MATH-ÉCOLE 212

Septembre 2004

Fractions et décimaux

12e Rallye mathématique transalpin: Finale

Commentaires sur les questions du *Kangourou des Mathématiques* 2004

MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 35.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 45.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 9.–
Anciens numéros : CHF 7.– /pièce de 190 à 205,
CHF 5.– de 150 à 189 (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 2 à 4 ex. CHF 33.– par abonnement
de 5 à 14 ex. CHF 28.– par abonnement
de 15 à 50 ex, CHF 24.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Imprimerie
Fiorina, rue du Scex 34
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Jérôme, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

212

Septembre 2004

ÉDITORIAL

À TOUTE VAPEUR

Michel Brêchet

L'évaluation a le vent en poupe. Conséquence directe : le temps où seule la voix des enseignants était entendue quant à la réussite globale des élèves s'éloigne à grands pas. Sur tous les fronts et à toutes échelles – romande, suisse, internationale – les regards extérieurs sur les compétences des élèves de la scolarité obligatoire se font au fil des jours plus perçants et plus incisifs. Au plan cantonal, il existe depuis longtemps, ici et là, des dossiers d'évaluation, des tests de fin d'année ainsi que des épreuves communes, d'orientation ou à visée certificative, qui fournissent de précieuses informations sur les savoirs des élèves. Autres indicateurs de choix : les concours individuels[1] ou par classe[2] , qui connaissent un large succès. Mais le renforcement de la coordination entre les diverses instances politiques en charge de l'éducation, le besoin grandissant d'harmonisation des résultats de l'apprentissage, les demandes des milieux économiques et de la formation ont conduit à la mise sur pied de plusieurs études comparatives, certaines en cours, d'autres en voie de réalisation. Ce vaste processus concerne pour l'instant quelques disciplines enseignées seulement. Les mathématiques, dont l'importance est unanimement reconnue, sont bien entendu sous la loupe des examinateurs.

En Suisse romande, l'enquête *Mathéval* bat son plein. Elle est née de l'introduction de la dernière génération des moyens d'enseignement, dès août 1997. Les résultats de la première phase, relative aux acquis en fin de 2e année primaire, ont fait l'objet d'une publication de l'IRDP (Institut de recherche et de documentation pédagogique)[3]. Elle montre que les écoliers romands ont de bonnes connaissances dans le domaine numérique et que leur réussite est moindre dans le domaine géométrique, sans pour autant être inquiétante. S'agissant des compétences transversales, la satisfaction est au rendez-vous en regard de la complexité des problèmes soumis aux élèves. Un point noir cependant : de grands écarts sont observés entre les élèves francophones et non francophones d'une part et entre les redoublants et non redoublants d'autre part. Le second volet de *Mathéval*, qui concerne les élèves de 4P, est en cours. Les résultats sont attendus dans le courant de l'année prochaine.

Les observations et analyses qui émanent de la première phase de cette importante enquête fournissent une image claire de ce que les élèves sont capables de faire au terme de la 2e année primaire, des stratégies qu'ils mobilisent pour résoudre tel problème, des difficultés qu'ils rencontrent, des erreurs qu'ils commettent. Elles constituent ainsi une référence – parmi d'autres – à laquelle tous les acteurs concernés par ce dossier peuvent faire appel : les enseignants de 2P pour évaluer les compétences mathématiques de leurs élèves, ceux de 3P pour avoir une meilleure perception des enjeux importants du travail réalisé au cours des premiers pas de la scolarité, les formateurs pour enrichir leurs cours et étayer leurs interventions, l'autorité enfin pour prendre – le cas échéant – les décisions qui s'imposent, par exemple ajuster les moyens d'enseignement et/ou les plans d'études en vigueur. Dans *Mathéval*, on l'aura compris, la transparence est de mise. Point de résultats confidentiels. Enoncés des problèmes, compétences individuelles et collectives, pratiques des enseignants, comparaisons des élèves et des classes... tout est accessible au public, aux enseignants en particulier qui bénéficient là d'un outil performant pour leur pratique quotidienne ou pour élargir leur culture pédagogique.

Au niveau suisse, la CDIP (Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique) pilote actuellement le projet *HarmoS*, dont un des enjeux consiste à déterminer très précisément, à l'échelle nationale,

1 FFJM

2 Mathématiques sans frontières, Rallye mathématique transalpin

2 Voir également à ce propos : J.-Ph. Antonietti « Apprendre les mathématiques sans parler l'espéranto », in *Math-Ecole* 208, pp 37–45 et « Notes de lecture » de *Math-Ecole* 209, p 62

des niveaux de compétence à atteindre au terme des 2e, 6e et 9e années, en mathématiques notamment. Il s'agit en fait, d'ici 2007, de compléter par des indications très précises les moyens d'enseignement et les plans d'études existants, les contenus des premiers étant non contraignants par nature, ceux des seconds pouvant parfois laisser libre cours à l'interprétation. Ces « standards nationaux de formation », concrétisés sous la forme d'exercices et de situations-problèmes, constitueront ainsi un cadre de référence pour le diagnostic et pour l'évaluation. Ils permettront de définir une échelle susceptible de situer les performances effectives des élèves, et donc d'évaluer l'efficacité des systèmes éducatifs suisses. Mais, a priori, ils pourraient aussi déboucher sur la création d'un certificat de fin de scolarité obligatoire, voire être utilisés pour évaluer les établissements scolaires, même si les responsables du projet excluent clairement cette fonction-là. Le projet *HarmoS* envisage encore la création d'instruments d'évaluation et d'autoévaluation, sous la forme d'épreuves validées traduisant les exigences essentielles à remplir, destinés aux enseignants, aux formateurs, aux élèves et aux parents. Cette étape primordiale apportera une transparence nécessaire et utile aux acteurs concernés. Malheureusement, les modalités de sa réalisation sont encore très floues. Toutes ces mesures devraient conduire, entre autres, à améliorer la qualité de l'enseignement, mais aussi à accroître de façon réaliste les compétences des élèves. Cette dernière perspective, on le devine, est loin d'être atteinte par avance. D'ailleurs, les expériences menées outre Atlantique depuis un certain nombre d'années montrent une stabilité des performances de base. Point d'élévation du niveau minimal donc.

A l'échelon international, *PISA* (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) a pour ambition d'évaluer, chez les élèves de 9e année, des compétences jugées essentielles par rapport à la capacité d'un individu à participer à la société moderne, plutôt que des contenus de matière portant uniquement sur des programmes scolaires. L'option centrale est donc d'examiner les atouts des jeunes pour entrer sur le marché du travail. Les tâches mathématiques de *PISA* supposent que les élèves aient assimilé les concepts fondamentaux, qu'ils soient capables d'effectuer des calculs simples, d'établir des liens et de procéder à un raisonnement mathématique dans un éventail de situations de la vie réelle. L'approche retenue est plutôt utilitariste qu'humaniste. En 2000, la compréhension de l'écrit a été traitée de manière plus approfondie que les mathématiques et les sciences, d'où une limitation de la finesse des analyses dans ces deux derniers domaines. En 2003, les mathématiques ont constitué la matière principale du test, qui a été complété avec bonheur par un volet centré sur la résolution de problèmes. Les premiers résultats de cette deuxième édition sont attendus, avec impatience, à la fin de cette année.

Les données obtenues par *PISA 2000* ont déjà été recensées dans de très nombreuses publications ou rapports thématiques, et cette exploitation se poursuit à l'heure actuelle. Pour l'instant, elles intéressent avant tout les responsables de la politique scolaire et les chercheurs. Les enseignants, en leur qualité première de pédagogues, sont à l'heure actuelle les parents pauvres de cette vaste opération. Ils ne peuvent être que déçus, voire frustrés, par le manque d'informations leur permettant d'agir concrètement dans la sphère de la classe. Les résultats selon les cantons romands, les filières, le genre des élèves, la langue parlée à la maison... sont certes instructifs, mais ils ne leur sont pas d'un grand secours. Ce ne sont que des indicateurs globaux et quantitatifs. Les exemples de questions du test *PISA 2000* mis à disposition du public sur le site **www.pisa.admin.ch** sont, eux, plus riches en enseignement. Ils permettent une meilleure représentation des attentes. Dans un proche avenir, il est souhaitable que des analyses détaillées des réponses des élèves – s'agissant par exemple des taux de réussite question par question, des procédures utilisées, ou encore des erreurs commises – soient accessibles aux enseignants, pour qu'ils puissent si nécessaire prendre des mesures pour optimiser leur pratique. A coup sûr, la formation des jeunes aurait tout à y gagner.

12e RMT, LA FINALE

1. LA FINALE DU 2 JUIN À BERNE

Pour la section de Suisse romande, la Finale du douzième rallye mathématique transalpin s'est déroulée le 2 juin 2004, à l'école cantonale de langue française (ECLF) de Berne. Cette année, 24 classes sont venues avec chacune deux accompagnants. L'invitée surprise, la pluie battante, s'est installée pour toute la journée. Cette finale s'est déroulée conformément à notre planification qui est toujours la même depuis de nombreuses années. Grâce à la ponctualité des classes participantes et à la disponibilité des accompagnants pour collaborer à la réussite de cette journée, tout s'est bien déroulé. Un message particulier pour les correcteurs qui ont dû accomplir leur tâche avec efficacité et célérité en 30 minutes.

Les remerciements vont également aux enseignants de l'ECLF pour leur participation active et tout particulièrement à Isabelle Torriani et Antoine Gaggero pour la planification de la journée. La remise des prix a eu lieu dans une ambiance du tonnerre à l'aula de l'école par la présidente de notre section de Suisse romande, Catherine Dupuis. Chaque élève a reçu un porte-CD. Une fois de plus, la mathématique était la gagnante de la journée.

Vers 16h30, la cérémonie protocolaire s'est terminée. Le rendez-vous est donné pour l'année prochaine.

Antoine Gaggero.

2. LES PROBLÈMES

Voici les 16 problèmes de la finale du 12e RMT, lus, adaptés, modifiés, relus, réadaptés, ... par une quinzaine d'équipes du RMT, sous la responsabilité particulière des animateurs des sections de Parma et Genova et avec l'appui des coordinateurs internationaux.

1. AU CINÉMA (Cat. 3)

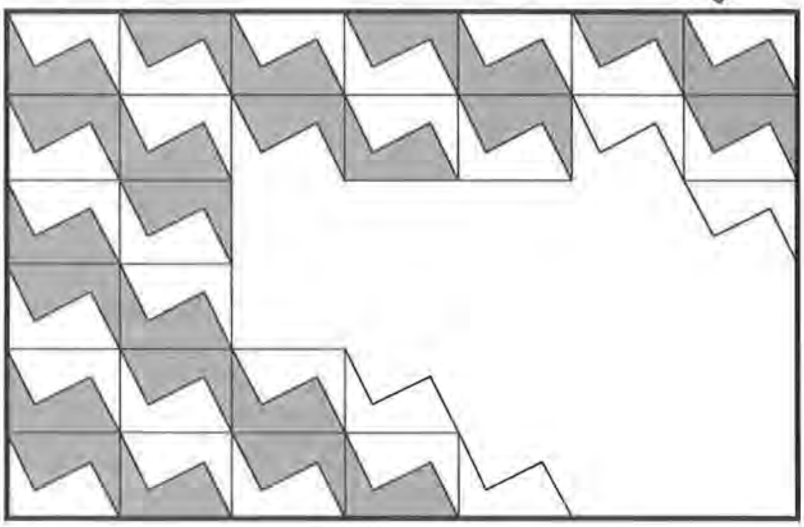
Quatre amies, Angèle, Danièle, Gabrielle et Lucie vont au cinéma et s'assoient l'une à côté de l'autre au même rang:
Angèle est à côté de Lucie,
Angèle est aussi à côté de Danièle,
Gabrielle n'est pas à côté de Lucie.

Comment les quatre amies peuvent-elles être assises? Notez vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

2. PAVAGE (Cat. 3, 4)

Combien manque-t-il de pièces blanches  **et de pièces grises**  **pour terminer le pavage de ce rectangle ?**

Indiquez le nombre de pièces blanches et le nombre de pièces grises qui manquent. Expliquez comment vous avez trouvé.



3. LES MARGUERITES (Cat. 3, 4)

En effeuillant une marguerite, Martine récite
la comptine suivante:

«Problème, beau problème
(et arrache le premier pétale)
je te résoudrai
(et arrache le deuxième pétale)
si je participe
(et arrache le troisième pétale)
au rallye transalpin»
(et arrache le quatrième pétale)
Puis elle recommence la comptine:
«Problème, beau problème
(et arrache le cinquième pétale)
...

Pour une marguerite de 10 pétales, la comptine s'arrête à ***«je te résoudrai».***
Avec une marguerite de 47 pétales, sur quelle partie de la comptine Martine s'arrêtera-t-elle?
Et pour un bouquet de marguerites avec 152 pétales en tout, où Martine s'arrêtera-t-elle?
Expliquez comment vous avez trouvé.

4. CHAUD - FROID (Cat. 3, 4, 5)

Julie pense à un nombre naturel plus petit que 50 et demande à ses amis de le deviner.
À chaque nombre proposé par ses amis, Julie répondra ainsi:
«froid» si la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie (ou entre le nombre de Julie et le nombre proposé) est plus grande que 5;
«tiède» si la différence entre les deux nombres est 3, 4, ou 5;
« chaud » si la différence entre les deux nombres est 1 ou 2.

- Sylvie dit 25 et Julie répond «froid».
- Antonio dit 16 et Julie répond «tiède».
- Cécile dit 21 et Julie répond «chaud».

À quel nombre Julie a-t-elle pensé?
Expliquez comment vous l'avez trouvé.

5. LES PATINEUSES (Cat. 3, 4, 5)

Dans un concours de patinage qui se déroule en cinq épreuves, quatre enfants ont obtenu les points indiqués par le tableau suivant:
L'entraîneuse remarque qu'en éliminant la note d'une épreuve pour chaque patineuse, toutes les

	Agnès	Blanche	Carine	Diane
1re épreuve	5	4	6	5
2e épreuve	1	5	4	7
3e épreuve	4	6	4	2
4e épreuve	2	3	3	4
5e épreuve	6	3	2	4

concurrentes obtiennent le même total de points.

Selon vous, quelle est la note à éliminer pour chaque patineuse pour qu'elles obtiennent toutes le même total de points?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

6. LES PETITS-ENFANTS D'ALICE (Cat. 4, 5)

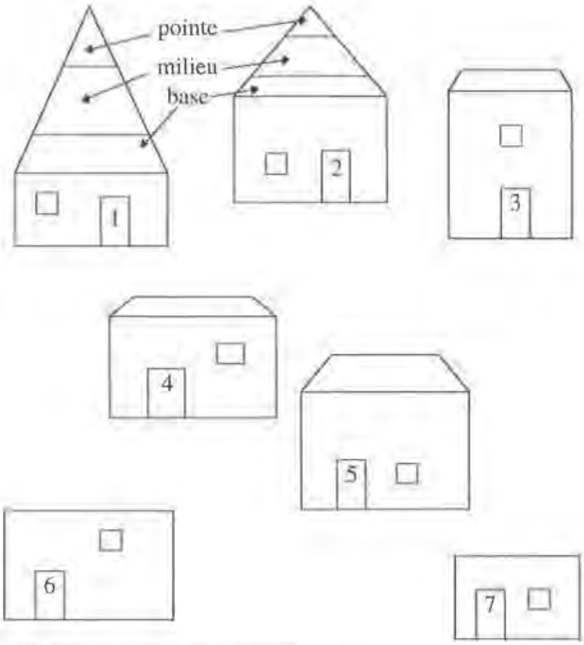
C'est samedi et grand-mère Alice attend ses petits-enfants. Elle a préparé 3 tartelettes au chocolat pour chacun d'eux.
Mais ... surprise ! Ses petits-enfants sont venus avec deux amis.
Pour qu'il n'y ait pas de jaloux, la grand-mère mange une des tartelettes et peut ainsi en donner 2 à chaque enfant.

Combien Grand-mère Alice a-t-elle de petits-enfants ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

7. LE VILLAGE DE BOIS (Cat. 4, 5)

Dany construit un village de 7 maisons avec des blocs d'un jeu de construction.
Les maisons sont toutes différentes, mais chacune a un toit en forme de triangle. Chaque toit est composé de trois parties : une pointe, une pièce de milieu, une base.
Dany a déjà construit entièrement les maisons 1 et 2. Pour les maisons 3, 4 et 5, il n'a placé que la base du toit.
Son petit frère a pris les autres pièces, il ne reste à Dany que les pointes des maisons 3, 4, 5, 6 et 7 :

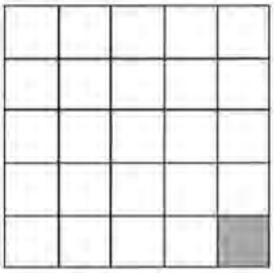
Quelle est la pointe de la maison 3 ? de la maison 4 ? de la maison 5 ?



Indiquez comment vous avez fait pour trouver ces pointes.

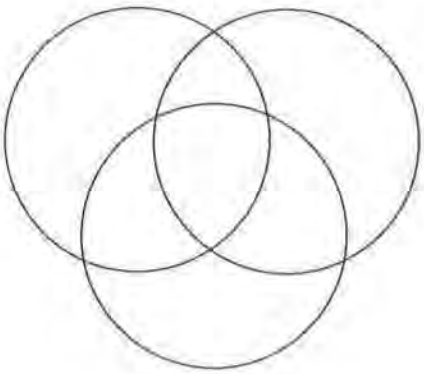
8. GRILLE INCOMPLÈTE (Cat. 5, 6)

Voici une grille quadrillée à laquelle on a enlevé une case dans un angle (marquée en gris).
On désire partager la figure ainsi obtenue en 6 parties composées de cases entières, qui ont toutes la même aire et la même forme.



Combien de formes différentes peut-on utiliser pour ce partage?
Expliquez comment vous les avez trouvées et dessinez, pour chaque forme, une façon de partager la figure.

9. NOMBRES DANS LES CERCLES (Cat. 5, 6, 7)



Placez dans chacune des sept «régions fermées» déterminées par ces trois cercles un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Cherchez une disposition où la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle est la même et la plus grande possible.
Cherchez aussi une disposition où la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle est toujours la même, mais la plus petite possible.
Montrez vos solutions et expliquez votre raisonnement.

10. LA VALISE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Le père d'André est toujours en voyage pour son travail. La valise qu'il utilise pour ses déplacements ne s'ouvre que s'il compose la combinaison de quatre chiffres du mécanisme d'ouverture, que lui seul connaît.
André, curieux, désire découvrir cette combinaison mystérieuse.
Son père lui donne alors les indications suivantes:

- le troisième chiffre à partir de la gauche est la somme des trois autres chiffres,
- le deuxième et le quatrième sont les seuls chiffres égaux de la combinaison,
- la somme de tous les chiffres est 12.

Les indications données permettent-elles d'ouvrir la valise avec certitude au premier essai?
Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

11. CHAUD - FROID (Cat. 6, 7, 8)

Julie pense à un nombre naturel, compris entre 0 et 100, elle demande à ses camarades de le deviner.
À chaque nombre proposé par ses amis, Julie donnera une des quatre réponses suivantes:
«Froid» si la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie (ou entre le nombre de Julie et le nombre proposé) est plus grande que 10.
«Tiède» si l'écart entre le nombre proposé et le nombre auquel elle a pensé est 6, 7, 8, 9 ou 10.
«Chaud» si l'écart entre le nombre proposé et le nombre auquel elle a pensé est 1, 2, 3, 4 ou 5.
«Gagné» si le nombre proposé est le nombre auquel elle a pensé.

- Sylvie propose 39, Julie répond «froid».
- Antoine propose 23, Julie répond «tiède».
- Sophie propose 27.
- Avant que Julie ne réponde, Antoine dit à Sophie : «tu as mal joué !».

Que pensez-vous de la remarque d'Antoine ?
Dites quelles sont les réponses que Sophie peut attendre à sa proposition «27» et dites aussi laquelle de ces réponses est la plus probable selon vous.

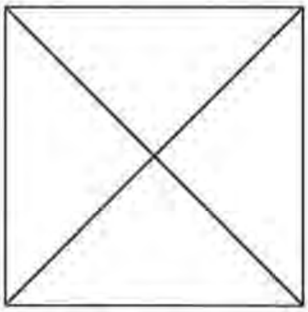
12. C'EST L'HEURE ! (Cat. 6, 7, 8)

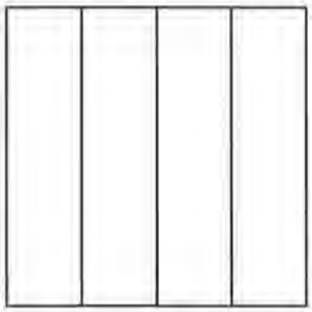
Jacques regarde l'heure affichée sur l'écran de son lecteur vidéo.
En additionnant les 4 chiffres il obtient 17.
En multipliant les 4 chiffres il obtient 90.

Quelle heure peut-il bien être ?
Expliquez votre raisonnement et notez toutes les réponses possibles.

13. PARTAGE DU CARRÉ (Cat. 6, 7, 8)

On a partagé le carré de gauche par deux segments, en quatre parties isométriques (superposables) : des triangles isocèles rectangles.





On a partagé le carré de droite par trois segments, mais aussi en quatre parties isométriques : des rectangles.
a) Y a-t-il d'autres manières de partager un carré par deux segments en quatre parties isométriques ? Comment ?
b) Y a-t-il d'autres manières de partager un carré par trois segments en quatre parties isométriques. Comment ?
Pour chaque manière découverte de partager le carré, dessinez un exemple, décrivez les parties obtenues, et indiquez combien il y a de solutions.

14. LES NOMBRES DE CLAIRE (CAT. 6, 7, 8)

Claire construit une suite de nombres : 96, 48, 24, 12, 6, ... en effectuant toujours la même opération pour passer d'un terme au suivant.

Lorsqu'elle écrit le huitième nombre de la suite, Claire se rend compte qu'il est inférieur à 1.

Combien de chiffres après la virgule aura le vingtième nombre de la suite de Claire ?
Quels seront ses quatre derniers chiffres ?
Expliquez comment vous avez procédé pour répondre à ces questions.

15. LA FAMILLE DUCHESNE (Cat. 7, 8)

Pour respecter une tradition de famille, Monsieur Duchesne plante un chêne à la naissance de chacun de ses enfants, selon les règles suivantes :

- chaque chêne doit être planté à 10 mètres de celui qui a été planté à la naissance de M. Duchesne ;
- les chênes des enfants doivent avoir, entre eux, une distance supérieure ou égale à 10 mètres.

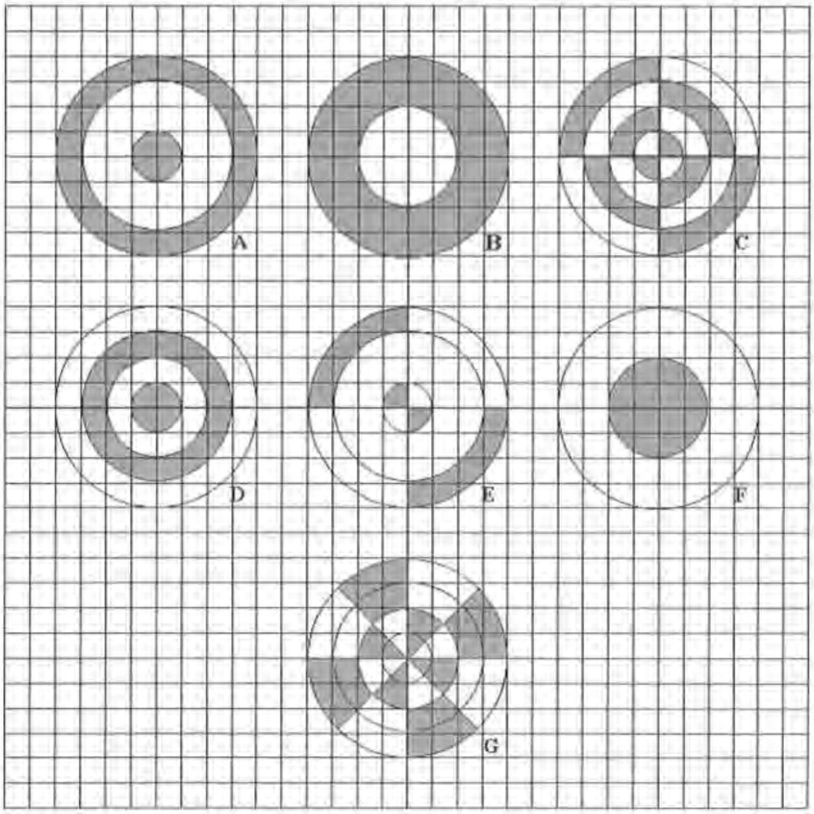
Après avoir planté, le dernier chêne, M. Duchesne se rend compte que, s'il a encore d'autres enfants, il ne pourra plus respecter ces règles.

Combien M. Duchesne peut-il avoir d'enfants aujourd'hui ?

Expliquez votre raisonnement et montrez comment M. Duchesne peut avoir planté ses chênes.

16. SUPERFICIES ÉQUIVALENTES (Cat. 8)

André a dessiné beaucoup de disques égaux et il en a colorié en gris quelques parties. Voilà ce qu'il a obtenu :



André observe que, parmi ces disques, certains ont une partie coloriée de même aire, même si la forme de ces parties coloriées n'est pas la même.

Trouvez les disques qui ont une partie coloriée de même aire, et indiquez à quelle fraction de l'aire du disque correspond l'aire de cette partie coloriée. Justifiez votre raisonnement.

3. QUELQUES RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Le tableau suivant donne les moyennes de points obtenus par problème, selon les six catégories d'âge, pour les classes ayant participé aux finales de 14 sections de l'ARMT (Belluno, Bourg-en-Bresse, Genova, Israel, Lodi, Luxembourg, Milano, Siena, Parma, Cagliari, Rozzano, Perugia, Riva del Garda, Suisse romande).
Le nombre de classe par catégorie est donné, entre parenthèses, dans la première colonne. (Chaque section accueille, pour sa finale, de 2 à 4, voire 5 classes par catégorie).
La dernière colonne donne la moyenne des moyennes par catégorie.
Les points attribués, selon un barème déterminé pour l'ensemble des sections, vont de 0 à 4.

4 points correspondent à une réponse juste, avec explications complètes,
3 points correspondent en général à une réponse correcte mais avec des explications laissant à désirer,
2 points vont aux réponses justes sans explications ou avec quelques petites erreurs ou oublis et explications,
1 point récompense l'entrée dans le problème et un début explicite de recherche, sans parvenir à une solution,
0 signifie l'incompréhension du problème ou une solution absolument fantaisiste.

Un problème qui obtient une moyenne proche de 2 peut ainsi être considéré comme de difficulté «normale», si la moyenne s'approche de 3, le problème est «facile» ou «bien réussi», les problèmes «difficiles» obtiennent des moyennes proches de 1.

Moyenne des points obtenus par problème, selon les catégories

Problème :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	m
Cat. 3 (37)	2,92	1,64	1,99	1,08	2,65												2,14
Cat. 4 (39)		2,31	2,67	1,79	2,92	2,36	1,62										2,28
Cat. 5 (43)				2,52	3,15	2,86	2,14	2,23	1,56	1,90							2,34
Cat. 6 (37)								2,60	2,14	2,05	0,88	2,55	0,81	1,26			1,75
Cat. 7 (38)									2,47	2,21	1,61	3,00	1,45	1,32	1,61		1,97
Cat. 8 (33)										2,33	1,76	3,15	1,85	1,70	1,97	2,45	2,22

La lecture de ce tableau est intéressante à plus d'un point de vue :

- Pour un même problème, la réussite moyenne augmente toujours avec la catégorie, c'est-à-dire avec l'âge des élèves. Ce phénomène, vérifié pour la finale, semble naturel, mais ne se produit pas toujours pour les épreuves I et II, où l'on constate souvent une régression au passage du primaire au secondaire, le plus souvent entre les catégories 5 et 6.
- La dernière colonne montre que l'épreuve est de «difficulté moyenne» en général, avec toutefois des différences sensibles. Par exemple, elle était nettement plus facile en catégorie 5 qu'en catégorie 6.
- Les problèmes les mieux réussis sont le 1, 3, 5, 6, 8, 12, 16 et les moins bien réussis sont le 4, en catégorie 3, le 11 en catégorie 6, le 13 et le 14 en catégories 6 et 7.

Mais, derrière l'homogénéité, toute relative, des moyennes, il peut y avoir une grande dispersion des résultats, qui apparaît dans le tableau détaillé des résultats par classe (non publié ici) et dans les commentaires qui suivent dans l'analyse spécifique de certains problèmes.

4. ANALYSE DE CERTAINS PROBLÈMES

PROBLÈME 1 : AU CINÉMA

Ce problème classique, à propos de relation d'ordre et de position dans l'espace est bien réussi. La grande majorité des classes a compris que Angèle doit être entre Lucie et Danièle, mais seulement un tiers se sont rendu compte qu'il y a deux dispositions symétriques de ces trois amies et l'ont bien expliqué. Les autres ont perdu 1 ou 2 points pour absence de la deuxième solution ou pour des explications insuffisantes. Exemple :
G D A L. Nous avons mis A en premier, puis L à côté et aussi D, et vu que G ne doit pas être à côté de L, elle est à côté de D.

PROBLÈME 2 : PAVAGE

Il s'agit ici du développement d'un ancien problème «Le trou» du 2e RMR (épreuve II) et aussi inspiré par le problème «Les remparts», de l'enquête *Matheval*. (J.-Ph. Antonietti et al. IRDP 2003). L'enjeu était d'approfondir l'analyse de cette dernière enquête avec un motif de pavé un peu plus complexe, selon l'analyse a priori suivante :

« -Pour dénombrer les pièces qui manquent, les élèves ont plusieurs méthodes à leur disposition :

- percevoir la trame rectangulaire et le motif en «diagonale» et compléter le dessin,
- ne compléter que la trame rectangulaire, remarquer que chaque rectangle est formé d'une pièce grise et d'une pièce blanche et compter,
- Calculer le nombre total de rectangles, 6 x 7 = 42, en déduire qu'il y aura 42 pièces de chaque sorte, et calculer la différence pour chaque sorte : blancs 42 - 27 = 15, gris 42 - 24 = 18, (procédure évoluée, par passage dans le registre numérique),
- Compléter la trame rectangulaire et constater que les 14 rectangles vides se remplissent par 14 pièces grises et 14 blanches ; noter qu'il reste 5 rectangles avec une seule pièce : dans l'un il manque la pièce blanche (14 + 1 = 15) et dans les quatre autres la pièce grise (14 + 4 = 18).
- Effectuer un comptage par lignes horizontales, ou verticales, ou selon les motifs, sans dessin (procédure délicate).»

Le problème s'est révélé encore difficile en catégorie 3, malgré les conditions de passation supposées favorables : travail par groupe, classes finalistes, haute motivation (l'enquête Mathéval concernait des élèves de 2e année, travaillant individuellement). La réponse «18 grises et 14 blanches» est fréquente, ainsi que «15 et 15» ou «14 et 14». La procédure qui s'est révélée la plus sûre est le dessin et le comptage par numérotation des pavés.
Ces problèmes de pavage donnent des idées intéressantes d'activités qui vont au-delà de la simple manipulation ou du dessin pour intégrer une reconnaissance consciente de régularités exigée par la demande numérique de dénombrement.

PROBLÈME 3 : LES MARQUERITES

Lors de l'analyse a priori, on avait espéré que certains groupes verraient le lien entre ce problème et les multiples de 4 ou encore une division par 4 avec reste. Mais c'était compter sans la patience aveugle de la plupart des élèves qui n'ont pas hésité à écrire ou réciter les 152 premiers versets de la comptine (en les abrégeant souvent) et à les numéroter.
Certains, plus nombreux en 4 qu'en 3e sont ainsi arrivés aux réponses justes, mais plus de la moitié n'ont pu maîtriser le synchronisme de la récitation et du comptage jusqu'au bout. S'ils ont effectivement effeuillé la marguerite, ces élèves n'ont en revanche pas fait de mathématiques de haut niveau à cette occasion.

PROBLÈME 4 : CHAUD – FROID (Version I)

Nous sommes ici dans les domaines de l'arithmétique élémentaire (soustraction et addition de nombres naturels inférieurs à 50) et de la logique, teintée d'ensemblisme (conjonction ou «intersection», négation ou «complémentaire»).

L'analyse de la tâche prévoyait :

« -Comprendre que chaque condition permet de reconnaître les nombres possibles de ceux qui sont à éliminer :
  le 25 «froid» admet les nombres inférieurs à 20 et supérieurs à 30 et élimine donc les nombres de 20 à 30,
  le 16 «tiède» admet les nombres 11, 12, 13 et 19, 20, 21 et élimine les autres,
  le 21 «chaud» admet les nombres 19, 20 et 22, 23, et le nombre 19 se révèle l'unique possibilité.
- Ou : comprendre que la condition « 21 chaud » permet de limiter à quatre les nombres possibles (19, 20, 22, 23), pour les examiner un à un et déterminer lequel satisfait les premières conditions.»

C'est la première règle, à propos de «froid» qui a posé le plus de difficultés, car plusieurs groupes n'ont pas compris la consigne et ont traduit «... la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie ... *est plus grande que 5*» par «est 5» pour aboutir à la réponse «20» qui vérifie les deux autres règles. Une classe a compris la consigne «est plus grande que 5» par «est 6», semble-t-il, et est arrivée à la réponse juste «19» : ... *la première information disait qu'il y avait une différence au moins de 5 nombres entre le nombre de Julie à partir de 25 et donc que le nombre devait être au minimum 19 ou 30. La deuxième information disait que la différence entre 16 et le nombre de Julie était 3, 4 ou 5, ainsi 30 ne pouvait être le nombre et le nombre restant était 19. ...*

La maîtrise simultanée des trois conditions et une bonne lecture de la règle du jeu ne sont pas maîtrisées en catégorie 3 (moyenne 1,08, avec de nombreuses incompréhensions du problème). Le progrès est sensible, mais insuffisant encore pour la catégorie 4 (1,79). Ce n'est qu'à partir de la cinquième année (moyenne 2,52) que la majorité des groupes ont résolu le problème, avec toutefois encore des difficultés à expliquer leur raisonnement. Des difficultés apparaissent encore plus tard, comme nous le verrons à l'analyse du problème 11, version plus complexe de ce problème.

PROBLÈME 6 : LES PETITS-ENFANTS D'ALICE

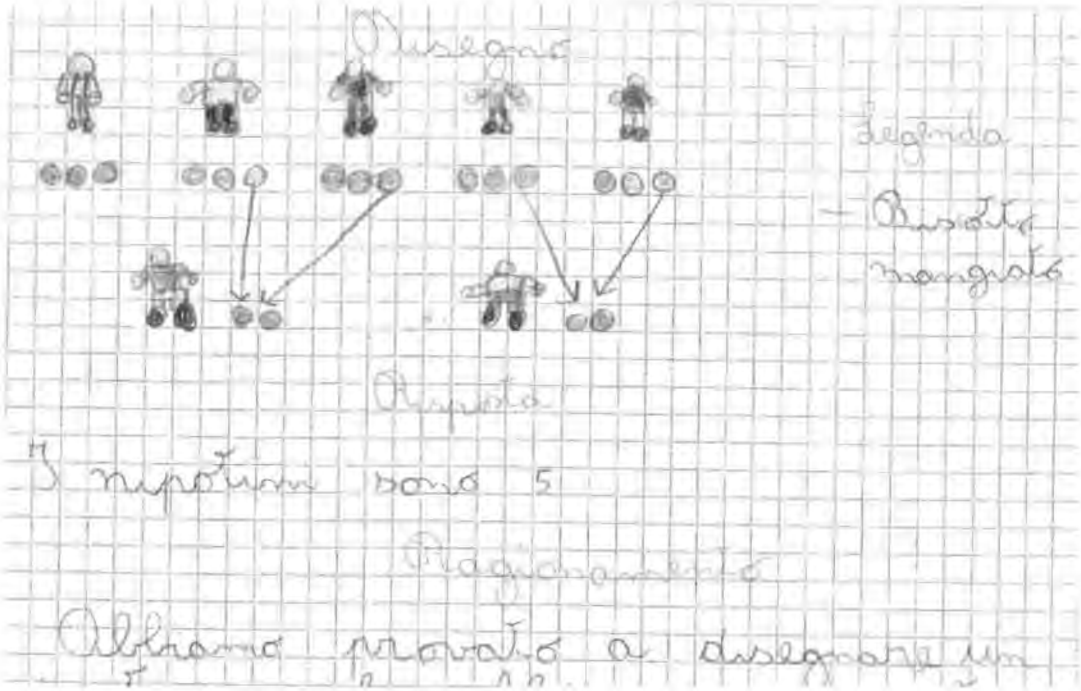
Un adulte résoudrait ce problème par une équation au cas où ses connaissances algébriques seraient encore mobilisables. Pour des élèves de 4e et 5e, il est évident qu'il faut trouver une autre approche. L'analyse a priori du problème décrivait la tâche ainsi :

« -Comprendre que le nombre de tartelettes préparées est multiple de 3.
- Comprendre que le nombre de tartelettes distribuées est un multiple de 2.
- Faire des hypothèses successives, éventuellement organisées en tableau :

petits-enfants	tartelettes préparées	tartelettes qui restent	petits-enfants + 2	tartelettes nécessaires	
2	6	5	4	8	manque 3
3	9	8	5	10	manque 2
4	12	11	6	12	manque 1
5	15	14	7	14	solution juste
6	18	17	8	16	1 en trop
7	21	20	9	18	2 en trop

- Ou, comprendre que la grand-mère retire une tartelette à chacun de ses petits-enfants et donc que le nombre de tartelettes qu'elle distribue aux deux autres enfants plus celle qu'elle mange elle-même, c'est-à-dire 5, est égal au nombre de ses petits-enfants.»

Toutes ces procédures prévues figurent dans les copies examinées, y compris l'organisation en tableau. Par exemple, la dernière d'entre elles, ci-dessus, nous a été donnée, mais de manière beaucoup plus claire, par une classe de 4e, de Cagliari :



Nous avons commencé par dessiner un petit-enfant et lui avons attribué 3 tartelettes. Puis nous avons enlevé celle que la grand-mère a mangée. Nous avons ajouté d'autres enfant pour arriver à 5 petits-enfants. De 4 petits-enfants (4, parce qu'on avait déjà retiré une tartelette à l'un d'eux) nous avons retiré une tartelette et ainsi nous avons récupéré 4 tartelettes. Comme il y a 2 amis, nous avons dessiné 2 tartelettes pour chaque ami et avons trouvé la solution.

D'autres procédures que celles qui sont mentionnées dans l'analyse a priori ont vraisemblablement été mises en œuvre, dont celles des recherches où l'on «tombe» sur la solution par hasard. Il est cependant difficile de les reconnaître car elles sont dissimulées sous des «explications» qui ne sont en réalité que des justifications de la réponse, du genre :

Nous avons fait comme ceci :
15 : 5 = 3 (tartelettes pour chaque enfant)
15 – 1 = 14
(la tartelette de la grand-mère en moins)
14 : 7 (+ les deux amis) = 2 (tartelettes pour chacun)
Donc les petits-enfants sont 5 plus les deux amis, en tout il y a 7 enfants.

Pour les cas de ce genre, les «3 points» du barème d'attribution des points étaient bien généreux :

« 4 Réponse correcte (5) avec explications claires et détaillées
3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou seulement avec vérification ou réponse 7 avec raisonnement correct mais confusion entre nombre d'enfants et nombre de «petits-enfants»
2 Réponse correcte sans explications ou réponse fausse due à une erreur de calcul, mais avec procédure correcte et bien illustrée
1 Début de recherche
0 Incompréhension du problème»

Dans un cas de ce genre, si le problème est repris en classe, il serait opportun de choisir des valeurs plus élevées de la variable didactique «nombre de tartelettes» (par exemple 7 et 6 au lieu de 3 et 2) afin de valoriser les procédures avec une stratégie bien explicite et de montrer les limites d'une recherche par essais non organisés.
La réussite à ce problème est moyenne à bonne (2,36 en 4e et 2,86 en 5e) et les points se répartissent largement sur l'échelle de 0 à 4, de la manière suivante pour les 82 copies examinée: 39 «4», 16 «3», 5 «2», 6 «1» et 18 «0».

PROBLÈME 7: LE VILLAGE DE BOIS

Le concept d'angle est bien délicat à introduire dans l'enseignement. La majorité des manuels ou dictionnaires de mathématiques destinés aux élèves des niveaux 6 à 8, voire au-delà, renoncent, par prudence[1] à donner une définition de l'angle et se contentent de présenter des exemples. Il y a plusieurs années que le RMT cherche et construit des problèmes où le concept d'angle est présent mais où l'énoncé n'en parle pas explicitement (alors que la grande majorité des problèmes des manuels demandent de comparer des angles, de reporter des angles, de mesurer des angles, de calculer des sommes ou différences d'angles, etc.), comme, dans l'épreuve I du 13e RMT, le problème «Balle au rebond»[2], ou «Tarte Tatin», de l'épreuve I du 9e RMT:
«Martine a fait une tarte ronde pour le goûter. Ses copains ont déjà mangé chacun leur part. Le morceau qui reste est pour elle.

Combien de copains Martine a-t-elle invités?
(Bien sûr, toutes les tranches de tarte étaient égales!)
Comment avez-vous fait pour trouver votre réponse?»

Le problème du «Village de bois», comme tous les autres problèmes avec l'intention de faire émerger le concept d'angle à ce stade encore intuitif, peut se résoudre par simple manipulation (découpages, reports...). Beaucoup de classes ont procédé ainsi. On peut aussi, vu que tous les triangles isocèles proposés ont leur base horizontale, comme celles de la première partie du toit des maisons, contrôler seulement le parallélisme des côtés obliques. On peut encore, comme l'ont fait plusieurs classes, prolonger les côtés non parallèles des bases des toits (trapèzes) pour pouvoir y insérer les pointes par report. Il y a aussi quelques classes qui ont utilisé le rapporteur. Pour chacune de ces procédures, il faut toutefois que les dessins, reports ou découpages soient précis car les mesures des angles aux sommets des différents toits proposés ne diffèrent parfois que par 5 degrés. Une moitié des classes s'est engagée dans des mesures de la longueur des bases ou n'a pas trouvé de stratégie efficace. Vu la diversité des procédures relevées, on peut être assuré que ce problème, repris en classe par l'ensemble des élèves, doit conduire à des échanges intéressants pour l'approche du concept d'angle et pour juger de la précision des mesures ou reports.

PROBLÈME 9: NOMBRES DANS LES CERCLES

La première phrase de l'énoncé parlant de sept *«régions fermées» déterminées par ces trois cercles* a manifestement été mal été

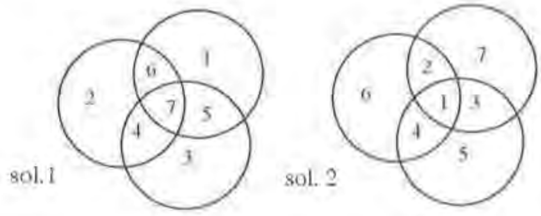
1 La définition de «partie du plan limitée par deux demi-droites de même origine» ignore en général «l'autre» angle défini par les deux mêmes demi-droites et est déjà prise en défaut lorsqu'on veut parler de la somme des angles d'un polygone à plus de quatre côtés! Les définitions vectorielles ou s'appuyant sur des rotations demandent des connaissances trop ambitieuses pour l'âge des élèves.

2 Voir Math-Ecole 210, p. 44

comprise par les 27 classes qui se sont vues attribuer «0 point» (incompréhension du problème). Il aurait été plus simple de placer 7 cases vides dans les cercles et de demander d'y disposer les nombres de 1 à 7. Certains y avaient pensé, mais on a préféré maintenir une touche de «topologie» dans le domaine des connaissances requises pour la résolution, d'autant plus que le problème était destiné à des classes finalistes de catégories 5 et 6, censées être capables de savoir ou de deviner ce que peuvent être les «régions fermées» délimitées par les cercles.

Pour les classes qui ont pu surmonter cette tâche de lecture, les recherches ont été dans l'ensemble fructueuses et correspondent parfaitement aux démarches proposées par l'analyse a priori :

« -Se rendre compte que chaque cercle entoure quatre des sept régions.
- Comprendre que, pour obtenir la somme maximale, il faut placer le nombre le plus grand (7) dans l'intersection des trois cercles, puis, successivement 4, 5, 6 dans les régions communes à deux cercles et terminer le placement pour que la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle soit la même (19).
- Procéder par analogie pour la somme minimale (13).
- Ou, procéder par essais et ajustements successifs jusqu'à trouver les combinaisons :



Ce problème peut être enrichi ou développé en classe par la recherche de toutes les solutions où la somme des nombres est la même dans chaque cercle, sans être la plus grande ni la plus petite.

PROBLÈME 11 : CHAUD – FROID (Version II)

Par rapport à la version I, destinée aux catégories 3, 4 et 5, cette version proposée aux catégories supérieures se distingue par des nombres un peu plus grands, mais surtout par une remarque critique donnée par Antoine sur la proposition de Sophie. On passe ainsi à un second degré : celui d'une réflexion sur une réponse. C'était trop ambitieux pour des élèves de 6^e (moyenne de 0,88) et encore assez difficile en 7^e et 8^e (moyennes 1,61 et 1,76).

Pour y arriver, il fallait, par exemple, suivre la démarche décrite dans l'analyse de la tâche :

« -À chaque proposition, il faut déterminer les nombres encore possibles et ceux qui sont à éliminer :
le 39 «froid» élimine les nombres de 29 à 49 et conserve les nombres de 0 à 28 et ceux de 50 à 100,
le 23 «tiède» élimine les nombres de 0 à 12, de 18 à 28 et de 34 à 100 et autorise ceux de 13 à 17 et de 29 à 33,
ne restent alors en lice que les cinq nombres 13, 14, 15, 16 et 17,
le 27 ne peut par conséquent provoquer la réponse «gagné».
- Dresser l'inventaire des réponses pour chaque possibilité du nombre pensé :
17 : réponse «tiède» (différence 10), 1 cas sur 5 ;
16, 15, 14, 13 : réponse «froid» (différences 11, 12, 13, 14), 4 cas sur 5.
- Exprimer qu'il est plus probable que la réponse «froid» soit donnée puisqu'elle peut intervenir 4 fois sur les 5 possibilités restantes pour le nombre pensé.»

Mais, même si les résultats globaux sont faibles, de nombreuses copies montrent que des séquences partielles du raisonnement ont été conduites avec rigueur, comme celle-ci, d'une classe de 6^e année (de Rozzano), où ne manque que la partie «probabiliste» de la démarche :

... Les nombres qu'on pouvait attendre étaient 13, 14, 15, 16, 17 et le plus probable était le 15. Nous les avons trouvés en faisant 39 moins tous les nombres inférieurs à 50 et

si le résultat était plus grand que 10 ça allait bien. Puis nous avons fait 23 moins tous les nombres et avons laissé de côté tous ceux qui nous donnaient une différence 6, 7, 8, 9 ou 10. Les nombres possibles étaient ceux qui restaient.

PROBLÈME 13: PARTAGE DU CARRE

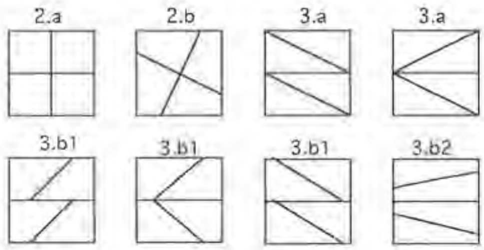
Voici un extrait de l'analyse a priori de ce problème:

«Domaine de connaissances

- Géométrie: figures, propriétés des isométries
- Approche de l'infini

Analyse de la tâche

- Découvrir les cas les plus évidents: les deux exemples et le cas du découpage en 4 carrés par deux segments médiatrices des côtés (fig. 2.a), en 4 triangles par une médiatrice et deux diagonales des rectangles (fig. 3.a).
- Après quelques essais, comprendre que, dans le cas de deux segments, ceux-ci doivent passer par le centre du carré et être perpendiculaires, pour des raisons d'isométrie; dans le cas de trois segments, l'un doit être sur l'une des médiatrices, les autres doivent partager chacun des deux rectangles en deux parties égales.
- Découvrir que, pour le cas de deux segments, ceux-ci ne sont pas forcément sur les diagonales ou sur les médiatrices, mais que deux segments perpendiculaires, passant par le centre, non parallèles aux côtés forment quatre quadrilatères, et que ces quadrilatères sont isométriques (images les uns des autres par rotation d'un quart de tour autour du centre du carré). (fig. 2.b)
- Se rendre compte qu'on a «autant de solutions que l'on veut» ou «une infinité» dans ce dernier type de partage, correspondant à toutes les positions possibles d'un segment passant par le centre et dont une extrémité décrit un quart du périmètre du carré.
- Dans le cas de trois segments, constater que le premier doit obligatoirement diviser le carré en deux figures ayant un centre de symétrie - c'est-à-dire deux rectangles - et que les autres segments doivent passer par le centre de symétrie des rectangles. Ici aussi, se rendre compte qu'on a une infinité de possibilités de déplacer le deuxième segment en le faisant tourner autour du centre de symétrie du rectangle. (Le troisième se construit par symétrie axiale ou centrale dans le deuxième rectangle).
- Énoncer les résultats:
  Avec 2 segments: 1 solution donnant 4 triangles (exemple), 1 solution donnant 4 carrés (fig. 2.a), et une infinité donnant 4 quadrilatères dont deux angles opposés sont droits (fig. 2.b).
  Avec 3 segments: 1 solution donnant 4 rectangles (exemple), 1 solution donnant 4 triangles rectangles (fig. 3.a) et une infinité de solutions donnant quatre trapèzes rectangles qu'on pourrait encore subdiviser en deux catégories, de hauteur 1/2 (fig. 3.b1) ou de hauteur 1 (fig. 3.b2).



Le RMT cherche à proposer des problèmes qui sortent de l'ordinaire, pour ses finales en particulier. *Le Partage du carré* est «original» sur deux points: il tente une ouverture vers le thème de l'infinité de solutions pour certains partages et il fait appel aux isométries sans les nommer. Dans les moyens d'enseignement traditionnels et dans les programmes officiels, on n'utilise pas volontiers le terme «infini» à ce stade de la scolarité et, en ce qui concerne les isométries, on se limite à des tâches explicites de construction, de reconnaissance, de composition, sur des «bonnes» figures, bien reconnaissables.

Dans le cas de deux segments, peu de classes ont trouvé le découpage en 4 quadrilatères non carrés et parmi celles-ci, une grande partie s'est limitée à un seul cas où les extrémités des segments sont exactement au quart des côtés (fig. 2.b). Plus généralement, les élèves n'ont pas trouvé d'autres partages qu'avec des segments horizontaux, verticaux ou suivant des diagonales de rectangles.
Le problème a obtenu une moyenne très faible en catégorie 6 (0,81) et encore basse pour les catégories 7 et 8 (1,45 et 1,85). La question est de savoir si c'est dû à une difficulté excessive ou à des pratiques d'enseignement où la créativité n'est pas au programme.

PROBLÈME 14: LES NOMBRES DE CLAIRE

Voici l'analyse de la tâche, faite a priori:
« -Comprendre que la suite de Claire s'obtient en divisant chaque terme par 2.
- Procéder de manière systématique, par exemple en écrivant les termes de la suite en colonnes pour observer l'évolution des parties décimales.
- Se rendre compte qu'à un certain moment dans la recherche des termes (selon le modèle de calculatrice utilisée), les décimales ne sont plus toutes affichées et qu'il est nécessaire d'effectuer les calculs à la main ou d'analyser les séquences des décimales des termes précédents.
- Se rendre compte que les deux derniers chiffres, à partir du huitième terme, sont toujours 7 et 5; que le troisième chiffre depuis la fin est alternativement: 3 ou 8; que le quatrième chiffre depuis la fin suit la séquence 1, 9, 6, 4.
- Se rendre compte, enfin, selon les régularités observées, que les quatre derniers chiffres du vingtième terme sont "6, 8, 7, 5".
- Se rendre compte que, à partir du septième terme, chacun des suivants a une décimale de plus et que, par conséquent, le vingtième terme a 14 chiffres après la virgule.»

Toutes les classes dont les copies ont été examinées ont compris qu'il s'agissait de diviser par 2 pour passer d'un nombre au suivant et ont écrit la suite des 20 nombres.
Mais, au-delà, c'est la débâcle totale pour 70 à 90 % des classes, selon le degré.
Voici la réponse type obtenue:
Le 20e nombre a 7 décimales et se termine par ... 1831:

1) 96,
...
6) 3
7) 1,5
8) 0,75
9) 0,375
10) 0,1875
11) 0,09375
12) 0,046875
13) 0,0234375
14) 0,0117187
15) 0,0058593
...
19) 0,0003662
20) 0,000**1831**

De quoi rédiger une chronique nécrologique du genre: «La famille et les amis de Mme La Disme, ont le douloureux devoir de vous annoncer la disparition de son 8e descendant, après une longue agonie due à un usage répété et non réfléchi de la calculatrice, muni des sacrements de l'industrie électronique...».
Il est bien évident que cette réponse-type varie selon le type de calculatrice utilisée. Deux classes disposant d'instruments très puissants sont arrivés à 13 chiffres après la virgule, ce qui signifie que, dans quelques années, tous les élèves donneront une réponse exacte à ce problème dans sa version actuelle.
Lors de l'élaboration de l'énoncé, une première idée était d'aller jusqu'au centième nombre de la suite. Elle n'a pas été retenue pour permettre aux élèves qui savent encore effectuer des divisions par 2 à la main de vérifier leur réponse. Mais l'idée sera reprise désormais et la question des décimales fera l'objet d'autres problèmes des futures éditions du RMT.

Remarques générales

Les analyses présentées ici vont être poursuivies sur l'ensemble des problèmes et à partir de toutes les copies qui n'ont pas encore été examinées, en particulier lors de la *Finale des finales* du 12e RMT (finale virtuelle consistant en une nouvelle attribution des points aux copies des classes gagnantes de chaque finale régionale, par un même jury) qui se déroulera en octobre à Bourg-en-Bresse, lors de la prochaine rencontre internationale sur le RMT.
Ces premiers résultats, cependant, montrent déjà tout l'intérêt d'une analyse des réponses d'élèves de provenances diverses à des problèmes communs. Dans son éditorial de ce numéro, Michel Brêchet fait allusion aux «grandes» enquêtes officielles gouvernementales, qui aboutissent à des classements, mais génèrent un sentiment de frustration chez les maîtres, qui n'obtiennent pas de résultats leur permettant d'agir dans leur classe. Le RMT, apporte, lui, à une échelle plus modeste et à moindres frais, des éléments concrets et pratiques qui peuvent répondre aux souhaits exprimés en fin d'éditorial. Il suffit parfois de reprendre un de ses problèmes en classe et de voir apparaître les mêmes obstacles pour ouvrir un débat collectif, pour proposer des variantes de l'activité, pour se sensibiliser aux lacunes que masquent des procédures routinières et des maîtrises superficielles de connaissances importantes.

Analyses et commentaires de François Jaquet

Nouveauté à la Boutique de Math-Ecole

Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans
POLE Éditions

Il y a peu de recueils de problèmes qui s'adressent à de jeunes lecteurs, comme il y a peu de concours de mathématiques pour les élèves des premiers degrés de l'école primaire. La FFJM a ouvert, ces dernières années, son concours aux classes du degré moyen, le RMT a une catégorie pour les classes de 3e. On atteint là les degrés «limite» pour une lecture autonome, permettant aux enfants de s'approprier seuls le problème.
Après le succès des annales de problèmes de la FFJM (*52/ 50/ 7x7 Enigmes pour l'école/faciles/pour tous/ pour lycéens*) les Éditions POLE ont relevé le défi en étendant leur collection aux «moins de 10 ans».
Ce recueil d'énigmes mathématiques s'adresse en particulier aux élèves de 3e année primaire. Il se lit comme un petit roman d'aventures fantastiques.
Quatre jeunes héros sont confrontés au fil des pages à toutes sortes d'énigmes dont la résolution va leur permettre de découvrir cinq mondes magiques. Des solutions en fin de volume permettent de vérifier le résultat et le raisonnement.
Activités numériques, manipulations et combinaisons, activités géométriques, logique et méthode : tel est le programme de ce livre dont les énigmes conduiront les jeunes lecteurs à faire le tour de tous les modes de raisonnement mathématique susceptibles d'être rencontrés au début de leur scolarité.

Il n'y a plus qu'à espérer que les jeunes enfants puissent entrer dans ce parcours avec la plus grande autonomie possible. Certaines fois, les parents ou le maître devront certes donner un coup de pouce, mais il a semblé aux responsables de la Boutique de *Math-Ecole* que le défi peut-être relevé. (Commandes en page 3 de couverture)

EVALUATION : NOMBRES CROISÉS

Michel Brêchet

De nombreuses situations mathématiques exigent des élèves un degré d'engagement élevé. Parmi elles, les « nombres croisés » occupent une place de choix. En effet, pour traiter avec succès l'information à disposition et en conséquence compléter – même partiellement – une grille donnée, il faut mobiliser des opérations intellectuelles comme l'anticipation, l'analyse, la déduction et la synthèse, dont l'importance a toujours été relevée par les plans d'études, en particulier par le PECARO[1], dans les *Capacités transversales* et dans le domaine de formation *Mathématiques et sciences de la nature* notamment. Les «nombres croisés» constituent ainsi un beau sujet pour évaluer ces compétences fondamentales, même si cette tâche n'est pas aisée. Souvent, dans un compte rendu rédigé par un élève, leur mise en œuvre n'apparaît pas explicitement. Pour l'enseignant, il s'agit alors si possible de les mettre à jour, à partir de l'examen d'une démarche écrite ou d'un résultat, tout en ne perdant pas de vue que seul un entretien individuel avec l'élève permettrait d'identifier avec certitude son cheminement intellectuel. Dans une telle pratique d'évaluation, la tentative d'établir une photographie des capacités des élèves à se «dépatouiller» dans une situation complexe prime sur la logique des contrôles de connaissances bien précises, même si ceux-ci restent incontournables. La cohérence entre les situations d'apprentissage quotidiennes, les objectifs prioritaires des plans d'études et l'évaluation est dès lors renforcée.

1 Le PECARO (plan d'études cadre romand) est actuellement en consultation en Suisse romande.

2 Dans le canton du Jura, un troisième niveau regroupe les 25 % des élèves ayant le plus de difficultés en mathématiques.

Un « nombres croisés »... bien ficelé !

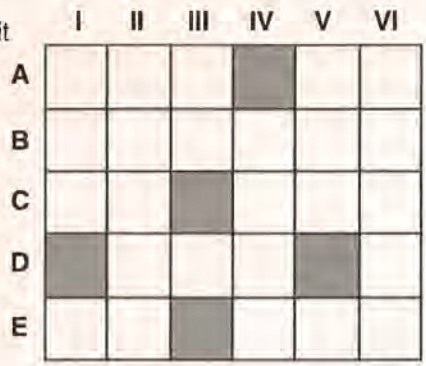
Au début janvier 2004, une quarantaine d'élèves jurassiens de 7e année, niveaux A et B[2], ont tenté individuellement de compléter la grille présentée ci-après. Ils avaient déjà été confrontés à trois ou quatre situations de ce type (notamment à celles du domaine *Nombres et opérations* des moyens d'enseignement romand *Mathématiques 7-8-9*), chacune d'elles ayant été suivie d'une comparaison des diverses méthodes susceptibles de conduire au succès. En outre, les élève avaient été invités à noter systématiquement les nombres pouvant

Horizontalement

A. Puissance de 3 – Carré d'un nombre premier
B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres
C. Multiple commun de 2 et de 3 – La somme de ses chiffres est 5
D. Carré parfait
E. Diviseur de 64 – Le produit de ses chiffres est un cube parfait

Verticalement

I. Multiple de 25
II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent)
III. Produit de deux nombres impairs consécutifs
IV. Cube parfait
V. Nombre premier
VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs



Note : Aucun nombre ne commence par zéro.

correspondre à chaque définition donnée. Le terrain avait donc été débroussaillé et la surprise n'était pas au rendez-vous. Sans ce travail préalable, le vocabulaire et la méthodologie auraient certainement constitués des écueils de taille pour bon nombre d'entre eux.

Pour accomplir leur tâche (voir la page précédente), les élèves avaient 45 minutes à disposition. Ils ont utilisé plusieurs grilles pour leurs essais, leur calculatrice de poche et l'*Aide-mémoire* de la collection susmentionnée.
D'autre part, les critères d'évaluation leur ont été communiqués.

Remarque : Pour une perception optimale des enjeux liés à la résolution de ce « nombres croisés », il est préférable que le lecteur l'examine dans un premier temps sans aide extérieure, et identifie par exemple les obstacles à franchir ou les indices permettant une progression rapide. La lecture de la solution et l'analyse des travaux des élèves en seront d'autant plus limpides.

Solution

Voici un cheminement parmi d'autres qui mène au but :

A_1. Seuls $3^5 = 243$ et $3^6 = 729$ peuvent convenir.

I. Quatre possibilités à ce stade : 225, 275, 725 et 775.

C_1. Son premier chiffre étant 5, le nombre cherché est 54.

II. Un seul nombre possible en regard de ce qui précède : 23456. (Cette définition mériterait d'être améliorée, car elle ne contient pas l'information selon laquelle les chiffres doivent former une suite croissante ou décroissante. Ainsi, par exemple, on pourrait admettre que le nombre 24365 est formé de chiffres consécutifs. Aucun élève n'a toutefois adopté ce point de vue.)

III. Son premier chiffre étant 9, le deuxième est 9 également ($99 = 9 \cdot 11$).

La définition **B** conduisant à connaître les deux derniers chiffres du nombre en question, la situation est dès lors la suivante :

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9			
B		3	9		3	9
C	5	4				
D		5				
E		6				

D. Deux choix : $23^2 = 529$ ou $24^2 = 576$.

IV. Son premier chiffre est 2 ou 7 (voir **I**) et son troisième est 6 ou 9 (voir **D**). En conséquence, ce nombre est $13^3 = 2197$.

E_1. 16 est le seul diviseur de 64 qui se termine par 6.

On en arrive à :

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9			
B	2	3	9	2	3	9
C	5	4		1		
D		5	2	9		
E	1	6		7		

A_2. $25 = 5^2$ et $49 = 7^2$ conviennent. Mais selon **VI**, on peut éliminer 49.

V. 233 et 239 sont des nombres premiers, mais la définition **C_2** conduit à conserver 233.

C_2. C'est 131, car $1 + 3 + 1 = 5$

E_2. Le nombre cherché est 777 ($7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$) qui est un cube parfait. Il n'y a pas d'autres possibilités.

Finalement, l'unique solution est :

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9		2	5
B	2	3	9	2	3	9
C	5	4		1	3	1
D		5	2	9		3
E	1	6		7	7	7

Ce «nombres croisés» a été créé de sorte que sa résolution nécessite, à maintes reprises, la formulation de conjectures et la prise en compte simultanée de plusieurs définitions. Dans la délicate optique d'évaluer des compétences liées à la démarche scientifique, il était important d'éviter que des élèves puissent accéder à la solution sans un réel engagement, par exemple en identifiant une «entrée» privilégiée et en progressant ensuite pas à pas selon un cheminement évident. Cette situation est donc intentionnellement complexe, du moins pour des élèves de 7e année. Avec le recul, elle convient bien pour des classes de niveau A (40 % des élèves). Aux élèves ayant plus de difficultés, il serait préférable de la soumettre au cours du degré 8, voire du degré 9.

Compétences en jeu

Elles sont nombreuses et il serait vain de vouloir toutes les décrire. En voici quelques-unes :

- *Gérer simultanément plusieurs paramètres, déduire une information d'une autre* : pour progresser, il faut plus d'une fois tenir compte de deux définitions ou plus. Par exemple : $\mathbf{A_1} = 243 \Rightarrow \mathbf{I} = 225$ ou $275 \Rightarrow \mathbf{C} = 54$. D'où l'impossibilité de trouver un nombre satisfaisant à l'énoncé **II**, car il comprendrait le chiffre 4 en première et troisième position. La gestion simultanée de plusieurs informations est souvent source d'une surcharge de la mémoire de travail. En conséquence, sans un minimum de rigueur et d'organisation dans leur démarche et leurs notations, beaucoup d'élèves seront rapidement perdus dans cette jungle de chiffres enchevêtrés.
- *Chercher des indices pertinents* : certaines définitions conduisent à un petit nombre de possibilités ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{E_1}$...), alors que d'autres sont inexploitables dans un premier temps (**II**, $\mathbf{C_2}$, **VI**...). Malgré tout, quelques élèves débutent par le traitement de l'une de ces dernières, ce qui les mène rapidement dans une impasse, tant les cas à étudier sont nombreux. Mais encore faut-il qu'ils s'en rendent compte et qu'ils ajustent leur méthode !
- *Envisager tous les nombres pouvant répondre à une définition donnée* : $\mathbf{A_1}$ peut être 243 ou 729, $\mathbf{A_2}$ peut être 25 ou 49... Bien des élèves se contentent trop rapidement d'un seul nombre répondant à une définition donnée, et ceci avec un haut degré de certitude : «243 est une puissance de trois, donc $\mathbf{A_1} = 243$, j'en suis sûr !» Comme si à chaque question, il n'y avait qu'une seule réponse possible !
- *Faire des essais «pour voir», effectuer des conjectures, les écrire dans les grilles à disposition ou sous forme de liste, adapter des essais successifs* : à plusieurs stades, on est dans l'incertitude et seules quelques tentatives permettent de s'en sortir. Par exemple, que se passe-t-il si $\mathbf{A_1} = 243$? Ou si $\mathbf{A_1} = 729$? Ou si $\mathbf{A_1} = 243$ et $\mathbf{I} = 225$? La gestion de l'incertitude pose de grandes difficultés à certains élèves, qui n'écrivent que ce dont ils sont sûrs. D'où de rapides blocages dans ce type d'activité. Il arrive par exemple que des élèves trouvent les deux puissances de 3 à trois chiffres (243 et 729), et ne s'appuient pas sur ces deux résultats pour progresser, car ils ne savent pas lequel des deux convient !
- *Distinguer les résultats certains des autres* : tous les résultats intermédiaires trouvés n'ont pas le même statut. A un moment donné, il s'agit de prendre du recul par rapport au travail effectué, notamment pour différencier les résultats justes des autres, hypothétiques.
- *Connaître la terminologie usuelle, ou utiliser adéquatement l'aide-mémoire* : une puissance de trois (3^n) n'est pas un cube parfait (n^3), un produit de deux nombres impairs consécutifs n'est pas forcément un nombre formé de deux chiffres impairs consécutifs. L'apprentissage et la compréhension de la langue mathématique sont bien difficiles ! Cette dernière compétence étant liée à la communication de données, elle ne s'inscrit donc pas dans le même registre que les précédentes, qui relèvent de démarches de pensée.

Evaluation de trois travaux d'élèves de 7e

L'enseignant pourrait être tenté de retracer le plus fidèlement possible le(s) parcours suivi(s) par chaque élève. Mais cette entreprise, aussi louable soit-elle, montre assez vite ses limites. Si certaines étapes sont relativement transparentes, d'autres restent obscures à la lecture des grilles. La (les) méthodes(s) utilisée(s) sont ainsi la plupart du temps enrobée(s) d'un voile translucide et seuls des entretiens personnalisés permettraient à l'enseignant d'y voir tout à fait clair. Ce constat étant posé, voici un scénario pour évaluer les travaux d'élèves :

- 1 point par définition traitée exhaustivement (score maximal : 14 points) ;
- 1/2 point par définition traitée partiellement (par exemple, selon la situation, si l'élève n'a pris en compte qu'une partie de l'ensemble des nombres pouvant convenir) ;
- 0 point par définition non traitée. →

Une telle approche incite fortement les élèves à écrire les résultats de leurs recherches, dans les grilles à disposition ou sous forme de listes. Elle valorise ainsi davantage un processus – le cheminement suivi et les démarches mises en œuvre – qu'un produit fini – la grille complétée. Mais elle contraint l'enseignant à s'interroger sur les procédures des élèves, avec toutes les incertitudes que cela engendre, d'où une de ses faiblesses. Faut-il pour autant renoncer à évaluer de la sorte et se contenter par exemple d'attribuer 1 point par nombre trouvé, sans autre questionnement ? Le débat est ouvert et les réactions sont les bienvenues. Une dernière chose. L'évaluation proposée ici paraît à première vue très gourmande en temps. En réalité, il faut compter une dizaine de minutes pour chacun des trois ou quatre premiers travaux. En raison des similarités qui apparaissent, la correction des suivants est plus rapide. Pour une classe de 20 élèves, deux heures suffisent généralement.

Travail 1

	I	II	III	IV	V	VI
A	~~7~~	~~2~~	5	■	1	1
B	2	3	7	2	3	7
erreur C	5	4	■	1	1	
D	■	5	2	9	■	7
E	1	6	■	7		9

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	6	1
B	2	3	7		0	9
erreur C	5	4	■		1	3
D	■	5	7	6	■	7
E	1	6	■			5

	I	II	III	IV	V	VI
A		2		■	1	6
B		3				
erreur C		4	■			
D	■	5			■	
E	1	6	■			

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	1	
B	2	3	7	2	3	7
C		4	■		1	
D	■	5			■	
E	1	6	■			

A. Puissance de 3 : *1/2 point*, car 243 n'a pas été testé.
Carré d'un nombre premier : *0 point*.

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *1 point, pour la compréhension et la prise en compte de la définition.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1 point, car 54 est le seul nombre satisfaisant aux conditions de l'énoncé et dont le chiffre des dizaines est 5. Au passage, on remarquera* *ici une des limites de cette façon de corriger. L'élève pourrait très bien écrire successivement le nombre 729 (A_1), un multiple de 25 (**I**) et le nombre 23456 (**II**). Il obtiendrait ainsi le nombre 54 en C_1. Mais s'interrogera-t-il sur la validité de ce résultat ? Si oui, le point est mérité, si non...*

La somme de ses chiffres est 5 : *0 point.*

D. Carré parfait : *1 point, pour l'examen des nombres 529 et 576.*

E. Diviseur de 64 : *1 point, car 16 est le seul diviseur de 64 dont le chiffre des unités est 6. Là encore, le point est attribué sur la base de l'hypothèse selon laquelle l'élève avait écrit auparavant le nombre 23456 (**II**). Mais ce n'est pas certain. Il aurait pu commencer par la définition **E**, sans envisager les nombres 32 et 64.*

Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1/2 point, car 175 et 775 n'ont pas été testés.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *0 point.*

IV. Cube parfait : *1 point, avec 2 comme premier chiffre (selon **I**) et 6 ou 9 comme troisième chiffre (selon **D**), il n'y a que 2197.*

V. Nombre premier : *1/2 point, il y en a d'autres à examiner.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient donc 8,5 points sur 14.

Travail 2

A. Puissance de 3 : *1 point, pour avoir examiné les incidences de 243 et 729.*

Carré d'un nombre premier : *0 point.*

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *0 point.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1/2 point, car 52 n'est pas juste... mais cette correction est un peu sévère !*

La somme de ses chiffres est 5 : *1/2 point, 131 est bien la réponse correcte, mais avec 1 comme chiffre des centaines (voir **IV**), 113 convient également. L'élève méritait peut-être ici 1 point, notamment s'il avait supposé que le nombre **B** se termine par 3.*

D. Carré parfait : *0 point. Il y a ici confusion avec une puissance de 2.*

E. Diviseur de 64 : *1/2 point, car 10 ne convient pas.*
Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1 point, pour avoir testé deux possibilités.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *0 point.*

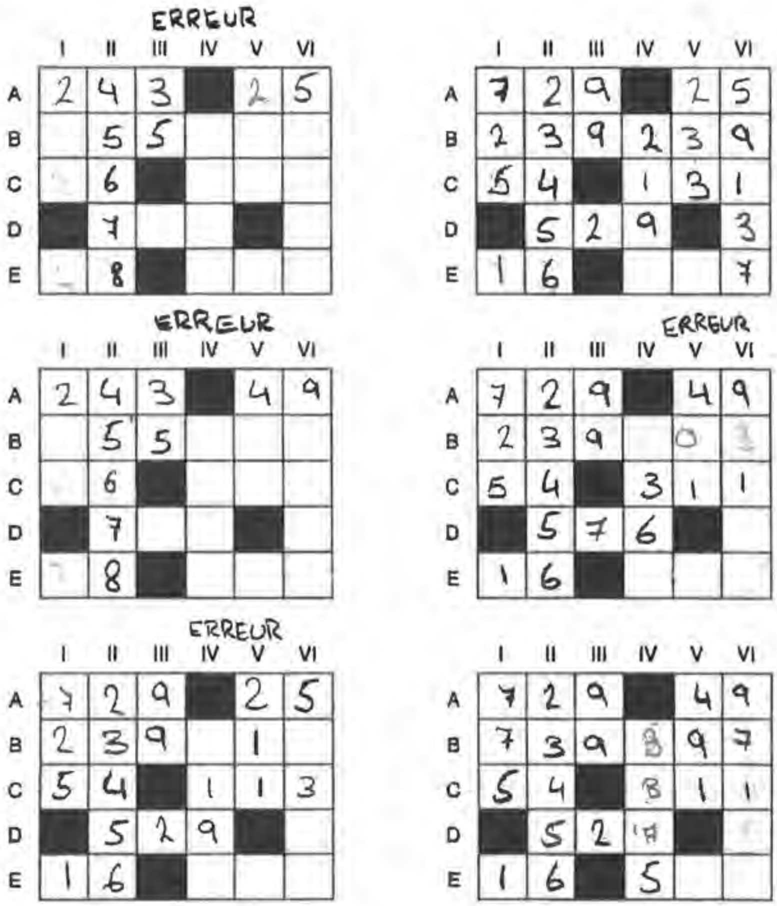
IV. Cube parfait : *0 point, confusion avec une puissance de 3.*

V. Nombre premier : *1/2 point, 103 et 883 sont bien des nombres premiers.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient 6 points sur 14.

Travail 3



A. Puissance de 3 : *1 point, car 243 et 729 sont les deux solutions possibles.*
Carré d'un nombre premier : *1 point, il n'y a pas d'autres nombres à examiner.*

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *1/2 point, cette information n'est exploitée qu'une seule fois correctement.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1 point. On devine que l'élève a testé 36 et 66. Il s'est probablement rendu compte que ni 3 et ni 6 ne pouvaient être le dernier chiffre d'un multiple de 25* ***(I)***.

La somme de ses chiffres est 5 : *1 point, l'information est bien exploitée.*

D. Carré parfait : *1 point pour les nombres 529 et 576.*

E. Diviseur de 64 : *1 point.*
Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1 point, pour avoir testé 725 et 775.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *1 point, car 35 et 99 conviennent.*

IV. Cube parfait : *1/2 point, pour $15^3 = 3375$. Dommage que l'élève n'a pas vu, dans la grille en haut à droite, que 2197 convenait.*

V. Nombre premier : *1 point, les quatre nombres présents sont premiers.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient 12 points sur 14.

A ce stade, la lancinante question de la mise des notes (de 1 à 6 dans notre canton) refait inévitablement surface. Comment, en effet, déterminer la réussite dans une telle situation, et dans toute autre d'ailleurs ? Etant donné la difficulté de l'activité, j'ai estimé qu'un élève qui obtient 12 points mérite la note maximale (6), le seuil de suffisance (4) étant atteint avec 8 points.

Un problème à tiroirs

Ce « nombres croisés » en est bien un, chacun des nombres à trouver dépendant de plusieurs autres. D'où la légitime interrogation : « Un élève qui confond deux définitions ou qui bute sur l'une d'elles n'est-il pas trop pénalisé ? » Oui et non. Les définitions **B** et **II** ont une importance toute particulière. Ne pas les comprendre conduit inévitablement à de sérieuses difficultés. Un jugement plus nuancé s'impose pour les autres. De multiples cas de figure peuvent se présenter. Analysons-en brièvement trois :

- Hélène confond «puissance de trois» et «cube parfait». Elle débute avec $\mathbf{A_1} = 125 = 5^3$. Elle trouve ensuite **I**, **II**, $\mathbf{C_1}$ et **E**, puis est bloquée par **III**, car il n'y a pas de produit de deux nombres impairs consécutifs dont le premier chiffre est 5. Si elle se trompe et cherche un nombre formé de deux chiffres impairs consécutifs, elle peut continuer. Dans le cas contraire, elle doit étudier les incidences d'un autre nombre en $\mathbf{A_1}$.
Avec $216 = 6^3$, elle sera bloquée en $\mathbf{C_1}$ (il n'existe aucun multiple commun de 2 et de 3 qui se termine par 3), mais pas en **III** ($63 = 7 \cdot 9$ irait).
Avec $343 = 7^3$, la route s'arrêtera en $\mathbf{E_1}$ (le dernier chiffre d'un diviseur de 64 ne peut être 0 ou 8), avec $512 = 8^3$, en $\mathbf{C_1}$ à nouveau. Finalement, avec $729 = 9^3$, la voie est ouverte, mais sera obstruée avec **IV** et **D**, toujours dans l'hypothétique confusion entre les expressions «puissance de trois» et «cube parfait» : si $\mathbf{IV} = 2187 = 3^7$, alors il n'y a pas de possibilité pour **D**.
- André cherche un multiple de trois en $\mathbf{A_1}$. Avec 111, il sera bloqué en $\mathbf{C_1}$, avec 123, il pourra aller très loin. D'une manière générale, des nombres dont le deuxième chiffre est 2 (**II** = 23456) ou 6 (**II** = 65432) sont porteurs d'espoir.
- Pauline n'envisage que les multiples de 75 qui se termine par 75. Elle pourra poursuivre sa route jusqu'à **IV**, car aucun cube parfait de quatre chiffres ne commence par 7.

Ces analyses sont certes théoriques et réductrices. Elles laissent cependant entrevoir que, malgré certaines erreurs, des progressions effectives sont possibles. Si c'était à refaire, pourquoi ne pas donner un «joker» à chaque élève ? Un coup de pouce de l'enseignant en quelque sorte. Par exemple sous la forme d'un conseil individualisé, pour aider l'élève à surmonter un obstacle important et lui permettre ainsi d'aller plus loin, en toute confiance. Cette pratique n'est pas très habituelle. Mais elle pourrait se justifier dans une telle activité. Affaire à suivre. (voir p. 46)

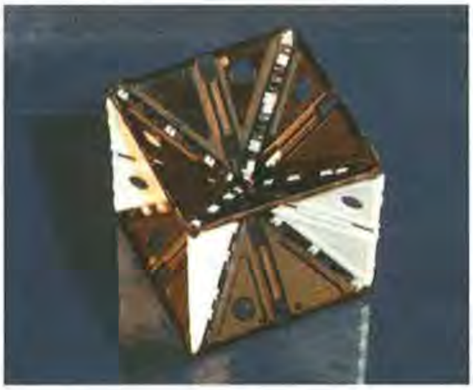
PAVAGE DE L'ESPACE 3D
(suite)

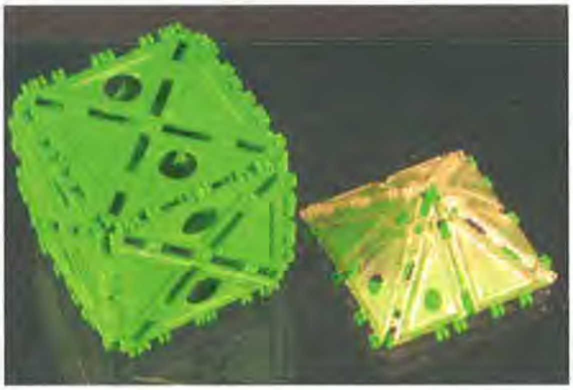
Jean Bauer
Jean-Philippe Lebet

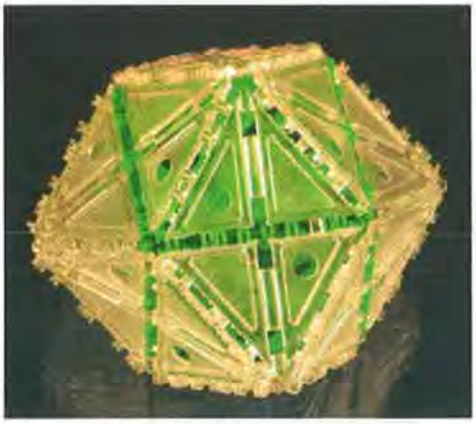
Dans un article précédent nous avons étudié l'octaèdre tronqué (dont toutes les arêtes présentent la même longueur) qui remplit tout l'espace. Dans cet article, nous examinons le dodécaèdre rhombique et d'autres solides dérivés de la même famille, offrant la même particularité.

On a vu dans l'article précédent que pour remplir tout l'espace 3D, un solide devait contenir l'équivalent du volume d'un cube ou de plusieurs cubes. De plus nous avions également montré qu'un cube d'arête *a* se divisait en un tétraèdre et une pyramide à base carrée avec des faces triangulaires équilatérales dont les arêtes sont de longueur $a\sqrt{2}$. En outre, cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

Examinons une autre découpe du cube basée cette fois sur les 4 diagonales passant par le centre du cube. Le volume du cube se répartit en 6 pyramides égales à base carrée.

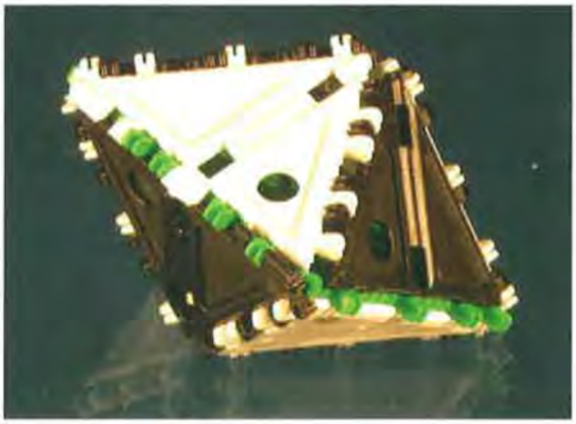




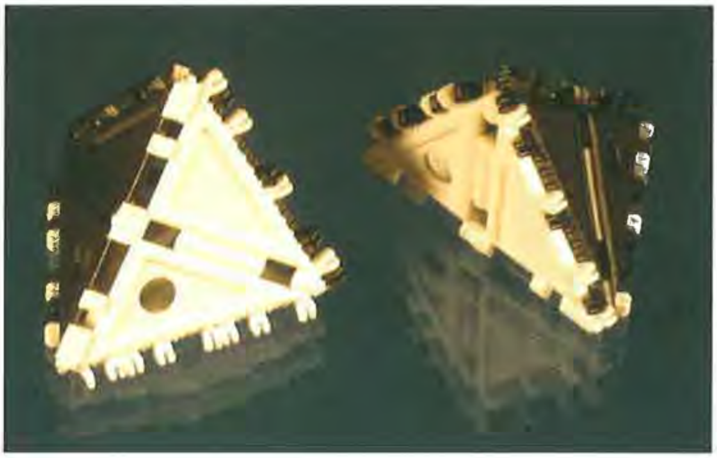


Si maintenant nous collons ces 6 pyramides sur les faces extérieures d'un second cube, nous obtenons un solide connu sous le nom de dodécaèdre rhombique. Ses faces sont formées de 12 losanges identiques de rapport de diagonales $\sqrt{2}/1$.
Le solide ainsi obtenu a donc un volume double de celui du cube.

Le dodécaèdre rhombique est par construction un solide empilable sans vides. Nous voyons aussi que ce solide, par construction se divise en 6 morceaux identiques. Ces 6 solides sont des octaèdres dont les faces sont des triangles isocèles de longueurs de côtés respectives $a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a. Ces solides octaédriques remplissent aussi tout l'espace.



De plus ce solide octaédrique peut à son tour être coupé en 4 tétraèdres identiques présentant chacun 4 faces isocèles identiques de côtés
$a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a. Les faces forment entre elles des angles respectifs de 60° et 90° sur le tétraèdre.

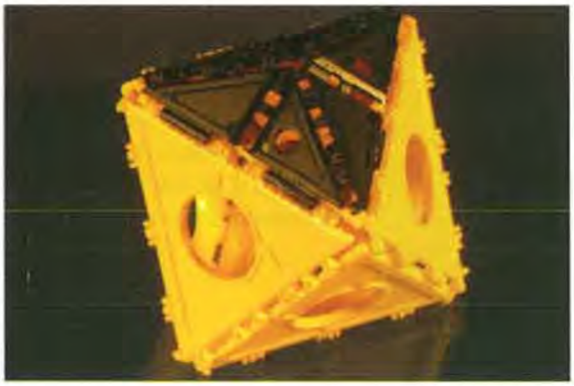


A son tour ce dernier solide tétraédrique remplit par construction tout l'espace. Il est à remarquer que les faces des losanges du dodécaèdre rhombique (constitué de 24 de ces tétraèdres) sont formées de 2 de ces triangles isocèles : $a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a.

REMARQUE :

Une autre manière d'obtenir le dodécaèdre rhombique est de rapporter 1/4 de tétraèdre régulier (formant un tétraèdre «aplati») sur chacune des faces d'un octaèdre régulier d'arête $a\sqrt{2}$.

Tétraèdre régulier divisé en 4 tétraèdres «aplatis» dont l'un de ceux-ci se trouve sur la droite de la figure.



Tétraèdre «aplati» posé sur une des faces d'un octaèdre régulier ébauchant les faces du dodécaèdre rhombique. On en a besoin de 8, donc il faut 2 tétraèdres pour un octaèdre. (voir article du numéro 211 de *Math-Ecole*).

JEUX DE SOLIDES BASÉS SUR LE DODÉCAÈDRE RHOMBIQUE

vue de dessus
vue de dessous

vue à 54.736

vue Nord
vue Sud
vue Est
vue Ouest

Le dodécaèdre rhombique a toutes ses arêtes de même longueur. De plus, ses 14 sommets sont situés sur 2 sphères concentriques de rayons respectifs $a\sqrt{3}/2$ et a.

Les sommets S_{10}-S_{14} sont ceux des coordonnées Z négatives

On considère 3 plans yz de coordonnées x :

$x = -\ a\sqrt{2}\,/\,2$ pour S_2; S_6; S_9; S_{10}
$x = \ 0$ pour S_1; S_3; S_5; S_{11}; S_{13}; S_{14}
$x = +\ a\sqrt{2}\,/\,2$ pour S_4; S_7; S_8; S_{12}

On considère 3 plans xz de coordonnées y :

$y = -\ a\sqrt{2}\,/\,2$ pour S_5; S_8; S_9; S_{13}
$y = \ 0$ pour S_1; S_2; S_4; S_{10}; S_{12}; S_{14}
$y = +\ a\sqrt{2}\,/\,2$ pour S_3; S_6; S_7; S_{11}

On considère 5 plans xy de coordonnées z :

$z = -\ a$ pour S_{14}
$z = -\ a\,/\,2$ pour S_{10} à S_{13}
$z = \ 0$ pour S_6 à S_9
$z = +\ a\,/\,2$ pour $S_2$1 à S_5
$z = +\ a$ pour S_1j

En faisant pivoter doucement le dodécaèdre rhombique sur l'un de ses axes de symétrie, on découvre successivement 3 directions d'empilement permettant :

1. Le montage de pyramides à base carrée :  à 0°

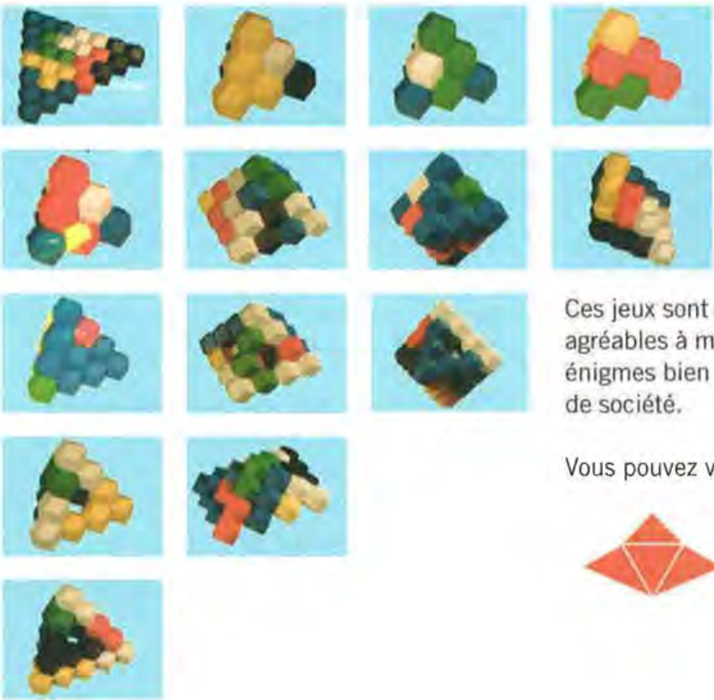
2. Le montage de pyramides à base rectangulaire :  à 90°

3. Le montage de tétraèdres :  à 54.736° ou de pyramides à base rhombique.

Nous avons développé un jeu TRIDIX, véritable TANGRAM à 3D, qui illustre toutes les possibilités d'assemblage. Il est composé de 9 pièces formées chacune de 2 à 5 dodécaèdres rhombiques liés rigidement.

A,B C D E F G,H,I

Voici quelques exemples d'assemblage du jeu TRIDIX :
Autres jeux basés sur les propriétés du dodécaèdre rhombique :



Ces jeux sont en plastique injecté très agréables à manipuler et posant des énigmes bien illustrées et des règles de jeux de société.

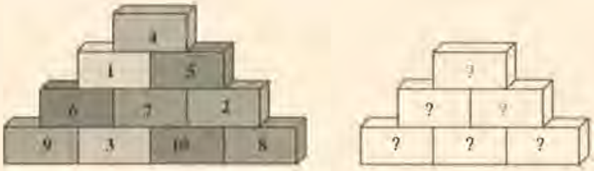
Vous pouvez vous le procurer auprès de

trigam
CH-Neuchâtel CH,
tél. +41 32 721 28 38
fax. +41 32 721 28 46
www.trigam.ch
info@trigam.ch

« COIN MATHS »

François Jaquet

L'ESCALIER DES DIFFÉRENCES



L'escalier de gauche, de quatre étages, est construit ainsi :

Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, (comme celui de droite) en utilisant les nombres de 1 à 6.

Combien en trouverez-vous de différents ?

Les origines

Il est difficile de situer les origines de ce thème des différences successives et de sa version en « escaliers », qui doivent remonter aux temps où l'on s'est mis à s'intéresser aux mathématiques dites « récréatives », et, plus certainement, où l'on s'est mis à organiser des compétitions mathématiques. On en trouve de nombreuses variantes : dans le premier championnat de la FFJM en 1987, dans un concours par classes du Valais en 1992, dans le concours *Mathématiques 93*, dans une épreuve du Rallye mathématique romand de 1993 ; puis dans des brochures de jeux mathématiques, et enfin dans nos manuels scolaires.

Son intérêt mathématique est évident. Une variante de ce problème figure, entre autres, dans les colonnes de *Math-Ecole*, avec des développements pour les escaliers à 5 étages ou plus, dans les numéros 161, 163 et 165.

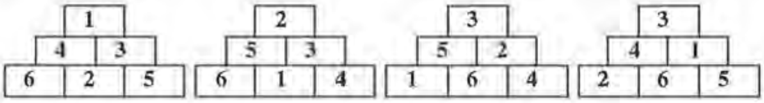
À l'occasion du 4e Salon des jeux et de la culture mathématiques à Paris, en 2003, il est apparu sous une forme nouvelle, dans la version ci-dessus, parmi une vingtaine de «manipulations» tirées de problèmes du RMT. Et, depuis, il poursuit une carrière prometteuse, sous forme de six briques que des centaines et des centaines d'enfants – mais aussi d'adultes – ont essayé de disposer en «escaliers» selon les règles données, du Nord au Sud de l'Europe.

Très récemment encore, dans le cadre d'une journée d'études organisée par le Centre de recherche et d'expérimentation sur l'enseignement des mathématiques (CRSM) de Cagliari - une trentaine de maîtres ont eu beaucoup de «plaisir à faire des mathématiques» (thème de la journée) sur cet escalier. C'est le succès de cette activité qui nous permet de le proposer maintenant pour un «coin mathématique».

De l'activité «papier-crayon» à la «manipulation»

Le matériel est simple à réaliser : une dizaine d'ensembles de six «briques» (petits parallélépipèdes de bois de 2 x 2 x 4 cm dans le cas des «ateliers» du RMT) avec, pour chacune d'entre elles, l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 noté sur deux faces opposées. Il n'est pas nécessaire de réaliser la pyramide de gauche qui n'est là que pour illustrer la règle de construction.

On peut aussi travailler avec des petits cartons rectangulaires, dans le plan. On perd alors la lecture sur deux faces de l'escalier et l'exploitation des symétries qui en découle : deux solutions symétriques dans le plan représentent le même escalier, vu de part et d'autre de son plan vertical.
Le matériel permet des essais immédiats, avec rapidité, où la gomme est inutile en cas d'erreur. Par rapport à l'écriture, le gain de temps est considérable, mais c'est surtout l'entrée dans le problème qui est facilitée.
Le matériel évite encore les erreurs des nombres qui seraient écrits deux fois dans la recherche «papier-crayon».
Les escaliers construits restent comme mémoire des solutions trouvées. Placés à proximité, ils permettent de vérifier qu'ils sont différents les uns des autres. Les quatre solutions sont ainsi clairement distinctes.



Évaluation

L'observation des enfants – ou adultes – au travail permet une visualisation directe des raisonnements qui guident la recherche et qui indiquent ainsi le niveau des procédures ou stratégies adoptées :

- il y a les essais au hasard, qui durent longtemps chez les jeunes enfants de 7 à 9 ans, où de nombreuses erreurs ou inattentions apparaissent en début de recherche (le nombre d'une brique n'est pas la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose) ;
- il y a le processus de contrôle systématique des différences, où, par exemple, l'élève prend deux briques, puis une troisième à placer sur les premières, qui respecte la règle de construction, (différence des deux premières), puis une quatrième, à placer à côté d'une des précédentes, avec recherche d'une cinquième convenable … et retrait de la quatrième au cas où il n'y a plus de brique disponible… ;
- vient alors l'apparition de petits «théorèmes locaux», par exemple : *le «6» ne peut pas être ailleurs que dans la base,* sous-entendant que l'élève s'est rendu compte que 6 ne peut pas être une différence dans l'ensemble des six premiers nombres naturels ; ou, comme on l'a souvent observé : *le «6» et le «3» ne peuvent pas être placés l'un à côté de l'autre ou l'un sur l'autre,* (car le nombre 3 apparaît deux fois dans la relation 6 – 3 = 3), ce qui fait que l'enfant écarte systématiquement la brique «3» lorsqu'il a en main la brique «6» , etc. ;
- apparaissent enfin les procédures de recherche systématique lorsqu'une solution est trouvée et qu'il s'agit d'en découvrir d'autres, en essayant par exemple toutes les dispositions où 1, puis 2, puis 3 sont au sommet (le 5 et le 6 étant exclus et le 4 se révélant rapidement impossible lui aussi) ; ou en essayant les différentes positions du «6» de ses voisins possibles dans la base, etc. ;

La gestion

Les modalités de gestion sont multiples, elles dépendent du temps à disposition, de l'autonomie des élèves, des objectifs que le maître souhaite poursuivre au travers de cette activité.

- Dans une variante «pour occuper les élèves», le matériel est libre d'accès, à destination des élèves qui ont terminé le travail ordinaire de la classe et qui ont un moment à occuper. Ils s'engagent dans la recherche de la solution, créent un escalier ou deux, ou abandonnent en cas d'obstacle trop important, puis remettent le matériel dans sa boîte et passent à une autre occupation.
  En travaillant ainsi, ils n'ont certes «pas fait de mal» ; ils ont peut-être fait un peu de

mathématiques, vérifié leur(s) solution(s), éprouvé du plaisir ou de l'ennui, modifié leur rapport affectif avec la discipline, toutes choses que le maître ne peut pas évaluer.

- Dans une variante d'occupation avec «contrat minimum», les élèves doivent conserver une trace écrite de leur activité : les solutions trouvées, la date, l'heure, la durée et quelques explications éventuelles sur leur démarche. L'examen des protocoles va permettre au maître, s'il en a le temps et l'envie, de contrôler les solutions et de demander à l'élève des compléments.
- Dans une variante avec «contrat» collectif, les élèves travaillent par groupe et rédigent un compte rendu de leurs recherches avec solutions et explications, sachant qu'on exige toutes les solutions. Le maître pourra alors estimer le travail et provoquer une confrontation entre les membres du groupe sur les solutions et leurs explications.

Il y a d'autres variantes encore, qui pourraient aller jusqu'à des phases d'institutionnalisation, c'est-à-dire, dans notre cas, d'explicitations de propriétés des différences ou de valorisation de procédures de recherche systématique. Pour des élèves plus grands, il y a aussi des développements vers des escaliers à quatre étages, voire cinq, qui exigent l'élaboration de nombreuses règles pour limiter les essais.

Dans un cas comme dans l'autre, le maître est le chef d'orchestre, qui choisit de donner, par ses interventions, de la substance à cet *Escalier des différences*. Le matériel, en lui-même, n'a pas le pouvoir de faire *faire des mathématiques* à l'élève.

Première rencontre de l'Association Math-Ecole

Les enquêtes ou évaluations à grande échelle, quels profits pour les enseignants ?

Table ronde suivie d'un débat public

Présentation de **quelques résultats de confrontations régionales ou internationales** (Matheval, PISA, RMT) : taux de réussite globaux, taux de réussite pour certains problèmes, procédures de résolution par les élèves, erreurs les plus fréquentes ... suivie de **réflexions sur les retombées qu'ils pourraient avoir pour la classe et pour les maîtres** qui ont à la conduire.

Mercredi 2 décembre, à 16h, à Neuchâtel

Rencontre ouverte à tous, suivie, à 18h, de l'Assemblée générale statutaire de l'Association *Math-Ecole*.

Le site internet de Math-Ecole, http://www.math-ecole.ch donnera, dès la fin d'octobre, toutes les informations utiles sur le lieu de la rencontre et les noms des animateurs de la table ronde. Il fournira aussi une documentation sur les enquêtes traitées à cette occasion.
En attendant, la réflexion peut débuter à la lecture de ce numéro : Editorial et articles présentant quelques résultats du *Kangourou* et du RMT, ainsi que du numéro 208 (J.-Ph. Antonietti «Apprendre les mathématiques sans parler l'espéranto», in *Math-Ecole* 208, pp 37–45) et 209 («Notes de lecture» p 62).
Avant l'annonce prochaine des résultats de PISA 2003, il vaut la peine de se demander, au-delà du rang obtenu par nos élèves, ce qui sera utile – ou ne le sera pas – pour notre enseignement, nos plans d'étude, nos moyens d'enseignement. Alors, retenez la date du 2 décembre !

[ndlr]

FRACTIONS ET DÉCIMAUX

APPROCHES PÉDAGOGIQUES

François Boule

Fractions et décimaux constituent un domaine dont l'abord (définitions, calculs) est réputé difficile, et que les programmes scolaires français étendent du cycle III au collège. On ne s'attardera pas ici sur l'objet mathématique lui-même (définition des rationnels). Il s'agit plutôt de comparer quelques présentations diverses, plus ou moins anciennes et d'en signaler les avantages et les inconvénients, aucune ne semblant, malgré les nombreuses recherches didactiques des vingt dernières années, éviter tous les obstacles et mériter une préférence définitive.

Une distinction quasi-rituelle (et inscrite jadis dans les programmes de 1945) consiste à séparer les «fractions simples» des autres; les premières sont celles qui portent un nom particulier en français (une moitié, un demi, un tiers, un quart) et qui par conséquent appartiennent au vocabulaire et à l'expérience courante des enfants. Une représentation classique associe à ces fractions de l'unité un secteur angulaire:

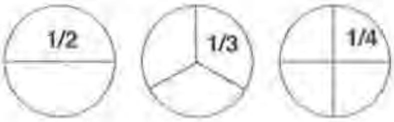


fig. 1

On reviendra plus tard sur les inconvénients de cette représentation. Remarquons au passage plusieurs caractéristiques: le numérateur est 1; elles sont inférieures à l'unité; elles sont classiquement représentées par une barre de fraction horizontale ou oblique (comme ci-dessus).

Une approche historiquement ancienne (antérieure à 1970) consiste à définir une fraction comme une division à faire: «**17/3 = diviser 17 par 3**»; l'écriture et la technique de la division étant supposées connues, cette définition permet de disposer aussitôt d'un décimal aussi proche que l'on veut, en poursuivant la division. Cette définition, qui a l'avantage de présenter parallèlement fraction et encadrement décimal, ne donne pas un statut de nombre aux fractions, ce qui rend vide de sens leur addition (on ne peut «additionner» des procédures) ou leur produit. La comparaison est rendue difficile, voire faussée puisqu'on ne peut comparer par exemple 3/17 et 2/11 sans passer par une approximation décimale. La maîtrise très incertaine, par les élèves, de la division avec quotient décimal rend cette définition, non seulement insatisfaisante, mais malaisée. On pourrait penser que l'usage des calculettes est de nature à faciliter cette approche. Il n'en est rien puisque la calculette rend un résultat tronqué. La définition, qui confondrait alors 2/3 et 0.666666, en devient fautive.

Une approche de nature voisine, et qui a eu un succès certain dans les années 70 est fondée sur l'usage des «opérateurs». Un opérateur est défini par la donnée de deux listes (fig. 2)

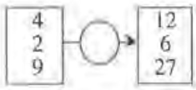


fig. 2

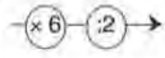


fig. 3

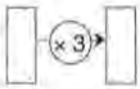


fig. 4

Ainsi défini fonctionnellement, un opérateur peut être étudié indépendamment des listes (fig. 3), et notamment être intégré dans des chaînes (fig. 4). Ces chaînes permettent commutations, associations et réductions. Ainsi les différentes chaînes ci-dessous sont dites «équivalentes».

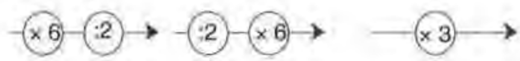


fig. 5

Une fraction est définie comme une chaîne composée d'une multiplication et d'une division (fig.6).

$\rightarrow (\times 3) \rightarrow (: 4) \rightarrow$ est noté $\rightarrow (\times \frac{3}{4}) \rightarrow$

fig. 6

Et l'on convient que $\rightarrow (: p) \rightarrow$ c'est $\rightarrow (\times \frac{1}{p}) \rightarrow$

Cette définition peut sembler relever d'un certain arbitraire. Mais elle facilite beaucoup l'étude de certaines propriétés et particulièrement l'usage du calcul multiplicatif. En effet, moyennant un léger flou initial (qui risque peu de froisser les élèves), on accepte volontiers la commutativité et l'associativité des opérateurs. En revanche elle a deux inconvénients majeurs. D'une part le *nombre* **4** et l'**opérateur x 4** sont, par définition, des objets de nature différente. On peut trouver assez naturel de désigner par **x 5** l'opérateur qui appliqué à 1 produit le nombre 5. Mais l'on crée ainsi une confusion, gravement indigeste lorsqu'il faut *admettre* que **x 1/2** opérant sur le nombre 1 produit le **nombre** 1/2. D'autre part, comme précédemment, la comparaison et surtout l'addition d'opérateurs sont dépourvues de sens.
Ces approches peuvent être appelées «fonctionnelles» puisqu'elles privilégient une propriété algébrique.

Une approche d'usage actuel offre quelque parenté avec celle-là: la situation des **automates.** Un automate, partant du zéro d'une graduation, arrive au point 7 en trois sauts (fig. 7).

fig. 7

Un saut est un *déplacement*, mais on lui associe implicitement la longueur du saut, qui est repérée par un nombre. L'avantage de cette définition par rapport à la précédente est d'associer de manière naturelle des nombres intermédiaires, en tant que repères sur un axe. Mais on retrouve le même arbitraire formel lorsque l'on désigne ce saut par *la fraction* 7/3.
Le versant «transformations» du contexte des sauts permet d'étudier aisément les équivalences, c'est-à-dire la «simplification» des fractions, de laquelle découlent les procédures de calcul. En revanche la signification des opérations somme et produit réclame, comme on va le voir, de recourir au versant «mesure». Les approches suivantes privilégient toutes une relation avec la mesure.

La première, d'usage encore très répandu, consiste à utiliser la représentation proposée en fig. 1. Mais elle a un grave inconvénient: elle permet difficilement d'aborder des fractions supérieures à l'unité.
En effet on n'a pas de mal à accepter que la partie grisée (fig. 8) représente un quart, même en l'absence du disque de référence.

fig. 8

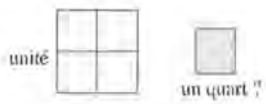


fig. 9

En revanche si la figure de référence n'est pas un disque (fig. 9) la partie grisée n'a plus de sens en l'absence de l'unité de référence. Ce qui est pire encore, c'est la représentation d'une fraction supérieure à l'unité. La figure 10 représente-t-elle 5/4 ou bien 5/8 ?

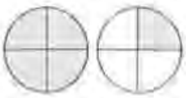


fig. 10

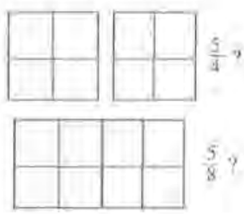


fig. 11

On voit mieux encore le risque de confusion si l'unité de référence n'est pas un disque (fig. 11). Par ailleurs, si cette approche facilite les comparaisons et additions de fractions de même dénominateur, elle n'est pas opérante en ce qui concerne les comparaisons de fractions quelconques et le produit d'une fraction par un entier ou le produit de deux fractions.

Une dernière approche permet de définir fractions et décimaux par un **système de mesure.**

On considère un objet L à mesurer et une unité de longueur U, subdivisée en dix sous-unités V:

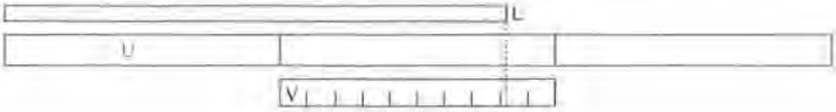


fig. 12

On peut écrire d'abord U < L < 2 U, puis 1U 8V < L <1U 9V.
Ou encore 18 V < L < 19V. Le processus peut se poursuivre. On définit ainsi un *système* (U,V,W...). La position de l'unité **principale** U est marquée par une virgule:
Def.: 18V = 1U 8V = 1, 8 U

Si, au lieu d'un partage en dix parties, on utilise un partage en trois, on créé une subdivision en tiers.
Elle présente un avantage considérable qui est de permettre rapidement des comparaisons empiriques, en constituant diverses graduations, et de donner une interprétation très accessible de l'addition et même (quoique moins simple) de la multiplication. Deux difficultés se présentent cependant, dont l'une est de caractère théorique.
La première est due à la *confusion de la longueur* et du *repère* de l'extrémité (qui est un point):

La seconde difficulté, plus théorique, n'est certainement pas un obstacle pédagogique: il est nécessaire *d'admettre* que la formule donnant l'aire d'un rectangle, que l'on peut établir pour des côtés dont les mesures sont des entiers est encore valable pour des côtés dont les mesures ne sont pas entières.
Cette définition a l'intérêt majeur de lier fermement les décimaux aux fractions et permet de ramener les comparaisons et tous les calculs sur des décimaux à des calculs sur des entiers par translation de l'unité principale:

fig. 13

U	V	W

,

fig. 14

U	V	W
2,1	21	210
+ 3,14	31,4	+ 314
5,24		524

fig. 15

Ce système fonctionne bien tant que l'on conserve la base dix, c'est-à-dire les *décimaux et fractions décimales*. La définition de 2/3 comme « nombre à virgule » obligerait à recourir à la base trois, ce qui n'est pas souhaitable puisque les bases autres que dix n'ont aucun usage au-delà du CP. Mais ce système a l'avantage d'offrir un recours simple et sûr en cas de difficulté, notamment concernant la comparaison et l'ordre et en particulier dans le cas de l'erreur classique qui consiste à confondre a, b avec le couple *(a , b)*. Mais, pour l'addition, il oblige à un détour par le tableau ci-dessus, plus → compliqué encore lorsqu'il s'agit de la multiplication.

Un moyen d'éviter le recours à un tel tableau et de maintenir l'entrée principale par les fractions, consiste à construire des échelles superposables. Les échelles ont pour but de repérer avec précision croissante des longueurs à mesurer.

Pendant cette phase, on laisse bien sûr de côté les unités et les instruments de mesure habituels. On se donne une unité, par exemple la largeur d'une feuille de papier A4 (il est facile d'en obtenir par pliage un grand nombre d'exemplaires de couleurs variées).

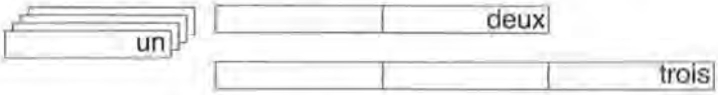


fig. 16

Ceci permet de graduer un axe.

fig. 17

Pour améliorer la précision d'une mesure, on partage l'unité (éventuellement les autres bandes).

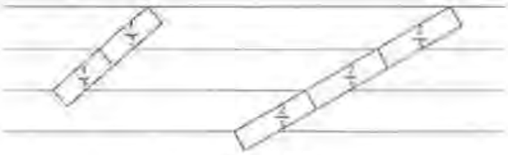


fig. 18

On a plié la première bande (unité) en deux, on obtient des *demis*. La notation chiffrée conventionnelle est une fraction, dont le numérateur représente l'objet partagé, et le dénominateur le nombre de parties. On a plié la seconde bande [2] en trois parties, on obtient des tiers de 2. Au passage, on obtient un premier résultat important : « il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité ».

En reportant le long de l'axe précédent, on obtient de nouvelles échelles.

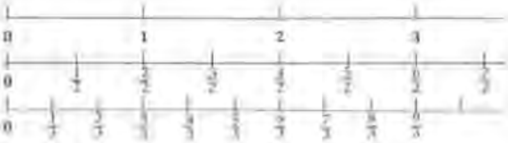


fig. 19

Les coïncidences entre ces échelles permettent d'écrire des égalités (et aussi des inégalités).

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 \qquad \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$$

Cette méthode n'échappe pas à la difficulté signalée plus haut, confusion entre longueur et repère.

Mais elle a l'avantage de s'appuyer sur une mesure, de favoriser le repérage d'une fraction par rapport à d'autres, de ne pas favoriser les fractions inférieures à l'unité, de fournir des moyens d'établir des procédures de calcul, en introduisant tôt une pluralité d'écriture.

COMMENTAIRES SUR LES QUESTIONS DU *KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES* 2004

Par l'équipe du Kangourou

SOMMAIRE[1]

1. Différences filles Garçons

- Q2 6e/5e Le carré à compléter
- Q7 6e/5e La famille Lapin
- Q7 4e/3e Les boules de glaces
- Q8 4e/3e La rotation du triangle
- Q11 4e/3e L'Autruche

2. Statistiques comparées des questions communes

- Les seize cartes
- La bande de 11
- Le grand carré au coin x
- xy = 10000 et x + y

3. Analyse par quintiles

- Questions Benjamins, statistiques en 5e : Q1, Q7, Q12, Q15, Q21

4. Ce que l'on apprend et ce que l'on n'apprend pas

- de la 6e à la 5e Q2 et Q6
- de la 6e à la 5e Q5 !
- de le 4e à la 3e Q4
- de le 4e à la 3e Q8
- de le 4e à la 3e Q13
- de le 4e à la 3e Q16 !

5. Les erreurs classiques

- Vitesse moyenne Q20 4e/3e
- Pourcentage Q17 4e/3e
- Les intervalles Q8 6e/5e

6. Le désespoir des profs

- Q4 6e/5e Les360 000 secondes
- Q1 4e/3e Les priorités des opérations

[1] Les degrés scolaires de 6e, 5e, 4e et 3e, en France, correspondent respectivement à nos degrés 6, 7, 8 et 9 de Suisse romande. «Benjamins» (B) correspond à 6e et 5e, «Cadets» (C) à 4e et 3e.

INTRODUCTION

Voici quelques statistiques tirées du jeu-concours 2004 du *Kangourou des mathématiques*.
Nous avons choisi nos exemples, pour montrer différentes facettes de la situation actuelle.
Ces chiffres sont comme une photographie de ce que savent faire les collégiens aujourd'hui, dans une situation de jeu-concours.
Comme au *Kangourou* il n'y a rien à perdre on pourrait penser que les réponses au hasard sont fréquentes mais comme il y a aussi beaucoup à gagner on peut estimer que statistiquement les chiffres avancés restent représentatifs.

Moyennes.

	2004	2003	2002	2001
6e	40.3	41.7	34.2	34.6
5e	44.2	47.8	39.2	41.7
4e	40.0	40.4	48.2	36.5
3e	44.2	45.3	52.8	40.6

Les statistiques complètes se trouvent dans les livres, annales du *Kangourou* disponibles sur le site internet **www.mathkang.org** ou à la **www.LibrairieDesMaths.com**

Dans les tableaux suivants les statistiques sont donnés en «pourmillage» (pour mille élèves).
Le nombre de participants et les échantillons filles et garçons dans chaque catégorie sont :

	Total	Filles	Garçons
6e	125 000	49 839	52 992
5e	80 000	32 317	35 587
4e	46 000	17 392	21 280
3e	32 000	11 797	15 256

La somme des filles et des garçons ne fait pas le total des participants, car certains n'ont pas coché la case «vous êtes une fille ❏, vous êtes un garçon ❏».
Dans les tableaux ci-après présentés la bonne réponse est indiquée en caractère gras, et les pourmillages de la réponse majoritaire sont indiqués en gras. La colonne «abstention» regroupe à la fois les non-réponses et les réponses multiples.

Bien sûr, les statistiques données dans la suite de l'article sont significatives quant à la taille de l'échantillon ; cependant il ne faut pas perdre de vue les biais particuliers intrinsèques à un jeu-concours comme le *Kangourou* : le temps est limité (40 minutes pour 24 questions), une réponse fausse coûte des points, et certaines questions communes en benjamins et en cadets ne sont pas placées au même endroit dans le sujet.

1. DIFFÉRENCES FILLES GARÇONS

Voici les quelques questions du collège, pour lesquelles la différence entre le taux de réussite des filles et des garçons est la plus grande.

2. Valentine a seize cartes : 4 piques (♠), 4 trèfles (♣), 4 carreaux (♦) et 4 cœurs (♥). Elle veut les poser dans un carré de telle façon que, sur chaque ligne et chaque colonne, il y ait une seule carte de chaque sorte. Certaines cartes sont déjà posées dans la carré.
Quelle sorte de carte est posée dans la case portant le point d'interrogation ?

♠		?	♥
♣	♠		
	♦		
	♥		

A)♠ B)♣ C)♦ D)♥ E) on ne peu pas savoir

Filles:

	A	B	C	D	E	abstention
6e	16	108	**685**	14	143	34
5e	11	84	**770**	10	105	20
4e	9	61	**827**	12	76	15
3e	7	57	**846**	10	69	11

Garçons :

	A	B	C	D	E	abstention
6e	22	132	**607**	21	173	45
5e	16	108	**694**	16	137	29
4e	13	85	**760**	14	107	21
3e	8	69	**798**	12	94	19

Une question de logique assez simple pour les filles et qui reste plus difficile pour les garçons.

7C. Un glacier vend des glaces de quatre parfums différents. Un groupe d'enfants vient en acheter. Chaque enfant achète une glace à deux boules de parfums différents. Sachant que les enfants ont tous choisi des combinaisons de parfums diférentes et que toute les combinaisons possibles ont été choisies, combien y a-t-il d'enfants dans ce groupe ?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

Filles:

	A	**B**	C	D	E	abstention
4e	76	**599**	122	97	82	24
3e	44	**654**	101	86	96	19

Garçons :

	A	**B**	C	D	E	abstention
4e	68	**524**	132	110	138	28
3e	44	**587**	112	99	135	23

La différence de 7 % est surtout dû au fait que les filles ne font pas l'erreur E 16 = 4x4 qui est une manière un peu rapide de compter les glaces différentes à 2 boules et 4 parfums sans tenir compte des autres contraintes du texte. Mais on l'a déjà remarqué dans d'autres études les filles sont plus réfléchies et lisent mieux les énoncés que les garçons.

7B. Les trois membres de la famille Lapin ont mangé à eux tous 73 carottes. Le père en a mangé 5 de plus que la mère. Jeannot, le fils, a mangé 12 carottes. Combien la mère en a-t-elle mangé ?

A) 27 B) 28 C) 31 D) 33 E) 56

Filles :

	A	**B**	C	D	E	abstention
6^e	131	283	65	71	**365**	85
5^e	141	**357**	66	73	298	65

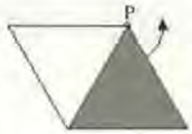
Garçons :

	A	**B**	C	D	E	abstention
6^e	127	**334**	67	77	316	79
5^e	134	**417**	62	81	248	58

L'erreur E : 73-5-12 = 56 est moins commise par les garçons.

8. On fait tourner le triangle équilatéral gris dans le sens contraire des aiguilles dune montre autour du point P. De quel angle faut-il le faire tourner pour qu'il recouvre le triangle équilatéral blanc pour la première fois ?

A) 60° B) 120° C) 180° D) 240° E) 300°



Filles :

	A	B	C	D	**E**	abstention
4^e	55	133	247	**322**	201	42
3^e	44	107	210	**326**	275	38

Garçons :

	A	B	C	D	**E**	abstention
4^e	38	103	242	**318**	267	32
3^e	30	77	210	**310**	347	26

11C. L'autruche, Alfonso, s'entraîne pour l'épreuve de la Tête dans le sable des jeux Animolympiques. Il a sorti sa tête du sable à 8h15 min le mardi matin, battant ainsi son record personnel

Il est resté la tête dans le sable pendant 98 heures et 5 minutes.

Quand Alfonso a-t-il mis sa tête dans le sable ?

A) le jeudi à 5 h 10min B) le jeudi à 5 h 40min C) le jeudi à 11 h 20min D) le vendredi à 6 h 10min E) le vendredi à 6 h 20min

Filles :

	A	B	C	**D**	E	abstention
4^e	83	59	68	**489**	209	92
3^e	68	48	57	**562**	184	81

Garçons :

	A	B	C	**D**	E	abstention
4^e	81	52	58	**570**	173	66
3^e	64	44	49	**638**	151	54

Normalement la résolution de cette question est relativement simple en divisant par 24.
98h05min = (4x24) + 2h05min = 4j + 2h05min.
Le reste permet seul de conclure sur D.
Le quotient permet presque de conclure aussi sur D ou E.
Est-ce parce que le jeu animolympique est particulièrement idiot que cela n'a pas inspiré les filles ?

2 STATISTIQUES COMPARÉES DES QUESTIONS COMMUNES

- Les seize cartes

Voir question 2, paragraphe 1.

	A	B	C	D	E	abstention
6^e	19	121	**643**	18	158	41
5^e	14	97	**730**	13	121	25
4^e	8	69	**798**	12	94	19
3^e	8	64	**819**	11	83	15

Une baisse régulière de l'abstention et de chacune des réponses fausses, montrent que la logique s'acquiert peu à peu. Nous avions cependant placée cette question en position 2 dans le sujet pensant qu'un meilleur taux de réussite était possible.

- La bande de 11

12. Dans la bande ci-dessous, il y onze cases. Dans la première case, on écrit le nombre 7, et dans la neuvième le nombre 6. La somme de trois nombres placés dans des cases consécutives doit toujours être 21. Quuel nombre faut-il placer dans la deuxième case ?

A) 7 B) 8 C) 6 D) 10 E) 21

18B & 12C	A	B	C	D	E	abstention
6^e	141	**449**	91	81	53	185
5^e	172	**471**	98	71	39	149
4^e	178	**510**	104	61	31	116
3^e	159	**554**	103	50	23	111

Une progression de 3 à 4 % chaque année, combien d'années faudra-t-il encore pour atteindre un score honorable ? On constate (voir paragraphe 3) que les bons élèves (en 5^e) réussissent à 62,5 %, il y a donc du travail ! Et pourtant cette question peut être traitée comme un jeu !

- Le grand carré au coin x

19. On dessine un grand carré, que l'on divise en carrés plus petits. Puis on écrit les entiers successifs dans chaque petit carré comme indiqué sur la figure ci-contre.
Parmi les valeurs proposées, quelle est celle que le nombre x ne peut pas prendre ?
A) 128 B) 256 C) 81 D) 121 E) 400

21B&19C	A	B	C	D	E	abstention
6^e	65	88	287	84	135	**341**
5^e	67	91	**306**	86	173	277
4^e	63	64	**324**	91	212	246
3^e	81	68	**287**	95	215	254

Cette question est la plus difficile en Cadets comme en Benjamins.
Les pointillés, d'une part, sont une abstraction très peu utilisée et maîtrisée au collège. On pourrait croire qu'il faut compléter la figure jusqu'à trouver x, dans un carré de côté 9 (d'où 9x9=81 réponse C). De plus, sous cette forme la figure proposée place les nombres 1 à 10 alors que si le côté du carré est différent, en particulier plus petit, les nombres ne se placent pas ainsi.

Troisième difficulté dans l'énoncé, la forme négative de la question ; en effet on l'a souvent remarqué la forme négative d'une question est souvent mal lues.
Si on ne cherche pas à suivre ce qui se passe, ni à construire les différents carrés il est très difficile de s'en sortir. Par contre si l'on fait preuve de l'abstraction suffisante pour ne voir qu'un carré et un nombre de cases, alors la solution saute aux yeux. Cet exercice était visiblement trop dur pour les collégiens (et pour les profs qui seraient tentés de trouver la « formule » donnant les nombres de la diagonale).

24B et 21C.
Le produit de deux entiers naturels non divisibles par 10 est 10 000. Quelle est leur somme ?
A) 1024 B) 641 C) 1258 D) 2401 E) 1000

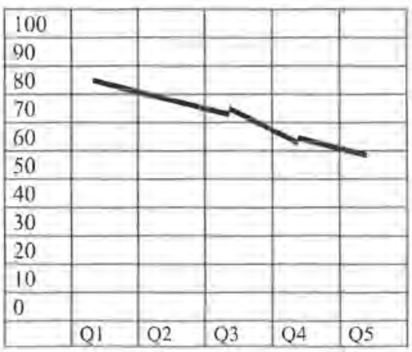
	A	**B**	C	D	E	abstention
6e	80	117	101	93	254	**355**
5e	85	137	108	100	223	**347**
4e	90	149	82	101	247	**331**
3e	105	152	86	105	209	**343**

A part l'abstention et la réponse E (trop belle) on voit que les réponses se répartissent presque au hasard. Combien d'élèves ont vraiment cherché cette question 24 ?

3. ANALYSE PAR QUINTILES

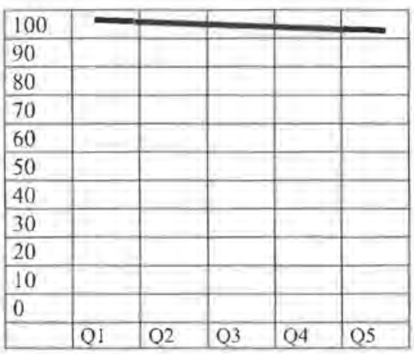
Cette analyse consiste à séparer l'ensemble statistique en cinq (les quintiles). Les cinq échantillons correspondent respectivement aux 20 % d'élèves les meilleurs, puis aux 40 %, aux 60 %, aux 80 % et au 100 % (un élève n'est compté que dans 1 seul quintile). Pour chacun de ces cinq ensembles on calcule le taux de bonnes réponses données à une question particulière. On obtient ainsi une courbe décroissante permettant d'analyser la difficulté d'une question et en quelque sorte, son degré de différenciation entre les bons élèves et les autres.
Voici quelques exemples tirés des questions benjamins et dont les taux sont calculés pour les élèves de 5e.

Q12



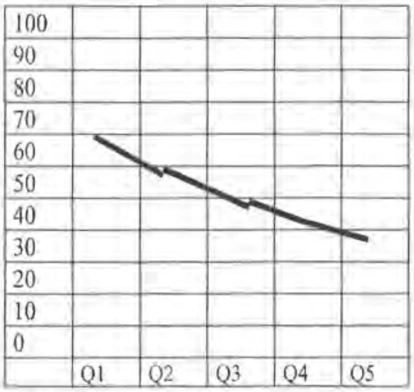
Valeurs : 87,2 ; 81,5 ; 75,5 ; 69,4 ; 61,9

Q1



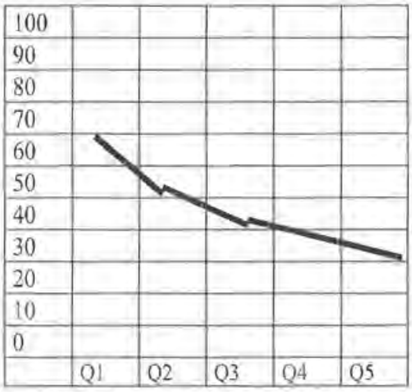
Valeurs : 98,6 ; 97,9 ; 97 ,1 ; 96,1 ; 93,2

Q7



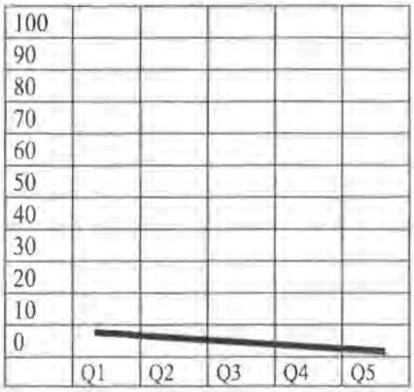
Valeurs : 69,1 ; 58,5 ; 51 ; 44,5 ; 38,8

Q15



Valeurs : 64,3 ; 54,2 ; 47, 6 ; 42,1 ; 37,1

Q21



→ Valeurs : 9,5 ; 8,5 ; 7,9 ; 7,3 ; 6,7

Conclusions à les lectures de ces tableaux :
Q1 question facile
Q21 question très difficile
Q7 & Q15 questions moyennes, voir difficiles et discriminantes
Q12 bonne question moyenne.

4. CE QUE L'ON APPREND ET CE QUE L'ON N'APPREND PAS

Le jeu concours *Kangourou* propose exactement les mêmes questions en 6ᵉ et 5ᵉ, mais les classements sont séparés (de même en 4ᵉ et 3ᵉ). Ceci permet de comparer les résultats des deux niveaux et voir ainsi ce qui n'est pas acquis en 6ᵉ et le devient en 5ᵉ, ce qui ne l'est ni en 6ᵉ ni en 5ᵉ et ce qu'il l'est déjà dès la 6ᵉ.

Q2 et Q6

La question 2 déjà évoquée aux paragraphes 1 et 2 présente une forte progression de la 6ᵉ à la 5ᵉ (+ 9 % accompagnée d'une baisse de 2 % de l'abstention), ce qui montre que la logique simple est mieux résolue après un an au collège. Pour la question 6, le taux d'abstention baisse de 3 % et le taux de réussite monte de 10 %, là aussi une question de logique qui montre le succès de cet apprentissage en 1 an de la 6ᵉ à la 5ᵉ.

Q5 B Edouard ramasse 2004 pommes de pins qu'il range en tas de 50. Combien a-t-il de tas de 50 ?

A) 4	B) 39	C) 40	D) 41	E) 44

52,2% de bonnes réponses en 6e et 52,0% en 5e qui font beaucoup plus l'erreur D qui consiste à compter le reste comme un tas complet.

Q4 C Combien vaut (1-2) – (3-4) – (5-6) ?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Même si la règle des signes « -- donne + » et celles des parenthèses commencent à être enseignées en 5e on constate que seuls 57 % des élèves de 4e ont fait juste à cette question. Cependant, avec une dernière année au collège on constate un fort progrès dans ce domaine avec + 14 % de bonnes réponses. Bravo aux professeurs de 3e.

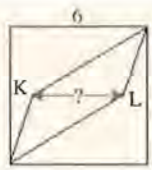
Q8 C Voir question paragraphe 1.

À la question 8 voir chapitre 1, la progression est de 8 % avec une baisse des réponses inférieures à un demi tour : 60°, 120° et 180° par contre 240° conserve exactement le même taux de réponses.

Q13 C Cinq enfants pensent chacun à un nombre qui peut être 1 ou 2 ou 4. On calcule le produit de ces cinq nombres. Quel peut être le résultat obtenu ?
A) 100 B) 120 C) 256 D) 768 E) 2048

Cette question se résout relativement bien en essayant un peu toutes les combinaisons possibles. Arrivés à cette question, dans une épreuve en temps limité, les 3e disposent sûrement de davantage de temps et de confiance pour se lancer dans ces calculs encore assez simples, (baisse de l'abstention de 2 %), les calculs se font vite après avoir éliminé 100 qui demande un cinq (ou 10) on essaie le plus grand nombre possible 4x4x4x4x4 = 1024 qui donnera 256 soit en remplaçant 4 par un 1 ou deux 4 par deux 2.

Q16 C Dans le carré de 6 cm de côté dessiné ci-contre, les points K et L se trouvent sur l'axe de symétrie horizontal du carré, comme indiqué sur la figure. Quand on trace les segments reliant K et L à deux sommets opposés du carré, le carré est divisé en trois parties de même aire. Quelles est la longueur KL ?
A) 3,6 cm B) 3,8 cm C) 4 cm D) 4,2 cm E) 4,4 cm



31,8 % de bonnes réponses en 4e et 31,6 % en 3e mais peut être que ce score s'explique parce que la réponse la plus simple est la bonne.

5. LES ERREURS CLASSIQUES
(sans commentaire !)

20C **Vitesse moyenne**
Philippe va à la plage, à la vitesse de 30 km/h. Au retour sa vitesse est de 10 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?
A) 12 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 22 km/h E) 25 km/h

	A	**B**	C	D	E	abstention
4e	26	106	**750**	29	23	66
3e	25	110	**742**	33	20	70

17C Pourcentages

Luc a un potager rectangulaire dans son jardin. Il décide de l'agrandir en augmentant sa largeur et sa longueur de 10 % De quel pourcentage l'aire du potager est-elle augmentée ?

A) 10 % B) 20 % C) 21 % D) 40 % E) 100 %

	A	B	C	D	E	abstention
4^e	194	**348**	91	147	136	84
3^e	215	**282**	143	120	156	84

8B Les intervalles

Neuf arrêts de bus sont régulièrement espacés le long d'une route. La distance entre le premier et le troisième est de 600 mètres. Quelle distance sépare le premier du neuvième ?

A) 1200 m B) 1500 m C) 1800 m D) 2400 m E) 2700 m

	A	B	C	**D**	E	abstention
6^e	93	48	**528**	162	114	55
5^e	76	38	**563**	186	107	30

6 LE DÉSESPOIR DES PROFS

Voici deux questions qui ne nous laisseront peut être pas optimistes sur les résultats de l'enseignement tant au primaire qu'au collège.

Q4 6^e/5^e 360 000 secondes c'est

A) 3 heures B) 6 heures C) 8.5 heures D) 10 heures E) plus que 10 heures

	A	B	C	D	E	abstention
6^e	132	249	53	133	**317**	116
5^e	127	217	47	160	**360**	89

Depuis le primaire on apprend à lire l'heure, on devrait savoir que 60 secondes font 1 minute et 60 minutes font 1 heure soit que 3600 secondes font 1 h.

Comment expliquer alors que presque 2 élèves de 5^e sur 3 se trompent et disent que 3600 x 100 (soit 10 fois plus que 10 h) fait moins de 10 h. Cette question montre aussi l'échec de l'apprentissage des ordres de grandeurs, même les plus quotidiens.

Près de 13 % des élèves de 5^e disent que 360 000 s =3h soit 1 h = 12 000 secondes. Et près de 22 % disent que 360 000 s = 6 h soit 1 h = 6000 secondes ou 1mn = 100 secondes. Autrement dit 22 % gardent la base 10 dans le calcul du temps.

Si 3,6 heures avait été une réponse proposée peut être aurait-elle recueillit une majorité.

Et que penser des 5 % qui répondent 8,5 (autrement dit n'importe quoi) ?

Peut être que la réponse vague « plus que 10 h » a désorienté beaucoup de jeunes élèves (6^e-5^e) qui gardent une idée de rigueur et de précisions dans les mathématiques. En rejetant ainsi cette réponse E imprécise, « donc » improbable, les élèves se sont alors reportés sur les quatre autres choix.

6C **Q1 4e/3e Les priorités des opérations**

Combien vaut 2004 - 200 x 4 ?

A) 7216 B) 0 C) 1204 D) 1200 E) 2804

	A	B	C	D	E	abstention
4e	194	8	**736**	21	27	14
3e	133	5	**823**	15	17	7

Malheureusement on le constate tous les ans, et dans toutes les compétitions; la priorité de la multiplication sur l'addition n'est pas un réflexe même en classe de 3e après maints rappels. Même s'il ne s'agit que d'une convention, cette règle mathématique pourrait s'appliquer simplement comme une règle, telles celles du code de la route ou autre. Mais cela n'a pas l'air d'être aussi simple.

« On apprendra à lire de gauche à droite ! Alors pourquoi pas dans ce calcul. De plus, pourquoi l'ordre des choses serait si important pour des petits calculs banals et ridicules ? Souvent, faire l'un ou bien l'autre ou l'autre ou l'un c'est pareil ! Alors si la question est si facile (la 1re) je peux faire comme je veux 2004 - 200 x 4 ».

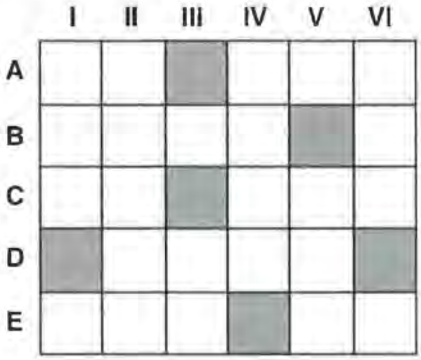
Nombre croisés*

Horizontalement

A. Diviseur de 150 – Carré d'un nombre premier
B. La somme de ses chiffres est 26
C. Multiple de 7 – Nombre qui peut être lu de droite à gauche ou de gauche à droite en gardant la même valeur
D. Carré parfait divisible par 9
E. Nombre premier supérieur à 500 – Diviseur commun de 64 et 96

Verticalement

I. Puissance de 2
II. Suite de chiffres consécutifs
III. Il reste 2 quand on le divise par 5
IV. Nombre formé de chiffres pairs différents
V. Ses trois chiffres sont identiques
VI. Le produit de ses chiffres est 36



Note : Aucun nombre ne commence par zéro.

* Ce «nombres croisés» a été conçu dans le même état d'esprit que celui de l'article *Evaluation : nombres croisés*, (pages 8 – 14), «pour s'entraîner» ou «pour se faire plaisir». Est-il plus facile ou plus difficile que le précédent ?

RÉPONSES AU PROBLÈME «LA FORÊT TRIANGULAIRE»

Denis Odiet, François Jaquet

Nous avons reçu plusieurs réponses au problème de «La forêt triangulaire», de la finale 2003 du championnat de la FFJM, présenté dans notre numéro 210 (pages 4 à 8) et il n'y aura pas besoin d'attendre la parution des annales de cette édition du concours pour connaître la solution de ce problème, qui n'exige pas de calculatrice, non autorisée lors des épreuves.

Solution 1

Daniel Poncet-Montange, qui nous a déjà donné une solution trigonométrique du problème dans le numéro 210 (solution 2, pages 7 et 8), nous en propose une nouvelle, ne mettant en oeuvre que des connaissances sur le triangle équilatéral, le théorème de Pythagore et quelques règles élémentaires de calcul de fractions et carrés. (V. annexe I)

Solution 2

Michel Criton (un des animateurs de la FFJM) nous écrit :
Je viens de recevoir Math-Ecole, dont j'apprécie toujours beaucoup le contenu.
A propos du problème «La forêt triangulaire» évoqué par Denis Odiet, voici une solution en forme de puzzle, sans calcul ou presque.
Cette solution, inspirée d'une lecture dont j'ai oublié la référence, n'est pas originale, mais son côté astucieux me paraît remarquable.
Nous l'avons présenté lors du «rama» le premier jour de la finale. (V. annexe II)

Solution 3

Christian Bazzoni, de Bôle, a une solution tout à fait analogue. (V. annexe III)

Solution 4

En feuilletant les annales de la FFJM, nous avons trouvé, dans le numéro 13, «Le Roi des nuls» (7e Championnat, Pole Ed. 1994) un problème de structure identique : «Comme la Lune». La solution donnée s'appuie sur une «belle» formule, sobre et symétrique :
$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ (I)
La question est de savoir d'où tombe cette formule.
Daniel Poncet-Montange nous en donne une démonstration, qui exige la maîtrise de quelques formules de trigonométrie. (V. annexe IV)

Solution 5

La rédaction de *Math-Ecole* propose une autre manière d'arriver à cette formule, par un puzzle qui généralise la solution de Michel Criton et qui évite le passage par la trigonométrie, mais qui fait appel à la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle en fonction des mesures de ses trois côtés. (V. annexe V)

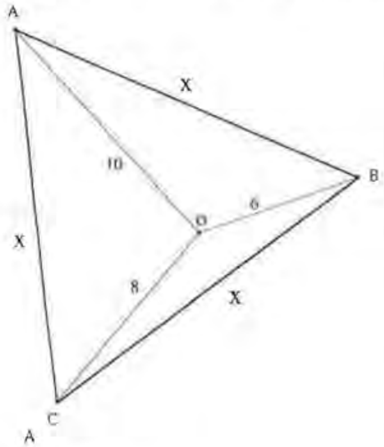
Solution 6

Denis Froidcoeur, de Lugano, nous envoie un message laconique avec un dessin en quatre étapes, sur papier transparent, obtenues à partir de la figure de base par une succession de symétries, rotations de 60 degrés et translations. (V. annexe VI)

En conclusion, un bien beau problème, qui a fait passer de bons moments à tous ceux qui s'y sont frottés. Les solutions ne sont pas très différentes, mais c'est la variété des approches qui est intéressante : découpages, rotations, trigonométrie, formules « classiques » s'enrichissent mutuellement. On peut exploiter largement ce sujet avec des élèves de l'école secondaire et du Lycée, dès le degré 9.

Annexe I

Solution de D. Poncet-Montange, pour le cas «6, 8, 10»

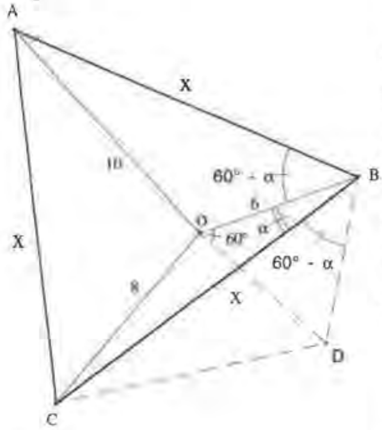


Rappel :

Le triangle ABC est équilatéral.
O est un point intérieur du triangle tel que
la distance OB vaut 6,
la distance OC vaut 8,
la distance OA vaut 10.

Calculer l'aire du triangle équilatéral de côté x.

Voici une solution tirée de l'ouvrage *Mathematical Quickies* de Charles Trigg.



Construire le triangle équilatéral BDO.

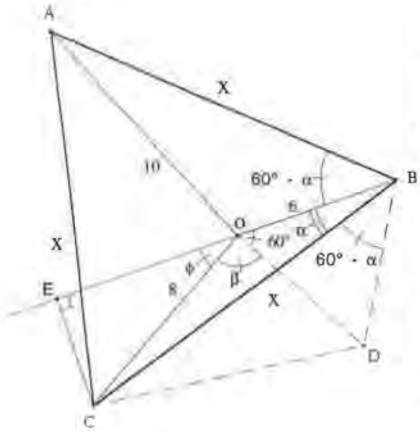
BD mesure donc 6.

Les triangles ABO et BCD ont chacun un angle égal (60° - α) entre deux côtés égaux (X et 6). Ils sont donc isométriques.

DC mesure donc 10.

Les côtés du triangle CDO mesurent 6, 8 et 10.

Ce triangle est donc rectangle en O.



L'angle BOD vaut 60°. β est un angle droit.

On prolonge le segment BO.

L'angle ϕ vaut 30° (180° - 60° - 90°).

On construit la perpendiculaire à la demi-droite BO passant par C. Son intersection avec celle-ci est le point E.

L'angle ECO vaut 60° (180° - 90° - 30°).

OE est donc la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 8,

sa mesure vaut $\frac{8\sqrt{3}}{2}$, celle de BE est égale à $6+\frac{8\sqrt{3}}{2}$.

EC mesure 4.

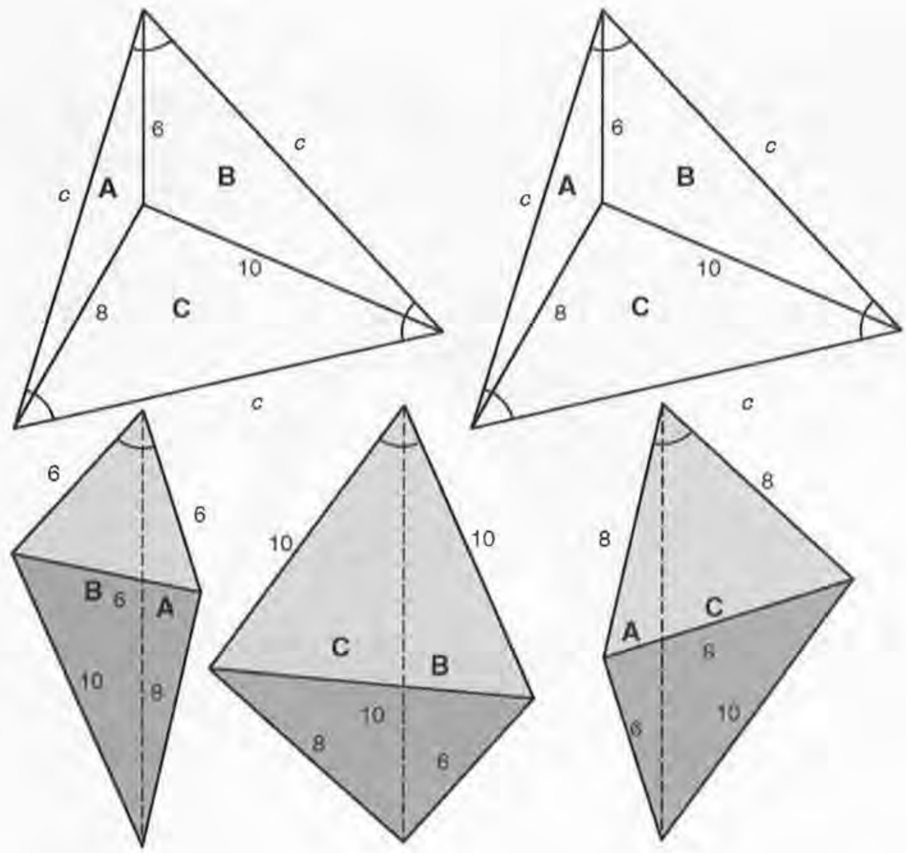
Par Pythagore dans le triangle BCE, on a

$$x=\sqrt{4^2+\left(6+\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{100+48\sqrt{3}}$$

L'aire du triangle ($\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$) vaut donc $\frac{\left(100+48\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}+36\cong 79{,}3$

Annexe II

La solution de M. Criton, pour le cas «6, 8, 10»: décomposition de deux triangles équilatéraux de côté *c* en trois quadrilatères qui, à leur tour, forment 3 triangles rectangles «6, 8, 10» et trois triangles équilatéraux, de côtés 6, 8 et 10.



On prend deux exemplaires du triangle équilatéral et on partage chacun d'eux en trois triangles de côtés respectifs [6;8;c], [8;10;c] et [6;10;c] où c est la longueur d'un côté des triangles équilatéraux.

A l'aide des six petits triangles, on réalise les trois quadrilatères de la figure jointe en les assemblant deux à deux par leur côté de longueur c.

On montre facilement que ces trois quadrilatères possèdent un angle de 60 degrés et que chacun est donc constitué d'un triangle équilatéral accolé à un triangle rectangle de côtés 6, 8 et 10. La somme des aires des trois quadrilatères est égale au triple de l'aire du triangle rectangle 6-8-10 augmenté des aires de trois triangles équilatéraux de côtés respectifs 6, 8 et 10.

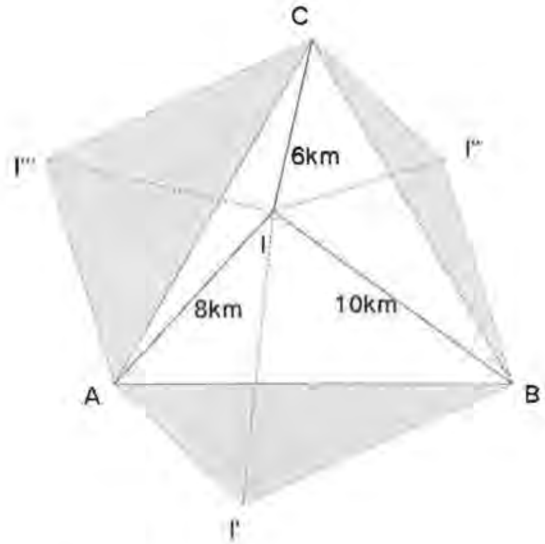
En prenant la moitié de cette somme, on obtient l'aire d'un triangle équilatéral de côté c, d'où l'on déduit ensuite la valeur de ce côté.

Annexe III

Christian Bazzoni sans découpage, en trois rotations, construit un hexagone dont l'aire est deux fois celle du triangle de départ, ce qui revient à une autre disposition des six pièces de la solution précédente.

Je partage le triangle équilatéral ABC en trois triangles auxquels je fais subir une rotation de 60^0 ainsi

$BIC \xrightarrow[R(B\,;\,60^0)]{} AI'B \qquad ABI \xrightarrow[R(A\,;\,60^0)]{} AI'''C \qquad AIC \xrightarrow[R(C\,;\,60^0)]{} CBI''$



On fabrique ainsi trois quadrilatères BICI", AI'''CI et BI'AI dont la somme de leurs aires vaut le double de celui du triangle équilatéral.

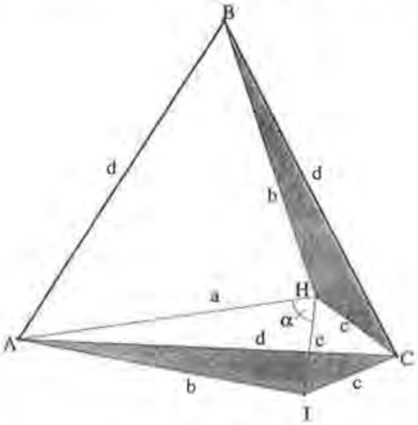
Chacun de ces quadrilatères est composé d'un triangle rectangle dont le côtés des angles droits valent 6km et 8km et d'un triangle équilatéral de respectivement 6km, 10km et 8km de côtés.

Aire du triangle équilatéral : $\dfrac{3(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8) + \frac{\sqrt{3}\cdot 6^2}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot 8^2}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot 10^2}{4}}{2}$

Donc l'aire de la forêt est de : $36 + 25\sqrt{3} = 79{,}30$ km^2 !

Annexe IV

Solution de D. Poncet-Montange, pour le cas général



Une équation fournit la mesure du côté d'un triangle équilatéral lorsque l'on connaît les distances d'un point aux trois sommets.

Si, comme ci-contre, *a*, *b* et *c* sont les trois distances du point H à chacun des sommets du triangle équilatéral de côté *d*, alors :

$$\boxed{3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}$$

Idée de départ :

Construire CHI, triangle équilatéral de côté c;

L'angle HCB est égal à l'angle ACI;

Les triangles BHC et ACI sont isométriques : un angle égal entre deux côtés égaux.

Démonstration de la formule:

Théorème du cosinus dans AHI

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha$$

$$ac\cos\alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$

$$a^2c^2\cos^2\alpha=\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4}$$

Théorème du cosinus dans ACH

$$d^2=a^2+c^2-2ac\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-2ac\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-2ac\left(\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}-\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-ac\cos\alpha+ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$d^2-a^2-c^2+ac\cos\alpha=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$d^2-a^2-c^2+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=\left(ac\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2-3a^2c^2\cos^2\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2-3\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4}$$

$$\left(2d^2-a^2-b^2-c^2\right)^2=12a^2c^2-3\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$

$$4d^4+a^4+b^4+c^4-4a^2d^2-4c^2d^2-4b^2d^2+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=12a^2c^2-3a^4-3c^4-3b^4-6a^2c^2+6a^2b^2+6b^2c^2$$

$$4a^4+4b^4+4c^4+4d^4=4a^2b^2+4a^2c^2+4a^2d^2+4b^2c^2+4b^2d^2+4c^2d^2$$

$$2a^4+2b^4+2c^4+2d^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2$$

$$2a^4+2b^4+2c^4+2d^4=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2-a^4-b^4-c^4-d^4$$

$$3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

C.Q.F.D.

A noter que la formule reste valable si le point H se trouve à l'extérieur du triangle équilatéral.

Annexe V

Solution de F. Jaquet pour le cas général :

La *Figure 1* montre, à gauche, le triangle équilatéral de côté *d*, d'aire **E***(d)*, et sa répartition en trois triangles d'aires **A, B, C,** ayant un sommet commun P. Une rotation de 60 degrés et de centre O, déplace le triangle (OPQ) en OP'Q' (au centre). Le triangle OPP' est équilatéral, de côté *a*, car il a deux côtés isométriques et l'angle compris de 60 degrés, désigné par **E** *(a)* sur la figure de droite. Le triangle PP'Q' a pour côtés *a, b, c,* il est désigné par **T** (*abc*) sur la figure de droite. On a donc l'équivalence des aires :

E(*d*) = **A** + **B** + **C** = **A** + **E** (*a*) + **T**(*abc*)

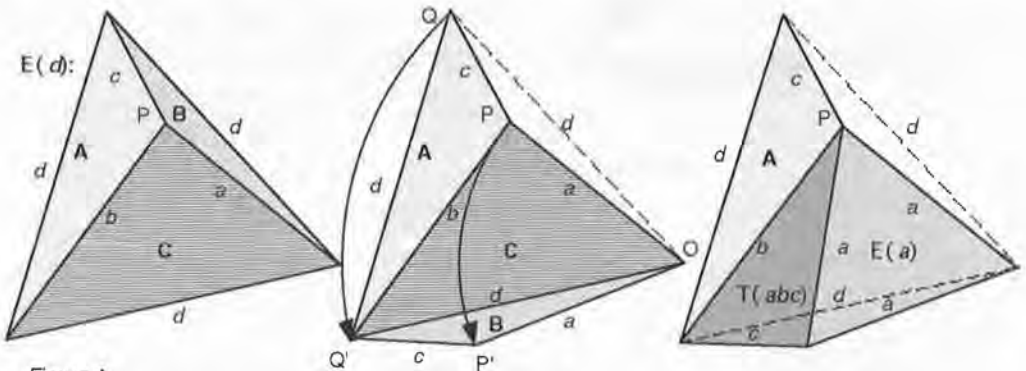


Figure 1

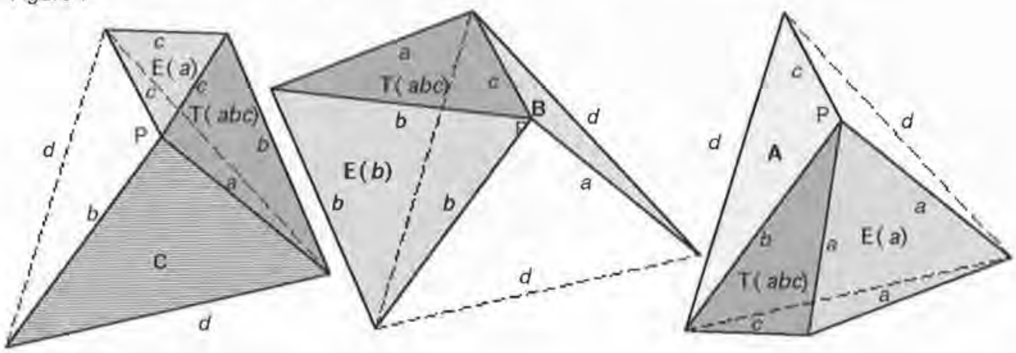


Figure 2

De même, par une rotation de la partie **A** (*Figure 2*, à gauche) et de la partie C (*Figure 2*, au centre) on obtient des décompositions du triangle initial en trois parties, respectivement **C, T**(*abc*), **E** (*c*) et **B**, **T**(*abc*), **E** (*b*). Le bilan des trois transformations donne la relation :

3**E**(*d*) = (**A** + **E** (*a*) + **T**(*abc*)) + (**B** + **E** (*b*) + **T**(*abc*)) + (**C** + **E** (*c*) + **T**(*abc*)) =

3**E**(*d*) = (**A** + **B** + **C**) + 3 **T**(*abc*) + **E** (*a*) + **E** (*b*) + **E** (*c*)

2**E**(*d*) = 3**T**(*abc*) + **E** (*a*) + **E** (*b*) + **E** (*c*)

On retombe ici, sur la relation de la solution 2, de M. Criton, mais pour le cas général.

Si l'on passe aux mesures des côtés, il faut faire intervenir la formule de Héron (moins courante mais qu'on trouve dans les formulaires) qui exprime l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés (plus concise en faisant intervenir le demi-périmètre *p*) :

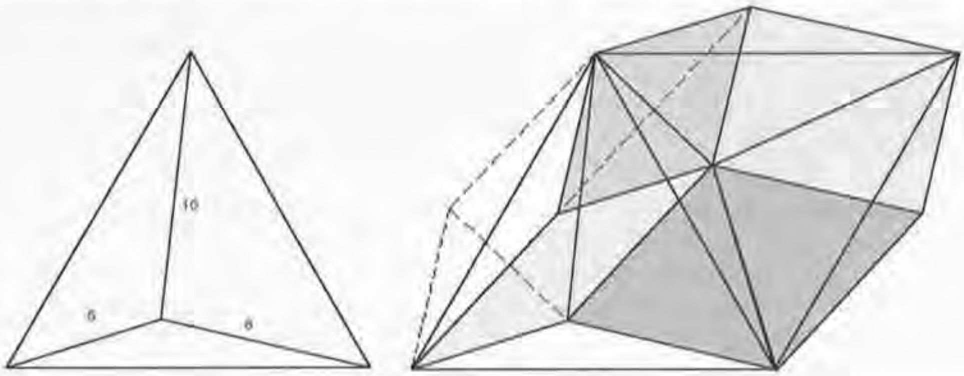
$2d^2\sqrt{3}/4 - a^2\sqrt{3}/4 - b^2\sqrt{3}/4 - c^2\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}$

$(2d^2 - a^2 - b^2 - c)^2 = 48p(p-a)(p-b)(p-c)$

Selon la formule classique, le lecteur vérifiera aisément que, en substituant $(a + b + c)/2$ à p et en simplifiant l'équation, on retombe rapidement sur l'une des cinq dernières lignes de la solution IV.

Annexe VI

Voici la figure de base de D. Froidcoeur et la figure finale, où l'on constate que l'aire de deux grands triangles (A) se décompose en 2 triangles équilatéraux de côté 6 (T_6),
2 triangles équilatéraux de côté 8 (T_8) et
3 triangles rectangles de côtés 6, 8 et 10 (T_{10}), d'où:
$A = T_6 + T_8 + 3/2\ T_{10} = (9 + 16)\sqrt{3} + (3/2)24 = 25\sqrt{3} + 36$



Cryptarithmes

M. Bernard Lamirel, nous envoie régulièrement des cryptarithmes, par thèmes, que nous n'avons pas publiés depuis notre numéro 204. Nous présentons nos excuses pour ce retard à ce fidèle lecteur et le remercions de ses sujets toujours intéressants, comme celui-ci, sur le thème de la santé!

a) $$\begin{array}{r} \text{M A N G E R} \\ +\ \text{M A N G E R} \\ \hline \text{G R O S S I R} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} \text{R E P A S} \\ +\ \text{R E P O S} \\ \hline \text{S A N T E} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} \text{T A B A C} \\ +\ \text{A L C O O L} \\ \hline \text{C A N C E R} \end{array}$$

Le a), facile, vient du *Kangourou*; le b) et le c), de plus en plus difficiles, sont des créations de M. Lamirel.
Les règles de ces opérations arithmétiques à reconstituer, sont toujours les mêmes:

- chaque chiffre est représenté par une même lettre,
- deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,
- aucun nombre ne commence par le chiffre 0.

L'intérêt des cryptarithmes est évident: c'est un jeu individuel passionnant, exigeant au niveau de la logique, qui appelle de solides connaissances mathématiques sur les algorithmes de calcul dans notre système de numération, ainsi que la résolution de systèmes d'équations jusqu'à 10 inconnues!

NOTES DE LECTURE

LES CHEVEUX DE BÉRÉNICE

Denis Guedj, romancier et mathématicien, est professeur d'histoire des sciences à l'université Paris 8.

Il est l'auteur de nombreux ouvrages, dont:

- L'Empire des nombres. Gallimard, 1996
- Le Théorème du Perroquet.
  Roman, Le Seuil. 1998
- Le mètre du monde.
  Essai-récit, Le Seuil. 2000
- Les cheveux de Bérénice,
  Roman, Le Seuil, 2003

L'auteur est parti en Egypte sur les traces d'Eratosthène. Ce roman est un hommage à l'Egypte et à la culture grecque du IIème siècle avant notre ère mettant en exergue la figure emblématique et charismatique d'Eratosthène. Au travers de cette fresque, le lecteur voyage avec Eratosthène dans les hauts lieux de la civilisation égyptienne. Théo (=Denis Guedj ?) est notre guide, c'est lui qui parle de l'expédition, qui commente les faits et gestes d'Eratosthène, qui décrit les paysages et le peuple égyptien.

Résumé

«Les cheveux de Bérénice» est un roman historique et scientifique qui se déroule à Alexandrie d'Egypte à l'époque où le roi Ptolémée Evergète et son épouse Bérénice régnaient sur le pays des Deux Terres, de –246 à –222. Alexandrie était célèbre pour son phare, pour le tombeau d'Alexandre le Grand et pour sa bibliothèque dont le directeur était Eratosthène.
Théo, notre cicérone, voyage sur un bateau reliant la Grèce à Alexandrie. Il observe une partie du ciel avec le capitaine du navire. Dans le ciel il y a une nouvelle constellation, celle des cheveux de Bérénice, explique Théo. Le capitaine est étonné, car d'habitude ce sont les marins qui donnent des noms aux constellations et étoiles mais celle-ci lui est inconnue. Théo raconte la légende associée à cette constellation. Ptolémée Evergète est parti en guerre contre la Syrie. La guerre s'éternise et la fortune n'est pas toujours du côté d'Evergète. Alors, Bérénice, craignant pour la vie de son époux, décide de faire don de sa chevelure blonde et opulente à la déesse Isis afin que son mari revienne vivant et victorieux de la guerre. Isis accepte le présent, l'époux revient victorieux et une nouvelle constellation apparaît dans le ciel entre la tête de la vierge et la queue du lion.
L'île de Pharos et son phare approchent.
Le bateau est guidé dans le port d'Alexandrie. Les douaniers montent à bord. Ils cherchent des livres sur ordre du roi pour alimenter la grande bibliothèque. Ils les confisquent aux passagers et la bibliothèque en fait une copie. Théo possède justement un rouleau très convoité, le De la Nature de Philolaos. Pour récupérer son bien, Théo se rend au Mouseion qui est le domaine d'Eratosthène. Sous ses ordres, des dizaines de scribes recopient des manuscrits anciens venus de tout le monde connu, tandis que d'autres scribes rangent les merveilles de la pensées humaine sur des étagères selon un classement bien précis. Mais ce jour la, Eratosthène présente au roi ses dernières études : un plan du monde connu et une nouvelle discipline la géographie. Ptolémée est très intéressé, autant du point de vue militaire que pour satisfaire sa curiosité naturelle. Puis il formule la question qui allait influencer la vie d'Eratosthène et de Théo : quelle est la surface représentée par la maquette du monde connu réalisée par Eratosthène ? Mais, mon roi, dit Eratosthène, pour répondre à cette question, il faudrait connaître la dimension de la Terre. Alors, répliqua Ptolémée, mets toi au travail et calcule la dimension de la Terre.
Théo rencontre Eratosthène, qui l'engage pour travailler au Mouseion. Sur un fond de crise politique de succession, Eratosthène met sur

pied l'expédition qui va mesurer la Terre. Les rouleaux de sa bibliothèque le renseignent sur les connaissances mathématiques, cosmologiques et géographiques de son époque.
Il choisit de consulter «Les Eléments» d'Euclide, «Le Traité de la Sphère» d'Archimède, «Du Ciel» d'Aristote et en particulier le «Sur la grandeur et la distance du Soleil et de la Lune» d'Aristarque de Samos.
Après avoir relu et étudié avec un autre regard les documents à sa disposition, Eratosthène ébauche la méthode qu'il va utiliser. Tous les auteurs affirment que la Terre est ronde. Il suffit donc de mesurer une portion de l'un de ses méridiens pour en connaître le pourtour. Il décide de mesurer l'ombre portée par un gnomon à midi dans les deux villes d'Alexandrie et de Thèbes. Pour mesurer une portion de ce méridien passant par Alexandrie, il va mesurer la distance entre les deux villes situées le long du Nil. Entre ces deux villes, le Nil s'écoule du sud au nord, pratiquement sur le méridien d'Alexandrie. La différence des angles obtenus avec les deux gnomons fournira la valeur de l'angle au centre, puis le périmètre de la Terre.
Ptolémée est informé de l'idée d'Eratosthène et ordonne de mettre sur pied une expédition pour mesurer le cours du Nil jusqu'à Thèbes avec le concours de l'administration royale. On affrète un bateau et on engage Béton, bématiste et descendant du célèbre Béton qui accompagna Alexandre le Grand dans ses campagnes, pour arpenter le Nil. L'expédition se met en route. Béton arpente de ses pas réguliers les berges du Nil, Théo compte les pas et Eratosthène mesure les méandres du Nil. Le soir toute l'équipe se retrouve sur le bateau. Théo met à jour son journal, l'équipage parle des villes traversées, et Rekhmirê, l'érudit égyptien de l'expédition, raconte des légendes égyptiennes. Un jour, Rekhmirê raconte à Eratosthène qu'il existe à Syène, l'actuelle Assouan, un puits où la lumière tombe perpendiculairement le jour du solstice d'été. Eratosthène comprend tout de suite la portée de cette information. S'il mesure le Nil jusqu'à la première cataracte, il ne devra plus faire qu'une seule mesure d'ombre à Alexandrie le jour du solstice. Après bien des péripéties, l'expédition parvient à Syène juste avant le début de la grande crue. Avant de reprendre le chemin d'Alexandrie, la petite équipe se rend au nilomètre d'Eléphantine et au temple de Philae.
De retour à Alexandrie, le travail de la bibliothèque attend Eratosthène et Théo. Lors du solstice suivant, Eratosthène mesure l'ombre portée par le gnomon et en déduit l'angle au centre qui est le cinquantième du pourtour total. La distance Alexandrie - Syène, mesurée par les pas de Béton est de cinq mille stades. Cette distance, multipliée par cinquante donne un périmètre terrestre de 25000 stades soit avec nos mesures modernes 39600 km.

Commentaires

J'ai trouvé ce livre passionnant et captivant. L'auteur a su doser aventures, découvertes et savoirs de telle manière que le lecteur ne s'ennuie jamais. Le lecteur peut ainsi faire agréablement une mise à jour de ses connaissances en histoire des sciences et en culture grecque et égyptienne principalement. L'auteur nous décrit Eratosthène comme un scientifique émerveillé par le monde et par les connaissances à découvrir et non seulement comme le personnage qui a inventé le crible d'Eratosthène que tous les enfants ont étudié. J'ai laissé volontairement de côté toutes les intrigues de la cour dans ce résumé.
Et les cheveux de Bérénice?
Pour le savoir... allez commander un exemplaire de cet ouvrage!

Pour se mettre à jour:

- Deux sites qui présentent les grands scientifiques de l'Antiquité et les connaissances astronomiques de la culture grecque:
http://coll-ferry-montlucon.pays-allier.com/gdscient.htm
http://users.win.be/ws109220/profs/astro/pythagore.htm

• Pour en savoir un peu plus sur Eratosthène :
http://users.skynet.be/sky35213/erato.htm

• Pour en savoir un peu plus sur l'Egypte :
http://www.osirisnet.net/docu/lien_bib.htm
http://2terres.hautesavoie.net/pegypte/texte/ptolem4.html

Raisonnement de la mesure de la Terre

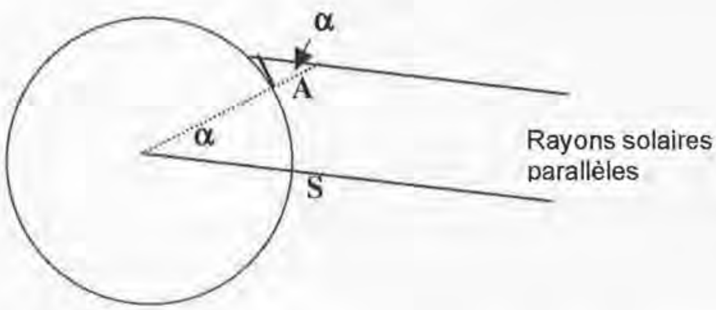
Je devrais dire raisonnement supposé.
En effet on ne possède aucun texte original d'Eratosthène. On connaît ce grand personnage seulement par les citations et descriptions faites par d'autres scientifiques.
Le jour du solstice d'été, à midi, les rayons solaires tombent perpendiculairement dans le puits de Syène **(S)** alors qu'ils produisent un angle a à Alexandrie. Cet angle α est calculable à partir de l'ombre projetée par un gnomon sur le sol, le même jour à midi.
Comme en première approximation Alexandrie et Syène sont sur le même méridien, il est midi simultanément dans les deux villes. Par la propriété des angles formés par une sécante qui intercepte deux droites parallèles, α est aussi l'angle formé par le rayon solaire passant par Syène et prolongé au centre de la Terre avec le prolongement du gnomon d'Alexandrie en direction du centre de la Terre.
Autrement dit, a est la mesure de l'angle, en degrés, qui mesure la portion de courbe terrestre qui relie Syène à Alexandrie, Eratosthène trouva 7° 12'.

$$\frac{\text{périmètre terrestre}}{5000} = \frac{360}{7°12'}$$

Sachant que la distance qui relie ces deux villes est de 5000 stades, il ne reste plus qu'à poser la proportion :

Ce qui donne 25000 stades soit 39600 km.
Comparée aux mesures actuelles, Eratosthène a fait une erreur de 400 km ce qui équivaut à 1% , donc un exploit.

Antoine Gaggero



ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Kangourou au pays des contes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
Jeux 5. Des activités mathématiques au Collège, APMEP	...	(ex à Fr. 18.-)**
Jeux 6. Des activités mathématiques pour la classe, APMEP	...	(ex à Fr. 20.-)**
L'Almanach du petit matheux en herbe, Edition Archimède G. Sarcone	...	(ex à Fr. 18.-)**
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	...	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	...	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial *Grand N*)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	...	(ex à Fr. 55.-)

Problèmes de rallyes et concours :

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans (POLE Éditions)	...	(ex à Fr. 14.-)

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel