et à plus de 4 cm d'un autre point R. (les points P et R sont placés judicieusement).*

On peut aussi faciliter le passage de l'obstacle « noyau » en suggérant une construction utile par un problème du genre[7] :

Calculer l'aire de la partie grisée, lorsque les côtés du triangle équilatéral valent 5 cm (puis 12 cm, puis ...).



Le deuxième obstacle est lié au précédent. Il s'agit du rassemblement des tranches de disque pour en faire un disque complet (selon le dispositif didactique ce stade ne sera pas forcément atteint du premier coup). (*Voir figure 1*)

6 Communiquées au groupe Harmos-SR.

7 Cet énoncé est inspiré du problème « histoire d'aires » de l'ouvrage 7-8-9 repris de : Calame, J.-A. & Jaquet, F. (1989). *Mathématiques, neuvième année.* Neuchâtel : Département de l'instruction publique.

figure 1 : recherche de l'aire par découpage et assemblage

Variable didactique

L'analyse précédente suggère que la forme du pré constitue une importante variable didactique de la situation. En poursuivant sur cette voie, on constate tout d'abord qu'utiliser un pré carré, voire rectangulaire, rend les choses plus évidentes tout en dénaturant vraisemblablement l'objectif assigné à cette activité par ses auteurs. Cette variante facilite la perception du découpage-assemblage du disque et supprime le « distracteur » que représente le calcul de la longueur d'un côté.

Mais on peut aussi tenter d'augmenter le nombre de côtés du pré initial et de considérer un polygone (*figure 2*).

figure 2 : le problème de la girafe avec un pré pentagonal

L'intérêt est ici de constater que l'on change de registre. L'aspect métrique disparaît (ou devient trop ardu). La situation se centre sur le registre « synthétique ». Privé du distracteur

« calcul de grandeur », on perçoit certainement plus facilement la possibilité de procéder à un découpage suivit d'un assemblage. L'intérêt est alors de passer à un degré de mathématisation supplémentaire. En utilisant le calcul littéral, on constate aisément que l'on a les relations :

(1) $P' = P + 2\pi L$
(2) $A' = A + PL + \pi L^2$

Où P et A représentent le périmètre et l'aire du pré initial et P' et A' le périmètre et l'aire de la surface broutée, L étant la longueur du cou de la girafe.

Ces formules permettent d'examiner quelques questions concernant l'accroissement du périmètre ou de la superficie en fonction de L.

La forme polygonale du pré perd donc de son importance. L'activité de résolution s'apparente à une l'activité mentale menée dans la tradition des « théorèmes sans preuve »[8] (l'aire totale est la somme des aires des rectangles et du disque de rayon L).

En passant, notons que le fait que les secteurs de disque se rejoignent pour former un disque complet est bien connu des utilisateurs de LOGO sous l'acronyme TTTT (théorème du tour total de la tortue). Rappelons l'histoire : une tortue parcourant le pourtour du polygone aura fait un tour sur elle-même en arrivant à son point de départ. Ce qui démontre que la juxtaposition des angles β des rotations de la tortue vaut un tour complet. Comme l'angle β vaut l'angle externe[9] α (*figure 3*) cela montre l'équivalence des deux propriétés.

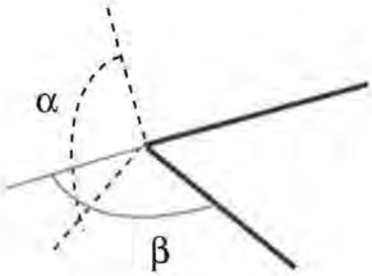


figure 3 : l'angle externe α est identique à β l'angle de rotation de la tortue

Pour aller plus loin

Qu'en est-il pour d'autres formes de prés ? Pour un cercle de rayon r, par exemple, il n'est pas difficile de montrer que les deux formules sont encore valables.

La première : $P' = 2\pi(r + L) = P + 2\pi L$ est d'ailleurs liée au paradoxe de la balle de ping-pong et du globe terrestre[10]. Par contre, il est inhabituel de l'interpréter comme la somme de la longueur des circonférences du cercle initial et du cercle obtenu par rotation du vecteur $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\| = L$) (*figure 4*).

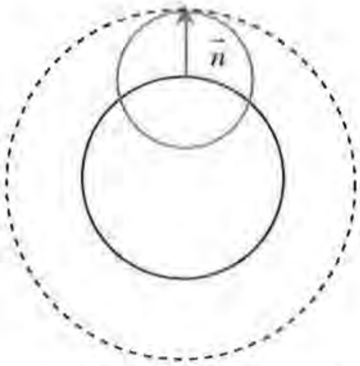


figure 4 : le cas du polygone à une infinité de côtés de longueur nulle

8 Delahaye, J.-P. (2005). Démonstrations et certitude en mathématiques. Dossier « *Pour la Science* », *Les chemins de la logique*, octobre/décembre 2005, 38-43.

9 Appelé ainsi par Descartes selon Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning. Volume I: Induction and analogy in mathematics.* Princeton : Princeton University Press. 2nd Edition.

10 Rappel : on suppose qu'une ficelle entoure une balle de ping-pong et une autre la terre. De combien faut-il rallonger chacune des ficelles pour pouvoir les éloigner de 1m de leur support ?

L'autre formule est en général abordée sous la forme de l'aire de la couronne donnée classiquement par la formule : $2\pi(r+\frac{L}{2})\times L$

Il est également possible d'interpréter l'aire de cette couronne de façon inhabituelle comme formée de l'aire du rectangle construit sur la circonférence du disque intérieur à laquelle on ajoute l'aire du disque (*figure 4*) parcouru par le vecteur $\vec{n}$. En effet, on vérifie facilement que cette formule classique donne bien le même résultat que l'accroissement de l'aire exprimé dans (2) :

$$PL+\pi L^2 = 2\pi(r+\frac{L}{2})\times L$$

Et l'on se retrouve ici en pleine géométrie de la tortue (LOGO) ; la géométrie des « petits pas » qui considère le cercle comme beaucoup de petits pas, chacun ajoutant une tranche de disque.

Et encore ...

Il est intéressant de noter que ce problème peut encore servir à des applications non triviales de calcul de longueur d'arc pour le niveau lycée. En conjuguant les deux cas, polygone et cercle, les mêmes formules sont presque établies pour une figure « quelconque » (*figure 5*). Les découpages et assemblages ne sont plus possibles, mais on peut utiliser la géométrie de la tortue le long des parties « lisses » et l'exemple du pré polygonal dans les « coins ».

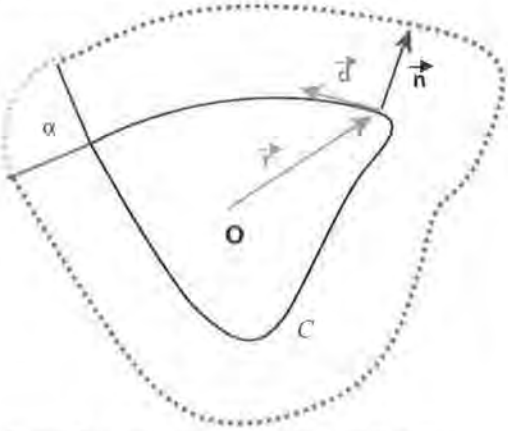


figure 5 : courbe avec un « coin » d'angle « externe » α

Globalement, on se trouve dans un paradigme de géométrie différentielle. Intuitivement, lorsque le rayon vecteur $\vec{r}$ parcourt la courbe C, $\vec{n}$ fait un tour sur lui-même (avec quelques « vibrations ») sauf une tranche α (on se permet ici d'utiliser la même lettre pour désigner l'angle et sa mesure).

Le lecteur intéressé trouvera sur le site de la revue la démonstration formelle avec :

Le périmètre $P' = \int_C \left\| d(\overrightarrow{r+n}) \right\| + \alpha \left\| \vec{n} \right\|$ calculé à partir de $P = \oint \left\| d\vec{r} \right\|$ et l'aire, composante du vecteur $\overrightarrow{A'} = \frac{1}{2}\int_C (\overrightarrow{r+n}) \times d(\overrightarrow{r+n}) + \alpha \left\| \vec{n} \right\|^2$, calculée à partir de $\vec{A} = \frac{1}{2}\oint \vec{r} \times \overrightarrow{dr}$.

Pour conclure

En partant d'un problème proposé par les moyens 7,8,9, quelques variations ont mis l'accent sur la variable didactique « forme du pré ». Avec tout d'abord un premier problème de lieu de point (selon la formulation qu'on lui donne), puis une activité de découpage-assemblage puis finalement une approche différentielle qui pourrait, sans apparaître dans cet « espace de problèmes », passer à côté de l'interprétation simple et élégante : « aire de la couronne = aire d'un rectangle + aire d'un disque ».

Cette « balade » permet de montrer, par exemple, que le niveau de complexité et celui de difficulté d'un problème entretiennent des rapports particuliers. La considération de propriétés générales, non numériques, peut rendre certains aspects plus aisés. Elle a aussi conduit à découvrir une nouvelle interprétation de la surface de la couronne. Elle permet également de constater que les « espaces de problèmes » peuvent enjamber les frontières de la scolarité obligatoire. On notera encore la connexion possible[11] avec l'espace de problèmes « rotations de disques

11 via notamment la recherche de la trajectoire du centre du disque qui roule.

roulant sur d'autres objets » proposé dans Math-Ecole 215[12] et dont des solutions se trouvent dans l'encadré ci-dessous et en page 34.

Mais d'autres variantes sont possibles et vraisemblablement mieux adaptées aux objectifs de la fin de la scolarité obligatoire qui permettraient d'insérer cette situation dans d'autres « espaces de problèmes ». Une version plus sérieuse de ce jeu des variations serait, en se limitant à un cadre scolaire précis, de voir comment ce tissage a priori peut se transformer en une carte de connaissance chez les élèves.

À l'heure où l'on discute des résultats des récentes évaluations de l'enseignement mathématique, cet article n'a pas d'autre ambition que de faire partager quelques réflexions didactiques agrémentées de touches historiques. On aurait tort en effet d'oublier que l'amélioration de l'enseignement des mathématiques a une longue histoire. « L'éducation mathématique n'est rien d'autre que le développement de l'activité mathématique de l'élève et il n'y a pas d'activité sans problèmes » proclamait déjà Anna Zofia Krygowska[13] lors de la 28e rencontre de la CIEAEM[14]. Depuis lors des progrès théoriques ont été accomplis, mais c'est chez ces pionniers que l'on retrouve souvent l'essence et la force des propositions.

12 Genoud, A. & Jaquet, F. (2005). Qualifications régionales valaisannes: commentaires et développements de quelques problèmes. Math-Ecole, 215, 42-47.

13 L'exposé de Anna Zofia Krygowska reprend des thèses présentées en 1966 à Moscou lors du Congrès international des mathématiciens. Il se base sur des thèses de G. Polya qui, lui, ajoute: « La résolution des problèmes a été la charpente de l'enseignement des mathématiques depuis l'époque du papyrus RHIND ».

14 Vanhamme, W. & J. (Eds) (1976). *La problématique et l'enseignement des mathématiques.* Compte rendus de la XXVIIIe Rencontre organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques – CIEAEM, 5-12 août 1976, Louvain-La-Neuve.

LES ROTATIONS DE DISQUES ROULANT SUR D'AUTRES OBJETS

Solutions des problèmes du numéro 215 (p. 47)

Augustin Genoud

La recherche des solutions m'a permis de trouver une stratégie permettant de résoudre facilement ce type de problèmes. Il s'agit de faire le rapport entre la distance parcourue par le centre de la pièce en mouvement et le périmètre de la pièce en mouvement.

$$\text{nombre de tours } (n) = \frac{\text{distance parcourue par le centre de la pièce en mouvement } (d)}{\text{périmètre de la pièce en mouvement } (p)}$$

Les distances sont donnée ici en cm. L'approximation de π utilisée ici est 22/7.

1. $d = 50$, $p = 7\pi$, $n = 50 / 7\pi \approx 50 / (7 \times (22/7))$ = **25/11 tours**, ou 2 tours et 3/11 d'un tour
2. $d = 2(3,5+3,5)\pi = 14\pi$ $p = 7\pi \approx 22$ $n = 14\pi / 7\pi$ = **2 tours**
   (Nos élèves qui préfèrent les approximations trouvent aussi 2 tours ! une bonne occasion de discuter des « mérites » des valeurs approchées par rapport aux vraies valeurs des nombres non décimaux. Cette remarque est valable aussi pour la plupart des exemples suivants)
3. $d = 2\pi(7 + 3,5) = 21\pi$, $p = 7\pi \approx 7 = 22$, $n = 21\pi / 7\pi$ = **3 tours**
   (Par approximations, pour entraîner le calcul sur les fractions :
   (21 x 22/7 = 66, 7 x 22/7 = 22 et 66 : 22 = 3)
4. $d = 2\pi(7 + 3,5) = 21\pi$, $p = 14\pi$, $n = 21\pi : 14\pi$ = **1,5 tours**
5. $d = 2\pi(6 + 3,5) = 19\pi$, $p = 7\pi$, $n = 19\pi / 7\pi$ = **19/7 tours**, ou 2 tours et 5/7 de tour

Suite en page 34

EVALUATION : LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Michel Brêchet

Dans le domaine de la géométrie, les polygones, les solides, les similitudes (isométries, homothéties, composées de ces applications), les théorèmes métriques et les lieux géométriques sont les principaux sujets étudiés par les élèves au cours des derniers degrés de la scolarité obligatoire. Ils nécessitent d'être abordés globalement et non de façon segmentée, isolés les uns des autres, car ils tissent d'étroits liens entre eux.

Ainsi, les diagonales d'un losange sont ses axes de symétries, l'intersection des médianes d'un triangle équilatéral est son centre de rotation, les bissectrices des angles d'un hexagone sont ses diagonales, un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle, les paraboles d'équation $y = ax^2$ sont des figures semblables...

Certains lieux géométriques sont « omniprésents » en géométrie plane, en constante interaction avec d'autres sujets d'étude. Parmi eux, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, le cercle et la droite – comme ensembles de points situés à une distance fixée d'un point donné respectivement d'une droite donnée – se taillent la part du lion.

Il est donc indispensable de bien les connaître pour progresser, c'est-à-dire de pouvoir les identifier dans des figures complexes, de mettre en exergue leurs propriétés, de les utiliser comme outils de résolution de problèmes et enfin de savoir les construire, selon une méthode ou une autre.

Notons au passage que la construction formelle de ces objets avec la règle, l'équerre et le compas est parfois susceptible d'occulter quelques-unes de leurs propriétés et d'affaiblir par là même la portée de ces concepts. Elle n'est donc pas d'une importance primordiale. Par exemple, en construisant de façon traditionnelle la médiatrice d'un segment (compas et règle sans utiliser la graduation), on perçoit bien que cette droite sera constituée des points équidistants des extrémités du segment.

Par contre, cette construction voile deux caractéristiques essentielles de la médiatrice : celle de droite perpendiculaire à un segment et passant par son milieu, et celle de droite qui partage le plan en deux demi-plans, chacun étant constitué de points spécifiquement plus proches d'une extrémité du segment que de l'autre.

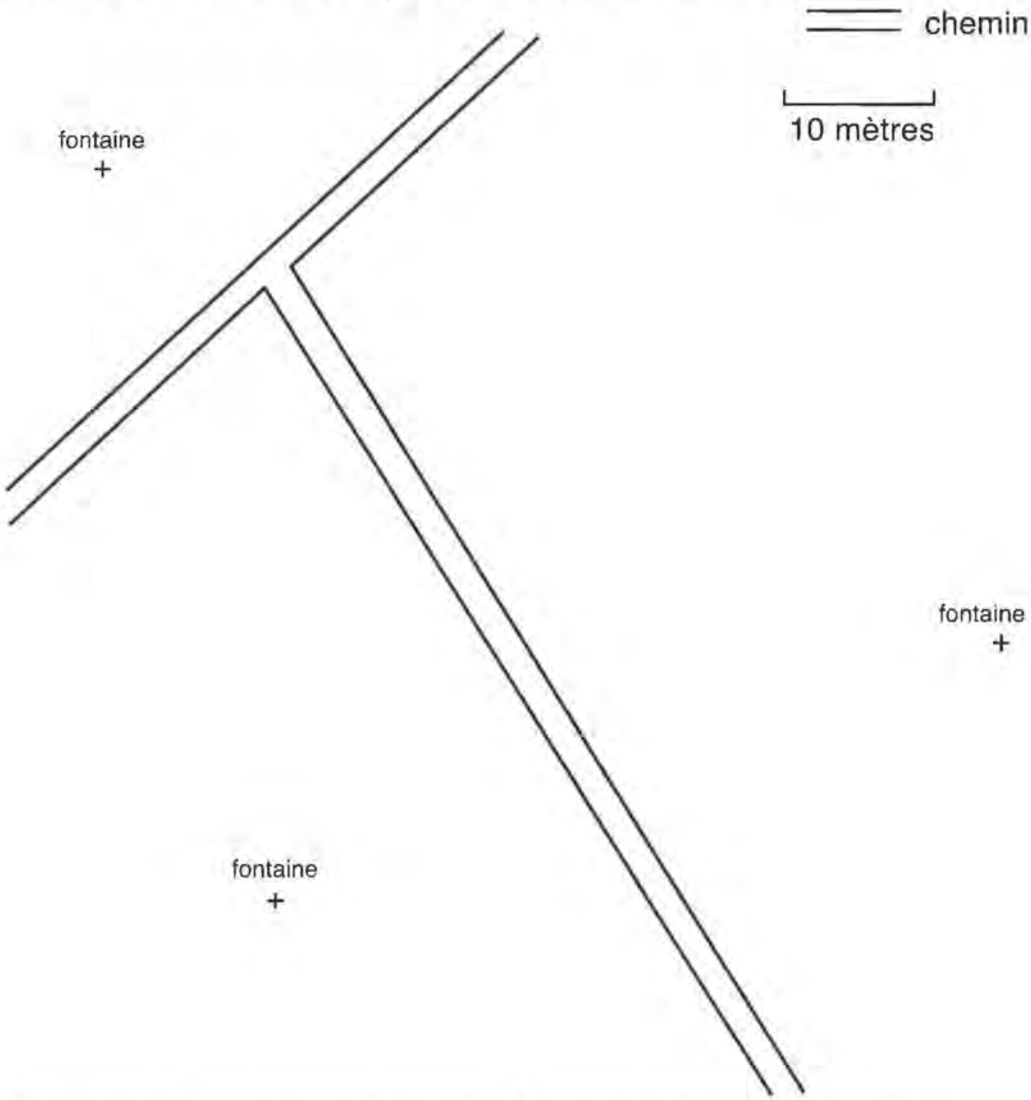
Dans le même ordre d'idées, la construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle n'indique en rien que cette demi-droite est axe de symétrie de l'angle, qu'elle le partage en deux angles isométriques et qu'elle est constituée des points équidistants de ses côtés. A bien y regarder, la construction habituelle cache toutes ces propriétés !

On peut dès lors se demander s'il est judicieux de l'apprendre aux élèves en amont d'un travail approfondi sur l'isométrie des triangles, sur la distance d'un point à une droite et sur la notion de « hauteur extérieure à un triangle ». On éviterait ainsi qu'elle devienne un « truc », une « recette » maniée sans compréhension et donc aléatoirement.

Venons-en maintenant à l'évaluation au travers du problème « Camping », présenté ci-après. Comme sa résolution demande une bonne maîtrise des lieux géométriques abordés, il est destiné prioritairement aux élèves de fin de scolarité. Le travail sur deux plans ou plus est recommandé, car il permet de mieux distinguer les constructions réalisées.

Le problème : Camping

Voici un extrait du plan d'un camping, sur lequel figurent deux chemins et trois fontaines.



a) André voudrait installer sa tente à moins de 10 mètres d'une fontaine et à moins de 10 mètres d'un chemin. Détermine tous les emplacements possibles pour la tente d'André.

b) La tente de Basile est à égale distance des trois fontaines. Où est-elle ?

c) Christian souhaite installer sa tente à égale distance des deux chemins et à 12 mètres d'une fontaine. Détermine tous les emplacements possibles pour la tente de Christian.

d) Denis souhaite installer sa tente à plus de 25 mètres de chaque chemin et à 10 mètres d'une fontaine. Détermine tous les emplacements possibles pour la tente de Denis.

Les critères d'évaluation

Le souhait de valoriser la réussite de chaque tâche m'a conduit à prendre en compte les critères suivants, qui n'ont pas été communiqués aux élèves avant le test :

1) Lieu géométrique des points équidistants :
- d'un point donné : 1 point
- d'une droite donnée : 1 point
- de deux ou trois points donnés : 1 point
- de deux droites données : 1 point

2) Utilisation de l'échelle : 1 point

3) Construction géométrique :
- de la parallèle à une droite : 1 point
- de la médiatrice d'un segment : 1 point
- de la bissectrice d'un angle : 1 point

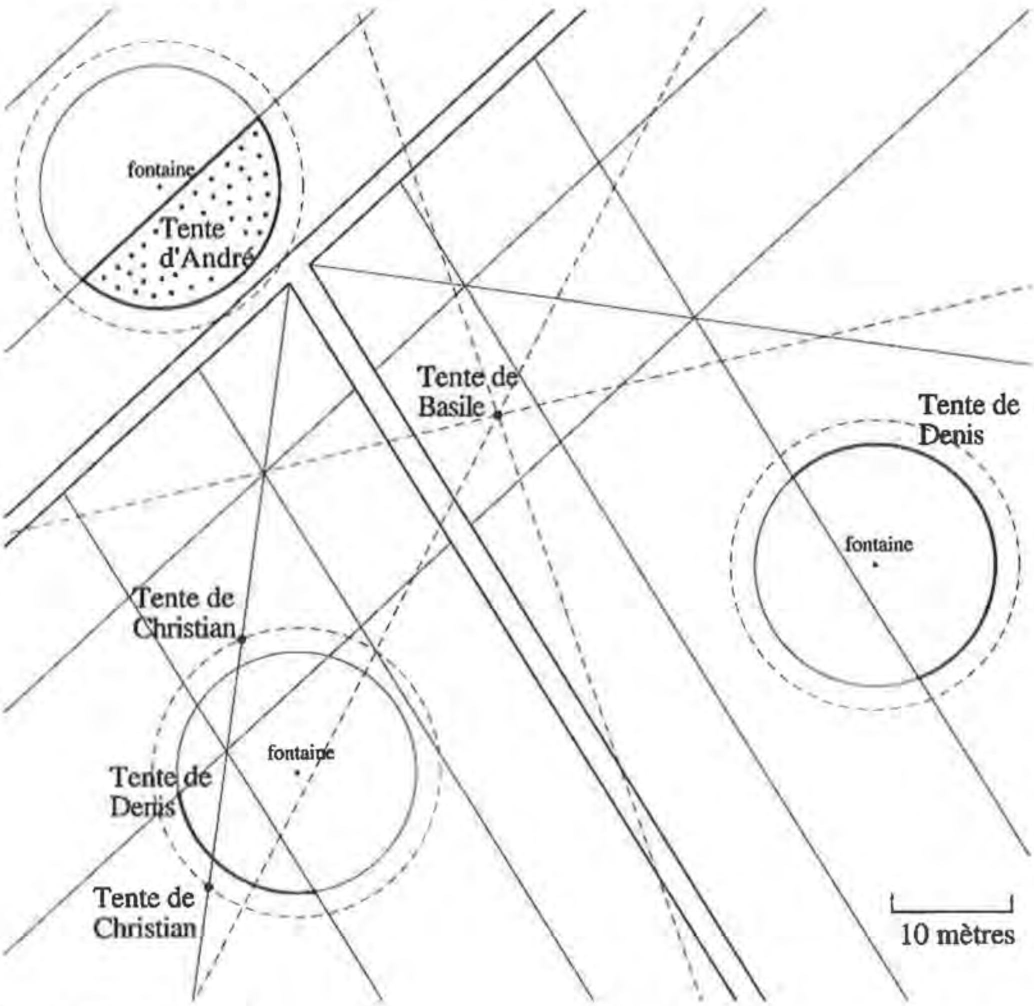
4) Compréhension :
- des expressions « est à moins de » et « est à plus de » : 1 point
- de l'expression « est à » : 1 point

5) Exhaustivité des solutions
- de la partie c) : 1 point
- de la partie d) : 1 point

Total : 12 points

Les solutions

(Le plan est ici réduit à 80% de ses dimensions)



Commentaires à propos de l'évaluation

1) Lieux géométriques (4 points)

- Le lieu géométrique des points du plan situés à une distance fixée d'un point donné est un cercle. Ce lieu géométrique intervient dans les questions a), c) et d). L'élève obtient 1 point s'il construit au moins deux cercles (1/2 point par cercle).
- Le lieu géométrique des points du plan situés à une distance fixée d'une droite donnée est constitué d'une paire de droites parallèles à la droite donnée. Ce lieu géométrique intervient aux questions a) et d). L'élève obtient 1 point si deux droites figurent sur sa feuille (1/2 point par droite). La méthode utilisée pour tracer les droites n'est pas prise en compte à ce stade.
- Le point du plan situé à égale distance de trois points donnés est l'intersection des médiatrices des segments déterminés par ces points (question b). L'élève obtient 1 point si ce point figure sur sa feuille (même approximativement). La méthode utilisée pour placer ce point n'est pas prise en compte à ce stade.
- Le lieu géométrique des points du plan situés à égale distance de deux droites données est la bissectrice de l'angle formé par ces droites (question c). L'élève obtient 1 point si une droite ou un point satisfaisant aux conditions de l'énoncé figure(nt) sur sa feuille. La méthode utilisée n'est pas prise en compte à ce stade.

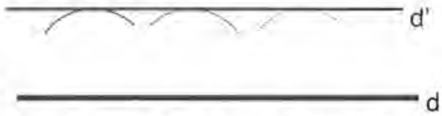
2) Echelle (1 point)

L'élève doit utiliser l'échelle pour représenter sur le plan des segments de longueurs réelles égales à 10 m, 12 m et 25 m. Il obtient 1 point s'il utilise correctement l'échelle dans deux de ces cas (1/2 point par cas). Sur le plan, les segments mesureront respectivement 2 cm, 2,4 cm et 5 cm.

3) Constructions géométriques (3 points)

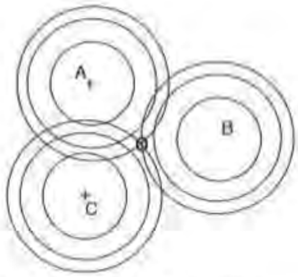
L'élève obtient 1 point pour chacune des trois constructions (parallèle, médiatrice, bissectrice) réalisées selon une procédure correcte. Par exemple, je n'ai attribué aucun point aux constructions suivantes:

Parallèle à la droite d:



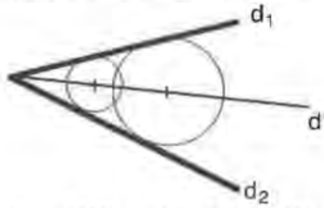
Description: L'élève trace tout d'abord des arcs de cercle dont les centres sont des points de la droite d. Il trace ensuite la droite d', « tangente » aux arcs de cercle, sans construire les points de tangence.

Point équidistant à trois points donnés:



Description: L'élève trace tout d'abord trois cercles de même rayon dont les centres sont les points A, B et C. Il procède de la même manière en ajustant pas à pas le rayon des cercles, de sorte que les cercles aient une intersection commune.

Points équidistants à deux droites données:



Description: L'élève cherche par tâtonnement le centre d'un cercle tangent aux droites d_1 et d_2. Il procède ensuite de la même manière pour trouver la position d'un deuxième centre. Il trace enfin la «bissectrice» d' de l'angle.

4) Compréhension des expressions (2 points)

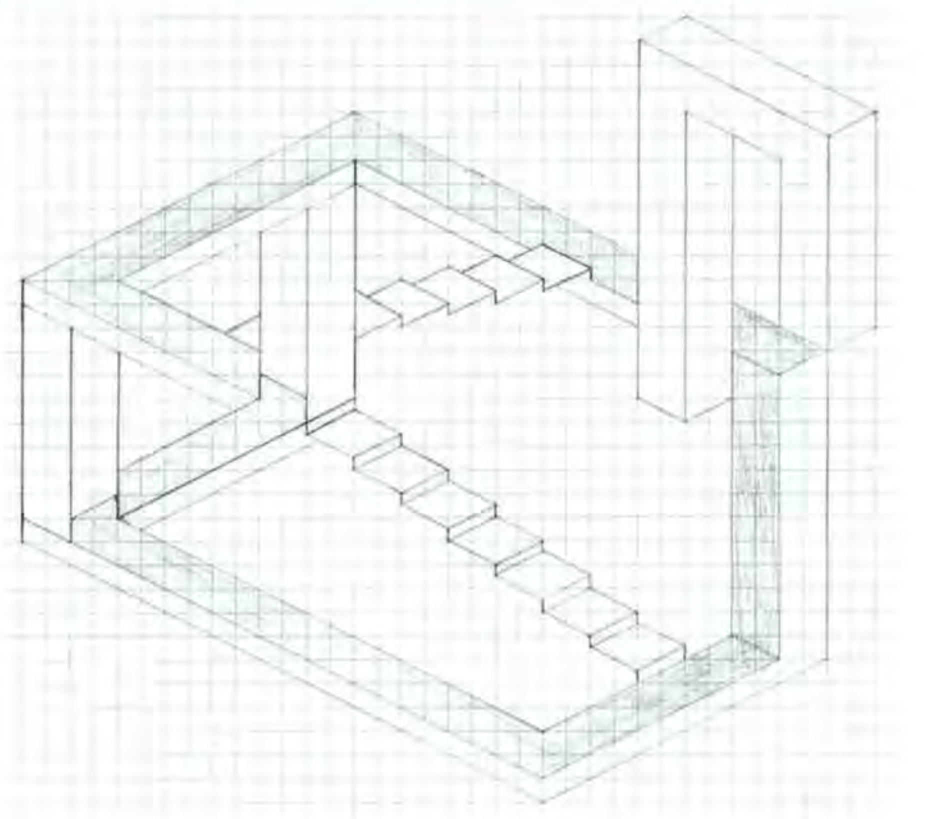
- L'élève obtient 1/2 point pour la compréhension de l'expression « est à moins de » (question a) et 1/2 point pour la compréhension de l'expression « est à plus de » (question d).
- L'élève obtient 1 point pour la compréhension de l'expression « est à » (questions c et d).

5) Exhaustivité des solutions (2 points)

- L'élève obtient 1/2 point par emplacement trouvé à la partie c.
- L'élève obtient 1/2 point par ensemble de points trouvé à la partie d.

Ainsi pratiquée, la correction d'une vingtaine de travaux demande environ deux heures. Les premières copies prennent passablement de temps. L'évaluation des autres est plus rapide, eu égard aux familles de procédures mises en œuvre par les élèves. L'établissement d'un seuil de suffisance étant une opération délicate, dépendant de nombreux paramètres (degré, filière, contexte, plan d'études, habitudes...), je laisse le soin à chaque lecteur de l'établir.

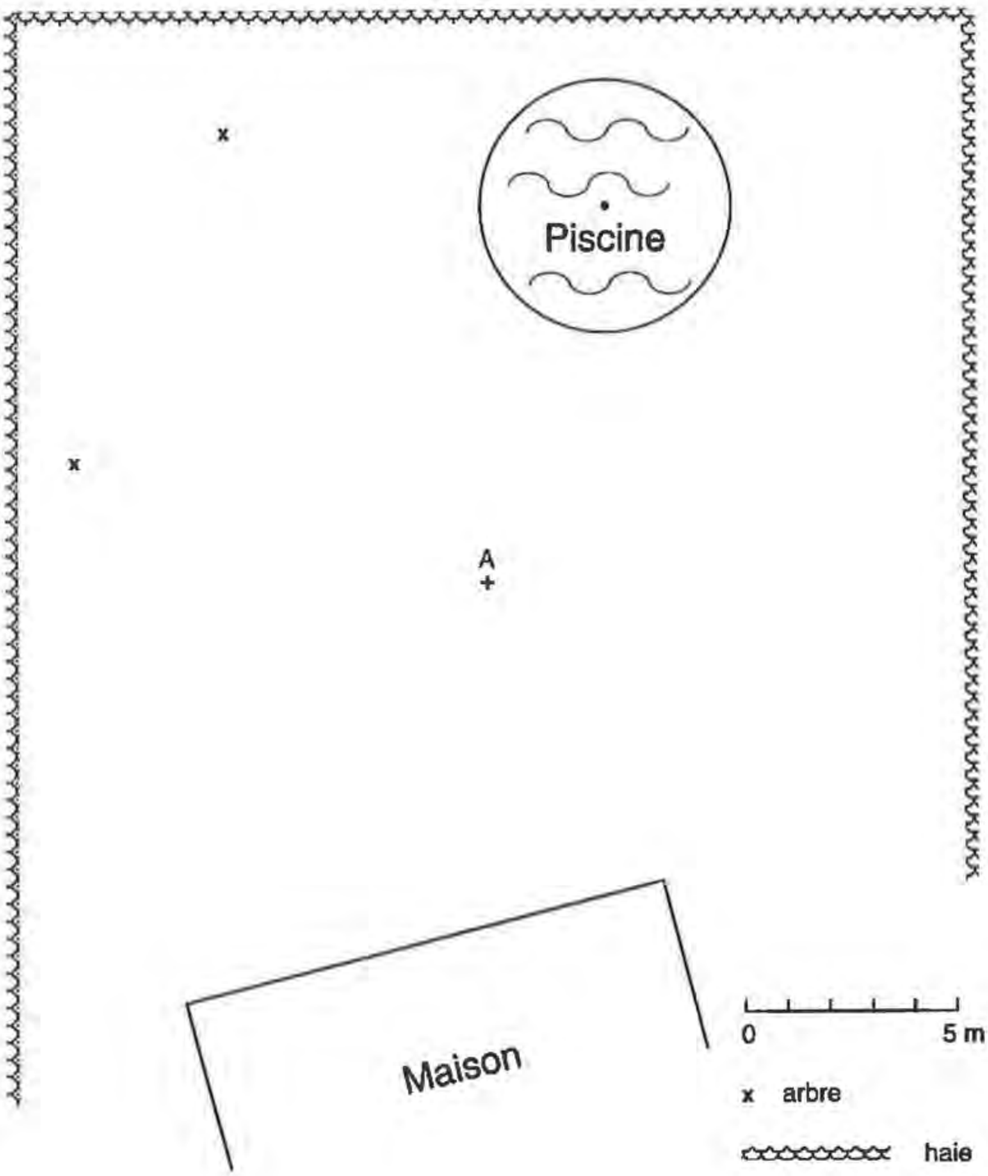
Pour terminer, voici une autre activité dans laquelle il est nécessaire d'utiliser le cercle et la droite comme outils pour résoudre un problème. Elle est moins globale et certainement moins difficile que la précédente. Pour des raisons de mise en page, le plan a été réduit à 80 % de ses dimensions.



« Dessin d'un objet impossible, réalisé par Sébastien (14 ans) »

Pétanque

A ce jeu de pétanque, le but doit être à au moins 2 mètres de tout obstacle (mur, arbre...) et entre 6 et 10 mètres du joueur qui l'a lancé.
Sur le plan ci-dessous, détermine la zone dans laquelle le joueur A doit lancer le but.



14[E] RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

LES PROBLÈMES DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE

Le Rallye mathématique transalpin en est à sa 15[e] édition et le nombre de ses sections continue à augmenter pour arriver maintenant à 25. Le concours, initialement organisé pour les classes de la troisième à la cinquième primaire, s'est étendu progressivement aux degrés 6, puis 7 et 8, pour atteindre les degrés 9 depuis 2004 et 10 depuis cette année. Cette extension, combinée avec une ouverture géographique a un effet sur le nombre de classes inscrites, qui a dépassé les 2000 il y a deux ans et arrive maintenant à 2500. L'effectif des classes se stabilise cependant dans les différentes régions; il atteint environ 300 dans les sections les plus anciennes comme la Suisse romande, Parma, Siena, Luxembourg. Ce nombre représente un maximum pour une équipe d'animateurs du point de vue de la gestion, mais c'est aussi un seuil « naturel » si l'on considère les contingences pour les maîtres des classes inscrites.

Participer au RMT n'est en effet pas une simple substitution de deux ou trois leçons de mathématiques par un « divertissement » : on s'engage à respecter des délais et des règles, à organiser la surveillance de l'épreuve par un collègue, à exploiter ou, au moins, à discuter des problèmes en classe après l'épreuve, à participer si possible aux corrections. On doit aussi faire confiance à ses élèves et à leurs capacités de travailler en groupe, avec toutes les implications dues à la confrontation avec d'autres classes. On doit encore être convaincu de l'intérêt de la résolution de problèmes pour y consacrer du temps normalement consacré au sacro-saint programme, a priori surchargé. La participation au RMT est donc en corrélation étroite avec des conceptions pédagogiques et didactiques bien particulières et, par conséquent, une partie seulement des maîtres s'y engagent.

Du point de vue de la construction des problèmes, on relève une évolution certaine, qui n'est peut-être pas toujours visible dans les énoncés mais qui est bien réelle dans les analyses a priori et dans les intentions didactiques. Le RMT, au travers de ses journées d'études, s'intéresse de plus en plus à l'exploitation de ses problèmes au-delà du « concours » ou de la confrontation entre classes. Il suffit de parcourir la liste des thèmes de ces rencontres internationale pour s'en convaincre : *Le RMT, quels apports pour la didactique ? RMT: Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, RMT: Potentialités pour la classe et la formation, RMT et évaluation, Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ? Les problèmes du RMT dans la pratique de la classe*, jusqu'à celui de la récente rencontre de 2006 : *Les problèmes au service de l'apprentissage : le rôle du RMT.*

Pour s'inscrire dans cette évolution, *Math-Ecole* présente cette fois-ci les problèmes de la première épreuve du 14[e] RMT, accompagnés pour la plupart de commentaires sur leurs potentialités pour l'enseignement des mathématiques : supports pour la construction de connaissances, instruments d'évaluation, opportunités de conduire des raisonnements déductifs, occasions de consolider ou de mettre en oeuvre des savoirs anciens dans des situations nouvelles, défis intellectuels, défis et jeux intellectuels pour valoriser les mathématiques et le plaisir qu'elles peuvent procurer lorsqu'on arrive à la solution.

1. SUDOKU (Cat. 3)

Placez dans chaque case vide de ce tableau l'une de ces quatre lettres : un **A** ou un **B** ou un **C** ou un **D**, en respectant les règles suivantes :
Il doit y avoir les quatre lettres différentes
- dans chaque ligne,
- dans chaque colonne,
- dans chacun des quatre carrés de quatre cases (blanc ou gris).

A	B		
		C	
D		A	

Expliquez comment vous avez fait pour remplir les cases vides.

Commentaires

Le Sudoku est à la mode et il fallait bien qu'il entre dans le RMT. Certains craignaient les difficultés dues à un sujet non scolaire et la grille est par conséquent de 4 x 4 seulement. Mais les craintes se sont révélées infondées : toutes les classes ont pu la remplir correctement. C'est au niveau des explications que le bât blesse. Si une grille de ce type est très facile à compléter, les élèves ont de la peine à décrire leurs démarches et leurs étapes. Il semble donc difficile d'exploiter ce genre de problèmes dans des buts didactiques, même si l'on est capable de décrire les opérations logiques mobilisées par le Sudoku : négations, conjonctions et déductions.

2. L'EVENTAIL DE JULIE (Cat. 3, 4)

Julie a un éventail construit avec 20 bandes en papier couleur. Elle désire l'embellir avec de petites étoiles. Sur la première bande, la plus petite, elle colle 3 étoiles ; sur la deuxième 5, sur la troisième 7. Elle continue en collant sur chaque bande deux étoiles de plus que sur la précédente, jusqu'à la dernière bande.

Combien de petites étoiles Julie va-t-elle coller sur la vingtième bande ?
Combien de petites étoiles doit-elle coller sur tout l'éventail ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Commentaires

L'analyse de la tâche prévoyait une résolution arithmétique :

- *Comprendre la disposition des « bandes » de l'éventail et comment se prolonge le dessin (les bandes manquantes),*
- *percevoir la progression arithmétique (de raison 2 à partir de 3) :3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ...*
- *déterminer son vingtième terme, par énumération en écrivant toute la progression : ...37 ; 39 ; 41ou par calcul : 3 + (2 x 19) = 41*
- *déterminer la somme des 20 termes : 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 37 + 39 + 41 = 440, en les additionnant un à un en une seule addition, ou en calculant les sommes partielles successives : 3 + 5 = 8 ; 8 + 7 = 15 ; 15 + 9 = 24 ... 399 + 41 = 440 ou encore en effectuant l'addition à la calculatrice, ou une résolution de type graphique :*
- *Dessiner tout l'éventail (les 20 bandes) avec toutes les étoiles, puis compter celles de la dernière bande et celles de tout l'ensemble.*

L'une et l'autre de ces procédures exigent un contrôle rigoureux.

Le barème d'attribution des points (commun à toutes les sections) était le suivant :

4 *Les 2 solutions correctes (41 et 440) avec explication de la démarche (liste des 20 termes, écriture des additions, ...)*
3 *Les 2 solutions correctes avec détails très partiels ou sans explications*
2 *Une seule erreur par exemple pour la 20e bande, avec total correspondant ou erreur dans le calcul de la somme*
1 *Deux ou trois erreurs de calcul*
0 *Plus de trois erreurs de calcul ou incompréhension du problème*

Les classes de 3e année ont obtenu des moyennes situées entre 1,5 et 2.
En 4e année, en revanche, la moyenne est voisine de 3.
Proposé à des classes entières, de degré 3 ou 4, ce problème va donc certainement faire apparaître des réponses différentes qui, lors de mises en commun, donneront lieu à des confrontations intéressant sur les manières les plus efficaces de contrôler les 20 premiers termes de la progression arithmétique 3 ; 5 ; 7 ; 9 ;... et la somme des 20 premiers.

La valeur de la variable « nombre de bandes », qui a été fixée à 20 après de longues réflexions lors de l'élaboration du problème, est essentielle pour faire basculer les procédures par dessin vers les procédures numériques.

Ce problème est à placer dans le champ de l'addition, au moment où toutes les propriétés de cette opération sont mises en oeuvre simultanément, avec rigueur et de manière consistante.

3. LES PAQUETS DU PERE NOËL (Cat. 3, 4)

Le Père Noël prépare des paquets rouges, des paquets bleus et des paquets verts.
Chaque paquet rouge pèse 3 kilos.
Chaque paquet bleu pèse 5 kilos.
Chaque paquet vert pèse 8 kilos.
Le Père Noël met plusieurs paquets dans sa hotte. Il veut que les paquets pèsent, ensemble, exactement 25 kilos.
Quels types de paquets peut-il mettre ensemble dans sa hotte ?

Notez toutes vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

Commentaires
Un autre problème d'arithmétique (addition, multiplication : décomposition de 25 en sommes de termes 3, 5 et 8) combiné avec de la logique (arrangements ou combinaisons), conduisant à quatre solutions, 5 bleus : $5 \times 5 = 25$; 5 rouges et 2 bleus $(5 \times 3) + (2 \times 5) = 25$; 3 rouges et 2 verts : $(3 \times 3) + (2 \times 8) = 25$; 4 rouges, un bleu et un vert : $(4 \times 3) + (1 \times 5) + (1 \times 8) = 25$.

On voit ici que l'intérêt réside dans l'exhaustivité des solutions et leur écriture.

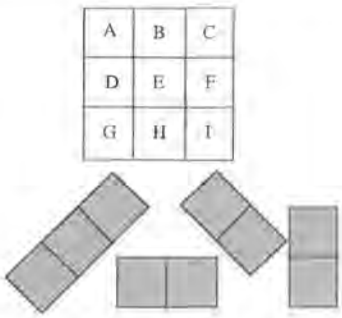
Les résultats sont du même ordre que ceux du problème précédent, ce qui permet de proposer cette petite recherche en 3e comme en 4e années, pour autant qu'elle soit accompagnée de phases collectives de validation et d'institutionnalisation.

4. PLANCHE A RECOUVRIR (Cat. 3, 4, 5)

Zoé doit recouvrir complètement cette planche de 9 cases carrées :
Pour ce faire, elle dispose :
- d'une pièce recouvrant exactement 3 cases
- de trois pièces recouvrant chacune exactement 2 cases.

Comment Zoé peut-elle recouvrir complètement sa planche ? Indiquez toutes les possibilités.

Expliquez votre démarche.



Commentaires
Dans ce problème de pavage, c'est l'inventaire exhaustif des 12 combinaisons qui est au centre de la tâche.La réussite augmente avec l'âge des élèves. En 3e année, les élèves ne trouvent que de 6 à 9 solutions. Il faut attendre la cinquième année pour voir apparaître les solutions complètes, avec explications claires de la démarche, dans un quart des classes.

5. LES FLEURS DE ROSALIE (Cat. 3, 4, 5)

Rosalie est fleuriste.
Aujourd'hui, elle compose un beau bouquet de tulipes de trois couleurs différentes: pour chaque tulipe rouge, elle met deux tulipes jaunes et trois tulipes blanches.
En tout, son bouquet comprend 48 tulipes.
Combien de tulipes rouges Rosalie met-elle dans son bouquet ?
Combien de tulipes jaunes Rosalie met-elle dans son bouquet ?
Combien de tulipes blanches Rosalie met-elle dans son bouquet ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Commentaires

Il s'agit ici d'un partage proportionnel de 48 en une somme de 3 nombres dans des rapports de 1, 2 et 3. On pourrait penser que cette notion ne figurant pas dans les programmes de l'école primaire, le problème est trop difficile. Mais les élèves peuvent y arriver par d'autres voies, comme le propose l'analyse a priori de la tâche:

- *Comprendre que le nombre de tulipes jaunes est le double de celui des tulipes rouges et que le nombre des tulipes blanches en est le triple.*
- *Imaginer que le bouquet peut se décomposer en petits bouquets comprenant six tulipes (1 rouge, 2 jaunes, 3 blanches) et qu'il y a 8 de ces petits bouquets (48 : 6 = 8), et donc qu'il y a 8 rouges, 16 jaunes et 24 blanches.*
- *Ou travailler à partir d'un dessin soit par groupements successifs jusqu'à obtention de 48 tulipes soit par "décomposition" du dessin de 48 tulipes ;*
- *Ou établir un tableau progressif (de proportionnalité).*

La réussite est moyenne en 3^e, mais presque totale en 5^e. Ce problème, repris en classe, dans le champ de la multiplication et de la division, conviendrait particulièrement à une approche de la proportionnalité, en augmentant éventuellement les nombres afin d'en faire émerger certaines propriétés générales.

6. LE TRIATHLON (Cat. 4, 5)

Le triathlon comporte trois disciplines sportives:
- la natation ;
- le vélo ;
- la course à pied.

Jack s'est inscrit à un triathlon.
Il décide d'organiser son entraînement de la façon suivante:
- une heure de natation tous les cinq jours ;
- un circuit de 40 km à vélo tous les trois jours ;
- une heure de course à pied tous les quatre jours.

Le 1er mai, il commence sa préparation en faisant une heure de natation.
Le 4 mai, il commence son entraînement de vélo.
Le 5 mai, il commence son entraînement de course à pied.
A quelle date Jack fera-t-il pour la première fois un entraînement des trois disciplines dans la même journée ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Commentaires

Ce problème a suscité bien des doutes lors de son élaboration. Il a été reformulé plusieurs fois sans qu'on arrive à un énoncé très clair. C'est peut-être dû au contexte, très artificiel, de cet entraînement ou à la perte de vue des savoirs mathématiques en jeu. L'analyse a priori n'a pu mettre en évidence, sous sa rubrique « domaine de connaissances », que le « comptage de 3 en 3, de 4 en 4 et de 5 en 5 et la connaissance du nombre de jours des mois.

Il n'y a pas d'autre moyen de le résoudre que d'établir un calendrier des différents entraînements et d'attendre le 30 juin pour les voir se dérouler le même jour.

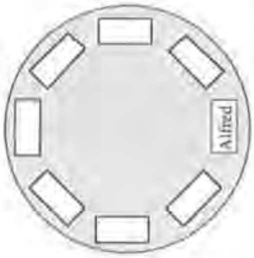
Si le 1er mai n'avait pas été une exception à la règle, (les trois entraînements auraient dû avoir lieu ce jour-là, mais ce n'est pas relevé dans l'énoncé), la tâche aurait été plus simple pour ceux qui maîtrisent la notion de plus petit multiple commun. Il aurait suffi de calculer le ppmc de 3, 4 et 5; 60 et d'attendre le 60e jour après le 1er mai.

Les résultats sont très moyens en 4e comme en 5e et il semble bien que l'origine des difficultés se situe au niveau du décryptage de l'énoncé et non des savoirs mathématiques.

Il y a toujours, dans chaque épreuve du RMT et des autres concours, des problèmes comme celui-ci où les auteurs se sont un peu perdus dans « l'habillage » et qui restent en marge des mathématiques.

7. CHACUN A SA PLACE (Cat. 4, 5, 6)

Alfred, Brice, Carla, Dany, Émile, Frédéric, Gina et Henri vont s'installer autour d'une table ronde. Alfred a déjà choisi sa place et a mis des cartons vides sur la table pour indiquer la place de ses camarades.



- Gina veut être à côté de Frédéric, mais pas à sa gauche.
- Carla veut être assise entre Brice et Émile.
- Dany veut être à côté de Gina.
- Émile veut être juste en face d'Alfred.
- Henri veut être assis juste à la droite d'Alfred.

Trouvez une disposition possible et écrivez le nom des enfants à leur place.

Indiquez les étapes qui vous ont permis de placer toutes les personnes.

Commentaires

Les savoirs mathématiques mobilisés ici sont difficiles à définir, on les trouve en géométrie dans des positions relatives et en logique. Et pourtant, ce type de problème revient régulièrement dans les épreuves du RMT.

C'est à la lecture des explications des élèves pour l'attribution des points qu'apparaît l'intérêt de cette petite reconstitution car on a relevé deux types de démarche bien distincts conduisant à la solution correcte :

I. Dans le premier type, on place les deux personnages dont la position est sans équivoque : Émile et Henri. On met ensuite Clara à la gauche d'Émile, puis Brice, pour combler le groupe des deux places libres entre Émile et Henri, mais sans imaginer que Clara, puis Brice auraient aussi pu être placés à la droite d Émile, dans deux des trois places libres entre Émile et Henri. Il est facile enfin de placer les trois autres enfants.

II Le second type de démarche fait appel à une hypothèse et à sa vérification. Après avoir placé Émile et Henri comme précédemment, on essaye chacun des deux placements de Clara, à gauche ou à droite d'Émile et l'on abandonne l'essai qui conduit à une contradiction. Ce second type de démarche peut aussi reposer sur la constatation que Gina est entre Frédéric et Dany et que ces trois enfants doivent se placer dans le groupe des trois places encore vides. Mais cette démarche est plus rare car elle nécessite la prise en compte simultanée de deux consignes pour former le groupe des trois enfants.

Le premier type de démarche est très fréquent en 4e et 5e où de très nombreux groupes se contentent de la première solution « qui marche », même si elle a été trouvée au hasard, sans se soucier de son unicité. Il y a un grand saut de qualité du premier au second type de démarche, qui prend en compte les différentes éventualités et qui permet d'être certain que la solution est unique. Les critères d'attribution des points (voir ci-dessous) cherchaient à souligner la différence entre une « explication » et une simple « vérification », mais ils n'étaient pas assez clairs pour dissiper tous les doutes des correcteurs et garantir la distinction entre les deux types de démarche.

Critères d'attribution des points:

4 *Réponse correcte (dans le sens des aiguilles d'une montre: A, D, G, F, E, C, B, H), avec explication sur la démarche*

3 *Réponse correcte, sans explication ou avec explication partielle, mais vérification explicite des contraintes*

2 *Réponse correcte, sans explication de la démarche ni vérification des contraintes ou réponse erronée, mais expliquée, où une consigne n'a pas été respectée*

1 *Réponse partiellement correcte (au moins 3 personnages bien placés) ou réponse « en miroir » A, H, B, C, E, F, G, D.*

0 *Incompréhension du problème*

Selon ces critères, les moyennes obtenues vont, selon les sections, de 1,6 à 2 en catégorie 4, de 1,8 à 2,5 en catégorie 5 et de 2,5 à 2,9 en catégorie 6.

C'est dans l'analyse des stratégies que réside l'intérêt de ce problème pour l'évaluation : il y une évolution sensible des démarches de résolution, donnant des informations pertinentes sur la rigueur des raisonnements suivis.

8. LES SOURIS EN CHOCOLAT (Cat. 5, 6, 7)

Max et André ont acheté chacun une boîte de 25 souris en chocolat. La boîte de Max coûte 40 euros et contient seulement des grandes souris. La boîte d'André coûte 30 euros et contient seulement des petites souris. Pour que chacun ait des souris de chaque sorte, Max donne 12 grandes souris à André et André donne 12 petites souris à Max.

Mais Max n'est pas satisfait car il estime qu'André lui doit encore quelque chose.

Combien de petites souris André doit-il encore donner à Max pour que les comptes soient justes ?

Expliquez votre raisonnement.

Commentaires

L'énoncé a subi de nombreuses modifications en cours d'élaboration. Certaines sections ont préféré les « souris » aux « cigares » de la version originale et il a fallu préciser les conditions de l'échange.

L'analyse de la tâche prévoyait ceci :

- *Constater que si les nombres de souris de chacun restent les mêmes après les échanges (Max a 25 souris : 13 grandes et 12 petites; André a aussi 25 souris, 12 grandes et 13 petites), les échanges ne sont pas équitables pour les valeurs en euros.*
- *On peut calculer le prix unitaire des souris par des divisions par 25 (1,60 les grandes et 1,20 les petites) et en déduire la valeur des nouvelles boîtes : 13 x 1,60 + 12 x 1,20 = 35,20 € pour celle de Max et 12 x 1,60 + 13 x 1,20 = 34,80 € pour celle d'André. Ce dernier, dont la boîte ini-*

tiale coûtait 30 €, doit donc 4,80 € à Max., ce qui représente 4 petites souris. On peut aussi considérer la différence entre la valeur de la boîte de Max et celle d'André, qui vaut douze fois la différence entre le prix d'une grande souris et le prix d'une petite souris: 1,60 - 1,20 = 0,40. Une grande souris vaut 0,40 euro de plus qu'une petite souris. Donc, André doit 12 x 0,40 = 4,80 euros à Max.

- *En déduire que André doit encore donner 4 petites souris supplémentaires à Max. Ou : calculer la différence après le partage directement en « grandes souris » ou en « petites », sans déterminer leurs valeurs en euros : du rapport 30/40 on peut déduire qu'une « petite » vaut les 3/4 d'une « grande » ou que 3 « grandes » valent 4 « petites » et que 12 « grandes » valent 16 « petites ».*

À la lecture de ce qui précède, on constate que ce problème d'échanges requiert des raisonnements en plusieurs étapes et fait intervenir soit les nombres décimaux, soit les fractions.

Les résultats sont très variables d'une année à l'autre et d'une section à l'autre. Par exemple, en Suisse romande, les moyennes des points attribués (sur 4 pour la réussite avec explications) vont de 0,79 en 5e, 1,60 en 6e à 2,83 en 7e. Dans d'autres régions d'Italie, la moyenne est plus élevée en 5e, ce qui laisse penser à une influence des programmes. Les nombres décimaux ne sont en effet abordés qu'en 5e en Suisse romande mais un ou deux ans plus tôt en Italie.

En conclusion, ce problème met en oeuvre de nombreux savoirs et révèle leur degré de maîtrise chez les élèves qui le résolvent.

9. DES CARRES EMPILES (Cat. 5, 6, 7, 8)

Huit carrés de 10 cm de côté, désignés par des lettres A, B, C, D, E, F, G et H, ont été collés dans un certain ordre, l'un après l'autre, sur un carton carré de 20 cm de côté.

Les voici dessinés :

A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	E	E	E	E	C	C
A	A	E	E	E	E	C	C
G	G	E	E	E	E	D	D
G	G	E	E	E	E	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D

Retrouvez dans quel ordre les carrés ont été collés.

Expliquez votre démarche.

Commentaires

Voici un joli problème, qui vient de Belgique, sur une sériation temporelle à reconstituer. Le plus simple est de « décoller » les carrés un à un en partant de « E » qui était le dernier à avoir été placé. Le « A » apparaît alors en entier, c'est l'avant dernier à avoir été placé. Ensuite, il faut trouver des relations partielles dans la sériation : G est sur F (sinon la case G serait couverte par F), H est sur D (sinon la case H serait recouverte par D), C sur B, (sinon la case C serait recouverte par B), et aussi : D est sur C, F est sur H ... D'où l'ordre suivant pour empiler les carrés : B-C-D-H-F-G-A-E.

On peut classer ce problème dans les défis ou divertissements intellectuels, mais il faut relever que les élèves peuvent le résoudre par essais et erreurs s'ils prennent la peine de découper les huit carrés. La validation peut donc être laissée à la charge des élève, ce qui leur donne une bonne occasion de développer leur autonomie.

10. LES POTS DE BONBONS (Cat. 5, 6, 7, 8, 9, 10)

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.
Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.
Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.
À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Commentaires
L'analyse des réponses et explications des élèves[1] donne des indications très précises sur le passage d'une interprétation additive de la situation à l'approche de la notion de probabilité basée sur des rapports (dans le champ de la multiplication et de la division) :

I Dans un premier groupe de démarches, ce sont les différences entre les nombres de bonbons de chaque saveur au sein d'un pot qui sont prises en compte. Ces élèves affirment que Julien doit prendre un bonbon dans le pot I car il y n'y a que 4 (10 – 6) bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange alors qu'il y en a 6 (14 – 8) de plus dans le pot II. Selon eux, le risque de prendre un bonbon au citron est le plus élevé là où la différence est la plus grande.

II Un deuxième groupe de protocoles utilise aussi des différences, mais en s'intéressant aux changements d'un pot à l'autre : on a ajouté 2 (8 – 6) bonbons à l'orange en passant du pot I au pot II, et 4 (14 – 10) au citron ; par conséquent la première répartition est la plus favorable pour celui qui n'aime pas le goût du citron, car on renforce sa présence dans le deuxième pot en y ajoutant plus de bonbons au citron.

III Dans le troisième groupe de procédures, ce sont les rapports entre les nombres de bonbons de chaque saveur ou ceux entre le nombre des bonbons d'une sorte et le nombre total qui permettent de conclure. au plan mathématique, il s'agit alors de comparer deux rapports, soit sous forme de fraction, sous forme de pourcentages ou sous forme de nombres décimaux. Par exemple : 6 bonbons à l'orange sur 16 au total donnent plus de chances de tirer un bonbon à l'orange que 8 sur 22.

Les procédures additives des deux premiers groupes sont majoritaires aux degrés 5 et 6, celles du troisième groupe, rares à ces degrés, deviennent de plus en plus fréquentes au passage de la catégorie 6 à la catégorie 7, et représentent la grande majorité au degré 8.
La tâche des correcteurs de ce problème n'était pas aisée car les trois démarches exposées ci-dessus conduisaient à la même réponse : « il faut choisir le pot I » ! Ils devaient donc attribuer « 0 point » à des réponses « correctes » mais fondées sur un raisonnement additif et donc inadéquat dans cette situation. Si, par exemple, on avait remplacé les 8 et 14 bonbons du second pot par 4 et 7, on aurait conservé le même rapport mais « inversé » les différences. Les procédures additives auraient vraisemblablement conduit à la réponse, erronée dans ce cas : « il faut choisir le pot II ».

1 Un article sur ce sujet, de Henry M. & Jaquet F. « Probabilité intuitive ou intuition de probabilité » est en cours de rédaction

L'analyse a priori n'avait pas prévu les démarches reposant sur les différences, sinon elle aurait conduit à une modification des données pour éviter ce paradoxe d'une réponse apparemment « correcte » mais reposant sur un raisonnement faux.

Il faudrait y penser en cas de reprise de ce problème en classe.

Il est probable que de nouveaux problèmes du RMT reprennent ce thème de l'approche des probabilités.

11. LA NAPPE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

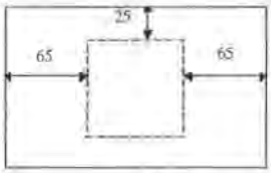
Dans la salle à manger de Luc, il y a une table carrée avec des rallonges. Quand les rallonges sont sorties, la table devient rectangulaire et sa longueur est le double de sa largeur.
Une nappe placée sur la table rectangulaire retombe alors de 25 cm de chaque côté.
La même nappe placée sur la table carrée, retombe de 65 cm de chacun des deux côtés où les rallonges sont rentrées.
Quelles sont les dimensions de la nappe ?

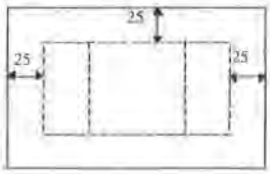
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Commentaires

Devant ce genre de problèmes, on entend souvent dire, de la part de ceux qui sont déjà capables de le résoudre : « il suffit de faire un dessin ! »
C'est bien ainsi que l'analyse a priori décrivait une des manière de procéder :

- *Interpréter géométriquement la situation par des dessins du genre ci-contre :*
  en se rendant compte que pour passer d'un carré à un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, les rallonges doivent être deux « demi-carrés » (si elles sont égales, ce qui est habituel) ou former un carré (si elles n'étaient pas égales).
- *Constater que la différence entre 65 et 25 correspond à une largeur de rallonge de 40 (ou que la différence globale entre 130 (2 x 65) et 50 (2 x 25) est 80 et correspond à l'allongement total dû aux rallonges. (mesures en cm)*
- *En déduire que le carré a un côté de 80 la table avec les rallonges a une longueur de 160, et que la nappe a des dimensions de 130 (80 + 2 x 25) et 210 (160 + 2 x 25) (mesures en cm).*

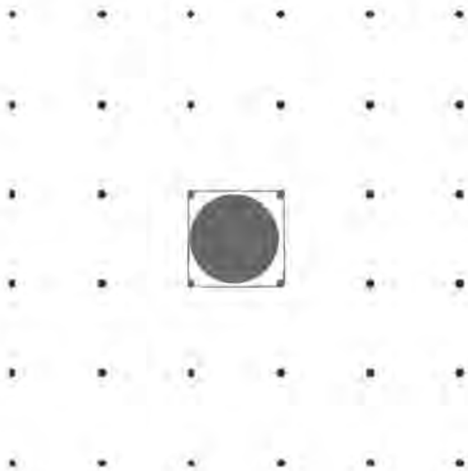




Mais il y a un grand pas à franchir entre l'injonction et la réalisation. On pourrait presque dire que lorsque le dessin est fait, le problème est résolu. il ne reste que quelques calculs élémentaires à propos de mesures de longueurs à additionner ou à soustraire.
La difficulté d'interpréter géométriquement les données est ici au cœur du problème. Les élèves de la catégorie 6 n'y sont manifestement pas parvenus. Les moyennes de points obtenus sont inférieures à 1 pour toutes les sections (entre « incompréhension du problème » et « début de recherche » selon les critères d'attribution). Il faut attendre les degrés 8, voire 9 ou 10 pour qu'apparaissent les réponses correctes, bien souvent encore mal argumentées.
Il y a là une piste intéressante pour un travail en classe, au moment où les notions de rectangle, carré, longueur, largeur, double ... semblent bien assimilées mais s'avèrent difficiles à mobiliser dans une situation où l'on sort de la feuille de papier et où il faut « relever » les pans de la nappe qui « retombent ».

12. LA PIECE BIEN MERITEE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Au milieu d'une planche à clous, comme le montre cette figure, se trouve une pièce d'or.



Max et David utilisent des élastiques et essaient de former le plus possible de carrés qui enferment la pièce de monnaie sans toutefois la toucher. (Le plus petit de ces carrés est déjà dessiné). Celui qui arrive à former le plus de carrés gagnera la pièce d'or.
Max réussit à former 19 carrés, David en trouve 23, il gagne donc la pièce.
Pourriez-vous gagner contre David ? À votre avis, combien peut-on former de carrés ?

Indiquez les carrés que vous avez trouvés.

Commentaires
Il y a 37 carrés, et les trouver tous est une belle recherche qui exige rigueur et systématique.
Il y a beaucoup d'activités de ce genre dans les moyens d'enseignement de Suisse romande et nos élèves obtiennent effectivement des résultats supérieurs à ceux des autres sections. Mais, même dans nos classes de catégories 7 et 8 (dont une majorité appartiennent à des filières orientées vers les études « longues », car celles des autres filières ne participent pas ou rarement au RMT) aucune classe n'a découvert les 37 carrés, la majorité se contentant des 19 dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille.
Ce problème pourrait être bien utile à ceux qui souhaitent évaluer le concept de « carré » chez leurs élèves.

13. LE NUMERO DE TELEPHONE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Carla ne se rappelle plus le numéro de téléphone de son amie Ada et le demande à Giorgio, un ami commun. Giorgio s'amuse et lui donne quelques renseignements sur les 6 chiffres qui composent ce numéro de téléphone.

- le premier et le dernier chiffre sont identiques et représentent un nombre impair ;
- le troisième et le quatrième chiffre forment un nombre égal au tiers du nombre formé par les deux premiers chiffres,
- les trois derniers chiffres représentent trois nombres consécutifs, qui se suivent dans l'ordre croissant.

Selon les renseignements de Giorgio, quel peut être le numéro de téléphone d'Ada ?

Justifiez votre réponse.

Commentaires

Le problème n'est pas très difficile et une majorité de groupes trouvent l'ou ou les deux numéros possibles (331123 et 752567). En revanche, la qualité des justifications laisse souvent à désirer et en particulier le fait que ces numéros sont les seuls possibles.

14. LA PREDICTION (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marc propose le jeu suivant à son copain Luc :

- *Choisis un nombre entier;*
- *ajoute le nombre qui le suit immédiatement;*
- *augmente de 9 la somme précédente,*
- *divise le résultat obtenu par 2;*
- *soustrais le nombre que tu as choisi au début.*

Le résultat est 5, n'est-ce pas?

Luc est étonné, pourtant cela n'a rien de magique ; il s'agit tout simplement de maths.

Pourquoi obtient-on toujours le même résultat quel que soit le nombre d'origine ?

Expliquez votre raisonnement.

Commentaires

Voici une bonne introduction à l'algèbre, soulignée par l'analyse de la tâche:

- *Remarquer les régularités au cours de nombreuses tentatives faites à partir de nombres différents.*
- *Comprendre qu'il vaut mieux indiquer le nombre envisagé par un terme général ou par une lettre.*
- *Traduire en symboles les instructions que Marc a données en se servant du calcul littéral ou en opérations de rhétorique (affirmations généralisables).*
- *Écrire l'expression correspondante; par exemple:* $(x + x + 1 + 9) : 2 - x$ *puis la simplifier pour constater qu'elle est équivalente à 5; par exemple :* $(2x + 10) : 2 - x = x + 5 - x = 5$ *Ou: sans recours à l'algèbre, expliquer de manière rhétorique qu'ajouter à un « nombre choisi » le nombre suivant signifie obtenir « le double du nombre choisi plus un ». Ajouter encore 9 signifie obtenir « le double du nombre choisi plus 10 ». Diviser le tout par 2, revient à prendre la moitié du « double du nombre choisi plus 10 » et obtenir le « nombre choisi plus 5 ». En soustrayant le « nombre choisi », on obtient 5.*

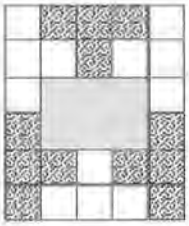
15. LES MANIES DES GRANDS CHAMPIONS (Cat. 8, 9, 10)

Un célèbre champion olympique acheta un jour un grand terrain rectangulaire de 600 mètres de longueur et de 500 m de largeur. Il bâtit un centre sportif rectangulaire de 300 m sur 200 m, de même centre que le terrain, selon la figure ci-contre (la longueur du terrain est parallèle à la largeur du centre sportif) : Comme il avait six enfants, il demanda dans son testament que le reste du terrain, autour du centre sportif, soit divisé en 6 parcelles de même forme et de mêmes dimensions et que le centre sportif soit accessible directement de chacune des 6 parcelles.

Dessinez les 6 parcelles et expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

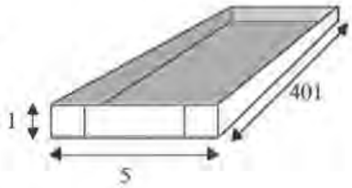
Commentaires

Les calculs ne présentent pas d'obstacles majeurs pour des élèves de 14 à 16 ans. C'est le partage en parcelles isométriques qui est le plus délicat à trouver, pour les adultes comme pour les élèves. La clé passe par la décomposition en carrés.



16. LES CUBES DE L'ANNEE (Cat. 9, 10)

Julie a une belle collection de cubes de bois de 1 cm d'arête. L'an dernier, elle en avait 2005 et elle a construit une boîte, sans couvercle, pour les contenir tous, exactement. Mais la boîte la plus courte possible était très encombrante. Julie a utilisé un rectangle de carton, de 403 cm de longueur et 7 cm de largeur, pour pouvoir construire le fond et les parois de la boîte, par pliage, découpage et collage. (Voir la figure ci-contre)



Cette année Julie a ajouté un cube à sa collection. Elle doit donc construire une nouvelle boîte pour contenir exactement ses 2006 cubes de 1 cm d'arête. Elle espère pouvoir utiliser moins de carton que l'an dernier et ranger les cubes en couches superposées.

Quelles seront les dimensions de la nouvelle boîte, utilisant le moins de carton possible ? Et quelles seront les dimensions du rectangle de carton que Julie devra utiliser pour la construire ?

Justifiez votre réponse.

Commentaires

Ce problème, réservé aux catégories 9 et 10 n'a pas été proposé en Suisse romande (où c'est le concours *Mathématiques sans frontières* qui s'adresse aux classes de ces degrés). Les résultats de la section du Tessin font état d'une bonne réussite.

On peut le proposer à des classes de degré 8, dans le cadre de la décomposition en facteurs premiers.

Il suffit de déterminer toutes les décompositions de 2006 en trois facteurs entiers.

1 x 1 x 2006, 1 x 17 x 118, 1 x 34 x 59 et 2 x 17 x 59, de comprendre qu'il faut prendre le facteur le plus petit comme hauteur et de constater que le fond de la boîte est 2006 dans les trois premiers cas et seulement 1003 dans le quatrième cas, correspondant à une utilisation minimale de carton. Il ne reste plus alors qu'à calculer les dimensions de la feuille de papier:

59 + (2 x 2) = 63 et 17 + (2 x 2) = 21.

QUALIFICATION RÉGIONALE VALAISANNE POUR LE 20E CHAMPIONNAT DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

Augustin Genoud et François Jaquet

[ndlr] Une fois de plus, *Math-Ecole* publie avec plaisir les problèmes de l'épreuve valaisanne de qualification pour le championnat de la FFJM.On trouve les origines de certains de ces problèmes dans *PanoraMath I à 3*[1], *Express Magazine, Annales de la FFJM, Sciences et Vie Juniors, Récrémaths,* mais ils ont été souvent adaptés par notre collègue, A. Genoud, qui fournit un travail considérable de préparation et de création.
En Valais, la participation au concours de la FFJM est toujours aussi importante : 2712 participants le 16 novembre 2005 ont résolu les problèmes présentés ici, dans différents établissements scolaires du canton. Ils étaient 530 à Sion le 18 mars 2006 pour les finales régionales, dont 99 promus pour la finale suisse. Ce succès ne tombe pas du ciel, il est le fruit du travail d'organisateurs qu'il faut féliciter et remercier de leur dévouement pour la promotion des mathématiques.
Pour plus d'informations, voir le site http://gvjm.ecolevs.ch

Répartition des problèmes par catégories :

1 à 7 pour les élèves de 4e et 5e primaires : Cat. CM
2 à 8 en 6e primaire et 1re CO (degrés 6 et 7) : Cat. C1
4 à 11 en 2e et 3e CO et 1re Lycée (degrés 8 et 9) : Cat. C2
7 à 14 dès le 10e degré, jusqu'à la maturité : Cat. L1
Pour le classement, chaque réponse exacte vaut 1 point. Les coefficients indiqués en regard des titres des problèmes servent à départager les élèves ayant le même nombre de points. Finalement, en cas d'égalité des points et coefficients, c'est la durée de résolution qui est prise en compte.

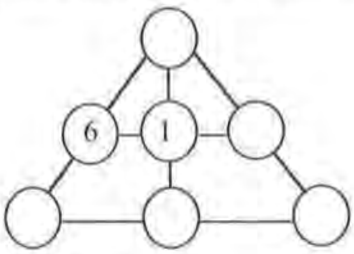
A. Les énoncés

1. La lettre (CM) (coef. 1)
J'xibe les vhxbpionnxts de bxthébxtique.
Dans la phrase précédente 3 lettres ont été remplacées par d'autres. Tous les m ont été remplacés par des b et les a par des x.
Quelle lettre a été remplacée par v ?

2. La suite logique (CM, C1) (coef. 2)
Sophie a construit une suite logique :
1, 3, 6, 10, 15, 21, □, □, 45
Puis elle a malicieusement effacé deux nombres. Paul tente de compléter les trous. Aide-le à retrouver les deux nombres manquants.

3. Les pièces de 2 francs (CM, C1) (coef. 3)
J'achète un objet de 23 fr. en payant uniquement avec des pièces de 2 fr. Le vendeur n'a que des pièces de 5 fr.
Combien dois-je lui donner de pièces de 2 fr. au minimum pour qu'il puisse me rendre la monnaie exactement ?

4. Les nombres (CM, C1, C2) (coef. 4)



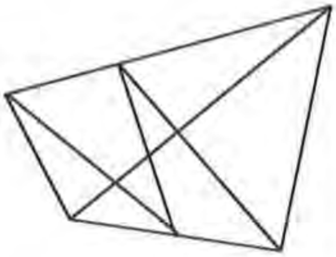
Tous les nombres de 0 à 6 doivent être placés dans les sept cercles de cette figure (le 1 et le

1 Le quatrième ouvrage de la collection : ***PanoraMath 4****. Panorama 2006 des compétitions mathématiques*, Comité International des jeux Mathématiques, éditeurs POLE et CIJM (Paris 2006) vient de paraître, en coédition avec l'ADIREM et l'APMEP. On peut l'obtenir chez ces éditeurs directement ou par l'intermédiaire de *Math-Ecole* (v. p. 3 de couverture)

6 sont déjà placés). De plus, lorsque l'on additionne trois nombres situés sur la même droite, on doit toujours trouver la même somme.
Écris au bon endroit les nombres manquants.

5. Les pommes (CM, C1, C2) (coef. 5)
Deux paniers, A et B, contiennent des pommes. Il y a 2 fois plus de pommes dans le panier A que dans le panier B. Un voleur prend 18 pommes et pourtant il reste encore 2 fois plus de pommes dans le panier A que dans le panier B.
Combien de pommes ont été volées dans le panier A ?

6. Les triangles (CM, C1, C2) (coef. 6)
Combien y a-t-il de triangles dans la figure suivante ?



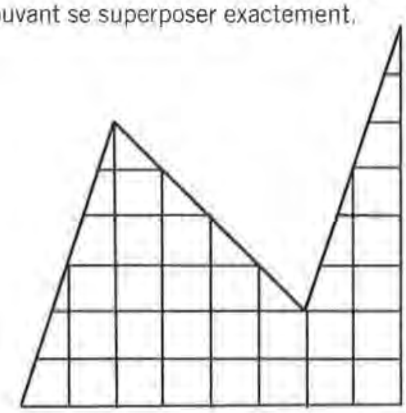
7. Les années (CM, C1, C2, L1) (coef. 7)
Arnaud, Benoît, Carine, Dorothée et Élodie ont écrit leur année de naissance sur un bout de papier. Ces papiers ont été mis côte à côte selon la disposition indiquée ci-dessous.

1995	1993	1994	1997	1998

Les années d'Arnaud et d'Élodie sont côte à côte. Benoît est né une année impaire. Carine est plus jeune que Dorothée. Dorothée et Élodie ont une année d'écart. Arnaud est né entre 1993 et 1996.
Quelles sont les années de naissance d'Arnaud, de Benoît, de Carine et de Dorothée ?

8. Les ambulances (C1, C2, L1) (coef. 8)
Dans un certain pays, les ambulances ont un numéro de plaques de voiture à trois chiffres. Le premier chiffre est toujours supérieur à la somme des deux autres.
Combien y a-t-il d'ambulances, au maximum, dans ce pays, sachant que toutes les plaques ont un numéro différent ?

9. Le partage (C2, L1) (coef. 9)
Tiens, se dit Martin, cette figure dessinée par le maître peut être partagée en deux parties pouvant se superposer exactement.



Dessine les traits du partage.

10. Les âges (C2, L1) (coef. 10)
Un père accompagné de son épouse et de son fils unique leur dit : « La somme de nos âges fait exactement 60 ans et je suis 6 fois plus âgé que toi, mon fils. Quand je ne serai plus que deux fois plus âgé que toi, mon fils, nos trois âges feront un total double de ce qu'il est actuellement ».
Quels sont les âges du père et de la mère ?

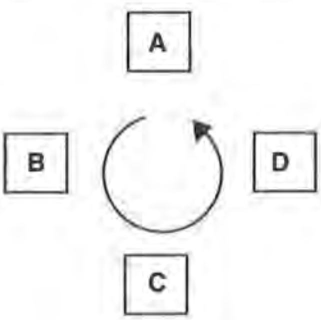
11. Les nombres (C2, L1) (coef. 11)
Alain a écrit à la suite les uns des autres les nombres entiers de 1 à 60 de la façon suivante :
123456789101112131415161718192021...

Puis il a barré cent des chiffres de façon que le nombre formé des chiffres restants, sans modifier leur ordre, soit le plus grand possible.
Quel est ce nombre ?

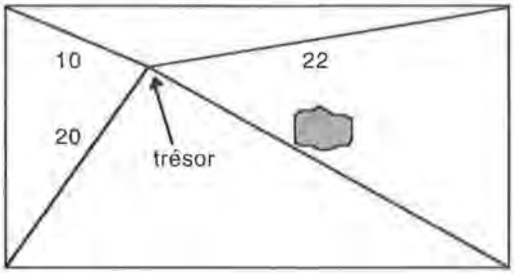
12. Les trous (L1) (coef. 12)
Benoît est occupé avec ses amis à creuser dans un champ un certain nombre de trous identiques. Lorsque Benoît fait équipe avec Maxime, ils creusent 1 trou en 4 jours.
Lorsque Benoît fait équipe avec Florian, ils creusent 1 trou en 3 jours.
Lorsque Maxime fait équipe avec Florian, ils creusent 1 trou en 2 jours. Chacun travaille avec une parfaite régularité.
Combien de jours sont nécessaires à Benoît pour creuser 1 trou tout seul ?

13. Le Petit Poucet (L1) (coef. 13)
Le Petit Poucet s'entraîne avant de sortir en forêt Il a devant lui 4 boîtes disposées en croix et contenant de nombreux cailloux (plus de 20 dans chaque boîte).

Il prend les cailloux de la boîte A et les sème un par un dans les boîtes B, C, D, A, B, ... jusqu'à ce qu'il ait tout semé. Il retire alors tous les cailloux qui se trouvent dans la boîte A et les jette.
Il prend alors les cailloux de la boîte B et les sème un par un dans les boîtes C, D, A, B, C, ... jusqu'à ce qu'il ait tout semé. Il retire alors tous les cailloux qui se trouvent dans la boîte B et les jette.
Il recommence ensuite, toujours de la même façon, à partir des boîtes C, D, A, B, ...
Il arrête de jouer lorsqu'à la suite d'un semis, il n'a plus rien à jeter.
Combien reste-t-il de cailloux, au maximum et au total, dans les boîtes, lorsqu'il arrête de jouer ?



14. Le parchemin (L1) (coef. 14)
Un parchemin de forme rectangulaire indique l'emplacement d'un trésor et les distances du trésor aux quatre sommets du rectangle ont été écrites en mètres. Sur le croquis, une de ces distances est devenue illisible.
Quelle est donc cette distance manquante ?



B. Quelques commentaires et pistes pour la résolution

Les taux de réussite qui suivent ont été calculés sur la base des réponses de 154 élèves de catégorie CM (4e et 5e primaire), 91 en C1 (degrés 6 et 7), 91 en C2 (degrés 7 et 8) et 76 en catégorie L1 (Lycée).

1. La lettre (CM)
Dans un contexte de concours de mathématiques, il n'était pas très difficile de trouver les mots « J'aime » et « mathématiques ».
Avec les indices : a remplacé par x, on arrive aisément à trouver la lettre remplacée par v : c. 71 % des élèves y sont arrivés.

2. La suite logique (CM, C1)
Les deux nombres manquants de la « suite logique » 1, 3, 6, 10, 15, 21, ☐, ☐, 45 sont 28 et 36. Ils ont été découverts par 75 % des élèves de C1 et 80 % de C2. (On relève quelques « non-réponses » et les erreurs sont en général dues à des fautes de calcul, le plus souvent 35 ou 37 à la place de 36 pour le second nombre cherché).
Dans les concours où seule la réponse correcte compte, on peut se contenter de « 28 et 36 » . En classe ou dans une confrontation où l'on exige une justification, l'objectif est d'ex-

primer la règle de construction de la suite des « nombres triangulaires », dont le n^e est la somme des n premiers nombres naturels : 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4,... et de la vérifier sur le nombre « 45 ».
Mais il faut bien être conscient que, dans un cas purement numérique comme celui-ci, sans un contexte concret comme support, il y a d'autres manières de compléter cette suite, de manière tout aussi « logique ». (On peut par exemple envisager une fonction du sixième degré dont les images des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8 sont, respectivement, les sept nombres de l'énoncé.) Compléter une suite de ce genre revient à faire un choix d'une règle de passage d'un élément au suivant, à l'expliciter et à montrer qu'elle est en cohérence avec les termes donnés. Mais il faut savoir qu'il y a d'autres choix possibles, même s'ils sont moins évidents.
Lorsque la suite repose sur un support, géométrique ou matériel qui définit la règle de passage d'un élément au suivant, on peut arriver à l'unicité ou à la certitude, même si l'on doit renoncer à la solution la plus « attirante ». Un exemple célèbre est celui de l'activité « La région perdue[2] » consistant à dénombrer les régions d'un cercle déterminées par toutes les cordes menées de n points de la circonférence. On trouve respectivement, lors des premières constructions, 1, 2, 4, 8, 16 régions pour 1, 2, 3, 4, 5 points du cercle. La grande majorité des élèves (et des adultes aussi) s'attend alors à trouver 32 régions pour 6 points, mais il n'y en a 31 ! La « suite logique » des puissances de 2 ne fonctionne que pour les cinq premiers termes dans cette situation.

3. Les pièces de 2 francs (CM, C1)
Ce problème ne fait appel qu'aux différences entre multiples de 5 et de 2. En le posant sous la forme « Quel est le plus petit nombre pair qui vaut 23 et un multiple de 5 ? » il aurait été vraisemblablement mieux résolu en catégorie CM où 51 % seulement des élèves ont donné la réponse « 14 ». Il y a de nombreuses réponses « Nombre de pièces : 28 », « 12 pièces », « 18 », ... (La réussite est de 71 % en catégorie C1.)
Un bel exemple qui montre l'importance de la « décontextualisation » dans un problème pour arriver à passer dans le cadre numérique.

4. Les nombres (CM, C1, C2)
Ce triangle est complété correctement par une grande majorité d'élèves (70 % en CM, 85 % en C1 et 92 % en C2). Repris en classe, par exemple dans le prolongement de l'activité « Triangle magique[3] », le problème peut conduire à une recherche intéressante sur les différentes possibilités de disposer les nombres de 0 à 6 dans le triangle.
Dans ce cas, la solution est unique et a certainement été trouvée par essais successifs, organisés ou au hasard. Mais on peut aussi résoudre ce problème par une succession de déductions à portée d'élèves des catégories C1 et C2.

5. Les pommes (CM, C1, C2)
Ce problème est d'un grand intérêt didactique en raison de la variation des taux de réussite : 5 % en catégorie CM, 26 % en C1 et 75 % en catégorie C2. On serait tenté d'expliquer l'ampleur de ces écarts – exceptionnels – par les effets des programmes, mais une analyse de la tâche de résolution montre que les savoirs mis en oeuvre sont assez éloignés des matières étudiées en classe.
Une première investigation consiste à relever les différentes réponses des élèves de catégories CM et C1 qui ont échoué dans leur résolution. Elles se répartissent approximativement ainsi :
- « 9 » (40 %) qui correspond à un partage des pommes volées entre les deux paniers, pour la moitié ;
- « 18 » (20 %) où toutes les pommes seraient volées dans le panier A ;

2 Voir *Math-Ecole* n° 131 (D. Berney) et 139 (A. Calame)

3 1[er] RMT 1993, 5[e] RMT 1998 ou « Mathématiques 3P. COROME 1998 »

- « 0 » (10%) où toutes les pommes seraient volées dans le panier B
- « 6 » (10 %) où la moitié des pommes volées le seraient dans le panier A
- « 12 » (10 %) où la moitié des pommes volées le seraient dans le panier B
- autres réponses, de « 2 » à « 36 » (la plus fréquente) ou non-réponse (10 %).

En deuxième analyse, il vaut la peine d'imaginer la tâche de résolution du point de vue des élèves et chercher à dresser l'inventaire des stratégies possibles. Nous en voyons au moins six, à la manière dont sont conduites les « analyses a priori » des problèmes du RMT:

1 Après lecture de l'énoncé, se rendre compte que ni les nombres initiaux, ni les nombres finaux de pommes dans chacun des paniers ne sont connus et que les seules indications numériques sont les « 18 pommes » volées ou « deux fois plus » mais sans pouvoir les relier, (indépendamment de l'ambiguïté de l'expression multiplicative-additive « deux fois plus » qui signifie « le double » ou parfois « une fois plus » !). Devant cette situation déconcertante, qui ne permet pas d'essayer différentes répartitions des 18 pommes, ne prendre en compte qu'une des deux données et arriver à l'une des réponses précédentes.

2 Se donner un couple de valeurs pour la situation initiale et procéder à des essais successifs de répartition des 18 pommes volées. Par exemple, avec 20 et 10 au départ, si l'on retirait 9 pommes de chaque panier, il en resterait 11 et 1, ce qui ne conviendrait pas; si l'on retirait 10 et 8, les restes seraient 10 et 2, ce qui serait plus proche de la solution, mais ne conviendrait toujours pas, et arriver finalement à 12 et 6 et avoir constaté que les restes de 8 et 4 conviennent. Donner la réponse « 12 » en fonction de ce cas particulier.

3 Après un premier choix de valeurs initiales et la découverte de la réponse « 12 » pour ce cas, faire un ou plusieurs autres choix et constater que, pour chacun d'eux, on arrive à 12 pommes retirées du panier A. Donner la réponse « 12 » en fonction de ces cas particuliers ou en étant « à peu près convaincu qu'elle est valable pour tous les couples de départ ».

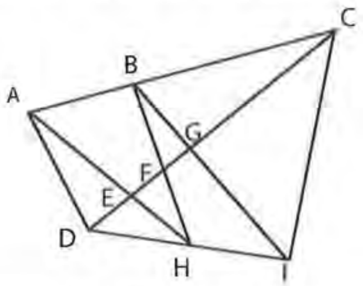
4 Passer à une généralisation en utilisant des écritures algébriques ou des raisonnements de type rhétorique. Par exemple : le nombre de pommes total au départ est le triple de celui du panier B ($3b$), après le vol, il reste le triple moins 18 ($3b - 18$). Dans le panier B, il y aura donc le tiers de ce reste, c'est-à-dire le nombre du panier B au départ moins 6 ($(3b - 18) / 3 = b - 6$). Si on a retiré 6 pommes de B, on en aura retiré 12 de A.

5 Résoudre le problème par un système d'équations avec, par exemple : a et b pommes au départ, tels que $a = 2b$, v pommes volées dans le panier A et $18 - v$ dans le panier B, ce qui conduirait à $a - v$ et $b - (18 - v)$ pommes à l'arrivée et, pour respecter le rapport, à l'équation : $a - v = 2[b - (18 - v)]$ ou $2b - v = 2[b - (18 - v)]$ qui se réduit à $v = 12$ et à l'indétermination de b.

6 Faire appel à une connaissance sur la proportionnalité selon laquelle, si le rapport entre deux couples est 2, la différence entre les éléments respectifs de ces couples doit aussi être 2. Il suffit donc de décomposer 18 en une somme de deux termes de rapport 2.

Il est compréhensible que les plus jeunes des élèves n'ont pas pu franchir l'obstacle de l'indétermination des nombres initiaux. (Procédure 1 ci-dessus). Leurs aînés auront sans doute franchi le premier pas en choisissant un couple initial (2). Il serait intéressant de savoir combien d'entre eux ont essayé avec d'autres couples (3), ont généralisé (4), ont utilisé des équations (5) ou ont des connaissances assez sûres sur la proportionnalité pour se limiter à la décomposition de 18. Pour le savoir plus, il suffit de proposer le problème à ses élèves et de leur demander d'expliquer comment ils ont procédé. On aura alors une bonne évaluation de leur maîtrise des différents connaissances mobilisées dans les différentes procédures exposées précédemment. Avec de jeunes élèves, il est toutefois nécessaire de prévoir une mise en commun après les cinq premières minutes de recherche pour faire émerger l'idée d'un choix de couple initial ou pour valider les premières réponses erronées comme « 9 », « 18 » ou « 0 ».

6. Les triangles (CM, C1, C2)
Cette recherche exige une très grande rigueur (2 % en CM, 5 % en C1, 27 % en C2).



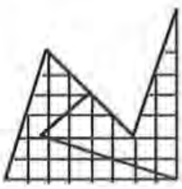
Pour désigner les 16 triangles, il faut une notation et beaucoup de rigueur : ABH, ACD, ACE, ADE, ADH, BCF, BCG, BCI, BFG, BHI, CDI, CGI, DEH, DFH, DGI et EFH. Le coloriage est peu efficace dans ce type d'inventaire car les superpositions empêchent un repérage précis.
Pour les compter on peut utiliser la partition de la figure comme si on la découpait avec des ciseaux, ce qui est l'image la plus prégnante chez les élèves. On constate qu'on obtient ainsi 6 triangles et 2 quadrilatères. Selon ce modèle, la réponse est « 6 » et a été donnée par 36 % des élèves de catégorie CM, 28 % de C1, alors qu'elle n'apparaît presque plus chez leurs aînés (5 % de C2) qui se sont déjà « fait prendre » plus d'une fois dans ce genre de problème. On pourrait relever ici que l'énoncé « combien y a-t-il de triangles » peut prêter à confusion ; on lui préfère aujourd'hui « combien peut-on distinguer de triangles » ou « combien de triangles sont entièrement dessinés ».
En prenant en compte les triangles formés de deux parties du découpage précédent, on arrive successivement à la réponse « 8 » (15 % en CM, 9 % en C1, 2 % en C2), puis « 10 » (10 % en CM et 6 % en C1) et à la réponse « 12 » (6 % en CM, 14 % en C1, 5 % en C2).
Lorsqu'on a dépassé ces représentations limitées, il faut encore vérifier minutieusement ses comptages. Les réponses proches de « 16 », comme « 14 », « 15 », « 17 » et « 18 » sont nombreuses chez les élèves les plus âgés (3 % en CM, 16 % en C1, 41 % en C2).

7. Les années (CM, C1, C2, L1)
Les taux de réussite augmentent d'une catégorie à l'autre : 16 % en catégorie CM, 34 % en C1, 48 % en C2, 54 % chez les lycéens (L1), mais les écarts sont moins grands que dans les problèmes précédents.
La résolution exige des hypothèses et vérifications, encore très difficiles à conduire chez les plus jeunes élèves et qui le restent jusqu'à l'âge adulte.
Par exemple : organisons les affirmations dans l'ordre suivant :
a) Arnaud (A) est né entre 1993 et 1996
b) Arnaud et Élodie (E) sont côte à côte
c) Dorothée (D) et Élodie ont une année d'écart
d) Carine (C) est plus jeune que Dorothée
e) Benoît (B) est né une année impaire
A est né en 94 ou 95. Si A est né en 94, E est née en 93 ou 97. Si E est née en 93, D est née en 92, ce qui est impossible. Si E est née en 97, D est née en 98 et C conduit à une impossibilité.
A né en 95 donne les solutions : Benoît en 97, Carine en 98, Dorothée en 94.

8. Les ambulances (C1, C2, L1)
C'est un très joli problème d'organisation d'un inventaire, suivi de la reconnaissance de l'inévitable suite des nombres triangulaires (inévitable car la probabilité de la voir apparaître au moins une fois dans une épreuve de concours est proche de 1 !).
Voici une organisation des numéros possibles dans l'ordre croissant :
100, 200, 201, 210, 300, 301, 302, 310, 311, 320… soit 1 ambulance dont le numéro commence par 1, 3 ambulances

dont le numéro commence par 2, ...soit $1 + 3 + 6 + 10 + ... + 45 = 165$ ambulances.
On retrouve ici la problématique des suites logiques abordée dans les commentaires du problème 2 : combien d'élèves se sont contentés de voir apparaître 1, 3, 6 et 10, voire 15 pour passer à la somme ci-dessus, sans se soucier d'une démonstration ou d'une justification de la loi permettant de passer de l'un des termes au suivant?
C'est le type de problème à reprendre en classe pour s'assurer de la validité de la réponse, mais pas avant les degrés 8 à 9 au vu des résultats : 5 % en catégorie C1, 23 % en C2, 53 % en L1.

9. Le partage (C2, L1) (coef. 9)
8 carreaux sur le bas et 8 carreaux sur la droite, cela peut aider... Mais, dans ce genre de problème, certains « voient » tout de suite et d'autres jamais. Réussite : 27 % en C2 et 55 % en L1.



10. Les âges (C2, L1)
Ce problème facile, par rapport aux précédents (76 % en C2 et 87 % en L1) peut se résoudre par tâtonnements ou par équations :
x = âge du père y = âge de la mère
t = âge du fils

Le total des âges passant de 60 à 120, chacun aura 20 ans de plus. Les trois équations :
$x + y + t = 60$ $x = 6t$ $x + 20 = 2(t + 20)$
conduisent à la solution : $x = 30$, $y = 25$, $t = 5$ et à la réponse : les âges du père et de la mère sont respectivement 30 et 25 ans.

11. Les nombres (C2, L1)
Problème très difficile pour les élèves de catégorie C2 (7 %) de réussite. (Il avait été donné sous le titre « Nombre amputé » lors du 11e RMT et n'avait pas obtenu un plus grand succès chez les élèves du même âge, malgré le travail de groupe et le temps plus long à disposition). En catégorie L1, on atteint 41 %.
La stratégie est de conserver les « 9 » et de compter avec précision les chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, **9**, 10, 11, 12, 13, ...1**9**, 20, 21, 22, 23, ... 2**9**, 30,... 3**9**, 40, ... 4**9**, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 5**7**, 5**8**, **59**, **60**.
Nombre de chiffres : $10 \times 2 \times 5 + 11 = 111$.
Il faut laisser 11 chiffres. Ils sont donnés en gras.

12. Les trous (L1)
Il s'agit d'un problème de débit. Débit de Benoît + débit de Maxime = 1 trou en 4 jours...
$dB + dM = 1t/4j$ ou $B + M = 1/4$
$dF + dB = 1t/3j$ ou $F + B = 1/3$
$dM + dF = 1t/2j$ ou $M + F = 1/2$
Ces 3 équations à 3 inconnues conduisent à la solution : Il faudrait 24 jours à Benoît seul.
Réussite : 32 %.

13. Le Petit Poucet (L1)
Dans la question du problème, le mot maximum ajoute de la difficulté à la recherche. En fait, il restera toujours 6 cailloux. La meilleure façon de s'en convaincre est d'essayer quelques parties.
Voici le début d'une partie. Après le 3e semis, on aura toujours D > A > B > C.
On remarquera aussi que lorsque le jeu s'arrête, la boîte qui a servi à distribuer les cailloux contenait exactement 3 cailloux.

	A	B	C	D
Départ	**41**	93	25	67
Semis 1	10	11	10	10
Reste	0	**104**	35	77
Semis 2	26	26	26	26
Reste	26	0	**61**	103
Semis 3	16	16	15	16
Reste	42	16	0	**119**

Réussite : 50 %.

14. Le parchemin (L1)

Un beau problème de géométrie où apparaît un théorème bien connu des amateurs de concours de mathématiques : la somme des carrés de deux distances « opposées » est égale à celle des deux autres. Connaissant trois distances du point aux sommets, on en déduit immédiatement la quatrième.

Mais, pour ceux qui ne connaissent pas cette propriété, il faut la découvrir, par une utilisation intensive du théorème de Pythagore.

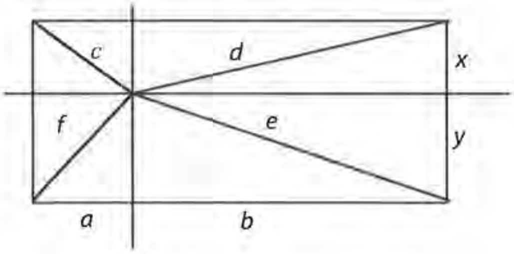
$x^2 + a^2 = c^2 \qquad y^2 + a^2 = f^2$

$x^2 + b^2 = d^2 \qquad y^2 + b^2 = e^2$

$y^2 + a^2 + x^2 + b^2 = x^2 + a^2 + y^2 + b^2$

$f^2 + d^2 = c^2 + e^2$, donc $20^2 + 22^2 = 10^2 + e^2$, alors

$e = 28$



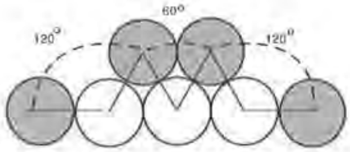
La réussite est de 32 % chez les lycéens, mais le problème peut être proposé aussi dans des classes de degré 8 et 9, sous forme de recherche. Il est alors intéressant de constater que, les distances aux sommets étant connues, les côtés du rectangle sont indéterminés. On peut l'illustrer avec un système de quatre tiges articulées de longueurs 10, 22, 28 et 20 ou, sur l'écran, avec un programme comme « Cabrigéomètre ».

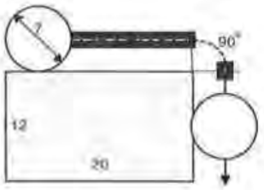
6. Il s'agit du problème 14 du concours. Les euros ont un rayon r. Le centre de la pièce qui est en mouvement se déplace sur des arcs de cercle de rayon 2r et de 300 degrés.

   $d = 2\pi(2r) \times 300/360$, $p = 2\pi r$,

   $n = 2 \times 300 / 360 =$ **5/3 tours**

   ou 1 tour et 2/3 de tour





7. $d = 2(20 + 12) + 7\pi = 64 + 7\pi$

   $\approx 64 + 7(22/7) = 86$

   $p = 7\pi \approx 22$

   $n = (64 + 7\pi) / 7\pi \approx$ **43 / 11 tours**

   ou 3 tours et 10/11 de tour

8. $d = 3 \times 25 + 7\pi = 75 + 7\pi \approx 97$, $\qquad p = 7\pi \approx 22$,

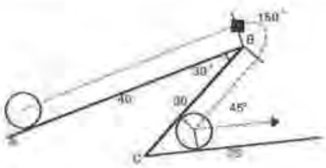
   $n = (75+ 7\pi) / 7\pi \approx$ **97/22 tours** ou 4 tours et 9/22 de tour.

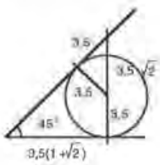
9. $d = 40 + 30 + 35 + 2\pi 3{,}5 \times 150/360 - 2 \times 3{,}5(1 + \sqrt{2}) = 105 + 7\pi \times 150/360 - 7(1 + \sqrt{2})$,

   $p = 7\pi \approx 22$,

   $n = 105 + 7\pi \times 150/360 - 7(1 + \sqrt{2}) / 7\pi \approx$ **4,4 tours**

   (la figure de droite ci-dessous montre que Pythagore suffit pour déterminer les deux distances à retrancher puisque le disque ne peut pas atteindre le point C.)





DU SUDOKU À LA BRIQUE DE PYTHAGORE

par Jean Bauer et Jean-Philippe Lebet

I. INTRODUCTION

Nous abordons ici un problème de mathématique resté encore sans réponse : celui de la « brique de Pythagore » (appelée aussi « Brique parfaite d'Euler »).
De nombreux mathématiciens, amateurs et professionnels s'y sont intéressés, sans avoir pu trouver de solution, ni pu prouver l'impossibilité d'une solution. De quoi s'agit-il ?

Soit un parallélépipède dont les mesures des trois arêtes sont *a, b* et *c*, celles des trois diagonales des faces latérales *d, e* et *f* et celle de la grande diagonale *g*.
Dans ces conditions, *a, b, c, d, e, f* et *g* peuvent-ils être des nombres entiers, tous les sept à la fois ?

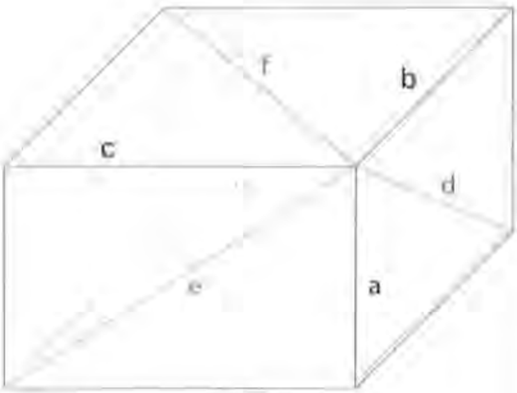


figure 1

L'énoncé de ce problème est simple. Il fait référence à des connaissances élémentaires, parallélépipède rectangle et relation de Pythagore, acquises dès l'école secondaire. Les raisonnements mis en oeuvre pour rechercher d'éventuelles solutions sont accessibles à tous et ressemblent beaucoup au genre d'opérations logiques qu'on mobilise pour la résolution d'un « Sudoku » : prise en compte de critères, contrôles, éliminations successives par exclusion etc.
Dans notre problème, les relations de Pythagore, entre les mesures des arêtes et des diagonales vont servir de critère pour accepter ou refuser certaines valeurs de la même manière que, dans le « Sudoku », on n'accepte les chiffres de 1 à 9 qu'une seule fois par ligne, colonne ou carré de 3 x 3[1].

Triplets de Pythagore :

On appelle triplet de Pythagore un ensemble de 3 nombres entiers naturels $(A\ ;\ B\ ;\ C)$ liés par la relation $A^2 + B^2 = C^2$. On dit que le triplet est primitif s'il n'existe pas de diviseur commun à *A, B et C*, autre que 1. On reconnaît évidemment dans ce triplet primitif, comme son nom l'indique, le théorème de Pythagore où *A* et *B* sont les mesures de l'angle droit d'un triangle rectangle et *C* celle de l'hypoténuse, pour les cas où ces nombres sont entiers et premiers entre eux (deux à deux). Dans la figure de la brique ci-dessus il y a six relations de triplets à respecter :
(voir figure 1)

$$a^2 + b^2 = d^2$$
$$a^2 + c^2 = e^2$$
$$b^2 + c^2 = f^2$$
$$a^2 + f^2 = g^2$$
$$b^2 + e^2 = g^2$$
$$c^2 + d^2 = g^2$$

1 **Remarque**
Nous nous sommes laissé guider par des critères simples de logique mathématique que chacun peut comprendre pour aborder un problème sur lequel bien des mathématiciens autrement plus compétents que nous se sont cassés les dents. La démarche en elle-même nous a paru féconde et les résultats déjà dignes d'être communiqués. Cette démarche reste celle de deux amateurs et nous ne prétendons pas que tout est original et nouveau dans nos démonstrations, mais nous n'avons ni le temps, ni le goût de chercher des antériorités dans une documentation qui doit être énorme. Nous serons toutefois attentifs aux observations des lecteurs à ce sujet.

Chacun connaît le triplet primitif (3 ; 4 ; 5) qui vérifie $3^2 + 4^2 = 5^2$. On pourrait alors avoir $a = 3$, $b = 4$ et $d = 5$ et si l'on se souvient de (5 ; 12 ; 13), on pourrait alors imaginer que $c = 12$ et que $g = 13$. On aurait ainsi cinq de nos sept paramètres entiers. Mais on se rend vite compte que les deux derniers e et f ne sont pas entiers. Alors, pour progresser, nous allons chercher à organiser la liste de tous les triplets de Pythagore, en nous limitant aux triplets primitifs, c'est-à-dire que nous ne considérons pas par exemple ($3n$; $4n$; $5n$) avec n entier quelconque.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRIPLETS PRIMITIFS:

(A ; B ; C), premiers entre eux et tels que :
$A^2+ B^2= C^2$

1. Nombres pairs et impairs

Une première constatation est que, parmi les trois termes d'un triplet primitif, il y a un nombre pair et un seul.

- Si C est pair et si A et B sont pairs, le triplet n'est pas primitif
- Si C est pair et si A et B sont impairs, ils ne peuvent pas former un triplet de Pythagore car A^2 et B^2 sont des « multiples de 4 augmentés de 1 » et leur somme ne peut pas être un carré (C^2) qui serait forcément un multiple de 4 si C était pair.
- Si C est impair alors A et B doivent forcément être de parités différentes. Par convention nous choisirons A pour le terme impair et B pour le terme pair.

2. Multiples de 3

- Si C est multiple de 3, et si A et B sont aussi multiples de 3, le triplet n'est pas primitif. Supposons C multiple de 3, on l'écrira : $C = 3r$
- Si C est multiple de 3 et si ni A, ni B ne le sont, on aboutit à une impossibilité car : $C = 3r$ et $C^2 = 9r^2$ est également un multiple de 3 tandis que A et B n'étant pas multiples de 3 sont de la forme :
$A = 3s \pm 1$
$B = 3t \pm 1$
Ce qui impliquerait que
$(3s \pm 1)^2 + (3t \pm 1)^2 = 9r^2$.
Or, $9s^2 \pm 6s + 1 + 9t^2 \pm 6t + 1 = 3(3s^2 \pm 2s + 3t^2 \pm 2t) + 2$ est un « multiple de 3 augmenté de 2 » et donc il ne peut pas être égal à $9r^2$
- Si C n'est pas multiple de 3, et si A et B sont multiples de 3, l'impossibilité de former un triplet de Pythagore est évidente.
- Si C n'est pas multiple de 3, et si un seul des termes A ou B est multiple de 3, on arrive à former des triplets de Pythagore.

Donc dans un triplet primitif, il y a toujours un multiple de 3 et un seul, A ou B, avec C de la forme $C = 3r \pm 1$.

Remarque

Il est possible de générer une liste exhaustive de triplets primitifs en faisant varier les 3 paramètres r, s et t, en retenant les valeurs entières compatibles. Toutefois la méthode classique de Diophante, que nous verrons ci-dessous n'utilise, elle, que 2 paramètres.

3. Multiples de 5

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que dans un triplet primitif, il y a un multiple de 5 et un seul, qui peut être A ou B ou C.
Il suffit de poser :
$C = 5r \pm (0 ; 1 ; 2)$
$A = 5s \pm (0 ; 1 ; 2)$
$B = 5t \pm (0 ; 1 ; 2)$
et de recenser tous les cas possibles

4. Méthode de Diophante

La méthode classique pour générer les triplets primitifs est celle du mathématicien grec Diophante (env. 325 – 409).
Elle consiste à poser :
$A = q^2 - p^2$
où p et q sont entiers, de parité différente
$B = 2pq$
p et q sont premiers entre eux
$C = q^2 + p^2$
$q > p$

On trouve dans la littérature (http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/rtritab.txt) par exemple un tableau donnant les triplets primitifs par C croissants jusqu'à $C = 10.000$ Il y en a 1593. Nous en reproduisons ici les 40 premiers :

n	A	B	C	p	q
1	3	4	5	1	2
2	5	12	13	2	3
3	15	8	17	1	4
4	7	24	25	3	4
5	21	20	29	2	5
6	35	12	37	1	6
7	9	40	41	4	5
8	45	28	53	2	7
9	11	60	61	5	6
10	63	16	65	1	8
11	33	56	65	4	7
12	55	48	73	3	8
13	77	36	85	2	9
14	13	84	85	6	7
15	39	80	89	5	8
16	65	72	97	4	9
17	99	20	101	1	10
18	91	60	109	3	10
19	15	112	113	7	8
20	117	44	125	2	11
21	105	88	137	4	11
22	143	24	145	1	12
23	17	144	145	8	9
24	51	140	149	7	10
25	85	132	157	6	11
26	119	120	169	5	12
27	165	52	173	2	13
28	19	180	181	9	10
29	153	104	185	4	13
30	57	176	185	8	11
31	95	168	193	7	12
32	195	28	197	1	14
33	187	84	205	3	14
34	133	156	205	6	13
35	171	140	221	5	14
36	21	220	221	10	11
37	221	60	229	2	15
38	105	208	233	8	13
39	209	120	241	4	15
40	255	32	257	1	16

En observant ce tableau, on peut vérifier les propriétés relevées précédemment à propos de la présence de nombres pairs, de multiples de 3 et de 5 figurant dans les triplets primitifs. On y voit encore que tous les nombres pairs (B) sont aussi multiples de 4, que tous les troisièmes termes (C) sont de la forme $4m + 1$. On pourrait le démontrer à partir de la définition des triplets primitifs, qui implique elle-même des relations non explicitées mais bien effectives, en particulier une des « identités remarquables » qui occupe une place importante dans les fondements du calcul littéral (et des programmes scolaires: $A^2 = C^2 - B^2 = (C - B)(C + B)$.

Ce sont aussi d'autres « identités remarquables » qui permettent de comprendre les liens entre les trois termes d'un triplet de Pythagore et leur expression à l'aide de deux paramètres seulement par les formules de Diophante. On constate en effet, à l'aide de ces identités fondamentales, que $C - B = q^2 - 2pq + p^2 = (q - p)^2$ et que $C + B = q^2 + 2pq + p^2 = (q + p)^2$ sont des carrés. On voit aussi que les paramètres p et q dérivent directement de $B^2 = C^2 - A^2 = (C - A)(C + A)$, avec $p^2 = (C - A)/2$ et $q^2 = (C + A)/2$, conduisant à l'expression de B, puis de A et C dans les formules de Diophante.

5 : Triplets différents, mais avec un même troisième terme (C)

Comme le tableau précédent est organisé selon les valeurs croissantes de C, on y repère facilement les triplets primitifs ayant un même troisième terme. Vu l'intérêt de ces triplets pour notre problème de la brique de Pythagore, il vaut la peine de s'y arrêter quelques instants. On constate que ces termes communs sont des produits de facteurs figurant dans des lignes précédentes de la colonne C.

Par exemple le premier terme C commun à deux triplets, 65, est le produit de deux termes déjà apparus précédemment: 5 et 13. Le terme suivant commun à plusieurs triplets, 85 est le produit de 5 et 17, etc.
L'étude des rapports entre les p et q des deux triplets dont on va calculer le produit des troisièmes termes permet de déterminer le(s) triplet(s) correspondant(s) à ce produit.
Si on désigne les termes C et les coefficients correspondants d'une ligne j par C_j, p_j et q_j on peut vérifier que les identités suivantes sont valables pour chaque troisième terme C_{jk} et C_{kj} multiple de deux termes précédents C_j et C_k:

Pour la première valeur:
$p_{jk} = | p_j q_k - p_k q_j |$
$q_{jk} = p_j p_k + q_j q_k$
Pour la seconde valeur:
$p_{kj} = q_j q_k - p_j p_k$
$q_{kj} = p_j q_k + p_k q_j$

Exemple:
Calcul des p_3, p_4 et q_3, q_4 pour la première valeur commune de C, 65 : $C = C_1 \times C_2$
$p_3 = | p_1 q_2 - p_2 q_1 | = 1$
$q_3 = p_1 p_2 + q_1 q_2 = 8$
$p_4 = - p_1 p_2 + q_1 q_2 = 4$
$q_4 = p_1 q_2 + p_2 q_1 = 7$

j	A_j	B_j	C_j	p_j	q_j
1	3	4	5	1	2
2	5	12	13	2	3
3	63	16	65	1	8
4	33	56	65	4	7

En résumé, le produit de deux troisièmes termes de triplets primitifs est lui-même un troisième terme, de deux triplets, si les deux termes initiaux sont premiers entre eux. (Lorsque les deux termes initiaux ont un diviseur commun autre que 1, leur produit est le troisième terme d'un seul triplet primitif, l'autre étant non primitif ou contenant un terme 0)
On peut le vérifier pour $C = 25 = 5 \times 5$; $169 = 13 \times 13$, $125 = 5 \times 5 \times 5$, etc.

6: Forme « $4m + 1$ » des troisièmes termes de triplets primitifs

Nous avons vu précédemment que les troisièmes termes de triplets primitifs sont des nombres impairs, non multiples de 3. Ils ne sont pas non plus multiples de 7, 11, 15 ... ni, plus généralement, de la forme « $4n - 1$ ». On le montre simplement en se référant à l'expression de $C = q^2 + p^2$ selon l'écriture de Diophante et à un résultat sur la somme de deux carrés: « les nombres entiers naturels qui sont des multiples de 4 augmentés de 3 ne sont jamais la somme de deux carrés »[2]. Comme C n'est jamais de la forme « $4n - 1$ », ni ne peut se décomposer en facteurs de cette forme, il sera par conséquent toujours un produit de facteurs de type ($4m + 1$).

7: Factorisation du troisième terme d'un triplet: conséquence pour la brique

Revenons à la brique et à la mesure g de sa grande diagonale. Dans les six relations entre les mesures des arêtes et des diagonales, g apparaît trois fois, et toujours comme troisième terme d'un triplet: $a^2 + f^2 = g^2$
$b^2 + e^2 = g^2$ $\quad c^2 + d^2 = g^2$.

2 Voir A. Calame, 1986. *Les sommes de deux carrés.* In *Math-Ecole* 123 (pp. 18-22). Dans cet article, l'auteur présente encore deux autres résultats en lien étroit avec notre recherche sur les triplets primitifs : « Tout nombre premier p = $4n + 1$ est décomposable en somme de deux carrés » et « Si deux nombres sont décomposables en somme de deux carrés, il en est de même de leur produit. »

La recherche de ce paramètre *g* devra donc se faire parmi les nombres C de notre étude, qui sont le troisième terme de trois triplets différents au moins. Ceci nous conduit à nous intéresser à la factorisation de ce terme.
D'après ce qui précède, on peut écrire *C* en produit de facteurs qui sont tous des multiples de 4 augmentés de 1 :
$C = (4m_1 + 1)^{n1} (4m_2 + 1)^{n2} \ldots (4m_k + 1)^{nk}$
On trouvera quatre exemples de ces factorisations et les formules permettant de calculer le nombre des triplets correspondants, primitifs et non primitifs, sur le site de *Math-Ecole*: www.math-ecole.ch

Exemple 1.
$C = 65 = 5 \times 13$ (ou encore : [4 + 1][(3x4) + 1])
et ses 4 triplets, dont les 2 primitifs,
(63 ; 16 ; 65) et (33 ; 56 ; 65)
déjà entrevus précédemment

Exemple 2.
$C = 1105 = 5 \times 13 \times 17$,
ses 13 triplets, dont 4 triplets primitifs

Exemple 3.
$C = 47125 = 5^3 \times 13 \times 29$,
ses 31 triplets, dont 4 primitifs

Exemple 4.
$C = 32045 = 5 \times 13 \times 17 \times 29$,
ses 40 triplets dont 8 primitifs

8. Répartition des multiples de 3 dans les triplets primitifs de même *C*

Pour un *C* donné qui admet 1; 2; 4; 8;... 2^{k-1} triplets primitifs, tous les *A* ou tous les *B* sont des multiples de 3. Dans le cas où *C* est du type $5 + 12n$, ce sont les *A* qui sont multiples de 3 et lorsque *C* est du type $1 + 12n$ alors ce sont les *B* qui sont multiples de 3.

9. Cas où *C* est un nombre premier ou une puissance entière d'un nombre premier

Quand $4m + 1$ est un nombre premier, il n'y a qu'un seul triplet primitif admettant $C = 4m + 1$
De même quand $C = (4m + 1)^n$, par exemple: 25 ; 125 ; 169 ; ... , il n'y a qu'un seul triplet primitif admettant $C = (4m + 1)^n$

10. Théorème de Bachet

Un théorème de Bachet dit que si *A*, *B* et *C* sont des entiers, qui obéissent à la relation $A^2 + B^2 = C^2$, les nombre *AB* ou *2AB* ou $\sqrt{AB}$ ne sont jamais des carrés de nombres entiers.

11. Identité entre triplets primitifs de Pythagore

Pour deux triplets primitifs de Pythagore $(A_i ; B_i ; C_i)$ et $(A_j ; B_j ; C_j)$ l'expression $A_i B_j + A_j B_i + C_i C_j$ est toujours un carré de nombre entier, car, en fait :
$A_i B_j + A_j B_i + C_i C_j =$
$(p_i q_j + p_j q_i + q_i q_j - p_i p_j)^2$ où les $p_i q_i$ sont les paramètres *p* et *q* de Diophante.
De même:
$A_i A_j + B_i B_j + C_i C_j = 2(p_i p_j + q_i q_j)^2$

12. A, nombre premier

Si *A* est premier, cela veut dire qu'il n'intervient que dans un seul triplet primitif :
$A = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$ donc $(q - p) = 1$ et $(q + p)$ est premier.

13. B, puissance de 2

On démontre que pour $B = 2^n$, il n'y a qu'un seul triplet primitif possible. En fait il suffit de considérer $B = 2pq = 2^n$ donc $pq = 2^{n-1}$ or cela n'est possible que si $p = 1$ et $q = 2^{n-1}$ sinon *p* et *q* auraient un facteur commun.

14. Rapport *p/q*

Si on calcule les rapports *p/q* et qu'on réarrange la liste par *p/q* croissants on obtient bien entendu des valeurs qui sont toutes différentes puisque *p* et *q* sont premiers entre eux, ce qui revient à dire que deux triplets primitifs quelconques ont toujours des rapports *B/A* différents.

15. *C*, carré d'un nombre entier

Si le troisième terme C d'un triplet est un carré, A ou B est un multiple de 7. La démonstration pourra être vue sur le site www.math-ecole.ch . Elle se fait en répertoriant tous les cas possibles pour A et B et en remarquant qu'obligatoirement dans la forme A = 7r ± (0 ; 1 ; 2 ; 3) et B = 7s ± (0 ; 1 ; 2 ; 3), le 0 intervient pour A ou B.

16. Surprise ou « découverte en passant » !

Il arrive parfois que, au cours de nos investigations, on observe des phénomènes qui ne sont pas l'objet initial de nos recherches et qui nous surprennent car ils nous paraissent inattendus.
Ainsi, notre problème de la brique de Pythagore nous a conduit à chercher les propriétés des triplets primitifs et à nous intéresser à la décomposition de leurs termes en facteurs premiers.
Nous avons trouvé très intéressant d'observer la fréquence d'apparition de ces facteurs dans le premier terme *A*.
Pour cela, nous avons testé l'échantillon des 16299 premiers triplets primitifs (par *C* croissants). Notre liste correspond à 100 % à la liste « SOMOS » (voir § 4 précédent) pour les 1593 premiers triplets primitifs et nous avons de bonnes raisons de croire à sa validité jusqu'à $C = 102401$. Nous avons en effet fait varier *p* et *q* jusqu'à 320 en éliminant tous les *p* et *q* ayant un diviseur commun. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

p : facteur premier examiné

N : nombre de termes A contenant le facteur premier *p* dans l'échantillon des 16299 premiers triplets

f : fréquence d'apparition N/16299 (calculée au millième près)

(Voir tableau ci-contre)

Visiblement pour les nombres premiers *p*, on observe une fréquence correspondant à $2/(p + 1)$, avec une précision supérieure à 99,92 %.
Cette formule est assez étonnante !
Ce tableau montre que, pour les produits de deux nombres premiers différents, la fréquence est le produit des fréquences des deux facteurs (précision supérieure à 99.91 %)

p	*N*	*f*
3	8147	1/2
5	5437	1/3
7	4080	1/4
11	2714	1/6
13	2327	1/7
17	1813	1/9
19	1640	1/10
23	1371	1/12
29	1096	1/15
37	864	1/19
15	2725	1/2·1/3=1/6
21	2045	1/2·1/4=1/8
33	1368	1/2·1/6=1/12
35	1359	1/3·1/4=1/12
55	920	1/3·1/6=1/18
9	2722	1/6
25	1095	1/15
27	905	1/18
49	601	1/28
63	686	1/24
81	330	1/54
125	242	1/75
147	300	1/56

Pour les puissances de nombres premiers, p^n, la fréquence est le produit de la fréquence de *p* par $1/p^{n-1}$.
Par exemple, la fréquence de 9 est le tiers de la fréquence de 3, qui vaut un demi, la fréquence de 125 vaut 1/25 de la fréquence de 5, qui vaut un tiers. (précision supérieure à 99.83 %).
On peut donc prédire assez bien (disons au millième près) le nombre d'apparition d'un diviseur déterminé dans les premiers triplets primitifs (ordonnés selon le troisième terme *C* croissant).
C'est un résultat intéressant. Nous donnons sur le site de *Math-Ecole* le tableau complet des valeurs obtenues. Remarquons aussi que la « densité » des triplets primitifs dans les nombres entiers reste constante et proche de 15,9 %.
(16 pour $C < 100$, 158 pour $C < 1000$, 1593 pour $C < 10000$ et 15919 pour $C < 100000$)

III. QUADRUPLETS

Dans la « brique de Pythagore » nous avons six relations entre les mesures des arêtes et diagonales (*a, b, c, d, e, f, g*) qui sont des triplets de Pythagore, dont trois dans lesquelles la mesure *g* de la grande diagonale est le troisième terme. Les résultats précédents nous permettent de « débroussailler » le vaste champ de ces triplets.
Pour notre recherche, il ne faut pas oublier que nous avons également deux relations qui concernent quatre des grandeurs précédentes :

- l'une entre les mesures des côtés du parallélépipède *a, b, c* et celle de la diagonale principale *g*: $g^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- l'autre entre les mesures des diagonales des faces *d, e, f,* et celle de la grande diagonale *g*: $2g^2 = d^2 + e^2 + f^2$

Nous nous limiterons ici à la première de ces relations entre la grande diagonale et les côtés et nous allons, comme précédemment, trier et classer ces ensembles de quatre termes que nous appellerons « quadruplets de Pythagore ».

Définition : on appelle « quadruplet de Pythagore » un ensemble de quatre nombres entiers naturels (a ; b ; c ; g) tels que $g^2 = a^2 + b^2 + c^2$
Le quadruplet est dit primitif lorsqu'il n'y a pas de diviseur commun à plus de deux des quatre termes *a, b, c* et *g*

1 : Parité de g

Si *g* est pair, g^2 ne peut pas être la somme de 3 carrés dont 2 seraient impairs (considérations analogues à celles se référant à la parité de *C* pour les triplets). Donc *g* ne peut être pair sans que les trois autres paramètres *a, b* et *c* ne le soient aussi. Donc la définition des quadruplets primitifs impose que *g* soit impair.
Si *g* est impair, g^2 ne peut être la somme de 3 carrés impairs (pour des raisons analogues à celles avancées ci-dessus, facilement démontrables).
En conséquence, *g* ne peut être qu'impair et l'un des 3 termes *a, b* ou *c* l'est aussi dans un quadruplet primitif. Par convention on choisit *a* pour ce nombre impair. Les 2 autres termes *b* et *c* étant pairs.

2 : Génération des g

La méthode consiste à sélectionner les *g* impairs croissants, puis pour un *g* déterminé à sélectionner les *a* impairs croissants inférieurs à *g*. On effectuera $g^2 - a^2$ puis on regardera les *b* et *c* entiers pairs compatibles avec l'égalité :
$g^2 - a^2 = b^2 + c^2$. Le tableau suivant donne le résultat obtenu jusqu'à $g < 50$

(3 ; 1 ; 2 ; 2)	(23 ; 13 ; 18 ; 6)	(33 ; 25 ; 20 ; 8)	(39 ; 19 ; 26 ; 22)	(45 ; 5 ; 44 ; 8)
(7 ; 3 ; 6 ; 2)	(23 ; 3 ; 22 ; 6)	(33 ; 17 ; 20 ; 20)	(39 ; 13 ; 34 ; 14)	(47 ; 43 ; 18 ; 6)
(9 ; 7 ; 4 ; 4)	(23 ; 3 ; 18 ; 14)	(33 ; 17 ; 28 ; 4)	(41 ; 9 ; 32 ; 24)	(47 ; 27 ; 38 ; 6)
(9 ; 1 ; 8 ; 4)	(25 ; 15 ; 16 ; 12)	(33 ; 7 ; 28 ; 16)	(41 ; 23 ; 24 ; 24)	(47 ; 27 ; 34 ; 18)
(11 ; 9 ; 6 ; 2)	(25 ; 9 ; 20 ; 12)	(33 ; 7 ; 32 ; 4)	(41 ; 31 ; 24 ; 12)	(47 ; 21 ; 42 ; 2)
(11 ; 7 ; 6 ; 6)	(27 ; 25 ; 10 ; 2)	(33 ; 1 ; 32 ; 8)	(41 ; 33 ; 24 ; 4)	(47 ; 21 ; 38 ; 18)
(13 ; 3 ; 12 ; 4)	(27 ; 23 ; 10 ; 10)	(35 ; 33 ; 10 ; 6)	(41 ; 39 ; 12 ; 4)	(47 ; 11 ; 42 ; 18)
(15 ; 11 ; 10 ; 2)	(27 ; 23 ; 14 ; 2)	(35 ; 17 ; 30 ; 6)	(43 ; 39 ; 18 ; 2)	(49 ; 41 ; 24 ; 12)
(15 ; 5 ; 14 ; 2)	(27 ; 7 ; 26 ; 2)	(35 ; 15 ; 26 ; 18)	(43 ; 25 ; 30 ; 18)	(49 ; 33 ; 36 ; 4)
(17 ; 9 ; 12 ; 8)	(27 ; 7 ; 22 ; 14)	(35 ; 1 ; 30 ; 18)	(43 ; 9 ; 38 ; 18)	(49 ; 31 ; 36 ; 12)
(17 ; 1 ; 12 ; 12)	(29 ; 21 ; 16 ; 12)	(37 ; 3 ; 36 ; 8)	(43 ; 9 ; 42 ; 2)	(49 ; 23 ; 36 ; 24)
(19 ; 17 ; 6 ; 6)	(29 ; 11 ; 24 ; 12)	(37 ; 3 ; 28 ; 24)	(43 ; 7 ; 42 ; 6)	(49 ; 15 ; 40 ; 24)
(19 ; 15 ; 10 ; 6)	(29 ; 3 ; 24 ; 16)	(37 ; 21; 28 ; 12)	(43 ; 7 ; 30 ; 30)	(49 ; 9 ; 48 ; 4)
(19 ; 1 ; 18 ; 6)	(31 ; 27 ; 14 ; 6)	(37 ; 27 ; 24 ; 8)	(45 ; 37 ; 20 ; 16)	(49 ; 9 ; 36 ; 32)
(21 ; 19 ; 8 ; 4)	(31 ; 21 ; 18 ; 14)	(39 ; 35 ; 14 ; 10)	(45 ; 35 ; 28 ; 4)	
(21 ; 13 ; 16 ; 4)	(31 ; 21 ; 22 ; 6)	(39 ; 29 ; 26 ; 2)	(45 ; 29 ; 28 ; 20)	
(21 ; 11 ; 16 ; 8)	(31 ; 5 ; 30 ; 6)	(39 ; 29 ; 22 ; 14)	(45 ; 19 ; 40 ; 8)	
(21 ; 5 ; 20 ; 4)	(33 ; 31 ; 8 ; 8)	(39 ; 19 ; 34 ; 2)	(45 ; 13 ; 40 ; 16)	

Densité des quadruplets:

Nous avons vu ci-dessus que le nombre des triplets primitifs était proportionnel à N. Qu'en est-il du nombre de quadruplets primitifs (QP). Le tableau suivant nous donne déjà un résultat qui nous montre que le nombre de QP varie lui en fonction de N^2. Il en va d'ailleurs de même si l'on ajoute les quadruplets non primitifs. Par exemple jusqu'à 100, il y a 347 quadruplets primitifs + 224 non primitifs, ce qui nous donne une proportion de 0,0571 pour l'ensemble des quadruplets rapportés à N^2.

N	Nombre QP	N 2	Nombre QP / N^2
10	4	100	0.04
20	14	400	0.035
30	31	900	0.0344
40	56	1600	0.035
50	86	2500	0.0344

Nous avons contrôlé ces données jusqu'à N = 400.

3 : Compatibilité Quadruplets – Triplets de Pythagore

Il s'agit maintenant d'élaguer cette liste de quadruplets primitifs en accord avec la recherche de la brique de Pythagore, c'est-à-dire que g doit être un multiple de $4n + 1$ et en aucun cas de $4m - 1$, g n'est donc pas multiple de 3 ; 7 ; 9 ; 11 ; 15 ; 19 ; 21 ; 23 ; etc, car si c'était le cas, alors tous les paramètres seraient multiples de ce même diviseur et l'on pourrait simplifier la brique d'autant. Ceci est connu et a été démontré par André Calame dans *Math-Ecole* en mai 1986.

4:

Les 7 paramètres sont tous différents, sinon on introduirait des facteurs « $\sqrt{2}$ » ou des impossibilités telles que côtés de même longueur que la diagonale dans un même triplet, ce qui reviendrait à aplatir la brique sur un rectangle, et donc à considérer une brique d'épaisseur nulle

5: Concernant la parité (facteur 2)

Si g, qui est la diagonale de 3 triplets impliquant les 6 autres paramètres était pair, tous les 7 paramètres seraient pairs et on pourrait simplifier la brique par un facteur 2. Donc g est impair. De même a, b, c ne peuvent être tous pairs, ce qui entraînerait g pair.
Or nous avons vu que les 2 côtés d'un triplet primitif ne sont jamais impairs tous les deux. Il en va de même pour un triplet non primitif impliquant g, sauf s'il est multiple de 2, ce que nous excluons.
On en déduit que parmi a, b, c un seul paramètre est impair, et nous admettons que c'est a plutôt que b ou c.
Physiquement cela revient à permuter a ; b ; c sans changer les dimensions réelles de la brique, mais simplement à la poser sur une autre face.

Si g et a sont impairs, alors b ; c ; f sont pairs et par conséquent d et e sont impairs.
b ; c ; f est un triplet non primitif multiple d'un facteur 2^n (avec $n \geq 2$) d'un autre triplet primitif ou non primitif mais avec 1 côté et la diagonale impairs, tandis que l'autre côté est divisible par 2^m avec $m \geq 2$. Nous pouvons encore choisir que b et f ont le même degré de parité n et dans ce cas le degré de parité de c devient $n + m$.

6:

g n'est pas un nombre premier car il n'appartiendrait qu'à un **seul** triplet et il en faut au minimum 3.

De même a n'est pas premier car il est donné par $q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$ ce qui implique, s'il était premier, que $q - p = 1$ et que $q + p$ soit premier donc a ne ferait partie que d'un **seul** triplet et il en faut aussi au moins 3 différents.

7:

$g = 3r \pm 1$, puisqu'il n'est pas multiple de 3. On voit vite que deux des trois paramètres a, b et c doivent eux être multiples de 3 et aussi la diagonale faciale comprise entre les deux arêtes multiples de 3.

Ce triplet est un multiple de 3 au moins d'un autre triplet (primitif ou non).

On notera qu'aucune des 2 autres diagonales faciales n'est multiple de 3, sinon tous les 7 paramètres le seraient aussi. Parmi *a, b, c*, l'un n'est pas multiple de 3, un autre est multiple de 3 au moins et le troisième est multiple de 9 au moins. La diagonale faciale entre les 2 multiples de 3 est également multiple de 3, mais au même degré que le côté qui l'est le moins.

8:

Aucun diviseur ne se trouve dans 4 des 7 paramètres, sinon il apparaîtrait dans tous les 7 paramètres.

9:

Diviseur 5 : il apparaît une fois, et une seule fois, dans chaque triplet primitif *A ; B ; C*.

Il en va de même pour tout triplet non primitif à moins que ce dernier ne soit un multiple de 5 d'un triplet primitif, dans ce dernier cas l'un des termes est multiple de 25.

Cas possibles :

g est multiple de 5, alors l'un des 3 paramètres *a, b, c* l'est aussi (ou bien alors tous les 3 puis tous les 7 paramètres, donc ce cas n'entre pas en compte).

g n'est pas multiple de 5, alors 2 des 3 paramètres *a, b, c* le sont et par conséquent aussi la diagonale latérale comprise entre les 2 côtés en question, par exemple *a, b, d* et l'un de ces 3 derniers paramètres est même multiple de 25 au moins. Il existe aussi une possibilité théorique que g ne soit pas multiple de 5 et que ni *a*, ni *b*, ni *c* ne le soient non plus. Mais ceci impliquerait que *d, e, f* soient tous les 3 multiples de 5, ce qui donnerait *g* multiple de 5, puisque $2g^2 = d^2 + e^2 + f^2$ et par cascade *a, b, c* aussi, donc contradiction. Ce cas n'est pas compatible avec la brique de Pythagore. La conclusion de ce point important est qu'il ne peut y avoir que 3 des 7 paramètres multiples de 5, et que ces groupes possibles sont : *a ; b ; d ou a ; c ; e* ou *b ; c ; f ou a ; f ; g ou e ; b ; g* ou encore *d ; c ; g*. Il est donc exclu d'avoir 2 diagonales latérales multiples de 5. On peut s'en convaincre en se rappelant que le triplet de la face non concernée par les 2 diagonales multiples de 5 comporte au moins 1 paramètre multiple de 5....

10:

Un même diviseur qui se trouve dans 2 diagonales latérales ne peut pas apparaître dans l'un des 5 autres paramètres, sans apparaître dans tous.

11:

La méthode de Diophante donne en fait le théorème :
Quand un nombre est la somme de deux carrés, son carré est aussi la somme de deux carrés.

En effet :
$C = q^2 + p^2$ et $C^2 = A^2 + B^2$ avec
$A = q^2 - p^2$ et $B = 2pq$
$A^2 + B^2 = (q^2 - p^2)^2 + 4p^2q^2 = (q^2 + p^2)^2$
en développant

La réciproque semble vraie aussi. Si le carré d'un nombre est la somme de 2 carrés, alors ce nombre peut s'exprimer sous la forme d'une somme de 2 carrés de nombres entiers. Ce qui est en tout cas valable pour *A* impair, c'est qu'il est la différence de 2 carrés de nombres entiers.

On a en effet $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$
et nous n'envisageons pas de *A* pair
et forcément il existe
un $B = 2pq$ tel que $A^2 + B^2 = (q^2 + p^2)^2 = C^2$

Que trouve-t-on dans la littérature à ce sujet ?
Nous donnons ci-dessous des exemples de brique d'EULER avec 6 des 7 paramètres entiers.

a	b	c	d	e	f	g
117	44	240	125	267	244	$5\sqrt{29}\sqrt{101}$
275	252	240	373	365	348	$\sqrt{13}\sqrt{37}\sqrt{409}$
693	140	480	707	843	500	$13\sqrt{29}\sqrt{149}$
85	132	720	157	725	732	$\sqrt{13}\sqrt{37}\sqrt{1129}$
231	792	160	825	281	808	$5\sqrt{13}\sqrt{41}\sqrt{53}$
153	104	672	185	$3\sqrt{89}\sqrt{593}$	680	697
$\sqrt{7}\sqrt{23}\sqrt{31}\sqrt{151}\sqrt{281}$	7800	18720	16511	23711	20280	24961

Euler a donné des équations paramétriques pour obtenir *a, b, c, d, e, f* entiers à partir d'un triplet de Pythagore primitif quelconque *A, B, C*:

$a = A\,(4B^2 - C^2)$ $\qquad d = C^3$
$b = B\,(4A^2 - C^2)$ $\qquad e = A\,(4B^2 + C^2)$
$c = 4\,A\,B\,C$ $\qquad f = B\,(4A^2 + C^2)$

Les 6 paramètres sont bien des nombres entiers. En essayant d'examiner ce qui se passe pour *g*, on peut écrire:

$g^2 = C^2\,(16A^2\,B^2 + C^4)$ donc pour que g soit un entier il faudrait que :

$\sqrt{16A^2\,B^2 + C^2}$ soit un entier, impair de surcroît comme nous le verrons plus loin.

En passant par la méthode classique de Diophante:

$$A = q^2 - p^2$$
$$B = 2p\,q$$
$$C = q^2 + p^2$$

l'équation ci-dessus devient :

$$\sqrt{16A^2B^2 + C^4} = \sqrt{q^8 + 68\,q^6p^2 - 122\,q^4p^4 + 68\,q^2p^6 + p^8}$$

Il semble qu'il n'y ait pas de solution entière pour p et q pour cette racine. Nous l'avons vérifié dans EXCEL en faisant varier *p* et *q* entre 1 et 100. Tout au plus cette méthode permet d'obtenir des valeurs approchées.

IV. CONCLUSION (PROVISOIRE):

Notre conviction est qu'il n'existe pas de « brique de Pythagore », c'est-à-dire de parallélépipède rectangle dont toutes les mesures des côtés et diagonales soient des nombres entiers. Nous espérons pouvoir le prouver un jour par des raisonnements de pure logique.
Depuis la rédaction de cet article, nos recherches se sont élargies et nous nous proposons de mettre sur le site de *Math-Ecole* les résultats que nous avons obtenus entre-temps.
Nous remercions *Math-Ecole* de nous donner l'occasion de dialoguer avec les lecteurs intéressés par cette question et nous mettrons à disposition de ces derniers les listings sur lesquels nous avons travaillé. C'est avec plaisir que nous recevrons les suggestions éventuelles des lecteurs.

Les domaines non évoqués dans cet article ont été les suivants:

1:
Recours aux modulos
2:
La relation que nous avons appelée « quadruplets » de diagonales $2\,g^2 = d^2 + e^2 + f^2$
a également été mise à contribution avec profit
3:
Etablissements de listes mixtes triplets primitifs + triplets non primitifs, servant à générer les g potentiels, de même que les diagonales latérales potentielles. Nous mettrons ces listes à disposition des lecteurs.

FASCINANTS ET ÉNIGMATIQUES NOMBRES PREMIERS

André Paternottre

[ndlr] *Math-Jeunes, Junior* est une des deux revues de nos collègues de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, destinées aux collégiens. On y trouve de nombreux articles, propositions d'activités, problèmes ... s'adressant à un public jeune, pour lui permettre d'aborder des thèmes mathématiques dans un langage accessible.
Rédiger des articles de mathématiques lisibles par une majorité d'élèves de 12 à 15 ans n'est pas chose aisée. Il faut maintenir la rigueur scientifique nécessaire tout en adoptant un langage simple, direct et incitant le lecteur à entrer dans la problématique traitée. C'est le pari des auteurs de *Math-Jeunes Juniors*. Les lecteurs de *Math-Ecole* pourront en juger eux-mêmes à la lecture de cet article et, par la même occasion, ils se rappelleront quelques connaissances fondamentales sur les nombres premiers.
Nous remercions A. Paternottre de nous autoriser à reprendre son texte et de faire découvrir à de nombreux collègues de Suisse romande son excellente revue *Math-Jeunes, Junior*. (Pour de plus amples renseignements, sur la SBPMef et ses revues, voir le site http://www.sbpm.be).]

Dans l'ensemble des nombres naturels, s'il est un sous-ensemble qui, depuis toujours, a fasciné les mathématiciens, c'est bien celui des nombres premiers.
A leur propos, il existe bien sûr des certitudes c'est-à-dire des propriétés démontrées. Mais il existe aussi pas mal d'incertitudes constituant autant d'énigmes qu'on tente toujours de tirer au clair de nos jours. Je vous propose donc un double mini-voyage dans l'univers des nombres premiers. Dans la première partie de cet article nous nous intéresserons aux certitudes et dans la seconde, aux incertitudes.

Et tout d'abord qu'est-ce qu'un nombre premier ?

Un nombre naturel est premier $\Leftrightarrow$ il ne possède que deux diviseurs naturels distincts: lui-même et 1

Sur la base de cette définition, justifie que :

1°) Parmi les nombres premiers, le seul qui soit pair est 2.

2°) 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

3°) Tout nombre premier d'au moins 2 chiffres possède 1, 3, 7 ou 9 comme chiffre des unités.

Rappelons aussi que plusieurs nombres naturels sont « *premiers entre eux* » si et seulement si leur seul diviseur naturel et commun est 1. Ainsi 4, 6, 15, 21 sont quatre nombres premiers entre eux.
Un ensemble de n nombres premiers distincts constitue-t-il aussi un ensemble de n nombres premiers entre eux ? La réciproque de cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Quelques théorèmes relatifs aux nombres premiers :

Le théorème fondamental de l'arithmétique:

Tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers (non nécessairement distincts).

Ainsi : $231 = 3 \times 7 \times 11$;
$343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$;
$27720 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 =$
$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

Peut-être as-tu utilisé ces « factorisations » lors de la recherche du PGCD (plus grand commun diviseur) et/ou du PPCM (plus grand commun multiple) de plusieurs nombres naturels.

A propos de factorisation, celle du produit des naturels *consécutifs* 714 et 715 est assez curieuse.
Observe : $714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$
et $715 = 5 \times 11 \times 13$
Donc $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$
c'est-à-dire le produit des 7 premiers nombres premiers.
D'autre part $2 + 3 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13 = 29$ (nombre premier)

Combien y a-t-il de nombres premiers ?

> *Il existe une infinité de nombres premiers.*

C'est le célèbre mathématicien grec **Euclide** (≈ 300 av J-C) qui, dans ses « Eléments », donne une démonstration élégante et convaincante de cette propriété. La voici :

Supposons que la suite des nombres premiers ne soit pas infinie. Cela revient à supposer, dit Euclide, qu'il existe un nombre naturel p qui soit le plus grand des nombres premiers.
Envisageons alors le produit P de tous les nombres premiers, du plus petit (2)au supposé plus grand p:

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots p$$

P est évidemment divisible par chacun des facteurs premiers qui le compose.
Intéressons-nous au nombre naturel P + 1.
De toute évidence, on a : $P + 1 > p$. Mais alors P + 1 n'est pas premier puisque p est réputé être le plus grand des nombres premiers. Dès lors P + 1 est divisible par au moins un des facteurs premiers (notons-le q) figurant dans le produit P.
Conclusion : le nombre premier q divisant P et P+1 divise aussi la différence $(P + 1) - P = 1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc pas un nombre premier p plus grand que tous les autres. Chapeau Euclide !

Deux théorèmes démontrés par Pierre de Fermat (Français ; 1601-1665)

> *Si p est un nombre premier qui ne divise pas le naturel n, alors* $n^{p-1} - 1$ *est divisible par p.*

Ainsi 7 est premier et ne divise pas
4 => $4^{7-1} - 1$ou encore $4^6 - 1$ est divisible par 7.
Peut-on aussi affirmer que $4^7 - 4$, $10^{106} - 10^{100}, 14^6 - 1$ sont aussi divisibles par 7 ?

Ce théorème, appelé « petit théorème de Fermat », trouve une application pratique intéressante dans une méthode de décryptage d'un message codé.

> *Si p est un nombre premier de la forme $4n + 1$ alors p est d'une manière unique égal à $a^2 + b^2$. (n, a et b sont des nombres naturels non nuls).*
> *La réciproque n'est pas vraie.*

Ainsi $(4 \times 7) + 1 = 29$ (nombre premier) => $29 = 2^2 + 5^2$.
Par contre $10^2 + 11^2 = 221$ et $221 = 4 \times 55 + 1$. Cependant $221 = 13 \times 17$ n'est pas premier !

Un théorème démontré d'abord par Tchebytchev (Russe ; 1821-1894) puis par Erdös (Hongrois ;1913-1996)

> ***Si n est un naturel > 1, alors il existe au moins un nombre premier entre n et 2n.***

Il peut sans doute paraître évident qu'entre 25 et 50 par exemple, il existe au moins un nombre premier. Mais peut-on être certain qu'il en est de même entre 25^{70} et 2×25^{70}? Ce théorème l'affirme.
Notons qu'en 1845, un théorème connu sous la dénomination « Postulat de Bertrand » existait déjà.
Il était proche mais un peu plus restrictif que le théorème précédent.

Un théorème démontré par Dirichlet (Allemand ; 1805-1859)

> ***Toute suite arithmétique infinie a,a+r,a+2r,a+3r,... dans laquelle le premier terme a et la raison r sont premiers entre eux, renferme une infinité de nombres premiers.***

Ainsi parmi les termes de la progression arithmétique 9, 20, 31,...de premier terme 9 et de raison 11
(9 et 11 sont premiers entre eux) , il y a une infinité de nombres premiers.
Invente d'autres suites arithmétiques renfermant une infinité de nombres premiers.

Comment obtenir tous les nombres premiers inférieurs à nombre naturel n donné ?

Si tu te réfères à l'article de *S.* Trompler du n°105 de MJJ, tu liras comment Eratosthène (-276,-194) filtrait une suite de nombres naturels consécutifs pour qu'il n'y subsiste que des nombres premiers. C'est une méthode simple, sûre et efficace mais qui exige pas mal d'écritures et de concentration. On l'appelle ***« crible d' Eratosthène »***.
Ce crible est une source d'inspiration pour découvrir un *algorithme* (c'est-à-dire une suite de consignes à suivre) débouchant finalement sur un programme d'ordinateur capable d'écrire tous les nombres premiers inférieurs à un nombre naturel donné. L'article de N. Vandenabeele qui suit le présent article est consacré à ce sujet. Il y sera aussi question d'un algorithme permettant de reconnaître si un nombre naturel donné est ou non premier.

Un petit clin d'œil pour terminer
(cette première partie[1])

Parmi les nombres naturels de 3 chiffres, 131 est assez sympathique. En effet 131, en plus d'être premier et palindrome (il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche) possède aussi les qualités suivantes :
La permutation de ses chiffres donnent les naturels 113 et 311 qui sont aussi premiers .
De plus 1 x 3 x 1 , 1 + 3 + 1 , $1^2+3^2+1^2$, $1^3+3^3+1^3$, $1^4+3^4+1^4$ sont tous premiers.
Hélas cela s'arrête là !

....

(Deuxième partie[2])

Nous venons d'examiner quelques propriétés connues et démontrées des nombres premiers. Il faut cependant savoir que pas mal de zones d'ombre subsistent en ce qui les concerne. Si les mathématiciens soupçonnent certaines propositions d'être vraies, ils n'en sont pas moins réduits, faute de pouvoir les démontrer, à se contenter de les énoncer, de les vérifier sur de nombreux exemples et de tenter de les prendre en défaut.
Tant qu'une propriété n'est ni démontrée ni invalidée, on dit qu'elle est au stade de la ***conjecture***.
Voici quelques conjectures et incertitudes, toujours actuelles, qui concernent les nombres premiers:

Existe-t-il une expression algébrique capable d'engendrer tous les nombres premiers ?

A ce jour, la réponse est clairement « non ».
Pourtant plusieurs grands noms des mathématiques ont bien tenté de découvrir une telle expression :

Euler (Suisse ; 1707-1783) proposa l'expression $n^2 + n + 41$ qui, pour n = 0,1, 2, 3, ... , 39 n'engendre que des nombres premiers. Hélas pour $n = 40$ cette expression vaut $40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 41^2$ qui n'est évidemment pas un nombre premier . Cependant, en continuant à donner à n les valeurs 42, 43, 44...,un puissant ordinateur a cal-

1 L'article a été publié en deux parties dans *Maths-jeunes Junior*. no 112 et 113 (novembre 2005 et janvier 2006)

2 Voir note précédente

culé que l'expression d'Euler engendrait des nombres premiers inférieurs à 10^7 dans 47,5 % des cas, ce qui est quand même assez remarquable.

Mersenne (Français ; 1588-1648) pensait que l'expression $2^n - 1$ engendrait un nombre premier lorsque n est aussi un nombre premier. Il avait raison pour $n =$ 2, 3, 5, 7. Mais il dut déjà déchanter pour $n = 11$. En effet $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Il prouva cependant qu'il avait raison pour $n = 13, 17$ et 19.
Il est donc incorrect d'affirmer que si n est premier alors $2^n - 1$ l'est aussi.
Par contre il est correct d'affirmer que si $2^n - 1$ est premier alors n l'est aussi. En effet si n n'est pas premier, on peut poser $n = pq$ et on sait que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
Ainsi $2^n - 1 = 8191$ (nombre premier - vérifie-le) => n est premier. Que vaut n ?

La chasse aux nombres premiers de Mersenne pour des valeurs de n de plus en plus grandes débuta dès le 17e siècle :

En 1640, Fermat prouve que $2^{23} - 1$ n'est pas premier car divisible par 47. (vérifie-le sur une calculatrice).
En 1738, Euler montre que $2^{29} - 1$ n'est pas non plus premier car divisible par 233. Le même Euler, dans la foulée, montre par contre que $2^{31} - 1$ est un nombre premier.
Pendant une longue période, $2^{31} - 1$ restera le plus grand nombre premier de Mersenne connu.
En 1951, $2^{127} - 1$, un nombre de 39 chiffres, constituait le dernier record obtenu « à la main ».
De nos jours, les ordinateurs ont sensiblement accéléré la course aux grands nombres premiers.
En 2000, le plus grand nombre premier connu était $2^{6\,972\,593} - 1$, soit un nombre de 2 098 960 chiffres ! Il a fallu 12 600 ordinateurs reliés entre eux par internet pour pouvoir obtenir ce dernier résultat !

« C'est de la folie ! A quoi cela peut-il bien servir ? », me direz-vous. J'ai trouvé un début de réponse à cette question dans le n°120 de « Math-Jeunes » (janvier 2005). Voici ce qu'il y est dit : « l'utilisation du système de codage de messages secrets appelé *cryptosystème RSA* nécessite le choix par le destinataire du message de *deux grands nombres premiers distincts.* » Et l'auteur de l'article (Françoise Valette) d'ajouter : *« c'est-à-dire d'au moins 150 chiffres »* !
Pourquoi de si grands nombres premiers ? Parce que le codage des messages secrets doit être très fiable si on veut que la sécurité soit maximale dans une opération telle que le paiement d'une facture via une carte de crédit ou via internet. Alors ?...pas si fous qu'on ne pense ces matheux !

La conjecture de Goldbach (Allemand ; 1690 - 1764)

La somme de deux nombres premiers supérieurs à 2 est évidemment toujours un nombre pair. Pourquoi ?
Goldbach s'est posé la question de savoir si la réciproque était vraie. Faute de pouvoir la démontrer,(et elle n'est toujours pas démontrée aujourd'hui), il a proposé la conjecture suivante :

Tout naturel pair (>2)est la somme de deux nombres premiers.

Ainsi $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $34 = 3 + 31 = 5 + 29 = 11 + 23 = 17 + 17$; $60 = \ldots$; $96 = \ldots$
Certains nombres pairs ont donc plus de 2 décompositions en une somme de deux nombres premiers.
Un ordinateur peut vérifier que si p est un nombre **pair** et d le nombre de ses décompositions en une somme de deux nombres premiers alors :
$14 \leq p \leq 32 \Rightarrow d \geq 2$;
$34 \leq p \leq 74 \Rightarrow d \geq 3$ (sauf 68);
$76 \leq p \leq 200 \Rightarrow d \geq 4$ (sauf 98) ;
$200 \leq p \leq 500 \Rightarrow d \geq 6$;
$500 \leq p \leq 1000 \Rightarrow d \geq 10$;
$1000 \leq p \leq 2000 \Rightarrow d \geq 16$ ... etc.

Pour les nombres impairs, il existe aussi une conjecture analogue à celle de Goldbach :

> **Tout naturel impair (>1) est la somme d'au plus trois nombres premiers.**

Ainsi : 3 = 3 ; 5 = 3 + 2 ; ... ; 25 = 23 + 2 = 19 + 3 + 3 = 17 + 5 + 3 = 13 + 7 + 5 = 11 + 7 + 7.
Recherche d'autres décompositions.
Des recherches récentes (1989) ont démontré que cette conjecture est vraie lorsque le nombre impair est $< 10^{43000}$. Hélas cela ne suffit pas pour affirmer qu'elle est vraie quel que soit le nombre impair $> 10^{43000}$!

Répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres naturels.

Si tu examines la suite des 625 premiers nombres premiers[3] tu peux en conclure qu'ils appartiennent tous à l'intervalle [1, 4637].
Avec de la patience, tu peux observer dans cette même suite que : l'intervalle [1, 100] comprend exactement 25 nombres premiers,

l'intervalle	[100,200]	en comprend	21
"	[200,300]	"	16
"	[300,400]	"	16
"	[400,500]	"	17

Tu l'auras compris, dans des intervalles de même « longueur », le nombre de nombres premiers est loin d'être le même. La répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres naturels est donc assez chaotique. A ce jour, il n'existe pas de règle permettant de calculer la « distance » qui sépare un nombre premier de son suivant.
A la fin du 18e siècle, le grand mathématicien allemand C-F GAUSS (1777-1855) avait pressenti que les nombres premiers se raréfient au fur et à mesure qu'on progresse vers les très grands naturels. Il a même conjecturé le « Théorème des nombres premiers » qui ne sera démontré qu'un siècle plus tard et séparément par J. HADAMARD (Français ; 1865-1963) et C. de la VALLEE-POUSSIN (Belge ; 1866-1962). En 1949, P. ERDÖS (Hongrois ; 1913-1996) et A. SELBERG (Norvégien ; 1917-) en donnèrent une preuve élémentaire.
Pour appliquer ce théorème, il faut connaître la notion de *« logarithme népérien d'un nombre x (x > 0) qu'on note ln x »*. Tu n'aborderas cette notion qu'en 6e année. Sache seulement que ta calculatrice, grâce a sa touche « ln » donne directement la valeur de ln x. Par exemple ln 254 = 5,537. Voici l'énoncé du « Théorème des nombres premiers » :

> **Une valeur *approximative* du nombre de nombres premiers inférieurs à *x* est** $\frac{x}{\ln x}$
> et l'approximation est d'autant meilleure que *x* est grand.

Ainsi une valeur approximative du nombre de nombres premiers inférieurs à 4637 vaut $\frac{4637}{\ln 4637} \approx \frac{4637}{8{,}44} \approx 550$. Or on lit dans la liste des nombres premiers que 4637 est le 625e nombre premier. Le pourcentage d'erreur est donc de $\frac{100(630-550)}{550} = 14{,}5\ \%$.
De même une valeur approchée du nombre de nombres premiers inférieurs à 10^6 vaut $\frac{10^6}{\ln 10^6} \approx$ 72382.

Or on sait (grâce aux ordinateurs) que le nombre exact de nombres premiers inférieurs à 10^6 est 78498.
Cette fois le pourcentage d'erreur n'est plus que 8,4 %.

Un deuxième préalable avant d'aller plus loin : la notion (facile) de « factorielle ».
Par définition : $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$ = produit des n premiers nombres naturels.
La notation « n ! » se lit « factorielle (de) n ».
Ainsi $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
Calcule la valeur de 10 !
n! est donc divisible par 1, 2, 3, 4, 5, ... (n - 1), n ainsi que par tout produit de 2, 3,...n facteurs choisis parmi les précédents.

3 Cette suite est donnée dans *Maths-Jeunes Junior* no 112. Elle n'est pas reproduite ici mais le lecteur pourra vérifier dans une table de nombres premiers.

Cela étant, *il est possible de créer des intervalles de nombres naturels arbitrairement longs et ne comprenant aucun nombre premier. Observe l'intervalle suivant :*
[100! + 2 , 100! + 3 , 100! + 4, ... , 100! + 100].
Cet intervalle comprend exactement 99 naturels consécutifs. Aucun d'eux n'est premier.
En effet :
2 divise 2 ainsi que 100 !
Donc 2 divise 100! + 2 et dès lors
100 ! + 2 n'est pas premier.
3 divise 3 ainsi que 100 !
Donc 3 divise 100! + 3 et dès lors
100 ! + 3 n'est pas premier.
....etc
100 divise 100 ainsi que 100 ! .
Donc 100 divise 100 ! + 100 et dès lors
100 ! + 100 n'est pas premier.
Conclusion : l'intervalle écrit ci-dessus comprend 99 naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

Si on avait pris $n = 5000$, on aurait obtenu un intervalle de 4999 naturels consécutifs et non premiers.
Il est donc possible, en prenant n assez grand, de créer de très longs intervalles de naturels consécutifs ne comprenant aucun nombre premier.

Une dernière incertitude.

Deux nombres premiers sont dits « jumeaux » si leur différence vaut 2. Ainsi 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13 , 4517 et 4519 sont des paires de nombres premiers jumeaux.
On pense qu'il existe une infinité de telles paires mais on ne l'a jamais démontré !

Au royaume des nombres premiers, tout est donc loin d'être connu. C'est sans doute pour cela que, depuis l'Antiquité, les nombres premiers ont toujours fasciné les mathématiciens. Si, d'une part, leurs recherches ont été souvent fructueuses, ils sont conscients, d'autre part, qu'ils ont encore un long chemin à parcourir. Croisons donc les doigts !
Que les nombres premiers ne t'empêchent quand même pas de dormir !

4 Cet article est suivi d'un complément biographique, de Simone Trompler, qui, sur deux pages, donne une biographie de huit mathématiciens particulièrements liés au théorème des nombres premiers : Selberg, Erdös, Hadamard, Goldbach, Mersenne, La Vallée-Poussin, Euler, Gauss.

Cryptarithmes

Nous remercions M. Bernard Lamirel, qui nous envoie régulièrement ses cryptarithmes. Parmi ceux-ci, nous retenons les suivants, sur les thèmes actuels de la « bonne bouffe » et des méfaits des drogues dites légères.

a)	b)	c)
MANGER	REPAS	TABAC
+MANGER	+REPOS	+ALCOOL
GROSSIR	SANTE	CANCER

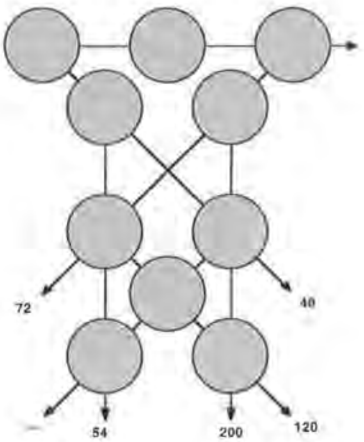
Le a), facile, vient du *Kangourou* ; le b) et le c), de plus en plus difficiles, sont des créations de M. Lamirel.
Les règles de ces opérations arithmétiques à reconstituer, sont toujours les mêmes :
- chaque chiffre est représenté par une même lettre,
- deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,
- aucun nombre ne commence par le chiffre 0.

Solutions sur notre site http://www.math-ecole.ch

« COIN MATHS »

F. Jaquet

PRODUITS EN LIGNE



Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.
Calculez les deux produits manquants.
Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres?

Ce problème est tiré de la finale du 10e RMT. Il était destiné aux classes des degrés 5 à 8 et a été choisi avec une vingtaine d'autres, pour constituer les « ateliers de résolution de problèmes » que l'Association du rallye mathématique transalpin (ARMT) développe actuellement, après les avoir largement expérimentés lors d'expositions et manifestation de promotion des mathématiques.
Ces « ateliers » sont ainsi nommés parce que la manipulation de matériel y joue un rôle important. Les problèmes proposés peuvent en effet se résoudre sans papier ni crayon, dans un premier temps, avant d'être exploités en classe dans le cadre de progressions didactiques vers des concepts mathématiques à construire.

Les énoncés sont présentés de manière traditionnelle, sur des fiches, mais ils sont accompagnés du matériel de manipulation nécessaire à leur résolution, pour ceux qui rechignent à passer à l'écrit.
Une brochure d'accompagnement est à l'impression[1]. Dans son introduction, elle présente plusieurs manières d'exploiter les activités en classe, de la modalité minimale ne demandant qu'une trace écrite à une modalité d'insertion dans le parcours didactique de la classe, en passant par des modalités intermédiaires comme des mises en commun, des exploitations dirigées, etc.

Pour chaque atelier, la brochure présente les huit rubriques suivantes :

- une liste du **matériel**
- la ou les **solutions** du problème, toujours utiles pour la vérification et l'exhaustivité
- les **degrés** pour lesquels l'activité est la plus adéquate
- les **contenus mathématiques** dont on doit s'assurer qu'ils sont bien réels et intéressants pour la progression des élèves,
- la **tâche de l'élève**, partie essentielle de l'analyse a priori,
- des **développements mathématiques,** qui peuvent être utiles pour mieux comprendre les enjeux de l'activité dans la construction des savoirs, au-delà des programmes scolaires des degrés concernés,
- des **indications didactiques** : différents modes de gestion des ateliers en vue de leur exploitation pour la classe, suggestions de prolongements ou de développements, dans une optique de différenciation, d'évaluation... ou en vue de l'insertion de l'atelier dans un parcours didactique.

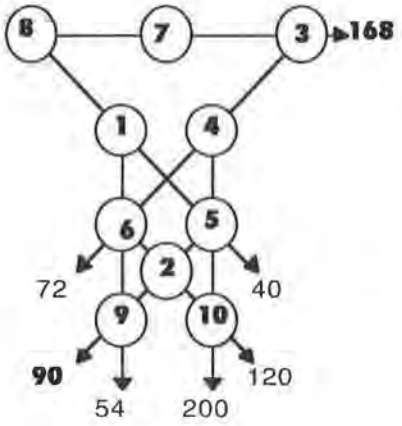
Voici ces différentes rubriques de la brochure, pour l'atelier « Produits en ligne » :

1 On la trouvera en consultant le nouveau site de l'ARMT : http://www.math-armt.org

Matériel

10 jetons en bois, numérotés de 1 à 10

Solution



Cette solution est unique

Degrés: dès les degrés 5 à 6, jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire, voire au-delà.

Contenus mathématiques

- Multiplication : décomposition d'un nombre en facteurs premiers
- Logique et raisonnement : conjonction et négation de critères.

Tâche de l'élève

- Lecture de l'énoncé : compréhension de « produit » et prise en considération des contraintes pour chaque alignement.
- Travailler par essais pour s'approprier les règles et constater qu'il faut organiser les recherches en tenant compte des différentes contraintes qui s'exercent sur chaque emplacement des nombres.
- Pour chacun des nombres, dresser l'inventaire des emplacements possibles et constater que les choix sont limités pour certains nombres comme le 9, le 5, le 10, le 7 en particulier.
- Placer l'un de ces nombres sur un emplacement possible (par exemple le 9 sur un des alignements « 54 » ou « 72 ») et, par essais successifs, chercher à placer les autres nombres. Puis lorsqu'une disposition est trouvée, se demander s'il y en a d'autres et entreprendre d'autres essais.
- Pour éviter les tentatives longues et inutiles, analyser de manière plus approfondie la décomposition des nombres en facteurs premiers : 10 = 2 x 5 ; 9 = 3 x 3 ; 8 = 2 x 2 x 2 ; ...ainsi que celle des produits à obtenir : 200 = 5 x 5 x 2 x 2 x 2 ;
  120 = 5 x 3 x 2 x 2 x 2 ;
  72 = 3 x 3 x 2 x 2 x 2 ;
  54 = 3 x 3 x 3 x 2 ;
  40 = 5 x 2 x 2 x 2.

On constate alors que le 7 est obligatoirement sur la ligne du haut, au milieu. Il n'y a alors plus que deux emplacements pour le 9 : en bas de la colonne du 54 ou en haut à droite (sur le première ligne). Si le 9 était dans cette dernière position, il faudrait que le 6 et le 3 soient dans la colonne du 54 (pour les deux facteurs « 3 » de ce nombre) mais pas dans l'alignement du 72 (dont les deux facteurs « 3 » seraient déjà pris par le 9), ni dans l'alignement du 40 (qui n'admet pas de facteur « 3 »). Il ne serait donc pas possible de placer le 6 et le 3 dans la colonne du 54 et, par conséquent, l'emplacement du 9 est déterminé de manière unique, en bas de la colonne du 54. Un raisonnement analogue sur les deux facteurs « 5 » qui composent 120 permet de dire que 5 et 10 occupent obligatoirement les deux emplacements inférieurs de la colonne du 200. L'emplacement du 4 est alors déterminé de manière univoque : à l'intersection des alignements du 200 et du 72 (car 5 x 10 x 4 = 200). Le 10 ne peut alors plus se situer sur la ligne du 40 car pour compléter l'égalité 10 x ... x ... = 40, le 4 n'est plus disponible et le 2 n'est utilisable qu'une seule fois. Les nombres 7, 9 4, 5 et 10 étant placés, les choix des emplacements des autres nombres se déterminent aisément, de manière aussi univoque.
Il n'y a donc qu'une solution au problème (Voir ci-dessus).

Développements mathématiques

L'activité « Produits en ligne » fait intervenir la décomposition multiplicative des nombres naturels. (On aborde là une des propriétés essentielles de la multiplication, exprimées par les mathématiciens au travers du « théorème fondamental de l'arithmétique », qui dit que tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers.) Comme le montre l'analyse de la tâche ci-dessus, l'expression des nombres en produit de facteurs premiers (qu'on ne peut plus décomposer) est un instrument efficace, indispensable pour toute l'arithmétique : multiples, diviseurs, communs multiples et diviseurs communs, fractions, ...

Cette décomposition en facteurs permet ici de trouver les emplacements des nombres par déductions logiques plutôt que par essais successifs et éliminations. Elle permet en outre de s'assurer que toutes les solutions ont été trouvées ou de l'unicité de la solution comme dans ce cas.

Indications didactiques

L'activité est « auto-validante » car il suffit de vérifier si les produits des nombres placés correspondent à ceux qui sont indiqués sur le schéma. L'écriture détaillée de tous ces produits constitue ainsi une exploitation minimale de l'activité.

Mais ces vérifications ne font intervenir que la connaissance de la table de multiplication et de produits élémentaires, sans exploiter la richesse de la situation du point de vue mathématique. Pour sensibiliser les élèves à l'efficacité de la « décomposition en facteurs premiers », il faut envisager une mise en commun et considérer cet atelier *Produits en ligne* comme une étape importante du parcours didactique sur les nombres premiers, dans le chapitre des multiples et diviseurs.
L'enseignant aura ici un rôle essentiel à jouer, après avoir laissé les élèves chercher la solution, au moment d'une validation collective où il faudra répondre à la question « Combien y a-t-il de façons de disposer ces dix nombres ? » de manière claire. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas une connaissance qui se construit spontanément : elle fait intervenir l'associativité et la commutativité de la multiplication dont les élèves sont peu conscients car ils rencontrent habituellement des produits de deux facteurs seulement ; elle demande une certaine familiarité avec les nombres premiers et les critères de divisibilité les plus courants ; elle fait appel à une méthode rigoureuse consistant à « extraire », dans l'ordre, les facteurs premiers du nombre à décomposer. C'est la raison pour laquelle l'enseignant devra être actif en fin de mise en commun, par des rappels, des suggestions et des aides. Il aura aussi la tâche de conduire les phases d'institutionnalisation qui suivront. Il devra encore proposer des activités de consolidation et d'assimilation des connaissances nécessaires à la décomposition en facteurs premiers.

Par exemple, l'activité de l'encadré de la page 57 permet d'utiliser intensément toutes les connaissances sur les nombres premiers et les critères de divisibilité.

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES ET PROPRIÉTÉ INTELLECTUELLE

François Jaquet,
coordinateur international de l'ARMT

- *Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite, et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. Réf. : Loi du 11 mars 1957.*

- *Si ce document a été conçu pour être photocopié, c'est bien sûr dans le cadre strict de l'enseignant possesseur du fichier. Nous sommes convaincus que votre sens associatif permettra d'éviter les abus qui seraient préjudiciables à l'APMEP et ACL les Éditions du Kangourou. Nous vous en remercions vivement.*

Ces deux citations – tirées respectivement de deux ouvrages présentés dans les notes de lecture de ce numéro : *Panoramath 4 et fichier Évariste-Ecole*, nous conduisent au cœur du sujet de ce petit article : la propriété intellectuelle des problèmes de mathématiques. Leurs auteurs souhaitent qu'elle soit reconnue. Les utilisateurs qui, le plus souvent, sont les collègues des auteurs, ne respectent malheureusement pas toujours les lois qui régissent le droit d'auteur.

L'usage en classe de problèmes « photocopillés » est très répandu, au point que les auteurs l'admettent parfois, comme dans la deuxième citation ci-dessus. Cependant, peu à peu, il pourrait se contrôler : il suffirait de noter le nom de l'auteur ou l'origine, comme on le fait déjà pour un poésie, une peinture... Chaque enseignant aurait alors son répertoire de problèmes qu'il pourrait proposer à ses élèves, en sachant d'où ils viennent et en le mentionnant. C'est une des règles les plus élémentaires de déontologie professionnelle.

L'usage plus généralisé de problèmes inédits, pour des examens, des tests, des concours, demande des règles un peu plus strictes, comme le rappelle Michel Criton dans Tangente (No 113, novembre – décembre 2006) sous le titre : *Compétitions mathématiques, respectons la propriété intellectuelle ! :*
La loi distingue les emprunts d'idées, qui sont acceptables, et les emprunts concernant la forme, qui constituent un délit assimilable à un vol. Recopier mot à mot un texte publié dans un ouvrage et l'utiliser sans l'accord de l'auteur et de l'éditeur est un délit réprimé par la loi. Certains « contributeurs » des compétitions mathématiques méconnaissent parfois ces principes simples, qui relèvent pourtant d'une honnêteté intellectuelle de base. Dans le dernier « Panoramath 4 », nous avons constaté que plusieurs compétitions ont « emprunté » des énoncés à Marie Berrondo-Agrell sans son accord et surtout sans que l'origine des textes ait été citée. ... (Suit une liste de 5 problèmes copiés, avec les sources et les numéros de page dans *Panoramath 4* permettant d'identifier les deux compétitions « pillardes ».
Le RMT s'efforce de respecter cette propriété intellectuelle, en notant scrupuleusement l'origine de chacun de ses problèmes (par la mention de la section qui en a proposé la première version). Nous ne sommes cependant pas à l'abri des copies abusives. À nos débuts en particulier, alors que nous étions moins vigilants, quelques-uns des problèmes du RMT avaient d'autres origines. Lorsque nous nous en rendons compte, nous rectifions, a posteriori, pour toute nouvelle publication.

L'usage de problèmes à caractère commercial est soumis à des règles plus précises : les lois nationales sur le droit d'auteur. Les éditeurs de revues, de livres de problèmes et de manuels scolaires doivent signaler leurs emprunts et demander les autorisations aux

auteurs, en général contre des redevances ou « royalties », attestées par les copyright (©) notés scrupuleusement en regard de chaque texte emprunté. Ces textes juridiques sont respectés en France et dans d'autres pays, à quelques exceptions près, comme dans l'exemple précédent de *Panoramath 4*[1].
En Suisse romande, en revanche, la propriété intellectuelle des auteurs de problèmes n'est pas encore reconnue, malgré la législation en vigueur[2] et des appels réguliers dans la presse[3]. On pourrait justifier ce retard sur les pays qui nous entourent par des considérations sur l'absence de concurrence, sur l'inexpérience ou la jeunesse relative des Editions scolaires romandes, sur leurs tirages relativement limités. Mais la raison principale réside dans la confusion entre le « problème » conçu dans une perspective d'apprentissage et le simple exercice d'application :
Les problèmes qui avaient été balayés par la réforme des « maths modernes » sont réapparus, sous une forme différente, dans la dernière génération des moyens d'enseignement romands. Ce ne sont plus des questions stéréotypées comme celles des fameuses baignoires qui se vident, des trains qui se croisent ... Ce sont maintenant des entrées dans des « situations », nécessairement inédites, qu'il s'agira de s'approprier avant de trouver une manière de s'en sortir à l'aide des moyens dont on dispose ; avec, à la clé, une progression dans la construction de nouvelles connaissances, un travail d'approfondissement, une consolidation de savoirs antérieurs, des validations, des institutionnalisations, ... Pour élaborer un nouveau problème, il ne suffit pas de modifier une donnée, par exemple le débit d'un robinet pour la catégorie « baignoires ». Il est nécessaire d'imaginer une situation, originale, d'envisager par le détail ce que pourront y faire les élèves, travailler et retravailler le texte, les variables, etc. Il s'agit d'un travail de création et non de reproduction.
Il y a sept à huit ans, à la suite du développement des concours de mathématiques, de nombreux problèmes du RMT ont fait naturellement leur apparition dans la nouvelle collection romande des moyens d'enseignement de mathématiques qui se place résolument dans une perspective constructiviste et fait largement appel à la résolution de problèmes. Les animateurs du RMT ont accepté volontiers qu'on utilise leurs problèmes mais ils auraient voulu que les sources soient citées. Il a fallu attendre la constitution « officielle » d'une Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT), avec inscription au Registre du Commerce et une intervention d'un avocat pour que la propriété intellectuelle du RMT soit reconnue, dès l'édition de *Mathématiques 5 et 6*.[4] Mais les demandes d'insertion des

1. Ce cas est un peu particulier car il s'agit d'un éditeur « collectif », le Comité International des Jeux Mathématiques, qui fait confiance à ses membres, des compétitions de mathématiques, qui, en principe, ne proposent que des problèmes de leur propre création. Le CIJM devra être plus vigilant à l'avenir pour éviter de telles mésaventures et d'éventuelles poursuites.
2. Extrait de la loi suisse sur le droit d'auteur (LDA. 9 ctobre 1992)
   Art. 2 Définition
   Par œuvre, quelles qu'en soient la valeur ou la destination, on entend toute création de l'esprit, littéraire ou artistique, qui a un caractère individuel.
   Sont notamment des créations de l'esprit:
   a. les œuvres recourant à la langue, qu'elles soient littéraires, scientifiques ou autres;
   b. les œuvres musicales et autres oeuvres acoustiques;
   c. les œuvres des beaux-arts, en particulier les peintures, ...
   d. les œuvres à contenu scientifique ou technique, tels que les dessins, les plans, les cartes ou les ouvrages sculptés ou modelés; ...
3. « Le droit d'auteur. Le violer, c'est voler ! Comme un roman, ou une chanson, articles et photos de presse sont l'œuvre d'un auteur. Les reproduire, les modifier, les altérer sans les citer, pour finalement les rendre publics, tout cela est interdit sans l'accord de l'ayant droit. Alors, prenez les devants avant de vous faire prendre : le site www.presseromande.ch vous dira comment procéder. » (Annonce parue récemment sur une page entière du quotidien romand Le temps, avec une photo d'un jeune homme devant l'ordinateur, le visage masqué d'un bas nylon, avec une légende : *Gérard, responsable du site internet, préparant son hold-up quotidien.*). Le type d'établissement n'est pas précisé et on ne sait pas si, par hasard, Gérard ne serait pas responsable du site d'un établissement scolaire.)
4. Un copyright « ©ARMT » figure en regard de chacun de ses problèmes et des redevances, très modestes, sont accordées en raison de la commercialisation des ouvrages et des bénéfices qu'en retirent l'éditeur et les auteurs.

copyrights « ©ARMT » dans les rééditions de *Mathématiques 3 et 4* ont été refusées. Pour les ouvrages *Mathématiques 7, 8, 9*, aucune autorisation de reproduction des problèmes du RMT, (ni de ceux, très nombreux, provenant d'autres sources) n'a été demandée à leurs auteurs et les démarches de l'ARMT pour reconnaître sa propriété intellectuelle n'ont pas abouti.

Les participants à la rencontre internationale de l'ARMT, en octobre 2005 à Arco di Trento, avaient bien tenté une dernière démarche : une lettre[5] aux responsables de l'édition des manuels romands *Mathématiques 7, 8, 9*, dont voici un large extrait :

« ...,

Le travail d'élaboration et d'analyse de problèmes occupe l'essentiel de notre temps et de nos réflexions. Chaque sujet, créé par des animateurs de l'une ou l'autre de nos sections, est accompagné d'une analyse minutieuse de son énoncé, de ses contenus mathématiques, des tâches de résolution et des évaluations des réponses attendues. Il passe ensuite par plusieurs phases de lecture dont la dernière est une consultation de l'ensemble des sections de notre association. Finalement, les traductions du problème dans les langues pratiquées par les classes inscrites sont contrôlées et leur mise en page dans nos épreuves est encore l'objet de vérifications minutieuses. Entre la première écriture d'un sujet par un auteur et la version définitive du problème présenté aux classes en confrontation internationale, il y a des centaines d'heures de relecture, de réflexions et d'échanges engageant une vingtaine d'équipes d'animateurs.

En ce qui concerne la diffusion de ses travaux, l'ARMT applique les règles en vigueur dans la communauté scientifique des chercheurs et enseignants de mathématiques. Nos textes et problèmes sont à disposition de tous ceux qui veulent exploiter ou développer dans le cadre de leur propre enseignement ou de leurs propres recherches, à condition que leur origine soit citée précisément et que nous en soyons informés. Pour des publications à caractère commercial comme des manuels scolaires ou des recueils de problèmes, l'ARMT demande des redevances modestes de 150 CHF par problème. Ces règles ne sont pas propres à la communauté des chercheurs et enseignants de mathématiques, elles sont appliquées plus généralement dans tous les autres domaines scientifiques ou artistiques. Ce sont des règles élémentaires de déontologie professionnelle. Elles sont aussi couvertes par le droit d'auteur dans toutes les juridictions de nos pays respectifs. Ceux qui ne les respectent pas le font certes en violation de leurs législations, mais surtout, au mépris de ceux dont ils copient les créations.

Les membres de l'ARMT tiennent à vous dire que c'est cette violation de leur propriété intellectuelle qui les affecte en priorité. Ils ont le sentiment très désagréable d'avoir été volés, par des auteurs et éditeurs qui, selon leurs statuts institutionnels, devraient agir en collégialité avec les enseignants ou chercheurs que nous sommes.

.... »

Le texte précédent décrit « de l'intérieur » le travail d'élaboration de « vrais » problèmes. Il définit clairement les conditions de leur reproduction et d'utilisation, conformément aux législations de nos pays sur les droits d'auteur et en accord avec ce qui se pratique dans la communauté des chercheurs et enseignants. Ces règles sont valables pour tous les problèmes, de toutes les sources, et non seulement pour ceux du RMT. Elles devraient peu à peu dissiper des confusions qui subsistent en Suisse romande où la situation s'améliore cependant :

- on trouvait des problèmes sans mention de leur origine jusque dans *Math-Ecole*, il y a une trentaine d'années ; ces omissions n'existent plus actuellement ;

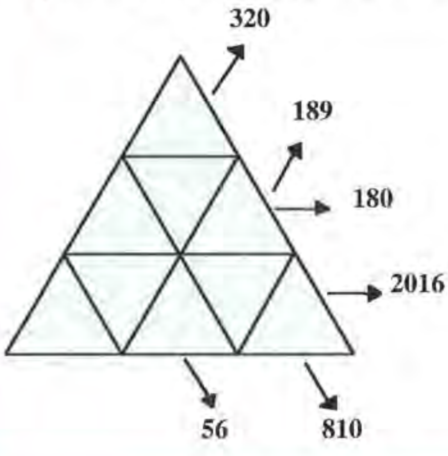
5. Lettre adressée au Président et au Secrétaire général de la CIIP SR+Ti (Conférence Intercantonale des directeurs de l'Instruction Publique de Suisse romande et du Tessin), avec la signature de tous les participants (environ 80) de toutes les sections présentes, à une exception près.

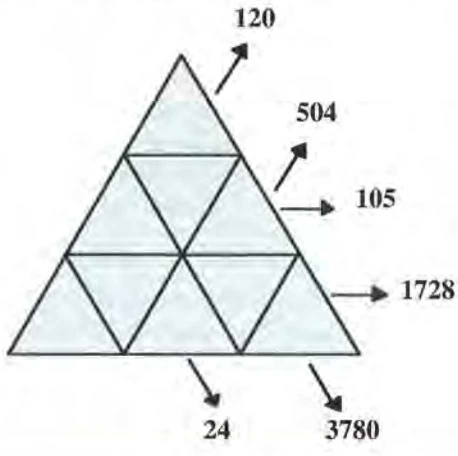
- de nombreuses épreuves cantonales dites « d'orientation », des épreuves communes locales, des concours régionaux ... ont souvent pillé ou plagié des sources de problèmes sans les citer; on espère que les références seront mentionnées de plus en plus fréquemment, comme le font désormais nos collègues du concours valaisan de la FFJM.
- les premières grilles de Sudoku parues dans un de nos journaux romands (Le Matin) ne citaient pas leur origine; cet oubli a vite été réparé, on ne trouve plus de Sudoku sans copyright (©), ce qui signifie que le journal s'est acquitté des droits en échange du travail de création de la grille.

Tous les enseignants de Suisse romande devraient respecter la propriété intellectuelle des auteurs de problèmes, comme ils le font généralement pour les textes littéraires ou les chansons qu'ils proposent à leurs élèves.
Tous les auteurs de publications plus larges, comme recueils de problèmes, compétitions, manuels, sites internet doivent aussi les respecter. S'ils ne le font pas, c'est en violation de nos lois et par mépris des « petits » qui n'ont pas les moyens financiers de les poursuivre juridiquement.
Peut-on imaginer qu'un auteur publie un recueil de problèmes piqués à gauche et à droite, y mette son propre copyright et encaisse ses droits d'auteurs, comme revenu du travail des autres ?

Ces triangles sont partagés en dix cases triangulaires, dans lesquelles vous devrez répartir les dix nombres naturels de 1 à 10, un par case. Pour chaque alignement de 5 cases ou de 3 cases (indiqués par les flèches) on a écrit un nombre, qui est le produit des nombres contenus dans les cases de l'alignement.

(Cette activité a de nombreuses variantes que les élèves peuvent construire eux-mêmes : il suffit de répartir les dix nombres, dans les cases, de calculer les produits de chaque alignement et de les noter, puis d'effacer les dix nombres de départ.)





À L'ÉCOLE DES PROBABILITÉS [1]

Bernard Courtebras.
Éd. Presses Universitaires de Franche-Comté, collection *« Didactiques »*.
280 pages en 16x22.
N° ISBN : 2-84867-110-6, © 2006.

« L'ouvrage de Bernard Courtebras, "À l'école des probabilités", *que j'ai l'honneur et le grand plaisir de préfacer, est unique à bien des égards. Il entend retracer l'histoire longue et tumultueuse de l'enseignement du calcul des probabilités en France ».*
Ainsi débute la préface donnée par Bernard Bru à ce livre de 280 pages que les Presses Universitaires de Franche-Comté viennent de publier avec le soutien de l'IREM de Besançon. Cet ouvrage révèle les étapes essentielles de la mise en place de l'enseignement des probabilités en France.

L'étude des premiers enseignements (fin XVIII[e] et XIX[e] siècles) montre que ceux-ci avaient pour but de permettre une utilisation pratique ainsi que la construction des dispositions critiques nécessaires à la constitution d'une société de citoyens scientifiquement éclairés, plus raisonnables dans leurs espérances et dans leurs craintes.
L'étude des formes scolaires d'enseignement des probabilités au XX[e] siècle fait apparaître que celles-ci ont, sous l'alibi pédagogique, déformé le savoir scientifique en le parcellisant et en l'organisant autour de la répétition d'exercices artificiels et stéréotypés.
La totalité des programmes d'enseignement des probabilités en France depuis 1942 est donnée en annexe. Ce livre intéressera particulièrement les sociologues et les historiens de l'éducation, les historiens des sciences et les professeurs de mathématiques.
L'introduction, en une dizaine de pages, situe bien les enjeux scientifiques et sociologiques actuels de l'enseignement des probabilités, en les confrontant aux ambitions des premiers créateurs et en les rapportant aux applications contemporaines, en tant que connaissances théoriques incontournables dans la pratique des outils de la statistique.

Le chapitre I donne le ton : *« Regard sur quelques tentatives de diffusion et d'enseignement du savoir probabiliste à la fin du XVIII[e] et au XIX[e] siècle, des savoirs statistique et probabiliste au début du XX[e] siècle : des expériences caractérisées par la prédominance du scientifique sur le pédagogique »*. L'auteur y propose deux analyses des contenus et de la forme de l'ouvrage de Condorcet et du cours de Lacroix, et donne un aperçu sur *« L'enseignement du calcul des probabilités dans le cadre des écoles de l'an III »*. Il enchaîne avec une étude de cet enseignement donné à l'École Polytechnique, puis à l'École Normale Supérieure et à la Faculté des Sciences de Paris de 1816 à 1870. Le chapitre I se termine par un *« Regard sur quelques-unes des étapes constitutives de l'enseignement des statistiques en France aux XIX[e] et XX[e] siècles »*.

Le chapitre II s'engage résolument dans l'étude sociologique : *« Regard sur quelques expériences de transmission des savoirs statistique et probabiliste dans l'enseignement secondaire au XX[e] siècle : des expériences caractérisées par leurs formes disciplinarisées, c'est-à-dire par la prédominance du pédagogique sur le scientifique »*. Il s'ouvre par une évocation de ces premiers enseignements, dès 1942 dans les terminales de Philosophie-Sciences, pour enchaîner avec une *« Évocation du projet d'introduction de la statistique et du calcul des probabilités dans* "l'enseignement moyen" *élaboré dans le cadre de la commission de réflexion sur la réforme de l'enseignement présidée par Paul Langevin*

1 [ndlr] Cette note de lecture a été publiée dans la revue *Repères*. Nous remercions M. Henry de nous avoir permis de la reprendre pour *Math-Ecole*.

en 1945», suivie du *«Recensement d'autres enseignements de statistique et de probabilités dans le secondaire à partir de 1951».* Bernard Courtebras tente à leur égard *«un essai d'analyses internes et externes combinant réflexions épistémologiques, historiques et sociologiques, des principales expériences et de leurs logiques»*, remarquablement documenté. Il étudie ensuite les contenus et les formes d'enseignements des probabilités et de la statistique mathématique de 1951 à 1972.

Un paragraphe critique, voire polémique mais très argumenté, nous projette ensuite dans des souvenirs encore vivants: *«Les effets de la domination de la production bourbakiste sur le développement et sur l'enseignement des statistiques et des probabilités dans la seconde moitié du XX^e siècle».*

L'ouvrage se termine par un recensement des enseignements de statistique et de probabilités dans le secondaire entre septembre 1981 et juin 2003», avec à nouveau un «essai» d'analyse épistémologique et sociologique des principales expériences et de leurs logiques, jusqu'à *«l'ère de la simulation et de la modélisation».* Ayant contribué au suivi de la thèse de Bernard Courtebras dont cet ouvrage est extrait, j'avais pu apprécier ses qualités de chercheur à qui aucun détail dans les données bibliographiques ne saurait échapper, mais aussi ses qualités d'exposition dans une langue riche et claire. Je ne saurais trop recommander la lecture de cet ouvrage de référence.

Destinataires: tous les maîtres du secondaire I et II intéressés par l'enseignement des probabilités, de son histoire et des obstacles didactiques qui y apparaissent

Mots-clés: mathématiques, probabilités, histoire, évaluation, formation

Michel Henry

RMT: DES PROBLÈMES À LA PRATIQUE DE LA CLASSE

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin de Bourg-en-Bresse (2004) et Arco di Trento (2005)[2]. (Vol 5) R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds). 2006 ARMT. IPRASE Trentino, IUFM de Lyon – Centre de Bourg-en-Bresse. Édition bilingue: français - italien, (236 p)

Après les Profits pour la didactique[3], *Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*[4]., *Potentialités pour la classe et la formation*[5], et *Évaluation*[6] le cinquième volume des actes des huitième et neuvième rencontres internationales poursuit les réflexions conduites maintenant depuis une bonne douzaine d'années et qui voit le Rallye mathématique transalpin toujours plus orienté vers une question fondamentale: audelà du plaisir et de la stimulation d'une confrontation, en quoi les problèmes de concours peuvent-ils être utiles à l'apprentissage ou à la construction de concepts mathématiques par les élèves?
Nous reprenons ici la présentation de cet ouvrage: « L'élaboration des problèmes de chaque épreuve du Rallye donne lieu à de longs échanges au sein des équipes responsables, puis entre les équipes participantes, dans l'espoir de choisir de «bons problèmes» et avec la volonté d'en trouver la meilleure

2 Rencontres de Bourg-en-Bresse et Arco di Trento. (Voir p. 3 de couverture)
3 Rencontres de Brigue, 1997 et 1999 (Voir p. 3 de couverture)
4 Rencontres de Siena, 1999, et Neuchâtel, 2000. (Voir p. 3 de couverture)
5 Rencontres de Parma, 2001, et Torre delle Stelle, 2002. (Voir p. 3 de couverture)
6 Mondorf-les-Bains, Luxembourg, 2004 (Voir p. 3 de couverture)

formulation possible. Les connaissances mathématiques en jeu, les stratégies de recherche possibles, l'habillage de la situation, puis la formulation du problème sont quelques-uns des aspects qui sous-tendent cette élaboration commune.

Les avis sont parfois concordants, mais peuvent aussi faire apparaître des divergences. La mise à l'épreuve des problèmes, c'est-à-dire leur traitement par les élèves, conforte ou dément les opinions initiales. En outre, certains problèmes peuvent être exploités en classe de manière féconde alors que d'autres sont plus difficilement exploitables.

Un des buts de l'ARMT (intégré explicitement dans ses statuts) est de... *promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques* ...Il s'inscrit dans une tendance plus générale et actuelle de l'enseignement des mathématiques : problem solving, situations-problèmes, problèmes ouverts ...

Il est cependant nécessaire d'aller au-delà des mots et des intentions pour en approfondir la signification. Les phrases « faire des mathématiques en résolvant des problèmes » et « promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques » mettent en relation directe les mots « problème » et « mathématiques » et peuvent faire croire à une inférence logique entre « résoudre des problèmes » et « faire, comprendre ou construire des mathématiques ».

Il faudrait plutôt dire : « en résolvant des problèmes, il est plus probable que l'élève construise des connaissances mathématiques qu'en regardant la TV » ou « une part des mathématiques s'est construite à partir de la résolution de problèmes ».
Les mots « problème » et « résolution de problème » ne sont pas des formules magiques qu'il suffit d'invoquer pour que s'opère la construction des notions mathématiques sous-jacentes. La théorie des situations didactiques l'explique largement : il y a un jeu subtil et complexe entre l'activité de l'élève en résolution de problème et l'élaboration de ses connaissances, régi par le milieu et orchestré par le maître.

Il devient donc important d'envisager les différentes modalités d'utilisation des problèmes du RMT en classe, en étant conscient que ces exploitations exigent, pour l'enseignant, une analyse épistémologique approfondie, une analyse des variables mathématiques en jeu et une analyse pertinente des variables pédagogiques. »

On a parlé de tout ceci dans le cadre des deux rencontres de Bourg-en-Bresse et d'Arco di Trento, la première intitulée : « Qu'est-ce qu'un bon problème, pour le Rallye mathématique transalpin », la seconde : « Les problèmes du RMT dans la pratique de la classe ».

Ces actes réunissent, dans leurs première et deuxième parties, les communications présentées lors des deux rencontres, alors que leur troisième partie est consacrée aux synthèses des travaux de groupe d'Arco di Trento, sur l'analyse des potentialités des problèmes du RMT pour la construction de concepts. Les concepts examinés par les groupes appartiennent aux domaines de la proportionnalité, de la mesure d'aire, des angles, des équations, des fonctions et de la combinatoire.

On trouvera la liste détaillée des contributions sur le site http://www.math-armt.org/

Destinataires : tous les maîtres, en particulier ceux des classes participant au RMT, formateurs et étudiants en didactique des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, résolution de problèmes, évaluation, formation

F.J.

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AU CYCLE 2

Deux situations
d'apprentissage en images
Muriel Fénichel et Catherine Taveau
S.C.E.R.E.N. CRDP Académie de Créteil[7]

Ce coffret multimédia, composé d'un DVD et d'un CD-ROM, est un outil illustrant la construction de deux séquences d'apprentissage en 1e et 2e année d'école primaire. La première, *Combien de bûchettes?* aborde la notion de groupement par dix dans la numération de position, la deuxième, *Le petit moulin* constitue une approche de la construction du cercle en 2e année.

Le CD-ROM donne un descriptif complet, détaillé et ordonné des deux séquences, elles-mêmes subdivisées en plusieurs phases ou séances: des analyses a priori avec la progression retenue, les fiches de préparation de l'enseignant avec le scénario prévu et le matériel, des productions d'élèves, des analyses a posteriori sur le déroulement de la séance, des réflexions théoriques et didactiques sur les contenus mathématiques abordés.
A lui seul, ce CD-ROM pourrait suffire pour rendre compte de chacune de ces deux séquences, de leur origine aux réflexions sur leur déroulement. On y perçoit une grande maîtrise des thèmes traités, aux niveaux mathématique, pédagogique et didactique. On y perçoit encore une excellente coopération entre les enseignants des deux classes observées et les formateurs (professeures d'IUFM).

Les phases filmées du DVD présentent les moments-clés du déroulement des séquences en classe: l'introduction par l'enseignant(e), les premières réactions des élèves, les interactions, les mises en commun... Elles sont complétées par un entretien postérieur, avec l'enseignant qui analyse les réactions de ses élèves et sa démarche pédagogique. Ce DVD pourrait aussi suffire pour à décrire le contenu des deux séquences proposées Mais ce qui fait l'intérêt de ce coffret multimédia est incontestablement la complémentarité de ses deux disques, le CD-ROM et le DVD; le premier du côté de la préparation et des analyses didactiques par le couple maître-formateur, le second du côté de l'histoire vécue ou de la manière dont les élèves « s'ingénient » à s'écarter du scénario prévu et où l'enseignant s'efforce de les ramener dans ses vues.

Un exemple, parmi d'autres, dans la séquence des bûchettes, extrait du CD-ROM:
Après plusieurs séances occupées aux groupements effectifs et avoir institutionnalisé les conventions, la classe arrive au passage clé : celui de la transformation des groupements effectués en un nombre :

...
On détermine le nombre de sachets (six), le nombre de paquets (huit) et le nombre de bûchettes isolées (neuf) en traduisant à chaque fois par le nombre de bûchettes correspondantes :

6 sachets de 100	*600*
8 paquets de 10	*80*
9 bûchettes isolées	*9*

7 Commandes par www.crdp.ac-creteil.fr
Référence 941 B2145 (30.- + port) ou par CRDP, 7 rue Roland Martin, F – 94500 Champigny-sur-Marne.

L'enseignante a demandé aux élèves d'essayer d'écrire le nombre total de bûchettes. Les élèves proposent d'écrire le signe + devant chaque nombre traduisant ainsi la reconnaissance d'un problème additif (réunion de collections).
Cinq élèves ont donné une réponse: 900, 689, 1 000, 23 et 1 002.
Seul Warren a produit la bonne réponse. On la justifie à l'aide du matériel.
...

La dernière phrase ci-dessus, tirée du CD-ROM est bien lapidaire lorsqu'on la compare à la séquence filmée correspondante. En réalité, d'après le DVD, Warren dit « 689 » comme si, pour lui, c'était évident au vu de connaissances qu'il possède déjà sur le système décimal; il ne manifeste pas les hésitations de celui qui serait en train de découvrir que « 6 sachets de 100 » se prononce « six cent » puis s'écrit « 600 » et qu'ensuite « 8 paquets de 10 » qu'on devrait prononcer « huit dix » mais qui se dit « quatre vingt » puis s'écrit « 80 »...
Cet exemple illustre l'obstacle « ontologique » de la numération de position, que les élèves ne peuvent évidemment pas franchir seuls. C'est donc à l'enseignante d'intervenir, avec sa sensibilité, ses compétences et son art. Elle est la seule parmi les acteurs de la séquence filmée, à avoir « entendu » Warren, elle en est même soulagée - car la tendance dominante parmi les élèves était plutôt orientée sur le « 23 » (6 + 8 + 9 objets) - et elle a aussitôt sauté sur cette proposition pour la valoriser et l'exploiter à ses fins d'institutionnalisation.
En résumé, cette présentation en deux volets complémentaires de séquences d'enseignement est à la fois un modèle de progression pour des enseignants en formation et une illustration de phénomènes mis en évidence par la recherche en didactique touchant à l'alternance des tâches entre maîtres et élèves dans les processus d'apprentissage.

Destinataires: tous les maîtres en formation initiale ou continue, professeurs en instituts de formation

Mots-clés: mathématiques, situations d'apprentissage, numération, constructions géométriques, formation des maîtres

PANORAMATH 4

PANORAMA 2006 DES COMPÉTITIONS MATHÉMATIQUES

Réalisé sous la direction de
Martine Clément et Michel Criton

Coédition CIJM, POLE,
ADIREM, APMEP.
192 pages (15 x 22).
POLE - CIJM, Paris 2006[8]

Après Panoramath 98, Panoramath 2, et Panoramath 3, voici une nouvelle publication des meilleurs problèmes de 28 compétitions francophones de mathématiques: internationales, nationales et régionales. Les sujets sont tirés des épreuves des années 2003 et 2004, suivis des solutions et de commentaires, précédés d'une fiche signalétique de chaque compétition.
On y retrouve des problèmes des concours les plus connus en Suisse comme ceux de la FFJM, de Mathématiques sans frontières, du Rallye mathématique transalpin. On y découvre ceux des rallyes et tournois départementaux d'Alsace, d'Auvergne, de Loire-

8 Commandes, voir p. 3 de couverture

Atlantique, du Limousin, ... ainsi que ceux de l'Olympiade belge, du concours ATSM de Tunisie, du Championnat du Niger, ...
9 de ces compétitions s'adressent déjà aux élèves du primaire, les autres débutent au niveau du collège ou du lycée. Les problèmes sont proposés individuellement, par équipes, par classes entières, sous forme de QCM, d'épreuves rédigées ou à réponse unique.
Les solutions sont données aussi, mais sans grands développements et sans suggestions didactiques; mais un recueil de 200 problèmes est toujours intéressant pour ceux qui veulent renouveler leur répertoire de questions.

Destinataires : maîtres, élèves et autres amateurs de problèmes de concours

Mots-clés: mathématiques, problèmes

FICHIER ÉVARISTE ÉCOLE

Nicole Toussaint, Jean Fromentin
Brochure APMEP 175. 2006[9]

Après les brochures « Évariste I et II » pour le collège, voici le petit frère, pour l'école primaire. Il s'agit de 60 problèmes du niveau Cycle 2 (degrés 2 et 3) et 120 problèmes de niveau Cycle 3, (degrés 4 et 5) tirés de différents tournois et rallyes mathématiques.
Les fiches-problèmes sont présentées par deux ou trois sur des feuilles au format A4, pour être photocopiées sur fiches cartonnées, puis découpées.
Au recto d'une fiche, on trouve le titre du problème, son énoncé, son origine, une indication du thème général et un numéro d'ordre.
En général, un petit dessin agrémente la présentation.

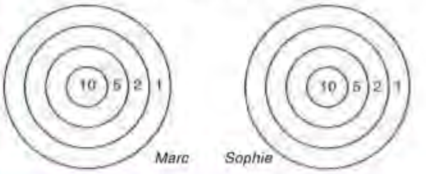
Le verso d'une fiche se compose de trois rubriques : la réponse, un ou plusieurs « coups de pouce » et des exploitations et prolongements possibles
Un document d'accompagnement, de huit pages, donne quelques informations pédagogiques et didactiques sur les raisons de proposer des « problèmes pour chercher » aux élèves, les buts de ce genre d'activité, les modalités de mise en oeuvre, en référence aux documents d'accompagnement des programmes français de l'école primaire sur la résolution de problèmes et apprentissage[10].

Y figurent encore une liste des compétitions auxquelles ont été empruntés les problèmes, (dont le Rallye mathématique romand), un index pat thèmes et un index par notions.

Exemple. Au recto de la fiche :

Robois des bains

Marc et Sophie jouent aux fléchettes. Marc a gagné 19 points et Sophie a gagné 27 points en lançant chacun 4 fléchettes.



Où Marc et Sophie ont-ils planté leurs fléchettes ?

Rallye mathématique des écoles des Ardennes 1996

9. Commandes à l'adresse de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) 26, rue Duméril, F- 75013 Paris. http://www.apmep.asso.fr (Brochure 175, 12€ + port)

10. Voir Document d'accompagnement MATHÉMATIQUES – ÉCOLE. Cet ouvrage peut être acquis ou consultés sur le site du CNDP de France, http://www.cndp.fr/doc_administration/programmes/primaire

Au verso de la fiche :

Réponse : *Marc : une fléchette dans le 10, une dans le 5 et deux dans le 2.*
Sophie : Deux dans le 10, une dans le 5 et une dans le 2.
Il n'y a pas d'autres possibilités pour obtenir ces scores.

Coups de pouce :
Décomposer 19 et 27 en sommes de quatre termes utilisant 10, 5, 2 et 1.

Exploitations et prolongements possibles :
1) Demander aux élèves de choisir un nombre de points compris entre 4 et 40 et d'essayer de l'obtenir avec exactement quatre fléchettes.
Après plusieurs recherches, ils se rendront compte que certains scores ne peuvent pas être obtenus de cette manière. D'où le deuxième problème plus difficile mais qui peut être utile pour les élèves les plus rapides :

2) Quels sont tous les scores qu'on ne peut pas obtenir avec exactement quatre fléchettes entre 4 et 40 ?

Réponse : 21, 25, 28, 29, 33, 34, 36, 37, 39 et 39.

(une fiche annexe propose 6 cibles à compléter)

Cet exemple montre que, par rapport à un simple énoncé de sujet de concours, une fiche de *ÉVARISTE École* va beaucoup plus loin, vers une exploitation pour la classe, dans la direction prise actuellement par le RMT qui cherche à exploiter ses problèmes à des fins d'apprentissage. En résumé, même si ses problèmes ne sont plus des inédits, le fichier *ÉVARISTE École* nous paraît être un excellent outil pour, comme le disent ses auteurs, *développer chez les élèves la passion pour les mathématiques*, et exploiter les activités de résolution de problème pour la construction de connaissances mathématiques.

Destinataires : maîtres, élèves et autres amateurs de problèmes de concours

Mots-clés : mathématiques, problèmes, école primaire

Les visiteurs du site http://www.math-ecole.ch trouveront prochainement, dans le numéro 218, la suite des notes de lecture précédentes, en particulier l'analyse d'un ouvrage qui intéressera tous les étudiants et formateurs de nos « Hautes écoles pédagogiques » :

Donner du sens aux mathématiques, de Muriel Fénichel et Nathalie Pfaff, chez Bordas Editeurs, Collection pédagogie.

Les lecteurs-visiteurs du site pourront aussi nous proposer leurs propres notes de lecture d'ouvrages susceptibles d'intéresser leurs collègues.

COMMANDES

❑ **Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s):**

Ouvrages encore disponibles, en soldes et en nombre limité pour certains, à la Boutique de Math-Ecole, voir aussi le site www.math-ecole.ch

Kangourou au pays des contes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Magie et Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (Tangente HS 10)	...	(ex à Fr. 20.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)
Points de départ (Numéro spécial Grand N)	...	(ex à Fr. 28.-)
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	...	(ex à Fr. 55.-)
Jeux 6 APMEP	...	(ex à Fr. 20.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 20.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 20.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Luxembourg, 03)	...	(ex à Fr. 15.-)
*Actes des rencontres internationales du RMT** (Bourg-en-Bresse 04, Arco di Trento 05)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 4,* CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)(POLE Editions)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)(POLE Editions)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)(POLE Editions)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)(POLE Editions)	...	(ex à Fr. 14.-)
Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)

* Nouveaux sur la liste

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....
Adresse (rue et numéro) : ....
Code postal et localité : .... Tél. : ....
Date : .... Signature : ....

Les frais de port sont pas inclus dans les prix indiqués pour les commandes d'un montant inférieur à 20.- CHF
Soldes !!
Des rabais de respectivement 25% et 40% seront accordés pour les commandes d'un montant supérieur à 50.- et 100.- CHF.

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel