MATH-ÉCOLE
215

Juillet 2005

Dossier « calculatrice »

La méthode de fausse position

Problèmes:
RMT et qualifications
valaisannes FFJM

MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : secretariat@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 35.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 45.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 9.–
Anciens numéros : CHF 7.– /pièce de 190 à 205,
CHF 5.– de 150 à 189 (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 2 à 4 ex. CHF 33.– par abonnement
de 5 à 14 ex. CHF 28.– par abonnement
de 15 à 50 ex. CHF 24.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Stéphane Clivaz
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex
Laura Weiss

Maquette
Raphaël Cuomo
Stéphanie Fiorina Jordan

Imprimerie
Fiorina, rue du Scex 34
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Françoise, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

215

Juillet 2005

ÉDITORIAL

LA SAGA DE LA CALCULATRICE

Luc-Olivier Pochon

La calculatrice à l'école, c'est comme les hannetons. Elle évolue par cycles avec des moments de visibilité et d'autres où la progression est plus cachée. Comme les hannetons, elle fait partie de l'environnement naturel, on ne peut l'éviter. Elle a également ses avantages et ses inconvénients. L'analogie plus savante, familière aux piagétiens, d'assimilation-accommodation, permet également de caractériser le comportement de la calculatrice à l'école : à des périodes d'effervescence où les propositions d'usage abondent et les expérimentations locales font l'objet de nombreux articles, succèdent des moments de digestion, sans grand tapage, où les idées mûrissent et où l'on procède à des mises en œuvre diverses.

Si l'on se réfère à la revue *Math-Ecole* qui, depuis les « nombres en couleur », s'est toujours fait l'écho des préoccupations de l'enseignement mathématique du moment : les périodes « d'assimilation » sont les suivantes[1] :

Avec l'apparition des calculatrices de poche à des prix abordables, à la fin des années septante, des propositions d'utilisation fleurissent accompagnées de nombreuses questions. Dans la période « d'accommodation » qui suit, la calculatrice trouve une certaine place à l'école secondaire et dans l'enseignement post-obligatoire.

Après une accalmie de presque dix ans, une nouvelle série d'articles paraît. Cette résurgence est liée à une plus grande diffusion des calculatrices devenues bon marché, à une facilité d'utilisation accrue et à l'augmentation des possibilités de calcul offertes (graphisme, opérations avec les fractions, etc.). La période d'accommodation associée voit l'apparition des calculatrices dans les moyens d'enseignement.

Dix ans encore, et nous voici à la période actuelle. Il est temps de vérifier si la calculatrice a subi une nouvelle évolution. C'est cela qui motive le thème de ce numéro de Math-Ecole et du suivant.

Dans ce numéro, avec quelques idées et des activités en cohérence pour un enseignement des mathématiques avec la calculatrice, Laura Weiss passe en revue des utilisations possibles au niveau du secondaire I. Elle propose, sous forme de thèses, les niveaux d'utilisation de la calculatrice, de la proscription à l'indispensable, selon les domaines et sujets. Quelques règles pour une bonne utilisation sont passées en revue avec les exemples d'activités qui permettent leur mise en application.

Luca del Notaro et Ruhal Floris proposent une nouvelle approche didactique pour l'enseignement de la numération à l'école élémentaire basée sur l'utilisation de la calculette. Ils exposent notamment les avantages qui, selon eux, sont en faveur d'une entrée technologique par rapport à une culture scolaire dominante du « concret » et de la manipulation des objets. Ils examinent également si les symboles affichés sur une machine peuvent faire sens avant un travail préalable de construction du nombre.

Ruhal Floris poursuit par un article plus général intitulé « A l'école obligatoire, la calculatrice peut-elle contribuer à l'apprentissage des mathématiques? ». Il y signale que, après plus d'une vingtaine d'années, la calculatrice cherche encore sa place à l'école obligatoire.

1 Une analyse historique plus détaillée paraîtra dans le numéro 216.

L'article montre que certains travaux récents de didactique des mathématiques peuvent aider à mieux comprendre la nature des obstacles liés à l'usage de la calculatrice et à proposer des stratégies d'utilisation qui vont au-delà du simple « bon sens ».

En définitive, les articles de ce dossier montrent, et montreront dans le prochain numéro, que la réflexion concernant la calculatrice a certainement mûri, poussée par une recherche en didactique qui fournit des concepts éclairants et une panoplie de stratégies de mises en application bien expérimentées. Néanmoins, les questions initiales n'ont pas totalement disparu. Notamment, l'antagonisme entre l'usage de la calculatrice, l'apprentissage des algorithmes de calcul et l'exercice du calcul mental subsiste. De même, la question du rapport entre les multiples facettes de la calculatrice, de la « prothèse de calcul » à l'instrument de recherche et d'expérimentation, n'est pas totalement résolue.
À l'avenir, il pourrait être intéressant de se pencher aussi sur les usages réels, en situation scolaire « normale », de la calculatrice. De même, il ne semble pas exister d'indication du niveau de maîtrise des calculatrices par les élèves, ni de mise en perspective de ce niveau de maîtrise avec des connaissances numériques globales. Des réponses seront-elles disponibles avant dix ans ?

Retard. Ce numéro 215 était attendu pour le début des vacances, il n'arrive qu'à la rentrée scolaire. Nous prions les lecteurs d'excuser ce retard et espérons, sans toutefois être en mesure de le promettre, qu'il ne se reproduira plus. La situation s'améliorera lorsque les abonnés à Math-Ecole seront si nombreux que la revue pourra s'offrir une équipe de rédaction dégagée d'autres obligations professionnelles.

Dans ce numéro, on trouvera, après les articles du dossier « calculatrice » - présentés par l'éditorial - **une bonne série de problèmes** : ceux de la deuxième épreuve du 15e Rallye mathématique transalpin ainsi que les résultats et analyses promis de ceux des qualifications valaisannes du concours de la FFJM. Puis, les lecteurs intéressés par l'histoire des mathématiques constateront, à la lecture de l'article sur **les méthodes de fausse position**, que bien avant les résolutions algébriques, on maîtrisait parfaitement les problèmes du premier degré. Enfin, la présentation de la revue ***Tangente, Jeux et Stratégie*** montrera que les grilles logiques sont bien antérieures à la « fièvre du Sudoku » qui a sans doute permis à de nombreux lecteurs de remuer leurs méninges au cours de ces dernières vacances.

Dans le **prochain numéro**, on trouvera une suite du dossier « calculatrice », de nombreux problèmes et analyses du RMT et, nous l'espérons toujours, un courrier des lecteurs avec de nombreuses suggestions, demandes et propositions d'articles.

Une date à retenir : celle de la prochaine rencontre de l'Association Math-Ecole (AME), le **mercredi 8 février 2006**, à Lausanne, sur l'activité en ateliers de mathématiques et l'acquisition de connaissances. (Les prochains numéros donneront plus de détails sur cette journée d'étude).

[ndlr]

L'UTILISATION DE LA CALCULETTE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : UNE NOUVELLE APPROCHE DIDACTIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION

Luca Del Notaro[1] & Ruhal Floris[2]

Le nombre cinq n'est pas seulement le suivant de quatre, il est aussi quatre plus un, et le nombre six est aussi quatre plus un plus un.
G. Vergnaud (Fayol, 1990, introduction)

1. INTRODUCTION

Cet article est un compte-rendu d'une expérience sur l'utilisation de la calculette à l'école élémentaire. À une classe genevoise de deuxième enfantine (élèves âgés de 5-6 ans), nous avons proposé une série de tâches dans le but d'explorer le nombre et les relations que celui-ci entretient avec le champ des opérations. Il s'agit pour nous, chercheurs et enseignants, de mettre les bases pour un nouveau chantier d'investigation sur les possibilités offertes par les nouvelles technologies dans le champ des apprentissages mathématiques, et ceci dès le plus jeune âge.

- Pourquoi utiliser la calculette pour l'enseignement de la numération chez des élèves de l'école élémentaire ?
- Quels sont les avantages d'une telle entrée technologique par rapport à une culture scolaire dominante du « concret » et de la manipulation des objets ?
- Comment des symboles affichés sur une machine peuvent-ils faire sens avant un long travail de construction didactique du nombre ?

Ce sont des questions récurrentes auxquelles nous répondons par ces trois arguments majeurs.

- L'adaptation au rôle des instruments de calcul dans la société actuelle : l'évolution technologique de notre société moderne a obligé l'école à se conformer et à tirer parti de ces progrès dans les choix d'enseignement. La calculette en est un exemple éloquent. Depuis son développement dans les années septante, cet instrument de calcul a subi un processus de démocratisation époustouflant permettant à tout un chacun d'avoir accès à ce type de technologie. Toutefois, si les intentions de principe des institutions de formation entrent en résonance avec cette évolution, on peut faire état encore de nombreuses résistances quant à l'utilisation de la calculette et ceci particulièrement chez les enseignants de l'école primaire, pour qui l'utilisation de la calculette reste encore occasionnelle et s'avère surtout d'ordre utilitaire. Une culture dominante du « concret » et surtout de la maîtrise des algorithmes des quatre opérations, semble laisser peu de place à l'investigation des potentialités de la calculette.

- L'économie de l'aspect graphique : à 5-6 ans, la maîtrise du geste graphique pour l'écriture des chiffres et des lettres pose souvent encore de gros problèmes. L'imprécision du tracé du symbole numérique ou alphabétique s'accompagne ainsi d'une difficulté de sa relecture. Nous constatons

1 Enseignant en division élémentaire à l'Ecole du XXXI-Décembre à Genève, Département de l'Instruction Publique ; lucadelnotaro@bluewin.ch.

2 Chargé d'enseignement en didactique des mathématiques à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education de l'Université de Genève et professeur de mathématiques au Collège Voltaire à Genève, Département de l'instruction publique, Ruhal.Floris@pse.unige.ch.

que la calculette, avec son univers de touches, permet un accès rapide et sans ambiguïtés aux symboles chiffrés et ceci tant du point de vue de l'écriture que de la lecture.

- La calculette est plus qu'un simple outil de calcul : en effet nous considérons la calculette comme l'interface « contraignante » entre le savoir mathématique (et plus particulièrement numérique) de la situation et les connaissances de l'élève. En reprenant Brousseau (1986a, 1986b, 1990, 1998) nous entendons par milieu mathématique cette part de la situation didactique porteuse de connaissance contre laquelle l'élève jouera ses coups. Ici la calculette, ne représente plus un simple outil pour opérer, mais devient le lien « contraignant » permettant de modéliser, par ses fonctions, les connaissances des élèves se rapportant au milieu de la situation. En d'autres termes, le caractère utilitariste de la calculette (tel qu'il est très souvent exploité par les enseignants) est abandonné au profit d'une conception modélisée des connaissances de l'individu. Par souci de précision, nous dirons aussi que nous ne considérons pas la calculette comme un milieu mathématique à part entière, se suffisant à lui-même et dépositaire de toutes les connaissances (ce serait réducteur et imprécis par rapport à la théorie des situations de Brousseau de laquelle nous nous inspirons), mais nous avançons l'hypothèse forte qu'elle représente une contrainte fondamentale pour saisir la nature de certains objets du milieu : cette contrainte étant si forte que nous y rattachons au moins une partie des caractéristiques du milieu étudié.

2. LA CALCULETTE COMME MILIEU NUMÉRIQUE

Rappelons qu'en didactique des mathématiques on appelle milieu les objets et les actions sur ces objets correspondant aux notions mathématiques en cours d'étude. Traditionnellement, l'enseignement du nombre et de la numération s'appuie sur un milieu constitué d'objets bien séparables les uns des autres, comme les doigts, des jetons, des lapins, des pommes, des traits, des points, etc. Ce milieu s'enrichit de la comptine et des actions d'énumération associées. Selon l'organisation des activités d'enseignement, ce milieu peut avoir différentes structurations. Ainsi, une propriété essentielle d'un milieu est celle de fournir des éléments de formulation et de validation des actions (des rétroactions) et de validation des formulations, les actions seules ne permettant pas la conversion en savoir des connaissances qui les guident. C'est bien sûr cette structuration qui est l'objet principal du travail mené en mathématiques dans les premiers degrés de l'école. Le cas du comptage, composé de la comptine, fait d'objets symboliques (des mots) à associer à la technique d'énumération montre que le milieu n'a rien de statique et qu'une certaine fonctionnalité doit être prise en compte pour qu'il corresponde au concept mathématique. On pourra mesurer cette fonctionnalité à travers la réalisation de tâches telles que « mettre la table sans chercher les couverts un par un » ou d'activités comme « Le robot »[3], « Immeuble »[4] ou encore « Les cousins »[5]. L'intégration de la calculette dans le milieu, c'est-à-dire comme objet « officiel » du contrat didactique et non comme accessoire facultatif, fournit une rétroaction immédiate. Au geste d'appuyer sur les touches + et 1 est associé le parcours sur la bande numérique, au symbole affiché est associé le nombre à écrire sur la bande. Ce nombre correspond au nombre de fois que l'on a effectué un geste :

3 Ermel (1991), Apprentissages numériques - CP , Hatier - Enseignants , Paris, pp. 57 à 61.

4 Marchetti C., Miles C., *Activités mathématiques pour le cycle initial, Département de la formation et de la jeunesse*, Etat de Vaud.

5 Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E., (1996), *Livre du maître, Méthodologie 1P*, COROME.

au nombre 3 correspond 3 fois le geste, au nombre 10 correspond 10 fois le geste. La présence de la calculette dans le milieu permet ainsi d'établir un lien fonctionnel avec la construction de la bande numérique et avec la comptine.

La calculette va aussi loin que l'on veut, elle fournit à l'élève le moyen de combler son ignorance : elle « représente » l'institution mathématique. Et de manière non didactique de surcroît, puisque complètement indépendante de l'enseignant. Les enseignants des plus grands degrés connaissent bien la résistance d'attitudes telles que « on ne peut pas diviser par zéro car la calculette dit *Error* », ce qui illustre ce rapport à la calculette comme institution. De ce fait, lorsque l'élève sait l'utiliser, et qu'il a le droit de le faire, la calculette peut jouer le rôle d'un milieu de validation numérique. Le parallélisme de son principe avec celui de la construction mathématique du nombre entier renforce encore ce fait.

3. QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES AUTOUR DE LA CONSTRUCTION DU NOMBRE

La construction du nombre a été étudiée par de nombreux philosophes, mathématiciens, psychologues. Du point de vue mathématique, deux axiomatiques ont été proposées au 19e et au 20e siècles. Celle de Russell considère le nombre comme la propriété commune à toutes les collections équipotentes entre elles, elle définit ce qu'on appelle le nombre cardinal et correspond au savoir mathématique sous-jacent à des situations telles que celles de la mise du couvert ou des « cousins ». Les recherches de logique ont mis en évidence certains paradoxes liés à l'axiomatique de Russel. Piaget s'est beaucoup intéressé à cette axiomatique, qui a eu une influence certaine sur les méthodologies d'enseignement des années 1970. Brainerd (1973) propose une synthèse de recherches sur la question de la primauté de l'aspect ordinal sur l'aspect cardinal au cours du développement, questionnant certaines conclusions de Piaget.

Les cinq axiomes de Peano :

1. 0 est un entier naturel (donc l'ensemble des entiers naturels n'est pas vide).
2. Tout entier naturel n a un successeur, noté s(n).
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur (l'ensemble des naturels a un premier élément).
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est égal à N (c'est le principe de récurrence).

L'axiomatique de Peano définit un nombre de départ et la relation de succession. La propriété de récursivité énonce la possibilité de répéter la succession tant que l'on veut, plus précisément de définir tout successeur du nombre n en considérant n défini. Elle permet de construire l'ensemble des nombres entiers naturels ainsi que l'opération d'addition, en associant à la succession l'addition de 1. Elle fonde également toutes les études de consistance logique de l'édifice mathématique.

En ce qui concerne l'enseignement du numérique, l'axiomatique de Peano est à associer au comptage (utilisation de la suite numérique), correspondant à un aspect dynamique du nombre, comme moyen de représenter un phénomène répétitif. Le nombre ne représente pas seulement un état, le cardinal d'une collection, mais une série de transformations (cf. aussi la citation en exergue). On trouve cet aspect dans les travaux récents de Nuñez et Lakoff (2000) qui en font une des quatre métaphores fondamentales du nombre. Les moyens d'enseignement actuellement utilisés ne proposent plus un enseignement fortement calqué sur ces travaux de psychologie et ils prennent en compte les apports sociaux, comme ceux de la connaissance « mécanique » de la suite des nombres (comptine). Dans ses travaux, Briand (1999) étudie d'un point de vue didactique les connaissances en jeu dans les activités de dénombrement en mettant en évidence que certaines d'entre elles ne sont pris en charge par le système enseignant alors qu'elles constituent bien plus que des savoir-faire, mais plutôt de véritables connaissances qui pourraient être enseignées. C'est dans cette perspective que se situent nos travaux.

4. LA TI-106

Pour nos expériences, nous avons utilisé la calculette de *Texas Instruments* TI-106 en dotation aux élèves de 3e et 4e de l'enseignement primaire genevois. Ce support technique d'accès facile et convivial permet de faire les quatre opérations, de calculer la racine carrée et les pourcentages. Cette calculette dispose en outre d'une fonction de mémoire avec possibilité d'effacement ainsi que d'une touche de remise à zéro et de correction. Une touche permet de changer les nombres en leurs opposés. Dans le cadre de notre recherche, chaque élève a pu disposer de sa propre calculette.
Un complément utile au dispositif de recherche comme le nôtre est représenté par la calculette « transparente ». Il s'agit du même modèle, avec les mêmes fonctions qui peut être placé sur un rétroprojecteur. L'image à l'écran sera celle de la TI-106 sur laquelle il est possible d'opérer exactement de la même manière qu'avec la calculette en dotation aux élèves. Cet avantage technologique permet une visualisation collective des gestes et des opérations effectuées sur la calculette.

5. LES PREMIERS PAS AVEC LA CALCULETTE (PREMIÈRE PHASE)

Dans un premier temps nous avons proposé aux élèves une série de tâches pour se familiariser avec la calculette. A travers celles-ci il s'agissait pour nous de préparer le terrain à l'exploration de la bande numérique (deuxième phase).

Puisqu'il n'y a pas, à notre connaissance, de littérature spécifiquement consacrée à la calculette à l'école élémentaire, nous avons dû inventer des tâches permettant à la fois un accès immédiat à la calculette et, surtout, un traitement du nombre dans sa composante graphique, cardinale et ordinale.
Nous avons donc proposé des tâches « naïves », qui au fil du temps se sont complexifiées. Nous entendons par là des tâches s'inspirant de pratiques sociales élémentaires de la calculette. Ces pratiques sociales partagées, sont érigées en une « culture de classe » sur laquelle va se fonder le principe de la construction du nombre.
Pour les besoins de l'article, nous avons subdivisé ces tâches en deux grandes catégories : des tâches pour écrire et lire le nombre et des tâches pour opérer sur le nombre. Si la première catégorie résulte du classement de toutes les tâches dont la composante numérique est le fruit d'opérations mentales préalables traduites par des gestes sur le clavier (par exemple sérier des nombres), la deuxième, elle, regroupe les tâches dont l'opération sur le nombre se fait uniquement au travers de l'outil technologique et ceci dans sa composante mathématique la plus orthodoxe.
La progression et la présentation des tâches aux élèves n'ont pas suivi l'ordre de présentation développé dans cet article. Il y a un rapport dialectique entre les tâches de la première et la deuxième catégorie.
Nous n'avons pas pu distinguer les termes chiffres et nombres dans les consignes proposées, dans la mesure où cela n'aurait pas eu de sens pour les élèves, et où certaines tâches les confondent : pourrait-on dire « chaque chiffre est la moitié du suivant (cf. tâche 14 ci dessous) » ?

5.1. Des tâches pour écrire et lire les nombres

La première catégorie regroupe toutes les tâches pensées pour écrire et lire les nombres. Avec celles-ci, nous proposons aux élèves de jouer pendant plusieurs semaines avec l'univers des nombres en faisant l'économie des difficultés d'écriture de même que nous les acculturons au « geste » sur la touche dont le produit, affiché à l'écran, est un symbole (ou une suite de symboles) numériques.

1. Chercher librement des configurations de nombres sur la calculette.
2. Écrire tout plein de ... deux (22222222).
3. Partager en deux parties égales le display de la calculette (44448888 ; 22226666).
4. Écrire trois fois le 3 (333), cinq fois le 5 (55555).
5. Écrire le plus grand nombre possible avec la calculette.
6. Dictée de nombres (« deux, huit, quatre, cinq, neuf »).
7. Chercher différentes manières pour écrire 0.
8. Chercher les nombres qui peuvent être lus en retournant la calculette.
9. Écrire les nombres de haut en bas du clavier, de bas en haut, de gauche à droite, de droite à gauche, en diagonale.
10. Écrire un nombre plus grand que ..., plus petit que ...
11. Écrire les nombres affichés sur le clavier du plus petit au plus grand et inversement.
12. Écrire les nombres qu'il y a entre 1 et 5, 2 et 9, 6 et 8, ...
13. Chercher les nombres entre 4 et 5, 7 et 8, 1 et 2, ...
14. Le premier nombre est la moitié du suivant, le deuxième nombre est le double du premier (2, 4) ; le premier nombre est le double du suivant, le deuxième nombre est la moitié du premier (8, 4).

Cette liste non exhaustive de tâches d'écriture sur la calculette, de complexité variable, permet aux élèves de se laisser surprendre par ce que le nombre « fait » surtout quand il est associé, par une opération ou non, à d'autres nombres. Ainsi, par exemple, écrire plusieurs nombres de suite (tâche 1) ou plusieurs fois le même nombre comme dans les tâches 2, 3 et 4 permet d'une part de créer des effets de surprise (au sens de Conne, 2004 ; Auckenthaler, 2004) de nature graphique (par exemple : 88888888) mais surtout permet de travailler le nombre de gestes à effectuer sur la touche pour obtenir le résultat espéré.
Dans la même logique de surprise, les jeunes élèves seront très étonnés de constater que les nombres 1, 2, 5 et 8 ne changent pas d'aspect quand on retourne la calculette, que le 3 devient un E, que le 4 se transforme en h et que le 6 et 9 échangent leurs rôles (tâche 8).
Écrire le plus grand nombre possible avec la calculette (tâche 5) représente une incursion fort intéressante dans le domaine des grands nombres, même si le jeune élève ne sera pas en mesure d'en déchiffrer l'aspect cardinal. Toutefois il donne la mesure de ce qui est grand, voire très grand et surtout de questionner indirectement l'infini. *Y a-t-il un nombre plus grand que le plus grand nombre de planètes de l'univers ?*
La dictée de nombres (tâche 6) demeure un exercice classique du domaine. La difficulté principale réside dans la mémorisation de la suite des nombres surtout quand celle-ci dépasse les trois ou quatre positions sur l'écran de la calculette.
Pour les élèves de deuxième enfantine la touche 0 est problématique (tâche 7) puisqu'ils ont beau appuyer sur la touche correspondante mais celle-ci ne donne aucun signe de l'existence du nombre associé, puisque le chiffre 0 est déjà affiché. Comment peut-on alors écrire 0 ? Cette question fait émerger quelques solutions spontanées intéressantes. La plus fréquente consiste à faire précéder le 0 d'autres chiffres (par exemple 30000000, 80808080) ou alors en utilisant la virgule. Ces solutions permettent aux élèves de constater que le chiffre 0 ne précède jamais aucun autre chiffre sauf si l'on est dans le domaine des décimaux.

Taper les nombres de haut en bas du clavier, de bas en haut, de gauche à droite, de droite à gauche, en diagonale (tâche 9) reprend le principe lié aux gestes précis à accomplir sur le clavier pour réaliser une performance numérique, l'affichage d'une suite arithmétique dans ce cas. Plus particulièrement les élèves remarqueront que de gauche à droite et de droite à gauche l'écart est de 1, que de haut en bas et de bas en haut l'écart est de 3, qu'il y a une diagonale avec un écart de 2 et une autre avec un écart de 4.

Écrire un nombre plus grand que ... ou plus petit que ... (tâche 10), écrire les nombres affichés sur le clavier du plus petit au plus grand et inversement (tâche 11), écrire les nombres qu'il y a entre, par exemple 1 et 6, 2 et 9, 5 et 8, (tâche 12) représentent des occasions pour baliser la question de la sériation des nombres. En d'autres termes, faire afficher des mini-suites de nombres sur l'écran de la calculette **préfigure la démarche d'écriture sur une bande en papier**.

Demander aux élèves de chercher les nombres entre 4 et 5, 7 et 8, 1 et 2, (tâche 13) est un clin d'œil au clivage mathématique entre le domaine des entiers naturels et les nombres décimaux. Les enseignants voulant se lancer dans ce type de questionnement seront étonnés de certaines représentations qui, à 5 ans déjà, laissent la place à quelque chose entre deux entiers naturels qui se succèdent.

Enfin, bien que plus complexe que les précédentes, la tâche 14 donne l'occasion de jouer sur les relations x2 et /2. Afficher un nombre doublé ou la moitié d'un autre nombre suppose une connaissance assez poussée des relations existantes.

5.2. Des tâches pour opérer sur le nombre

Dans cette deuxième catégorie nous avons regroupé les tâches qui permettent d'opérer sur le nombre en utilisant certains symboles mathématiques. Autrement dit, ce sont des tâches « à la charge » de la calculette ; celle-ci intériorise des techniques permettant de faire effectuer les quatre opérations.

1. Additionner toujours 1 au résultat précédent (1+1=2 ; 2+1=3 ; 3+1=4 ; 4+1=5 ; ...).
2. La cible 20 : si je fais 1+1+1 ... est-ce que j'arrive à 20 ? Et si je fais 2+2+2 ... ? Et avec 3 ? Et avec 4 ?
3. Si je fais 6+6+6+ ... jusqu'à 30 , quels sont les nombres par lesquels « je passe » et quels sont les nombres par lesquels je ne passe pas ?
4. Écrire 1+= et appuyer sur la touche = de manière répétée pour obtenir la suite des nombres avec un intervalle de 1. Même exercice avec 2, 3, ...
5. Avec la racine carrée répétée, réduire à 1 (par défaut) le plus grand nombre inscrit sur la calculette.
6. Le « + 0 » qui ne change pas le nombre (42+0=42 ; 4538+0=4538).
7. Le « - 0 » qui ne change pas le nombre (527-0=527 ; 29-0=29).
8. Le « x1 » qui ne change pas le nombre (5x1=5 ; 86x1=86).
9. Le « x0 » qui transforme le plus grand nombre en 0 (54749863x0=0).
10. Le « ÷ 0 » qui transforme le plus grand nombre en 0 avec Error (65230674:0=0 E).
11. Passage à la dizaine, à la centaine, au millier, à la dizaine de millier avec +1 (9+1=10 ; 99+1=100 ; 999+1=1000 ; 9999+1=10000).
12. Trouver une addition dont le résultat est ... (...+...=6).

Additionner toujours 1 au résultat précédent (tâche 1) ou afficher 1 + = et appuyer sur la touche = de manière répétée pour obtenir la suite arithmétique de raison 1 (tâche 4), sont des tâches similaires qui matérialisent le principe de construction du nombre selon l'axiomatique de Peano rappelée précédemment. C'est autour de ce postulat fondamental et donc de l'exploration de l'algorithme « +1 » que nous avons développé notre expérimentation sur les bandes numériques.

Sur la base de ce qui précède, nous avons investi préalablement des tâches dites de « cible » (tâche 2). Les élèves jouent avec le principe du +1 pour atteindre des cibles numériques. Il est intéressant de remarquer qu'en deuxième enfantine, ce n'est de loin pas admis qu'en faisant 1+1+1+... on puisse atteindre la cible 20. Avec des intervalles de 2, 3 ou 4 c'est encore plus difficile.
La tâche 3 est une variante de ce qui précède. Demander d'additionner 6+6+6+ ... jusqu'à 30, et d'indiquer les nombres par lesquels « on passe » et les nombres par lesquels « on ne passe pas » permet de faire un clin d'œil au champ de multiples d'un nombre.
Une autre « curiosité » de la calculette est représentée par la racine carrée en essayant de réduire à 1 (par défaut) le plus grand nombre inscrit sur la calculette (tâche 5). L'apparition des 0 après la virgule constitue une sorte d' « animation » menant au résultat par défaut de 1.
Les jeunes élèves peuvent observer que certaines opérations ne changent pas le nombre. Ainsi les tâches 6, 7 et 8 surprennent les élèves dans la mesure où le « + 0 », le « - 0 » et le « x1 », même utilisés plusieurs fois et en les combinant, ne changent pas le nombre de départ.
A l'inverse, avec les tâches 9 et 10, les élèves pourront constater que le plus grand nombre possible affiché sur la calculette peut être réduit à 0 en le multipliant ou en le divisant par 0 (pour la division le 0 sera accompagné de la lettre E de Erreur). Certains élèves voudront chercher des grands nombres pouvant « résister » à ces deux opérations. Le débat sera animé !
Nous avons été assez étonnés de constater que des élèves de deuxième enfantine ont des connaissances, certes incomplètes, sur le passage à la dizaine, à la centaine et au millier (tâche 11). Nous leurs avons demandé d'anticiper quel serait le résultat de 9+1=, 99+1=, 999+1= et 9999+1= ... Même cette dernière opération laisse entrevoir des hypothèses sur la valeur positionnelle du nombre.
A la fin de cette phase exploratoire il est possible de demander aux élèves de chercher des additions avec un résultat donné (tâche 12). L'enseignant pourra ainsi inaugurer le chapitre de la décomposition du nombre.

5.3. Quelques remarques générales

Nous rappelons que le dispositif préliminaire avec les tâches décrites ci-dessus a pour but de créer une culture de l'utilisation de la calculette. Il s'agit en particulier de donner du sens aux touches du clavier et aux opérations sous-jacentes à travers les algorithmes des « gestes » dont l'importance à été soulignée plus haut.
Ainsi l'entrée dans le nombre avec le support technologique de la calculette a-t-elle été moins difficile que prévue, ce qui nous laisse penser qu'il existe déjà, dans la petite enfance, un rapport au nombre médiatisé par un support technologique. Nous pensons que les pratiques sociales autour des touches du téléphone, de diverses télécommandes, ou de codes d'accès à un immeuble, à un cadenas de vélo, etc. constituent des prémisses sociales à partir desquelles on peut construire, dès le plus jeune âge, des savoirs mathématiques spécifiques à la calculette.

Toutes les tâches décrites dans ce chapitre sont le fruit d'une investigation du milieu potentiel médiatisé par la calculette. Comme telles, elles sont le fruit du jeu que l'expérimentateur peut ou souhaite jouer avec la calculette, mais aussi le résultat du jeu de l'expérimentateur avec le jeu de l'élève et sa calculette. Au fil de ces interactions, le milieu s'enrichit jusqu'à produire une variété de connaissances utiles (Conne, 1992) exprimées dans de brefs débats reprenant certaines remarques spontanées : « on ne peut pas atteindre 17 (sous entendu : en ajoutant des 2) ». A plusieurs reprises, nous avons observé le devenir des différentes connaissances utilisées et donc des savoirs numériques visés. L'utilisation de la version transparente de la calculette a permis de partager avec l'ensemble de la classe ces moments de connaissances et de savoirs. Ces procédures ont été observées lorsque les élèves ont « opéré » sur la calculette transparente qui, nous le rappelons, permet de projeter au rétroprojecteur toutes les opérations effectuées.

6. LES BANDES NUMÉRIQUES : UN JEU DE TÂCHES POUR ABORDER LA NUMÉRATION (DEUXIÈME PHASE)

Le corpus principal développé par cette recherche est représenté par un jeu de tâches[6] sur les bandes numériques. Par bande numérique nous entendons un support matériel constitué par des rouleaux de papier sur lesquels se déroule la suite des nombres entiers naturels.

Les rouleaux de papier pour calculatrices ou caisses enregistreuses (se trouvant facilement dans les grandes surfaces) sont le support idéal : d'une largeur d'environs 5-6 centimètres et d'une longueur pouvant atteindre les 40 mètres, elles permettent de développer des expériences numériques inattendues et rares (quel lecteur aura déjà eu l'occasion d'écrire, une fois dans sa vie, la suite des nombres jusqu'à 1000, 2000 ou plus ?).

L'idée de travailler dans cette perspective a été suggérée par un texte de John Holt, *How children learn* (1967, p. 124-126) dont l'originalité et le caractère essentiel des propos méritent d'être cités en introduction à ce chapitre. Nous en citons ici un extrait traduit en français par F. Conne.

Un jour, c'était la même année, alors que je pensais à cet élève de 5e année qui m'avait dit qu'entre 100 et 200, il y avait 164 nombres entiers, je me suis dit, intuitivement, que les enfants devaient croire que les nombres devenaient de plus en plus denses, si on peut le dire ainsi, alors qu'ils devenaient plus grands ; en bref qu'il y avait plus de nombres entre 900 et 1000 qu'entre 100 et 200. Même s'ils étaient pleins de bon sens lorsqu'il s'agissait de petits nombres, ils commençaient à perdre ce bon sens quand ces nombres devenaient particulièrement grands - ce qui pourrait être vrai aussi pour chacun d'entre nous – et leur tête commençait à nager et leurs devinettes devenir de plus en plus hasardeuses.

Je me suis dit que les élèves de première et de seconde année seraient peut-être intéressés à voir comment les nombres augmentent, ainsi qu'à pouvoir se faire une idée concrète de la taille de certains nombres. Un jour, je me suis procuré un de ces rouleaux de papier que l'on met dans les machines à calculer, l'ai amené avec moi dans la classe de première année, et, sans dire un mot, j'ai dessiné une suite de points sur le rouleau, espacés tous les 3cm environs. Une fois que j'en ai dessiné quelques-uns, je les ai numérotés – 1, 2, 3, 4, 5 – un nombre au-dessus de chaque point. Comme à l'habitude, il n'a pas fallu longtemps pour que quelqu'un vienne regarder ce que je faisais. Ils regardaient un moment puis s'en allaient, et d'autres venaient voir à leur tour. De temps en temps un enfant disait : « Pourquoi tu fais ça ? » Il me semblait que cette question voulait dire : « Allez-vous faire quelque chose avec ça ? » Et je ne répondais pas. Si un enfant demandait de but en blanc s'il devrait lui aussi en confectionner un, je lui disais « Par bonheur, non ! » Durant tout ce temps le nombre augmentait. Le travail s'approchait de 100 et les enfants sont venus me regarder l'écrire. C'était comme ce moment magique où sur le compteur kilométrique de votre voiture, une suite de 9 se change en une suite de 0.

Puis quelqu'un m'a demandé : « Où avez-vous eu ce rouleau ? » J'ai dit le nom du magasin. « Combien ça coûte ? », 25 centimes « Pourrais-je en avoir un ? » J'ai dit « certainement, si tu me donnes l'argent. » J'ai pensé que les choses en resteraient là. Pas du tout, le lende-

6 Notion proposée par François Conne et travaillée au sein du Groupe de Didactique des Mathématiques de l'Enseignement Spécialisé, Société Suisse pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, Lausanne.

main quelques enfants m'ont apporté une pièce pour leur rouleau. Je le leur ai acheté et ils se sont mis au travail. En peu de temps voici qu'une douzaine d'enfants environ, tant de première que de seconde année, travaillaient à leur rouleau de nombres. Quelques-uns se contentaient d'écrire les nombres, sans les espacer soigneusement; mais d'autres me copiaient en les disposant de manière uniforme. Les nombres augmentaient et augmentaient. Plusieurs enfants en étaient aux centaines. J'ai poursuivi mon propre rouleau – je devais éventuellement coller un nouveau rouleau pour l'allonger, et j'ai poursuivi jusqu'à atteindre 1500 ou quelque chose d'approchant. Mais deux garçons particulièrement intéressés par les nombres et prompts à faire la course, ont emporté leur rouleau à la maison afin de poursuivre leur travail, et m'eurent vite dépassé atteignant environ 2000.

Dans les paragraphes qui suivent nous essayerons d'expliciter comment, sur la base des idées de Holt, nous avons développé un jeu de tâches permettant l'investigation du milieu mathématique relatif à la numération en lien avec la calculette. Les tâches décrites ci-après suivent l'ordre chronologique. Nous précisons que certaines d'entre elles sont le fruit du jeu de l'expérimentateur/enseignant avec le jeu de l'élève et de son propre milieu et donc, que certains « virages didactiques » inattendus s'expliquent par la nécessité d'aller questionner un type de connaissance que l'élève a bien voulu nous montrer à un moment donné.
Nous nous sommes clairement inspirés de John Holt pour démarrer le dispositif.
Un matin, assis à une table, l'un des deux auteurs de cet article, enseignant élémentaire, a commencé à écrire de gauche à droite, sur une bande de carton d'environ 80 cm de longueur et 5 cm de largeur, une suite ordonnée de nombres en commençant par 1, 2, 3, 4, etc. Puisque nous étions dans la période dite « d'accueil » du matin, les élèves arrivaient de manière échelonnée. Les premiers n'ont pas hésité à questionner l'enseignant.

- « Qu'est-ce que tu fais ? »
- « J'écris des nombres ! Tu veux essayer ? »

Ces deux phrases on suffi pour démarrer le dispositif d'investigation. Ce jour-là, au bout de 45 minutes, la majorité des élèves de la classe était penchée sur l'écriture des nombres et inaugurait un travail qui allait durer six mois, soit tout le deuxième semestre de la deuxième enfantine.

Tâche no 1

Sur une bande de carton d'environ 80 cm de longueur et 5 de largeur écrire, de gauche à droite, la suite des nombres en commençant par 1, 2, 3, 4, etc. Quant l'élève arrive au bout de la première bande, il peut en rajouter une deuxième en la collant pour continuer la suite des nombres. En fonction de l'étendue du champ numérique, plusieurs bandes peuvent être collées ensemble. Après chaque nombre on écrit un point (cf. fig. 1).

1. 2. 3. 4. 5.	

Fig. 1

Si l'élève ne peut continuer la suite des nombres parce que ses connaissances numériques s'épuisent, il peut utiliser la calculette en exploitant la touche +1 ou la touche = qui, comme un l'a vu précédemment, ajoute toujours la valeur du deuxième terme de l'addition. Le passage à la calculette est un moment essentiel. Dans notre dispositif l'enseignant propose aux élèves « en panne » d'utiliser la calculette sans pour autant leur suggérer de faire +1. En effet, l'idée était, dans un premier temps, de voir dans quelle mesure les tâches préliminaires décrites dans le chapitre 5, étaient constitutives d'une culture dans l'utilisation de la calculette et surtout de voir si certains principes de la construction du nombre au sens de Peano étaient présents. Or, avec grand intérêt, nous avons constaté que certains élèves (environ un tiers de la classe) n'ont pas hésité à utiliser le +1 pour résoudre l'impasse numérique dans laquelle ils se trouvaient et

continuer sans problème la construction de la bande numérique. Ceci montre que le milieu mis en place dans la phase préliminaire à permis d'activer les connaissances nécessaires, dont l'utilité au sens de Conne (op. cit.) a été reconnue en ajoutant 1 au nombre précédent inscrit sur la bande.
Quant aux élèves ne sachant pas quoi faire avec la calculette, l'enseignant leur a proposé, soit de refaire la bande « avec plus d'élan » soit de reprendre le lendemain la première version. Ce décalage temporel a permis de contourner un certain effet de *saturation du milieu* (C. Del Notaro, thèse de doctorat en cours) qui se profilait de par l'abondance de connaissances que ce milieu génère.
Néanmoins, nous pouvons attester qu'il a suffi de 2 ou 3 leçons sur la même bande, pour permettre à ces élèves de questionner et d'utiliser la calculette dans la perspective du +1. Signe que, pour ces élèves aussi, le milieu numérique convoqué par la calculette était suffisamment fort pour leur permettre de réguler leurs connaissances et donc résoudre la difficulté dans l'avancement de la bande.

Tâche no 2

Avec le même type de bande, l'élève peut construire des suites des nombres dont l'écart est toujours de 2, 3, 5, etc. voire 100 (cf. fig. 2).

3. 6. 9. 12. 15. 18.	

Fig. 2

Les élèves découvrent assez rapidement et non sans un certain effet de surprise, que si on peut avancer de 1 sur la bande on peut aussi avancer de 2, 3, 4 etc. Cette découverte, est très importante dans la mesure ou elle indique à l'élève qu'il peut « faire des économies » sur le nombre de +1 utilisés et surtout d'avancer plus rapidement dans la bande. Ce dernier constat a suggéré à certains élèves d'essayer des grands nombres comme 100, 1000, voire 1 000 000 avec les inconvénients que cela suppose, puisque, par exemple, en utilisant les milliers, les jeunes élèves sont confrontés assez rapidement aux limites de la calculette et au problème de l'écriture des grands nombres – problème familier par ailleurs aux élèves les plus âgés de l'enseignement primaire.
Le principe de l'utilisation de la calculette pour cette deuxième tâche est donc le même que celui décrit pour la tâche 1. Cependant, il est utile de souligner que les élèves sont surpris de constater que quand on fait toujours +2 ou +3 on « ne passe pas forcément par tous les nombres » et qu'il y a des régularités fort étonnantes. Les exemples avec le +2 ou le +5 ont été largement discutée avec les élèves, la redondance de certains nombres ainsi que les différences dues au passage à la dizaine et à la centaine ont été des moments de débat essentiels.

Tâche no 3

Les bandes numériques peuvent être aussi exploitées dans leur dimension verticale. Écrire la suite des nombres du haut vers les bas ou du bas vers le haut de la bande. Cette variante entre en résonance avec les nombres qui augmentent quand on écrit les nombres du bas vers le haut mais elle peut aussi entrer en conflit quand, à l'inverse, on écrit les nombres du haut vers les bas (cf. fig. 3).

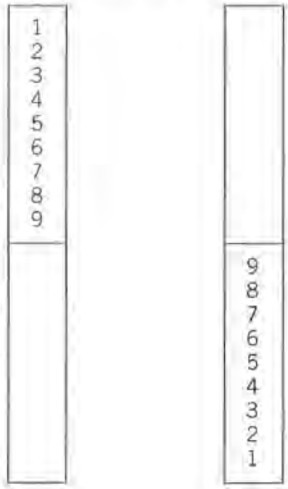


Fig. 3

Comme pour la tâche 2, les suites des nombres peuvent se développer autour d'écarts divers (+2, +3, +4, etc.).
L'expérimentation de la tâche a permis de vérifier que, pour les élèves de 5 ans, le conflit entre la progression numérique et le sens de la progression est bien faible, voire inexistant, ce qui nous amène à supposer qu'il y a une relative indépendance entre le nombre, sa progression et l'orientation de la progression. Toutefois nous devons souligner que peu d'élèves de la classe se sont lancés dans ce type d'expérience préférant une écriture horizontale.
Parallèlement, nous avons constaté que l'écriture verticale est productrice d'une plus grande régularité entre les espaces attribués aux nombres. En effet, si une utilisation horizontale peut donner lieu a des écarts variables entre les points marquant la position du nombre (surtout quand les nombres deviennent de plus en plus grands), une utilisation verticale permet une relative régularité entre les espaces attribués aux nombres puisque la hauteur du chiffre vient réguler les emplacements.

Tâche no 4

La tâche 4 est caractérisée par une variante dans le matériel et s'inspire directement de la démarche de Holt décrite précédemment. Nous abandonnons donc les bandes en carton au profit des rouleaux de papier utilisés pour les calculatrices ou les caisses enregistreuses. Ce support graphique est long d'environ 40 mètres et large de 5 cm. Avec un tel support, les « ruptures » occasionnées par la fin de la bande sont évidemment nettement mois fréquentes. A titre indicatif nous dirons qu'un rouleau de papier de 40 mètres permet de couvrir une fois et demi le périmètre d'une salle de classe de taille moyenne. De même que, en fonction de la taille de l'écriture, un élève de 5/6 ans peut atteindre facilement la valeur numérique de 800, voire du millier.
L'idée principale développée ici est de reprendre les tâches précédentes (1, 2 et 3) pour les appliquer à ce nouveau support et montrer que travailler sur de longs rouleaux de papier favorise l'exploration et la continuité numérique. Nous faisons l'hypothèse que la conjonction de ce nouveau support avec l'utilisation de la calculette, et plus particulièrement de la connaissance +1, permettra une exploration très poussée du champ numérique.
Par ailleurs, la spécificité du support matériel a permis le développement de nouvelles tâches que voici.

Tâche no 5

Sur un bout de bande de papier l'élève écrit les nombres entre 0 et 30. L'élève indique à l'enseignant la quantité de papier nécessaire, soit la longueur du bout de bande nécessaire qu'il lui faudra pour écrire la suite des nombres jusqu'à 30.
Avec cette tâche on essaye de croiser un segment numérique avec la représentation de l'espace nécessaire pour écrire les nombres jusqu'à 30. Or, il est intéressant de remarquer que les premiers bouts de bande demandés étaient généralement insuffisamment longs pour écrire les nombres et que, tout au plus, les élèves essayent de réguler « à l'œil » la longueur des autres bandes. Ce n'est que vers 10-11 ans que l'on a pu observer des stratégies de pliage pour déterminer la longueur « exacte » de la bande nécessaire pour écrire les nombres, par exemple entre 1727 et 2050. Au cycle élémentaire les stratégies perceptives restent largement déterminantes.

Tâche no 6

La même tâche peut être répétée en changeant la valeur de la variable numérique : écrire les nombres entre 100 et 130. De même que l'avait remarqué Holt, nos élèves eux aussi pensent qu'il y a plus de nombres entre 100 et 130 qu'entre 0 et 30 ! Ceci est confirmé par la longueur des bouts de papier demandés.
Toutefois, il nous semble important de relever que, dans ce cas de figure, l'utilisation de la calculette a un réel impact sur les connais-

sances sous-jacentes. En effet, quand on demande aux élèves « est-ce que l'on appuie autant de fois sur la touche +1 ou = quand on écrit les nombres entre 0 et 30 que quand on écrit les nombres entre 100 et 130 », on remarque des effets de surprise permettant des régulations substantielles aux connaissances numériques.

Tâche no 7

Écrire l'ensemble des nombres naturels contenus entre deux nombres établis. Par exemple : entre 5 et 15, 20 et 52, 99 et 102. L'enseignant/expérimentateur prépare les bandes nécessaires en veillant à croiser l'étendue du champ numérique recherché et la longueur des bouts de papier (cf. fig. 4).

99. 100. 101. 102.	99. 100. 101. 102.

Fig. 4

Avec cette tâche, les élèves sont confrontés à nouveau avec le croisement de la variable « nombre de nombres » et la variable « longueur » de la bande. La difficulté majeure réside dans l'espacement régulier des nombres, surtout sur des bouts de papiers très longs. Comme nous l'avons déjà relevé plus haut, les élèves de deuxième enfantine peinent à compenser le peu de nombres avec des espacements plus grands afin d'utiliser la totalité du papier. Les démarches observées convergent vers une écriture concentrée des nombres au début de la bande. Comme pour l'épreuve piagétienne de *la conservation du nombre*, ce type d'élève n'est pas encore en mesure de construire une relation entre le nombre d'objets et l'espace de la bande de papier.
La calculette permet cependant de savoir exactement combien de nombres comporte le segment. Ainsi, par exemple, l'élève est en mesure de savoir qu'entre 99 et 102 il y quatre nombres, y compris les extrêmes mais qu'à partir du premier 99 il ne faut que trois « pas » de calculette pour atteindre 102. Nous pensons que ce type d'exploration constitue une excellente préparation au domaine des opérations.

Tâche no 8

Sur une bande de 0 à 40 dont les nombres sont distribués à distance égales les uns par rapport aux autres, demander aux élèves de faire des plis exactement sur des nombres choisis. Les plis peuvent être proposés à la moitié (20), à la moitié de la moitié (10), sur les dizaines, ou sur tout autre nombre choisi entre 0 et 40.
Ce type de tâches a l'avantage de poser la question du partage, en parties égales ou non, des nombres. De surcroît, on peut faire un clin d'œil aux diviseurs d'un nombre en proposant de plier en deux, quatre, dix et vingt parties égales la bande en papier.
Du côté de la calculette, nous avons traduit cette tâche en demandant aux élèves s'il est aussi possible de « plier les nombres » s'affichant à l'écran. Généralement, des difficultés de représentation empêchent les jeunes élèves de faire le rapprochement avec ce qui a été fait avec le support en papier, cependant certains d'entre eux n'hésitent pas à opérer sur le nombre pour le réduire, notamment en soustrayant un ou plusieurs nombres. Ainsi, sur une bande de 10, quelques élèves sont en mesure d'affirmer qu'on peut idéalement la plier sur 8 en soustrayant 2 et sur 6 en soustrayant encore une fois 2.

Tâche no 9

Sur le même type de bande numérique préétablie, demander aux élèves de colorier un nombre choisi : par exemple 7. Les élèves doivent montrer, sur la bande, en la coloriant, où commence et où se termine, par exemple, le nombre 7, puis le nombre 8, le nombre 9, etc.
Les investigations à ce propos montrent que les élèves situent le commencement du nombre 7 à peu près à la moitié de l'espace entre 6 et 7 (soit 6.5) de même qu'il semble se terminer à peu près entre 7 et 8 (soit 7.5). Les débats générés par ce genre de question, permettent de faire une incursion fort intéressante du côté de la représentation du nombre

chez le jeune enfant. Ces représentations peuvent être questionnées à la lumière de ce qu'on voit sur la calculette. A ce propos, nous rappelons au lecteur que dans la phase préliminaire nous avons invité les élèves à réduire à 0 un nombre N en utilisant la fonction *racine carrée* de manière répétée. Une confrontation aux nombres à virgule a été alors possible. Bien que de manière confuse, cette confrontation a ressurgi pour certains élèves qui n'ont pas hésité à dire qu'entre 7 et 8 il y a d'autres nombres !

Tâche no 10

Sur un bout de bande en papier de longueur variable l'enseignant détermine un nombre de départ, par exemple 5. L'élève ajoute sur la bande tous les +1 nécessaires pour atteindre 9. La calculette permet de contrôler le nombre de +1 utilisés (cf. fig. 5)

5 +1 +1 +1 +1

Fig. 5

Avec cette nouvelle tâche on inaugure les opérations additives dans leur forme canonique. Parmi les procédures observées (sans calculette) nous retiendrons le *surcomptage* qui consiste à faire correspondre le +1 avec le premier terme de l'addition. La calculette permet une régulation intéressante dans la mesure où, en affichant à chaque fois le résultat intermédiaire, elle permet à l'élève de dénombrer le nombre de gestes nécessaires pour atteindre 9.

Tâche no 11

Dans un deuxième temps, et en lien avec la tâche précédente, les élèves procèdent en ajoutant les +1, les +2, les +3, les +4, etc. nécessaires pour atteindre un nombre donné : par exemple 20 en partant de 5. Ici aussi la calculette permet de contrôler les différents ajouts opérés. Une variante possible de la tâche, consiste à déterminer à l'avance le nombre d'opérateurs utilisables, ainsi on pourra demander aux élèves d'atteindre 20, en partant de 5, avec seulement deux ou trois additions.
La longueur de la bande peut aussi intervenir en tant que régulateur de l'utilisation des nombres : un tout petit bout de papier oblige les élèves à utiliser des nombres plus grands et donc plus économiques pour atteindre le nombre souhaité, (cf. fig. 6), alors qu'un bout de bande long permettra de jouer avec plusieurs petits opérateurs.

5+7+6+2

5+2+1+2+3+2+1+2+1+1

Fig. 6

Tâche no 12

La douzième tâche clôt le jeu de tâches sur les nombres, les bandes numériques et la calculette. Le support *bande* de papier n'est plus vraiment indispensable et une feuille blanche peut aussi être utilisée à la place. Comme pour la tâche précédente, à un nombre de départ choisi, par exemple 3, l'élève ajoute le nombre qui permet d'atteindre une cible, par exemple 10. L'élève n'a maintenant qu'un seul choix, ce qui l'oblige à trouver le complément qui, ajouté à 3, lui permet d'atteindre la cible 10. On est ici typiquement dans les tâches de recherche de complément d'un nombre, tâches par ailleurs très investies à l'école élémentaire. Deux stratégies se côtoient : la première et la plus répandue, consiste à chercher, parfois un peu au hasard, le bon nombre qui permet d'atteindre la cible, les estimations venant, dans un deuxième temps, réguler le choix du complément. La deuxième, plus élaborée, permet à quelques rares élèves de faire des soustractions pour rechercher le complément numérique nécessaire pour atteindre la cible 10.

7. CONCLUSIONS

Ce dispositif de recherche sur la calculette nous permet de conclure sur quatre idées principales :

1. **L'utilisation de la calculette est possible à l'école élémentaire** : au moment où nous nous sommes penchés sur la question initiale, à savoir s'il était possible de faire travailler de jeunes élèves sur ce support technologique en lien avec la construction du nombre, nous ne pouvions que faire des hypothèses inspirées de conclusions positives sur des travaux menés dans d'autres ordres d'enseignement, mais en aucun cas nous n'étions en mesure de faire des prévisions quant à la réussite du projet d'autant plus qu'il n'y a pratiquement pas, à notre connaissance, de travaux et de littérature spécifique à l'utilisation de la calculette avant l'entrée à l'école obligatoire (voir cependant Wheatley & Shumway, 1992). Cette recherche nous permet d'affirmer que la calculette favorise le travail de la construction du nombre dans les petits degrés ; la calculette est porteuse d'un très fort potentiel mathématique encore inexploré dans les démarches d'enseignement dans les degrés élémentaires.

2. **La calculette comme milieu numérique :** en introduction à cet article nous avons avancé l'hypothèse que la calculette n'est pas qu'un simple outil de calcul, mais qu'elle peut être considérée comme une interface contraignante entre le milieu mathématique (et plus particulièrement numérique) de la situation et les connaissances de l'élève. En d'autres termes, on peut considérer la calculette comme le dépositaire de modélisations mathématiques pouvant rencontrer la connaissance des élèves et donc fournir un caractère d'utilité aux connaissances. Si l'on admet donc que la calculette est porteuse de contraintes, on admettra aussi qu'elle peut constituer un réservoir généreux de modèles mathématiques que la connaissance de l'élève saura élire en savoir. C'est pour cela que nous répondrons à la question sur les avantages de l'utilisation de la calculette par rapport aux méthodes usuelles de l'enseignement du nombre, en soulignant la portée et la richesse des modèles proposés par cet instrument. Autrement dit, nous pensons qu'une démarche papier / crayon n'aurait pas permis de développer autant de tâches ni a fortiori d'explorer aussi finement et abondamment les relations entre les nombres.

3. **Les bandes numériques pour interroger la suite des nombres** : la lecture du texte de John Holt a été un tournant déterminant dans notre dispositif de recherche. En effet, nous avons pu conjuguer son idée originale de bande numérique avec les potentialités offertes par la calculette notamment en ce qui concerne le principe du +1, dont le modèle de Peano en relate toute la complexité. Nous pensons donc que les bandes numériques, en lien avec la calculette, sont un excellent moyen pour les élèves de l'école élémentaire de questionner la suite des nombres ainsi que les relations entre ces derniers. Des travaux ultérieurs à ce dispositif de recherche confirment que la bande numérique est, pour les élèves, un enjeu passionnant qui résiste dans le temps dans la mesure où la tâche ne finit jamais. En tant que chercheurs, nous avons été, à plusieurs reprises, surpris de voir que des élèves d'à peine de 5 ans se « baladent » dans les centaines, voire les milliers avec beaucoup d'aisance et que leur travail peut se renouveler pendant plusieurs semaines sans perdre de sa vigueur. Nous réaffirmons donc que l'alliance entre la bande numérique et la calculette constitue un milieu extrêmement porteur pour la connaissance des nombres.

4. **Le Jeu de tâches : un enjeu pour la recherche**. Par cette notion, nous identifions les relations existant entre les tâches

issues du jeu de l'expérimentateur avec le milieu et les tâches issues du jeu de l'expérimentateur avec le jeu de le l'élève et son milieu, dans le but d'investiguer ses potentialités. Ce point de vue est déterminant dans la mesure où il permet d'étudier très finement la nature des objets du milieu mathématique offert par la conjonction de la calculette et des bandes numériques dans la construction du nombre. Il permet également l'exploration de différentes variables didactiques. La notion de jeu de tâches, permet par ailleurs de ne pas se confiner dans une analyse dichotomique en termes de réussite/échec des productions d'élève, mais de considérer la connaissance des élèves comme le produit de l'interaction avec le milieu mathématique de la situation. En d'autres termes, la notion de jeu de tâche permet de porter un regard différent sur l'élève : d'acteur de sa propre réussite ou de son propre échec il devient le révélateur d'un milieu mathématique dont l'organisation répond à des règles et des principes précis.

8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUCKENTHALER Y., (2004), *Jouer la surprise, oui mais comment ? Analyse de jeux de tâches géométriques et de leurs moments de surprise*, Mémoire de licence, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation, Université de Genève.

BRAINERD C. J., (1973), *Mathematical and behavioural foundations of number. The journal of General Psychology*, n° 88, pp. 221-281.

BRIAND J., (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19.

BROUSSEAU G., (1986a), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n° 2, pp. 33-115.

BROUSSEAU G., (1986b), La relation didactique: le milieu, *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 54-68, Ed. IREM de Paris 7.

BROUSSEAU G., (1990), Le contrat didactique: le milieu, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 9, n° 3, pp. 309-336.

BROUSSEAU G., (1998a), Le contrat didactique: l'enseignant, l'élève et le milieu, In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield (Eds), *Théorie des situations didactiques*, (chap. 5) pp. 299-327, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F., (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, no 2.3, pp. 221-270, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F., (2004), Jouer la surprise, *l'Educateur*, no. 7.

DEL NOTARO, C., (En préparation), *De l'idée générale de division à celle spécifiée de divisibilité. Exploration du milieu mathématique et expérimentation à l'école primaire.* Thèse de doctorat en cours.

FAYOL M., (1990), *L'enfant et le nombre*, Ed. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

GROUPE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE, (2003), Cahiers ARDM & IREM Paris VII, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Ed. V. Durand-Guerier et C. Tisseron, LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1.

HOLT J., (1970), *How children learn*, Dell publishing co inc, New York, (première édition Pitman Pub. Co, 1967), pp. 124-126. Traduction française : F. Conne.

LAKOFF G. & NUÑEZ, (2000), *Where Mathematics comes from : How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

WHEATLEY, G., & SHUMWAY, R., (1992), The Potential for Calculators to Transform Elementary School Mathematics, In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-8), Reston, VA: NCTM.

À L'ECOLE OBLIGATOIRE LA CALCULATRICE PEUT-ELLE CONTRIBUER À L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES ?

Ruhal Floris, FAPSE, Université de Genève et Collège Voltaire.

L'un des enjeux de la nouvelle édition de Mathématiques 5e et Mathématiques 6e est de faire évoluer les attitudes et les conceptions dans le domaine des outils de calcul pour que la calculatrice y trouve sa place, en tant qu'instrument de calcul, pour effectuer ou valider des opérations, et en tant qu'objet d'investigation scientifique, par exemple pour découvrir de nouveaux nombres ou de nouvelles relations.

Mathématiques 6e année, édition 2002
Méthodologie – Commentaires
Introduction, pp 22 et 23

C'est un aveu : après plus d'une vingtaine d'année, la calculatrice cherche ainsi encore sa place à l'école obligatoire, puisque les auteurs estiment nécessaire de « faire évoluer les attitudes et les conceptions. » Constat qu'effectuait déjà Bruillard en 1994, à propos de la France :

Malgré leur usage quotidien hors de l'école, les calculettes s'intègrent encore difficilement dans les activités scolaires et les enseignants ignorent souvent que leur utilisation fait partie des objectifs de l'école élémentaire. L'un des obstacles majeurs semble être de nature sociale et concerne l'idée que se font les instituteurs du rapport entre ces outils et les techniques de calcul auxquelles ils se substituent partiellement. Une analyse de leurs opinions par entretiens et questionnaires montre leur méfiance vis-à-vis des calculettes et leur volonté d'en contrôler et d'en limiter l'usage. La prise en compte du statut social de l'usage des calculettes conduit à les intégrer comme auxiliaires de résolution et non en tant qu'outils pédagogiques. Néanmoins, si la généralisation de leur usage semble souhaitable, l'articulation avec les bases du calcul reste encore à expliciter.

La difficulté de cette articulation se ressent lors de la lecture du livre du maître de 4P qui enjoint l'enseignant à initier l'élève à effectuer le choix le plus judicieux du moyen de calcul à utiliser (ce que préconise également le plan d'étude) qui précise que
...l'instrument devrait être mis à l'écart durant les phases d'entraînement au calcul algorithmique, d'acquisition de certains automatismes, de mémorisation des répertoires additif et soustractif.
Et finalement
...c'est le bon sens qui doit permettre de déterminer spontanément, pour l'élève et pour l'enseignant, l'opportunité d'utiliser la calculatrice.
Pour différentes raisons, la question des calculatrices à l'école obligatoire est actuellement « sensible ». Des considérations relevant de la transposition didactique permettent de mettre en évidence une modification du statut institutionnel des différents moyens de calcul. La légitimité sociale des algorithmes écrits « en colonnes » est en diminution lente mais inexorable : alors que, jusque dans les années 1970, leur maîtrise était socialement fondamentale, car indispensable dans de très nombreux contextes. On ne peut pas en dire autant maintenant, l'argument « pouvoir vérifier sans machine le montant de ses achats » étant assez « artificiel ». Les réformes récentes promeuvent explicitement le calcul réfléchi et la calculatrice, avec les précautions que les citations ci-dessus illustrent. Par ailleurs, dans certains cantons, tous les élèves de 10 ans reçoivent une calculatrice, en même temps qu'ils reçoivent un compas et un dictionnaire.

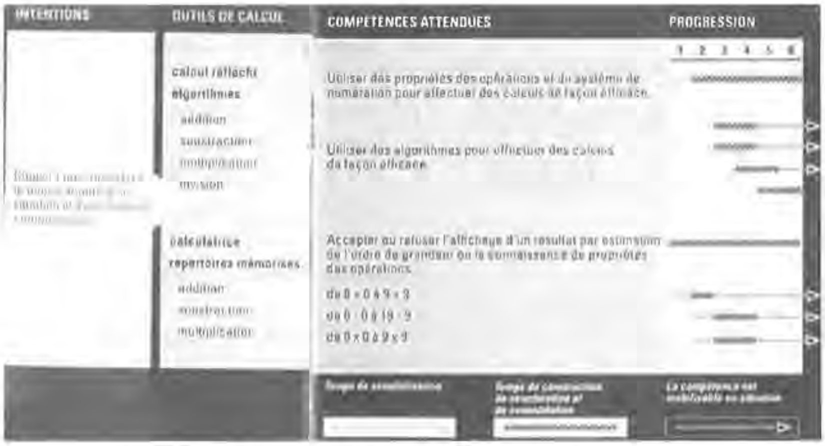


Fig 1. Extrait du plan d'études officiel romand

En outre, logiciels mathématiques et ordinateurs mathématiques de poche sont en intégration croissante dans l'enseignement secondaire supérieur et dans l'enseignement professionnel, légitimés par une utilisation croissante tant chez les mathématiciens eux-mêmes dans le cadre de leurs recherches (voir le rapport Kahane, ch. 1 et p. 187) que dans la société. Ces différents éléments contribuent à rendre nécessaire la réorganisation de l'utilisation des moyens de calcul à l'école.

Dans cet article, nous nous proposons de montrer que certains travaux récents de didactique des mathématiques peuvent aider à mieux comprendre la nature des obstacles évoqués par Bruillard et par les auteurs des moyens d'enseignement romands de 5e et 6e primaire. C'est à partir d'une telle compréhension que pourront être construits des instruments de pilotage de la transformation des rapports au calcul qui iront au delà d'une invocation du « bon sens spontané » comme dans la citation ci-dessus. Au delà du diagnostic, nous aimerions également convaincre le lecteur des opportunités qu'offre la calculatrice comme authentique vecteur de savoir mathématique. Nous avons principalement retenu quatre thèmes: la relation entre technique et sens, l'instrumentation didactique, les notions de milieu et celle de mini-culture. Les deux premiers permettent de comprendre certaines difficultés, alors qu'avec les deux derniers nous proposons un cadre théorique permettant d'évaluer les potentialités d'apprentissages d'activités instrumentées.

Technique et légitimation de la technique

Dans l'enseignement des mathématiques, on a longtemps distingué deux volets: celui de la technique et celui du « sens ». La maîtrise de la technique opératoire se trouvait ainsi souvent séparée, voire opposée à la question du choix de l'opération dans une situation précise, à l'occasion d'un problème par exemple. Les réformes récentes mettent en exergue la résolution de problèmes, le travail de la technique devant de moins en moins se faire pour lui-même. Néanmoins, lorsque le plan d'études précise « Choisir l'outil de calcul le mieux adapté à la situation et à ses propres compétences », il perpétue la distinction entre technique et sens. Il en va de même pour les pourfendeurs de la calculette, lorsqu'ils exigent, avant toute utilisation, « une maîtrise complète de la tâche sans machine » (Delord, 2000).

Depuis une dizaine d'années, des recherches de didactique des mathématiques en nombre croissant mettent en évidence l'aspect dialec-

tique des relations entre technique et « sens ». Pour aborder ce sujet, précisons tout d'abord ce que l'on entend par « sens », en se référant à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau. Selon cet auteur le sens d'une connaissance mathématique correspond à l'ensemble des situations dans lesquelles cette connaissance permet d'agir de façon efficace.
Un exemple nous permettra d'illustrer simplement le phénomène. Considérons les deux façons suivantes d'effectuer l'opération 1012-82 ?

1re façon: par calcul « réfléchi »
1012-82 = 1000+10+2-80-2 =
900+110+2-80-2 = 900+110-80+2-2 =
900+30+0 = 930

2^{e} façon : utilisation de l'agorithme « en colonne »

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 11} & \\ & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 2 \\ - & & & 8 & 2 \\ \hline & & 9 & 3 & 0 \end{array}$$

Ces deux différentes techniques permettent d'obtenir le résultat cherché, mais la légitimation des différentes étapes du processus ne se fait pas de la même façon, bien qu'il y ait équivalence du point de vue mathématique. Dans le premier calcul, un calcul « réfléchi », il est fait explicitement appel à la décomposition des nombres en milliers, centaines, dizaines, unités, qui fonde l'écriture positionnelle, ainsi qu'à des propriétés des opérations (associativité, commutativité).
La seconde technique peut se dérouler comme une recette, très localement, sans décision relative à la décomposition des nombres : « ...de 8 à 1 je ne peux pas, je vais chercher à gauche, zéro, je ne peux rien prendre, à gauche encore 1, je soustrais 1 et je mets 9 à droite puis j'ajoute 10 encore plus à droite. » La technique s'appuie sur l'inscription des unités, dizaines, centaines, etc. dans le diagramme en colonne.

A qui douterait de l'importance de cette différence, nous proposons d'effectuer ainsi en colonnes la soustraction 301203-3254 puis de rédiger le calcul réfléchi correspondant le mieux possible au calcul effectué en colonne (on doit y retrouver les nombres correspondants à toutes les transformations effectuées, ainsi dans le calcul ci-dessus on retrouve 900 correspondant au « 9 » sur la 3^{e} colonne depuis la droite et 110 correspondant au « 11 » sur la 2^{e} colonne). Nous avons souvent constaté que cet exercice peut être difficile pour de nombreux adultes, des étudiants futurs instituteurs, par exemple.
Mais quelle relation avec le « sens » ? On peut associer au calcul proposé ci-dessus une situation correspondant au retrait de 82 objets d'une collection de 1012 et le calcul réfléchi peut être considéré comme la description précise d'une procédure permettant d'effectuer ce retrait : partager les 1012 objets en groupes de 900 et 110 et 2, etc. Ce n'est pas le cas du calcul algorithmique en colonne. L'utilisation de la touche (=) de la calculatrice pour effectuer la soustraction 1012-82 correspond à une technique encore moins transparente que cette dernière, puisqu'elle n'est pas publique.
On accorde cependant pratiquement la même confiance à ces trois techniques, mais cette confiance n'est pas de même nature. Dans les deux derniers cas, cette confiance n'est pas (pour l'élève, pour l'utilisateur de la calculatrice) de nature mathématique, mais tout d'abord sociale. Il s'agit d'objets institutionnalisés et reconnus. Ainsi la confiance dans les résultats de la calculatrice s'apparente à celle que l'on a lorsque l'on prend un ascenseur.
Dans le cas de l'algorithme en colonne, à cette confiance d'ordre social s'ajoute une confiance « didactique », construite à travers l'apprentissage. Pour beaucoup d'élèves et d'adultes, l'opération finit par s'identifier à la technique. Quant au calcul réfléchi, il est moins « institué » socialement, sa légitimité est d'ordre mathématique et la construction de la confiance se base sur les diverses connaissances numériques en jeu dans le calcul, connaissances qui prennent appui sur une

construction mathématique, celle des nombres entiers. Cette construction nécessite un travail didactique particulier à travers des phases de formulations et de validations. Ce type de travail est illustré dans l'article de ce numéro concernant la calculette à l'école élémentaire. La notion d'organisation mathématique, introduite par Chevallard (1997, 1999) permet de prendre en compte ces différents aspects : dans les trois cas ci-dessus, pour un même type de tâches, technique, discours sur la technique et théorie (présente dans le dernier cas uniquement) sont distincts.

Instrumentation

Qui ne s'est pas senti complètement perdu face à un distributeur de tickets d'autobus d'une ville inconnue ? Toute utilisation d'un artefact électronique exige une certaine instrumentation qui permet de donner du sens aux gestes que l'on fait. A fortiori, l'utilisation d'un artefact complexe pour effectuer certaines tâches telles que résoudre des problèmes mathématiques ne va pas sans adaptation. En étudiant les interactions entre homme et machine, Rabardel (1995) a introduit le concept d'instrumentation qui a été repris dans le cadre de la didactique des mathématiques. Cette question dépasse de loin celle qui concerne le mode d'emploi de l'outil (quelle touche appuyer pour...). En effet, la calculette peut donner l'illusion d'une certaine transparence, comme lors de son utilisation pour effectuer une addition de nombres entiers, alors que la surprise n'est pas loin ainsi que le montre des exemples (fig. 2, 3 et 4) que nous proposons en utilisant une calculatrice graphique très répandue (son fonctionnement arithmétique est équivalent à celui de la calculatrice offerte à tous les élèves de 5e année genevois[1]) :

1 Il s'agit de la TI34II et la calculatrice graphique est la TI83Plus.

Fig. 2. Le second exemple (à droite) montre que des réponses inattendues (pour l'élève) ne surviennent pas uniquement dans des situations « limites » comme celle du premier exemple.

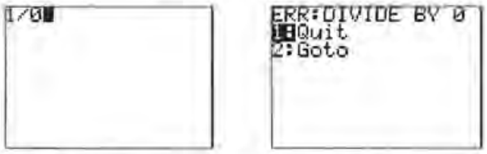


Fig. 3. La division par zéro produit évidemment une réponse demandant une interprétation.

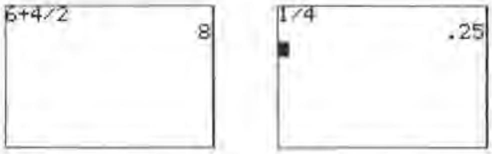


Fig. 4. Il peut y avoir conflit entre les manières de calculer ou d'écrire les nombres.

On le voit, dans la plupart des cas, l'utilisateur est confronté à des choix de la machine, souvent liés à des contraintes informatiques, mais correspondant à des réponses interprétables mathématiquement. Ce qui signifie qu'il est fait appel aux connaissances, mathématiques, de l'utilisateur. Le processus cognitif d'instrumentation consiste justement à construire ce lien entre actions de la machine et interprétation par l'utilisateur. De plus, il y a souvent intrication entre connaissances mathématiques et informatiques. C'est le cas, par exemple, lorsqu'il s'agit de rendre compte des deux réponses de l'écran de la figure 5a, où interviennent à la fois l'arrondi (le « 7 » à la fin) et la prise en compte de décimales supplémentaires cachées qui expliquent que la multiplication 0.166666667 * 6 donne à la calculatrice le résultat de 1 que l'on n'obtient évidemment pas « à la main ». Nous rencontrons régulièrement des adultes qui pensant en fait que la calculatrice « sait » que le nombre est périodique.

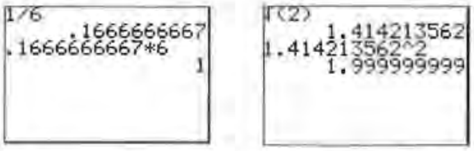


Fig. 5a et 5b. Le problème des arrondis.

On retrouve une situation analogue en travaillant avec la racine carrée, puisque, quelle que soit sa précision, la machine ne pourra pas écrire ce nombre comme un nombre décimal (fini) (fig. 5b). L'effectuation des multiplications de vérification par un calcul papier/crayon (le début suffit) permet de mettre en cause ces résultats, ce qui renverse la relation traditionnelle: calcul à la main puis vérification à la machine. Ces premiers exemples correspondent à une utilisation pédagogique minimale de la calculatrice, qui est souvent ignorée. Une intégration didactique plus importante accroît le nombre de techniques à disposition de l'élève qui pourra par exemple effectuer plus facilement des additions ou des soustractions répétées plutôt que des multiplications ou des soustractions. La calculatrice se révèle ainsi un peu comme un loup dans les pâturages alpins et l'on peut comprendre une certaine tendance à tenir la laisse bien serrée.

Un exemple au niveau secondaire inférieur : les trois nombres consécutifs.

L'activité suivante est souvent proposée en 9e année comme exemple de travail du « sens » du calcul littéral :

Choisir trois entiers relatifs consécutifs a, b et c; calculer b^2-ac. Que constatez-vous ? A partir de votre observation, et après avoir éventuellement calculé la valeur de l'expression algébrique b^2-ac pour d'autres valeurs entières consécutives a, b et c, formulez une conjecture à propos de cette expression.

L'activité peut être menée sans calculatrice, les élèves établissant facilement la conjecture et trouvent parfois par eux-mêmes la démonstration une fois qu'on leur suggère d'écrire b et c à partir de a. Les élèves ne choisissant pas spontanément des nombres négatifs, une première relance peut également être proposée en leur demandant de le faire. Demandons leur ensuite de prendre leur calculatrice et d'observer ce qui se passe en prenant comme premier nombre la valeur a = 100000 ! Bien que la démonstration avec les lettres a été faite au tableau noir, de nombreux élèves seront alors d'accord avec l'affirmation selon laquelle la propriété n'est pas vraie pour ces nombres là : l'objet mathématico-social « calculatrice » l'emporte sur l'objet mathématique « calcul algébrique » !

Les exemples fournis permettent de se rendre compte que la question de l'instrumentation, qui se situe au niveau de l'élève, conduit à la question du « pilotage » didactique au niveau de l'enseignant. Ce pilotage, qui s'avère délicat, est étudié en didactique en liaison avec la notion de « milieu », qui est en quelque sorte l'objet sur lequel travaille l'enseignant, que nous allons présenter brièvement.

Balises théoriques : Milieu didactique, calculatrice, mini-culture.

Peut-on considérer la calculatrice comme un milieu d'apprentissage ? Dans le cadre de la théorie des situations (Brousseau), un milieu d'apprentissage est constitué, en situation didactique, de différents éléments permettant un apprentissage visé par l'enseignant dont, en particulier, des résultats d'actions de l'élève tels que des calculs, des dessins ou des manipulations.

C'est dans le milieu d'apprentissage que se situe la possibilité de faire le lien entre ce qui a été proposé par le maître et ce que l'élève a réalisé. Ce lien peut être une simple évaluation (vrai ou faux) ou une discussion de validation portant sur les résultats observés. A ce titre, les résultats d'actions effectuées à la calculatrice peuvent faire partie de ce milieu. En elle-même, la calculatrice ne constitue pas un milieu, pas plus qu'un calcul isolé effectué avec crayon et papier. Un lien doit être construit et on a donc également pu parler d'instrumentation didactique, c'est-à-dire d'une prise en charge officielle en classe de l'utilisation de la calculatrice. Reprenons l'exemple 9999999999+1 qui fournit sur la calculatrice « genevoise » la réponse $1_{,E\ 10}{}^{10}$. Sans un travail préalable d'enseignement, cet élément ne fait en principe pas partie des éléments objectifs du milieu d'apprentissage. L'enseignant, qui doit avoir réponse à tout ce qu'il a contribué à provoquer - c'est le contrat didactique - ne pourra que donner une réponse évasive à la question d'un élève « trop » curieux. Une instrumentation didactique qui prendrait en compte cette réponse serait relativement complexe. Elle inclurait un travail sur le nombre de chiffres d'un nombre entier, travail menant à des petits théorèmes, tels que « en effectuant une addition, le nombre de chiffres n'augmente pas ou augmente de 1 ». C'est bien entendu avec la multiplication que ce travail se révélerait le plus intéressant : pour quel type de multiplication le nombre de chiffres du résultat correspond-il à la somme du nombre de chiffres des multiplicandes ?

Une étude ce ce type, isolée, n'aurait qu'un intérêt anecdotique. Elle ne peut prendre son sens que dans le cadre d'une organisation mathématique comprenant un travail technique légitimé par les mathématiques, avec des fondements théoriques. Dans ce cas, ces fondements correspondent à l'écriture positionnelle des nombres en base dix et à toutes les propriétés mathématiques sur lesquelles elle s'appuie, particulièrement celles de la structure d'anneau. C'était bien le projet du plan d'études des années 1970, avec le travail sur les différentes bases, et peut-être a-t-on jeté le bébé avec l'eau du bain : une organisation mathématique ne se réimplante pas du jour au lendemain dans un cursus (ne pas comprendre ici que nous préconisons le retour en classe du calcul en bases différentes de dix, ni l'introduction de l'étude des anneaux !).

Pour en revenir à la notion de milieu d'apprentissage, observons qu'il ne peut fonctionner durablement sans la présence de ce que nous appelons une mini-culture, formée d'un vocabulaire, décrivant des actions et des propriétés relativement aux résultats de ces actions (par exemple : « en ajoutant plusieurs fois le même nombre pair, on obtient toujours un nombre pair »). Nous insistons sur la notion de résultats matériels, qui peuvent être des objets ou des traces sur un tableau noir, sur du papier, sur l'écran d'une calculatrice. Ce milieu matériel est indispensable en vue du rappel des actions effectuées et pour l'élaboration de conjecture. L'étude du déroulement de la « Course à vingt » (Brousseau, 1986) met en évidence ce rôle du milieu. A cet égard, l'utilisation de calculatrices conservant l'affichage et la mémoire des opérations effectuées est très importante, ainsi que la possibilité d'en présenter le résultat à l'ensemble de la classe en utilisant une calculatrice adaptée (transparente pour rétroprojecteur ou en reliant la calculatrice à une tablette de rétroprojection). Les travaux de Trouche (2002), de Artaud (2003) et de Kieran (2003) en particulier, montrent l'importance de l'exploitation didactique des éléments du milieu.

Intégration de logiciels mathématiques en classe

La construction de milieu d'apprentissage intégrant des logiciels mathématiques (quelle que soit leur implémentation : calculatrices, ordinateurs de poche, ordinateurs de table) ne va pas sans le développement d'une mini-culture. Les possibilités d'intégration vont cependant dépendre de la capacité de cette mini-culture à s'intégrer à celles existant déjà en classe de mathématiques. Assude (2003) a mis en évidence cet aspect dans le cas d'un travail sur les quadrilatères avec Cabri-Géomètre. Le rôle des propriétés mathématiques s'est révélé structurant et l'intégration a été facilitée par la création d'une interface didactique entre le travail à l'ordinateur et le travail papier/crayon correspondant à l'historique des constructions effectuées. En ce qui concerne l'intégration des calculatrices, elle pourrait s'articuler autour des propriétés mathématiques évoquées ci-dessus, liées à l'écriture positionnelle des nombres. Le calcul réfléchi en ligne peut jouer le rôle d'interface décrivant la programmation à effectuer sur la calculatrice. A cet égard, il conviendrait dans cette culture d'introduire une distinction entre le signe « = » et l'effectuation du calcul, « ENTER ». Il va de soi que l'utilisation d'un même modèle de machine pour tous les élèves est ici indispensable.

Deux exemples permettront d'illustrer encore la notion de mini-culture.

Introduction de la multiplication

Définie comme addition répétée, plus précisément comme la façon de commander la machine pour qu'elle effectue cette répétition d'additions, la calculatrice permet le travail de l'opération avant la « maîtrise complète de la tâche sans machine » qui n'est possible qu'après apprentissage des livrets et de l'algorithme. Nous avons constaté la diffusion « naturelle » de l'utilisation de la touche x par des élèves de 2e primaire, après un certain temps de travail sur des activités à résoudre par des additions répétées, ainsi que la prise de conscience de propriétés telle que « on peut obtenir n'importe quel nombre en additionnant des 1 », ou « on peut obtenir n'importe quel nombre pair en additionnant des 2 » ou encore la commutativité : « additionner 20 fois le nombre 3 aboutit au même résultat que l'addition de 3 fois le nombre 20 ». Les gestes à effectuer, leur description, les propriétés constituent dans cet exemple ce que nous avons appelé mini-culture. Nos observations en classe mettent nettement en évidence la nécessité pour les élèves d'enrichir eux-mêmes le milieu par des propriétés afin de mieux contrôler le travail effectué en utilisant la calculette.

Trois pas à zéros

Il s'agit d'une adaptation pour le primaire d'une activité (fig. 6) proposée par Williams & Stephens (1992) et étudiée dans des classes du secondaire I par Kieran & Guzman (2003).

Prends n'importe quel nombre entier entre 1 et 99 et essaie de le ramener à zéro en trois pas ou moins, en utilisant seulement les nombres 1 à 9 et les quatre opérations de base +, -, x, ÷. Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois, mais tu dois écrire seulement une opération par ligne.

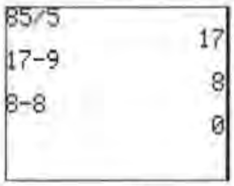


Fig. 6. Enoncé de l'activité « Trois pas à zéro»

Analyse

Les nombres de 1 à 9 se ramènent à zéro en un pas (soustraction). Deux pas au moins sont nécessaires de 10 à 18, division et soustraction ou deux soustractions. Le nombre 19 ne peut pas se ramener à zéro en moins de 3 pas ! Car soustraire deux fois de suite n'est pas suffisant et on ne peut le ramener à un nombre plus petit à l'aide d'une division, il faut commencer par soustraire, 1 par exemple. On peut aussi additionner 1, diviser par 4 puis soustraire 5, etc. Le nombre 20 peut par contre être ramené à 0 en deux pas en effectuant ces deux dernières étapes : diviser par 4 puis soustraire 5. La figure 7 montre d'autres exemples.

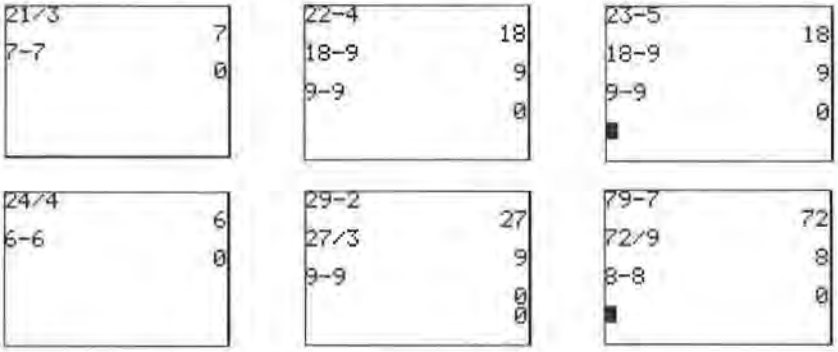


Fig. 7. « Trois pas à zéro» pour quelques nombres

Ainsi, tout nombre entre 1 et 90 peut être ramené à zéro en deux ou trois pas en se ramenant par addition ou soustraction à un multiple de 9 inférieur ou égal à 81. C'est encore le cas pour 91 que l'on peut commencer par diviser par 7, pour 96 également, mais pour 92 cela ne semble pas possible.

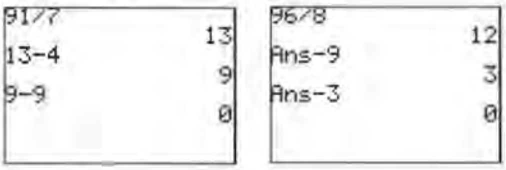


Fig. 8. « Trois pas à zéro» pour 91 et 96

Comment en être sûr ? Il faudrait par une opération, atteindre un nombre que l'on peut ramener à zéro en deux pas, comme 81. Et 81 est le plus grand des nombres ayant cette dernière propriété, puisque c'est 9x9. On ne peut donc pas atteindre 81 en soustrayant un nombre plus petit que 9 à 92. Peut-être peut-on atteindre par division un nombre que l'on peut ramener à zéro en deux pas ? Comme 92=2x2x23, en divisant on atteint au mieux 23 qu'on ne peut ramener à zéro en deux pas. Le nombre 92 est donc le plus petit nombre ne pouvant être ramené à zéro en moins de quatre pas ?

Cette activité illustre ce que nous avons nommé plus haut une « mini-culture ». L'émergence de cette mini-culture va dépendre des tâches proposées et de leur gestion, cela pourrait commencer par une série de nombres à réduire à zéro, puis des questions du type :

- Quel est le plus grand nombre que l'on peut réduire à zéro en deux pas seulement ?
- Quelle est la stratégie la meilleure pour réduire un nombre à zéro le plus rapidement possible ?
- Trouver et proposer des nombres difficiles à ramener à zéro
- A travailler en plusieurs séances bien sûr et faisant l'objet de débats de validation et de concours.

Conclusion

Ainsi, nous sommes amenés à conclure que si la calculatrice est utilisée à l'école obligatoire, ce n'est pas encore en tant que participant à une culture mathématique qui l'intègre pleinement. Une telle culture est en cours de construction, mais elle n'est pas encore ne serait-ce qu'imaginée par de nombreux acteurs. Ce pourrait bien être la cause principale des obstacles relevés par Bruillard ou par les auteurs des moyens d'enseignement. Nous plaidons pour la mise en œuvre de nombreux essais et expérimentations : ce que nous observons actuellement dans certaines classes met en évidence de fortes potentialités, potentialités confortées par l'analyse théorique que nous avons faite.

RÉFÉRENCES

Artaud, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques « à calculatrice » et leur écologie. *Actes électroniques du colloque Européen ITEM, Reims juin 2003.* www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/ ou www.reims.iufm.fr/OLD_IUFM/Recherche/ereca/itemcom/

Assude, T. (2003). Modes d'intégration de Cabri dans des classes du primaire. *Intervention au symposium « Pratiques instrumentées » REF 2003* Genève.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2.

Bruillard, E. (1994). Quelques obstacles à l'usage des calculettes à l'école : une analyse. *Grand N* n° 53

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage : Grenoble.

Chevallard, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17.3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 19.2, 221-266.

Delord, M. (2000). *Calcul humain, calcul mental et calculettes : questions pédagogiques.* http://www.sauv.net/delord/calcul/calc-index.html.

Kahane, J.-P. (2003). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Odile Jacob : Paris

Kieran, C et Guzman, J. (2003). Tâche, technique et théorie : une recherche sur l'instrumentation de la calculatrice à affichage graphique et la co-émergence de la pensée numérique chez des élèves de 12 à 15 ans. *Actes électronique du colloque Européen ITEM, Reims juin 2003.* www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/ ou www.reims.iufm.fr/OLD_IUFM/Recherche/ereca/itemcom/index.htm

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin.

Guin, D. & Trouche, L. (eds) (2002). *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique.* Collection Blanche (dir. N. Balacheff), Editions La Pensée Sauvage à Grenoble.

Williams, D., & Stephens, M. (1992). Activity 1: Five steps to zero. In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (pp. 233-234). Reston, VA: NCTM.

Solutions des problèmes « Gratte-ciel » (voir page 64)

1

	1	2	2	2	
1	40	10	30	20	3
2	30	40	20	10	3
3	20	30	10	40	1
3	10	20	40	30	2
	4	3	1	2	

2

	2	2	1	2	
3	10	20	40	30	2
1	40	10	30	20	3
2	30	40	20	10	3
3	20	30	10	40	1
	3	2	4	1	

3

			2		
	20	40	10	30	
	10	30	40	20	
2	30	10	20	40	
	40	20	30	10	3
		3		2	

4

				2	
	20	10	40	30	
	40	30	20	10	4
	30	40	10	20	
4	10	20	30	40	
		2			

5

				3	
	10	40	30	20	3
	20	10	40	30	
	30	20	10	40	
	40	30	20	10	4

6

	20	30	40	10	
1	40	10	30	20	
2	30	20	10	40	
	10	40	20	30	
		1	3		

QUELQUES IDÉES ET DES ACTIVITÉS EN COHÉRENCE POUR UN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AVEC LA CALCULATRICE

Laura Weiss, Genève

C'est un truisme que de s'exclamer sur la rapidité de l'évolution technologique aujourd'hui. Mais il est moins évident de discerner parmi les nouveautés qui sont mises quotidiennement sur le marché, lesquelles seront autre chose qu'un feu de paille et, parmi celles qui vont durer, lesquelles sont réellement porteuses de progrès pour leurs utilisateurs. La calculatrice s'est clairement imposée ces dernières années comme un outil indispensable de la vie sociale, tant il est vrai qu'on ne remplit plus sa feuille d'impôt sans une calculette sous la main ! Pourtant, tout un chacun, y compris les élèves de plus en plus jeunes, possède bientôt un téléphone portable et l'institution scolaire ne se préoccupe pas d'en enseigner l'utilisation. En ce qui concerne la calculatrice, pourquoi un enseignement de son utilisation devrait-il être considéré comme de la responsabilité de l'école et si oui comment le faire ? Est-ce seulement parce que le mot calculatrice vient de calculer que l'enseignement de son usage est dévolu au cours de mathématiques ? Vis à vis de l'ordinateur, dont l'utilisation préconisée par l'école a été soutenue par la mise en place de cours ad hoc sous diverses formes, pourquoi l'institution semble souvent considérer que l'emploi de la calculatrice va de soi ? Il n'y a pas lieu de reprendre ici le débat de société pour ou contre la calculatrice à l'école. Il a été tranché dans ce dernier lustre par des décisions institutionnelles, qui lui ont attribué une place en généralisant sa distribution aux élèves[1]. Or si l'école la met à disposition des élèves, elle se doit d'en assurer un emploi pour le moins correct et si possible efficace, en cohérence avec les plans d'études cantonaux et le plan cadre romand[2], où il est déclaré que son utilisation doit se faire « à bon escient ». Elle est aussi prévue comme un outil de calcul disponible ou nécessaire dans les moyens d'enseignement de mathématiques romands.

La prise en compte de cet outil, et du statut à lui accorder, qui concernaient essentiellement l'école primaire[3] et le cycle d'orientation, sont devenus une question ouverte pour tous les enseignants de mathématiques genevois, dès le moment où les calculatrices symboliques[4] ont fait leur entrée au collège de Genève par la grande porte, d'abord pour les élèves en mathématiques avancées, sans doute bientôt pour tous les collégiens.

Comment donc envisager dans un cours de mathématiques la présence d'une calculatrice dans le cartable des élèves ? De nombreux maîtres l'autorisent pour les exercices nécessitant des calculs relativement longs ou répétitifs, contents de pouvoir gagner ce temps qui manque toujours, et sont très attentifs à ce qu'elle reste bien au fond de la serviette

1 [ndlr] Les politiques cantonales ne sont pas harmonisées à ce propos, mais, généralement, la calculatrice fait partie du matériel officiellement à disposition des élèves, dès les niveaux 6 et 7, voire 4 ou 5.

2 *Plan d'études romand de mathématiques pour les degrés 1 à 6*, 1997, et collection des moyens d'enseignement romands *Mathématiques* 1P-4P, cinquième et sixième, 7-8-9, publiés de 1997 à 2003.

3 Il n'est pas rare que la Direction de l'enseignement primaire genevois reçoive des lettres de parents priant l'institution de justifier la distribution des calculatrices à « des élèves qui sont à l'école pour apprendre à lire, écrire et compter »

4 Calculatrices permettant le calcul algébrique et analytique tel que la résolution d'équations, le calcul de dérivées et d'intégrales, la représentation graphique de fonctions, etc.

5 Seul, à notre connaissance, le curriculum de mathématiques du CO genevois lui a fait une place conséquente en intitulant ainsi un de ses livrets. Mais, comme partout, les contraintes pratiques de terminer le programme prennent le pas sur les indications du curriculum conseillant une semaine de travail spécifique en 7e année, puis l'intégration de l'outil à bon escient dans les leçons de mathématiques jusqu'en 9e.

pendant les travaux écrits. Ceci est d'autant plus justifié que l'institution, tout en la distribuant aux élèves, n'a pas nécessairement prévu de directives d'utilisation pour les enseignants[5]. En effet, quelle remise en cause de l'évaluation, s'il n'est plus possible de tester la maîtrise des jeunes élèves dans les algorithmes des quatre opérations, et des plus âgés dans la résolution d'une équation ou le calcul d'une dérivée ! Faut-il alors lui attribuer le seul rôle d'outil pour « tricher », ou peut-on s'interroger sur des apports réels au cours de mathématiques ?
Nous postulons dans ce texte, avec quelques exemples à l'appui, qu'il est possible de lui donner aussi des fonctions plus ambitieuses parmi lesquelles :

- instrument[6] de contrôle et d'auto-validation (utilisation après coup pour le contrôle des résultats trouvés « à la main »)
- instrument de calcul (pour des opérations complexes ou très longues ou difficiles à faire à la main, remplaçant entre autres les tables numériques)
- outil de travail du calcul réfléchi[7]
- outil de validation et de preuve (« preuve par exhaustion » lors de situations comportant un nombre fini de cas)
- outil d'investigation de notions mathématiques nouvelles
- outil de recherche (pour des mathématiques expérimentales)
- objet d'étude (analyse de son fonctionnement)
- outil de différenciation et de remédiation.

Pour promouvoir ces différentes fonctions, nous formulons 8 thèses, énumérant des situations où la calculatrice passe du statut d'outil interdit à celui d'instrument indispensable :

Huit thèses sur l'utilisation de la calculatrice

Cadre général : **La responsabilité du choix de son utilisation devrait être graduellement dévolue à l'élève, mais sous le contrôle de l'enseignant : en particulier il faut parfois l'interdire parce qu'elle est contre-productrice ou parfois l'imposer car son apport est essentiel.**

1. Elle doit être *proscrite* quand la leçon vise l'entraînement des algorithmes de calcul numérique ou littéral à tous les niveaux. L'existence de cet instrument n'est pas une justification *a posteriori* de l'abandon de ces apprentissages[8], qui devrait faire l'objet d'un débat dans l'institution.
2. Elle est *utile* pour que les élèves puissent contrôler leurs résultats en travail autocorrectif.
3. Elle est *utile* pour différencier l'enseignement (peut être utilisée par certains élèves et pas par d'autres, peut être utilisée à certains moments et pas à d'autres, ...)
4. Elle est *utile* quand on veut que les élèves réussissent à résoudre des problèmes, faisant appel par exemple à la modélisation d'une situation, en pouvant « essayer » des calculs « pour voir ».
5. Elle est nécessaire quand on veut introduire ou stabiliser de nouvelles opérations que les élèves ne maîtrisent pas sur le plan technique[9], ou pour travailler le sens d'une notion sans le confondre avec des techniques (algorithmes) qui lui sont associées[10].
6. Elle est *nécessaire* pour que les élèves s'interrogent sur des phénomènes mathématiques, tels certaines régularités et aient envie d'en connaître la raison, allant si possible jusqu'à une démarche de preuve. Ils entrent alors dans des démarches de mathématiques expérimentales, où de nombreux essais permettent de poser une conjecture.
7. Elle est *indispensable* avec des élèves en grande difficulté pour qu'ils ne renoncent pas d'avance à résoudre un problème à cause du calcul.
8. Elle est *indispensable* quand on travaille une notion pour laquelle la connaissance technique n'est pas au programme ou qui nécessiterait le recours aux tables numériques (extraction de racines, calcul de rapports trigonométriques, logarithmes, ...).

Remarquons que, dans ces thèses, il y a peu de place pour le rôle d'aide au calcul de base, rôle principal que lui attribuent souvent les élèves. L'institution tombe aussi dans ce piège, quand, comme à Genève, la calculatrice est autorisée par exemple dès la 9ᵉ année ou au collège, en partant du principe que le calcul algorithmique[11] est alors maîtrisé.

Quelques règles d'utilisation de la calculatrice en classe de mathématiques et des activités pour les mettre en place.

1. Utilisation ergonomique d'une calculatrice

Les élèves doivent manipuler correctement leur machine, ce qui ne va pas sans quelques heures d'apprentissage spécifique. En particulier ils doivent savoir enchaîner des opérations avec l' utilisation des parenthèses, sans noter les résultats intermédiaires pour les réintroduire ensuite.

Pour ce faire, il est bon que tous les élèves aient la même calculatrice, ce qui est le cas quand la calculatrice est distribuée par l'école. En effet, les calculatrices des élèves ont alors toutes les *mêmes performances* connues de l'enseignant. Nous considérons aussi que, très tôt, dès la troisième ou la quatrième année, il est important que les élèves apprennent à utiliser, ne serait-ce que partiellement, une *calculatrice scientifique* et non pas une calculette « 4 opérations », qui risque de renforcer certaines erreurs standard, que nous évoquerons plus bas.

Les activités sont alors spécifiques à un modèle donné de machine et répondent à la consigne: **calcule en une seule étape...**
On peut profiter de l'activité *Le compte est bon*[12] pour trouver comment écrire la suite des opérations donnant directement le résultat recherché avec la calculatrice (mais après un temps de recherche par tâtonnement et de découverte de la procédure).

6 Par choix personnel, nous différencions ici les termes synonymes d'instrument et d'outil, instrument faisant pour nous plutôt référence à l'objet concret, alors qu'outil prend plutôt le sens d'outil mathématique.

7 On appelle calcul réfléchi tout le calcul qui fait appel aux propriétés des opérations et des nombres. Par exemple on peut utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition et les propriétés de la multiplication par des puissances de 10 pour calculer sans utiliser l'algorithme en colonnes (en posant des résultats intermédiaires par écrit si nécessaire) $32 \times 24 = 30 \times 24 + 2 \times 24 = 3 \times 24 \times 10 + 2 \times 24 = (3 \times 25 - 3) \times 10 + 2 \times 20 + 2 \times 4 = (75 - 3) \times 10 + 2 \times 2 \times 10 + 8 = 72 \times 10 + 40 + 8 = 720 + 48 = 768$. Dans ce calcul, on a à disposition en mémoire $3 \times 25 = 75$, $24 = 25 - 1$, le double de 2 et de 4 et le résultat des multiplications par 10 qui transforme unités en dizaines et ainsi de suite.

8 Voir par exemple la nouvelle de Asimov, « La sensation du pouvoir », racontant la réinvention des algorithmes de calcul dans une société totalement dépendante des calculatrices au point de ne même plus savoir écrire les chiffres ! Pour revenir au sujet de façon plus sérieuse, on pourrait sans doute ouvrir le débat sur l'apprentissage de l'algorithme de la division qui pose beaucoup de difficultés aux élèves en 5ᵉ et 6ᵉ. Elle serait profitablement remplacée par la connaissance mémorisée des tables de division (36 : 9 =) et les règles du calcul réfléchi concernant la division (division par les puissances de 10 d'exposants positifs et négatifs, divisions par 2 et par 5, division par 0,5 remplacée par la multiplication par 2, etc.). Cependant la compréhension de cet algorithme est nécessaire pour que les élèves puissent comprendre pourquoi l'écriture décimale des nombres rationnels est soit finie, soit périodique.

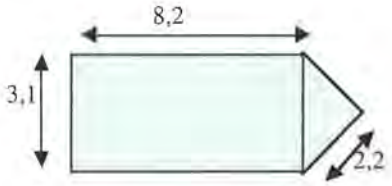
9 Cette introduction nécessite le recours à des nombres « compliqués » interdisant, par là même, le jeu de la devinette: introduction de l'opération inverse au lieu de l'opération à trous, utilisation de la multiplication au lieu de l'addition itérée, calcul de racines, élargissement du sens de l'exponentiation aux exposants fractionnaires

10 Voir par exemple le travail de JM Favre avec des enfants handicapés sur le sens des opérations élémentaires dans *Math-école n°156*, ou travail sur le sens de la division, ou la découverte des grands nombres, ...

11 C'est bien de calcul algorithmique et non de calcul réfléchi dont on parle ici, car c'est parce qu'il n'est plus nécessaire que les élèves montrent qu'ils le maîtrisent qu'on autorise la calculatrice ... et aussi parce qu'à c'est le moment où interviennent dans le programme l'extraction de racines carrées pour lesquelles il faudrait des tables numériques ou des calculs utilisant le nombre p qui prendraient trop de temps sans calculatrice.

12 A partir de 4 ou 5 nombres et des 4 opérations, arriver le plus près possible d'un nombre donné.

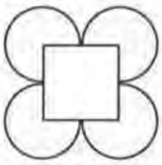
D'autres situations qui se prêtent bien à cet exercice sont les **calculs d'aires de figures composées**, comme une figure composée d'un rectangle et d'un triangle rectangle isocèle *(Fig. 1)* ou une figure avec un « trou » *(Fig. 2)*.



$A = 8{,}2 \times 3{,}1 + 2{,}2^2 : 2$

Fig. 1

La figure 2 est composée de 4 disques tangents de rayon 3,5 cm dans lesquels on a découpé un carré dont les sommets sont les centres des disques



$A = 4 \times \pi \times 3{,}5^2 - (2 \times 3{,}5)^2$

Fig. 2

2. Regard critique sur les résultats

Il faut enseigner aux élèves qu'ils doivent garder un regard critique envers les résultats donnés par la calculatrice.

Il s'agit ici de lutter contre le théorème-élève : **un résultat affiché par la calculatrice est juste d'office, puisqu'elle ne se trompe jamais, donc il n'y a pas lieu d'opérer des vérifications.**

Pour avoir ce regard critique, il faudrait instrumenter les élèves pour qu'ils fassent preuve d'une certaine aisance avec le calcul réfléchi, ainsi qu'avec l'estimation de l'ordre de grandeur[13] et de la vraisemblance d'un résultat[14]. Quand on travaille avec la machine, il faut développer systématiquement quelques réflexes de base :

- on contrôle mentalement l'ordre de grandeur et la vraisemblance du résultat
- on n'efface pas les résultats en cours de calcul[15]
- on s'interroge sur le statut d'un résultat: exact ou approché, nombre ou mesure, avec quelle unité, ... et en fonction de ce statut on donne le résultat avec la précision adéquate (et pas avec tous les chiffres obtenus à l'affichage !)
- on choisit la précision du résultat aussi en fonction du contexte, en particulier de l'énoncé, mais aussi de la réponse et de son unité[16]

Pour travailler ce regard critique sur le résultat, on peut proposer l'activité suivante :

L'affichage non contrôlé [17]

Paul est un paresseux qui calcule toujours avec sa montre calculatrice, même dans les cas les plus simples. Mais parfois il appuie mal sur les touches, surtout quand il le fait en cachette sous le pupitre. Dans cette suite de résultats faux, explique ce qui a bien pu se passer quand il a tipé les nombres ou les signes des opérations :

$3 \times 6 = 36$ $3000 + 600 = 900$ $3{,}5 \times 100 = 0{,}035$ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 24$

$72 : 0{,}4 = 18$ $5 \times 10^4 = 500\,000$ $\dfrac{120}{3\text{x}20} = 800$ $12{,}45 + 13{,}75 + 1{,}25 = 151{,}20$

On peut inventer de très nombreux exercices de ce type et la recherche de l'erreur de frappe (ou de la touche qui n'a pas pris) peut être un challenge qui devrait développer graduellement un regard critique envers les résultats de la calculatrice, ou du moins mettre en garde les élèves sur le risque d'erreurs même avec la calculatrice. Pour des élèves plus âgés, il n'est pas inutile non plus de rappeler que tout résultat affiché par une calculatrice n'est pas nécessairement exact.

La grosse multiplication [18]

a) Calculer 999 999 999 + 2 avec la calculatrice. Calculer ensuite 9 999 999 999 + 2. Que signifie le résultat affiché ? Est-ce le résultat exact ?

b) On veut maintenant calculer 123456 x 123456. Le faire en utilisant la calculatrice et noter la valeur obtenue.

c) Poser la multiplication et la faire par écrit en utilisant la calculatrice pour multiplier chaque chiffre du nombre d'en bas par celui d'en haut. Vous pouvez également utiliser la calculatrice pour effectuer les additions. Comparer le résultat obtenu avec celui d'avant. Combien de chiffres exacts la calculatrice a-t-elle fournis ?

d) On décompose le nombre 123456 = 12345 x 10 + 6 de telle sorte que la multiplication devienne 123456 x (12345 x 10 + 6). Développer ce calcul en utilisant la distributivité. Faire ensuite à la calculatrice les calculs 123456 x 12345 et 23456 x 6 et terminer par écrit. Comparer avec le résultat noté en c).

e) Trouver 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x ...15 en utilisant une méthode analogue et en regroupant certains facteurs pour avoir des multiples de 10.

3. Ecriture décimale exacte ou arrondie

L'utilisation de la calculatrice conforte les élèves dans la croyance que tous les nombres ont une écriture décimale finie.

Deuxième risque d'une utilisation systématique de la calculatrice : à côté du théorème–élève sur la justesse des résultats affichés, son affichage les encourage à penser que **tout nombre a une écriture décimale finie** sans se préoccuper de savoir si celle-ci est exacte ou arrondie. Combien de fois 2/3 deviennent 0,666666667, « car c'est la calculatrice qui l'a dit » ! L'écriture à virgule est alors consacrée comme seule réalité numérique, $\sqrt{3}$ et 1/7 ne sont pas des écritures (exactes) de nombres, il faut « calculer » pour arriver à l'écriture « standard », sous forme décimale. De même, les élèves acceptent mal qu'on utilise des écritures comme $2^3 x 5^2$. Il s'agit donc de les habituer à exprimer les nombres de différentes façons.

Des nombres sous différentes formes[19]

Parmi les écritures suivantes, lesquelles désignent le même nombre ?

2,5	7,5 – 0,5	$\frac{5}{2}$	3,5 x 2	7,5 – 5	$\frac{25}{10}$	5 x 0,5
12 – 5	$\frac{25}{10}$	2 + 1 + 2	$\frac{700}{100}$	$(0,5)^2$	$\frac{2}{5}$	5 + 2

Vérifier si nécessaire vos réponses avec la calculatrice.

13 L'ordre de grandeur d'un résultat est ce qu'on obtient en arrondissant les nombres du calcul et en utilisant à nouveau le calcul réfléchi comme par exemple 3,2 : 24 ≅ 3 : 20 = (3 : 2) : 10 = 1,5 : 10 = 0,15 = 0,1

14 La vraisemblance du résultat se base sur les propriétés des nombres et des opérations. Elle permet d'écarter certains résultats comme faux, mais ne peut en assurer l'exactitude. On peut savoir par exemple que lorsqu'on divise un nombre par un nombre supérieur à un, le quotient sera inférieur au dividende, ou quand on multiplie un nombre pair par un nombre entier le résultat sera pair.

15 La nouvelle génération de calculatrice qui permet de remonter dans les registres et de retrouver un grand nombre de calculs faits précédemment devrait permettre d'habituer les élèves à contrôler ce qui a été fait et à repartir d'un calcul intermédiaire s'il y a problème dans le résultat. Il est difficile de savoir si les élèves utilisent vraiment cette opportunité, mais pour que tous l'utilisent, elle devrait d'abord être enseignée !

16 Par exemple, l'épaisseur du bitume sur la route se donne bien en cm, mais exprimer le volume de bitume nécessaire à goudronner une route en cm^3 serait inapproprié !

17 Activité pratiquée assez régulièrement par L. Weiss dans ses classes de regroupement B (quand assez de calculatrices sont disponibles).

18 Une version d'une activité proposée par R. Floris, Collège Voltaire, Genève pour des collégiens de 1re année, et pour des futurs instituteurs à partir d'une activité décrite dans le *Rapport d'étape,* Annexe sur le calcul, smf.emath.fr/enseignement/CommissionKahane ou www.apmep.asso.fr, février 2002. A adapter au modèle de calculatrice utilisée.

19 Adapté de *Profession Enseignant*, Legrand éd.. Les maths en collège et en lycée, Hachette Education

Des écritures pour un même nombre[20]

Trouver une écriture de 6 puis de 0,5 sous la forme

- d'une somme de deux termes
- d'une somme de trois termes
- d'une différence
- d'un produit de deux facteurs
- d'un produit de trois facteurs
- d'un quotient
- d'une fraction de dénominateur 10
- d'une fraction de dénominateur 2
- d'une fraction de numérateur 300

Outre l'exercice du vocabulaire mathématique, ce type d'activité permet graduellement de structurer les nombres, de les organiser selon des régularités, de leur donner une place dans leur monde, place liée à leurs propriétés dans les opérations, qui vont ainsi émerger graduellement : nombres pairs ou impairs, entiers ou non, positifs ou négatifs, supérieurs ou inférieurs à 1. Elle permet de faire travailler le calcul réfléchi. La deuxième offre aussi l'exercice d'anticiper les résultats de calculs, pratique dont on constate qu'elle est inexistante chez les élèves en difficulté. Pour des élèves en fin de cycle d'orientation ou au début du collège on travaillera aussi le symbole racine carrée qui pose souvent problème

Semblables ou identiques ?[21]

Parmi les écritures suivantes lesquelles désignent le même nombre ?

5	$\sqrt{\frac{72}{36}}$	$\sqrt{16}+\sqrt{9}$	7	$\sqrt{2}$	$4+3$	$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$
$\sqrt{\frac{100}{25}}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{16+9}$	$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$	4×3	$\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{4}$
$\sqrt{5}$	$\frac{10}{5}$	$\sqrt{2+3}$	$\sqrt{16}\times\sqrt{9}$	2	$\sqrt{4}\times\sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{36}}$
12	$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	$\sqrt{5\times5}$	$\sqrt{4\times10}$	$\sqrt{2\times3}$	$\sqrt{16\times9}$	$\sqrt{144}$
$2\times\sqrt{10}$	$10\times\sqrt{7}$	$\sqrt{6}$	$2\times\sqrt{7}+8\sqrt{7}$			

Classer les résultats dans le tableau ci-dessous selon l'écriture « modèle » de l'expression, où a et b désignent des entiers positifs. L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

4. Sens procédural du signe égal

L'utilisation de la calculatrice renforce le sens procédural du signe égal

Le sens du signe « égal » et de l'égalité est une difficulté pour les élèves. La touche = de la calculatrice sert à mettre terme à un calcul en donnant le résultat attendu qui, au surplus, peut n'être qu'une valeur approchée de l'expression calculée. Ce sens de la touche =, qu'on peut appeler procédural puisqu'il lance une procédure, occulte le sens mathématique du signe égal qui indique que deux expressions d'écritures différentes désignent le même objet mathématique (ici un nombre). Et les fameuses « fausses égalités », contre lesquelles luttent sans grand succès les enseignants de mathématiques, de fleurir, confortées encore plus par l'utilisation de la machine : $3 + 5 = 8 \times 6 = 48 - 5 = 43$. Heureusement, les nouvelles machines à deux lignes d'affichage ne présentent plus cet inconvénient, puisque sur la première ligne

20 Adapté de *Profession Enseignant*, Legrand éd., Les maths en collège et en lycée, Hachette Education

21 Adapté de *Profession Enseignant*, Legrand éd.. Les maths en collège et en lycée, Hachette Education

reste affichée la suite d'opérations et sur la deuxième ligne le résultat (malheureusement toujours obtenu en pressant sur la touche =). Cependant, les « fausses égalités » étant préexistantes à l'introduction des calculatrices en classe, on peut douter de la probabilité qu'elles disparaissent des copies des élèves, même avec les calculatrices à deux lignes. Pour lutter conte ces mauvaises habitudes qui généralisent l'utilisation du signe égal à toutes sortes d'usages (on le voit utilisé pour les correspondances dans les situations proportionnelles comme 3 kg = 18 F, alors 1kg = 6 F, ou même entre équations équivalentes $3x = 12 = x = 4$!), on peut proposer des tâches à erreurs, à partir de photocopies de travaux d'élèves incorrects, où l'on propose la traque de tous les signes = mal utilisés.

5. Pour une utilisation de la calculatrice à bon escient

Après avoir exemplifié ces quatre situations où l'utilisation de la calculatrice doit demander de la part de l'enseignant un peu de méfiance, illustrons maintenant nos thèses avec des activités pour les élèves.

a) Un usage parcimonieux *(thèses 1 à 3 et thèse 7)*

Nous ne ferons pas de commentaires sur la *thèse 1* prônant l'interdiction de la calculatrice dans certaines situations, sauf pour insister sur l'importance du calcul mental, mémorisé ou réfléchi, même, s'il le faut, au détriment de l'entraînement des algorithmes de calcul écrit. Il nous semble essentiel qu'un élève-futur citoyen sache estimer le résultat de 37,2 x 97 en calculant 37 x 100 mentalement. On voit souvent, chez des élèves en difficulté, la pose en colonnes de calculs comme 9 x 7, comme si la pose en colonnes pouvait suppléer à la méconnaissance des tables mémorisées ! De même, on ne répètera jamais assez que proposer l'utilisation de l'algorithme de la multiplication pour des calculs tels 17 x 1000, c'est faire fi des propriétés de la base 10.

Sur la *thèse 2* (travail auto-correctif), il n'y a pas non plus à discourir, sauf à rappeler ce qui a été affirmé ci-dessus sur les problèmes d'une utilisation laissée complètement à la charge des élèves : l'utilisation de la calculatrice doit être enseignée pour qu'elle soit pertinente et efficace. De toute façon, la majorité des élèves l'utilise à la maison, pour les devoirs, alors autant qu'ils le fassent correctement.

La thèse 3 : « *La calculatrice est utile pour différencier l'enseignement* » nous semble aussi dans l'air du temps. Elle peut être mise en lien avec l*a thèse 7* : *La calculatrice est indispensable avec des élèves en grande difficulté pour qu'ils ne renoncent pas d'avance à résoudre un problème à cause du calcul* qui se préoccupe des élèves persuadés d'avance que les calculs associés à la tâche de résolution mathématique seront au dessus de leurs capacités. La calculatrice peut alors jouer un rôle important pour les rassurer et leur permettre de rentrer dans la recherche d'une solution. Si on se demande à partir de quel degré on doit autoriser cet instrument, on répondra que cela dépend des élèves. Certainement que jusque vers 13-14 ans il faut essayer d'exercer et renforcer la connaissance du répertoire mémorisé et du calcul réfléchi, parce que ce savoir est nécessaire pour saisir l'organisation des nombres selon des structures liées à leurs propriétés. Cet objectif nécessite une limitation de l'usage de l'instrument. Avant cet âge, on peut jouer sur la différenciation et l'autoriser pour certains élèves à certains moments comme appui.

b) L'objectif principal d'une activité de mathématiques *(thèse 4)*

Pour illustrer *la thèse 4* : *La calculatrice est utile quand on veut que les élèves réussissent à résoudre des problèmes, faisant appel par exemple à la modélisation d'une situation* », on peut l'énoncer sous une autre forme :
Les élèves devraient être déchargés du poids du calcul quand c'est le choix de la procédure et l'interprétation du résultat qui sont les buts premiers de l'exercice proposé.

Cela ne veut pas dire qu'on ne doit pas profiter de la résolution de certains problèmes pour exercer les algorithmes de calcul écrit, mais qu'il faut déterminer ce qui prime dans l'activité proposée aux élèves.
On peut mettre systématiquement à disposition la calculatrice dans des cas où le problème est d'abord axé sur le choix de l'opération et de l'interprétation du résultat. Voici deux exercices qui prennent en compte cette problématique, concernant la division, opération qui reste difficile pour de nombreux élèves, encore en 7e et 8e année.

Un grand âge[22]
Noémie a fêté ses 10000 jours. Combien soufflera-t-elle de bougies sur le gâteau de son prochain anniversaire ?

Ici la calculatrice devrait encourager les élèves à procéder directement par division, sans y renoncer à cause de la difficulté de l'opération, au lieu de tenter plusieurs multiplications par 365 jusqu'à obtenir un nombre proche de 10000. Ensuite, il s'agit encore d'interpréter la partie décimale du quotient et de l'arrondir à l'unité supérieure.

Bénéfice liquide
Lors d'une fête on vend 1256 bouteilles à 2.- la bouteille. Ces bouteilles ont été achetées par packs de 12 au prix de 8.- le pack. On peut rendre tous les packs non entamés. Quel est le bénéfice sur les boissons ?

De même que ci-dessus, il s'agit de savoir combien de packs ont dû être payés au fournisseur par la division de 1256 : 12, dont le quotient est arrondi à l'unité supérieure pour avoir la réponse. Pour poursuivre le même but, **les transformations des unités de temps**, par exemple des secondes en heures, minutes et secondes, font appel à des divisions euclidiennes dont les restes sont à interpréter correctement. La calculatrice se révèle alors un faux ami, ou plutôt un instrument qui ne dispense pas les élèves de la réflexion sur le résultat obtenu.

c) Le sens des opérations *(thèse 5)*
Nous ne sommes pas loin des activités en cohérence avec le but poursuivi par la *thèse 5: La calculatrice est utile quand on veut introduire ou stabiliser de nouvelles opérations que les élèves ne maîtrisent pas sur le plan technique, ou pour travailler le sens d'une notion sans le confondre avec les techniques qui lui sont associées* ».
Très intéressés par la lecture d'un article de JM Favre[23] portant sur l'introduction de la multiplication pour des enfants avec un retard mental, nous avons retrouvé dans le DVD tourné à l'occasion de la semaine de la géométrie[24] une situation similaire. La scène concerne des élèves de 2e année et montre comment certains d'entre eux trouvent le nombre de carrés nécessaires pour paver un grand carré. L'enfant qui s'exprime saisit, en temps réel devant le spectateur, un des sens de la multiplication: il « voit » dans sa tête et l'exprime avec ses mots, ces lignes de carrés de même longueur se répétant autant de fois que le pavé entre dans la hauteur du grand carré. Comme les nombres ne sont pas trop grands, il trouve facilement le résultat.
Pour stabiliser ce sens de la multiplication, on pourrait proposer de tels exercices avec des nombres plus grands, mais aussi avec la calculatrice, puisqu'à cet âge-là les élèves ne connaissent pas encore le répertoire mémorisé de la multiplication (les tables de multiplication). Dans un autre article publié par *Math-Ecole*[25], JM Favre raconte comment une enfant de moins de 10 ans s'intéresse au

22 Adapté d'un problème proposé pour l'épreuve cantonale genevoise de 6e primaire de mai 2004.
23 voir *Math-Ecole* n° 156
24 La « semaine de la géométrie » a été lancée par la Commision de l'Enseignement des Mathématiques (CEM) genevoise pour tous les enseignants de mathématiques du canton de Genève, des classes enfantines à l'Université, pendant la période du 29 mars au 3 avril 2004. Il leur a été proposé de travailler avec leurs élèves sur des problèmes de pavages. Un DVD a été tourné dans quelques classes, des tous petits de 4 ans aux étudiants universitaires, montrant comment ils résolvaient les problèmes proposés. Le DVD peut-être emprunté auprès de la CEM, collège Sismondi, av. de France 30, cp 110, CIC 1211 Genève 20.
25 voir *Math-école* n° 191

symbole √ de la calculatrice et va progressivement en construire le sens.
Des activités avec la calculatrice sont encore à promouvoir et à tester en classe pour les opérations avec les fractions, car ce n'est pas tant le temps accordé au drill qui manque pour ce type d'apprentissage, mais bien un travail sur le sens qui rendrait ce drill profitable. Voici une proposition d'activité.

Tant que ça ?[26]
Dans une classe, le calcul du pourcentage de filles, arrondi à un chiffre après la virgule est de 65,2% Peut-on déterminer le nombre de filles et de garçons de la classe ?

Très ouvert, ce problème fait appel à un grand nombre de divisions, qui peuvent être placées dans un tableau comportant en colonne le nombre total des élèves de la classe et en ligne le nombre de filles. Tout l'intérêt est d'approcher le résultat avant de se lancer dans tous les calculs possibles à partir d'un choix raisonnable du nombre d'élèves dans la classe.
De nombreuses notions se prêtent ainsi à cette introduction à l'aide de l'instrument. Tout d'abord les opérations dont il est important de travailler le sens avant de passer aux algorithmes, mais aussi de nouveaux types de nombres, comme les fractions ou les nombres irrationnels. Et les grands nombres qui sont amenés presque naturellement dans des situations où l'usage de la calculatrice permet de les faire apparaître comme d'un coup de baguette magique.

d) Les grands nombres *(thèse 5 et 8)*
Des résultats obtenus à l'aide de la calculatrice permettent de faire découvrir aux élèves les grands nombres.

Si tout le monde connaît une version ou une autre de l'histoire des grains de blés sur un échiquier, d'autres calculs permettent aux élèves de toucher aux grands nombres qui décrivent, à leur manière, le monde naturel.

L'étoile la plus proche
Calcule la distance du système solaire à Proxima du Centaure en sachant qu'un rayon lumineux met environ 4 ans pour nous parvenir de cette étoile et que la vitesse de la lumière vaut approximativement 300000 km/s.

Il ne s'agit que de calcul, mais il fait appel au concept de vitesse qui est difficile pour les élèves ; en outre, les distances en jeu sont impressionnantes ! Dans le même style on peut calculer la vitesse avec laquelle on se déplace simplement en vivant sur notre Terre, à cause de sa rotation (un point sur l'équateur parcourt 40000 km en 24h) ou de son déplacement autour du Soleil (on parcourt ainsi la distance de l'orbite terrestre en une année).

Un développement éclair
Calcule le nombre de bactéries qu'on aura dans un bouillon de culture à partir d'une seule bactérie après un jour de travail en laboratoire (8 heures) en sachant que les bactéries se reproduisent par mitose (une bactérie-mère donnant naissance à deux bactéries-filles par séparation en deux) toutes les 20 minutes approximativement.

Ici il s'agit d'une fonction exponentielle ! Lors de ces calculs, les élèves qui ne la connaissent pas, peuvent découvrir *l'écriture scientifique des nombres*. Il s'agit alors à nouveau de prendre le temps de l'expliquer et l'exercer avec la calculatrice. Combien avons-nous rencontré de collégiens qui ne comprenaient pas pourquoi leurs résultats étaient toujours trop grands d'un facteur 10, alors que pour tiper 5000 en écriture scientifique, ils entraient 5 x 10 EE3, ce qui leur donnait 50×10^3 au lieu du 5×10^3 désiré !

26 Problème tiré du *Rapport d'étape*, Annexe sur le calcul, smf.emath.fr/enseignement/CommissionKahane ou www.apmep.asso.fr, février 2002. Il provient d'un problème traité par Laplace dans *L'essai philosophique sur les probabilités*, dans lequel Laplace s'intéresse aux rapports « nombre de garçons au nombre de filles à la naissance en France ».

L'humanité en boîte[27]

a) Si on voulait placer toute l'humanité dans un gigantesque terrain carré à raison de 1 m^2 par individu, combien mesurerait le côté de ce carré ?
b) Pour estimer la dimension d'un cube qui contiendrait toute l'humanité, estimer d'abord l'espace nécessaire à une personne. Quel serait alors l'ordre de grandeur de l'arête du cube contenant toute l'humanité ? 100 m ? 1 km ? 10 km ? 100 km ? 1000 km ?
c) Et si enfin on répartissait également toute l'humanité sur l'espace des terres émergées, soit environ 510 millions de km^2, de quel espace disposerait chaque individu ?

Un grand cahier[28]

Combien de fois faut-il plier une très grande feuille de papier pour obtenir un cahier d'au moins 500 pages ?

On devine d'abord, puis on calcule, et on est déçu : 8 pliages suffisent car $2^8 = 512$!

Dans le domaine des grands nombres, il est aussi important de savoir estimer en utilisant s'il y a lieu la correspondance approchée $2^{10} = 1024 \approx 10^3$.

Jusqu'à la Lune en échelle de papier

On fait des pliages d'une grande feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur. Combien faudrait-il de pliages pour atteindre la hauteur de la tour Eiffel (300m) ? Et la distance Terre-Lune (384 000 km) ?

Même principe que ci-dessus mais s'adressant à des élèves plus âgés : 300 m = 300 000 mm = 3 000 000 feuilles, et 3 000 000 < 2^{22}, seulement 22 pliages ; et pour la Lune 3 840 000 000 000 < 2^{42} ce qui fait 42 pliages !

Et nous ne résistons pas à parler d'un autre infini, plus modeste peut-être, mais découvert avec grand d'enthousiasme par Gregory qui, à 15 ans, avait tellement de difficultés en maths et partout ailleurs à l'école :

Le périmètre maximal

On donne un rectangle d'aire 24 cm^2. Quelles doivent être ses dimensions pour que son périmètre soit le plus grand possible ?

Après avoir trouvé 4 et 6, 3 et 8, 2 et 12, 1 et 24 et constaté que chaque fois le périmètre était plus grand, toute la classe était bloquée. Et tout d'un coup Gregory s'est levé et a crié 0,5 et 58. Bon, le double de 24 n'est pas vraiment 58, mais Gregory avait passé le cap et, pour une fois, ces nombres à virgule, inférieurs à 1 qui ne se comportaient jamais comme il fallait, lui venaient en aide pour agrandir encore son périmètre. Toute la classe était en ébullition, l'un proposait 0,1 et 240, l'autre un millième et 24000, le troisième voulait inscrire au tableau un nombre tellement petit qu'il faisait littéralement exploser l'autre dimension, d'autres encore faisaient appel aux fractions (enfin, après les avoir tant travaillées en classe !).

e) Faire ressentir le besoin de preuve et promouvoir l'outil algébrique *(thèse 6)*

La thèse 6 affirme *que la calculatrice est nécessaire pour que les élèves s'interrogent sur des phénomènes mathématiques, telles certaines régularités et aient envie d'en connaître la raison, allant si possible jusqu'à une démarche de preuve. Ils entrent alors dans des démarches de mathématiques expérimentales où de nombreux essais permettent de poser une conjecture.*

27 Tiré du *Rapport d'étape*, Annexe sur le calcul, smf.emath.fr/enseignement/CommissionKahane ou www.apmep.asso.fr, février 2002.

28 CREM, Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques, CREM, 1995.

En mathématiques, il est parfois nécessaire de montrer l'utilité d'un outil comme dans cette activité-jeu, le calcul réfléchi :

La course à 10

A partir d'un nombre compris entre 100 et 1000, il faut afficher 10 comme résultat en un maximum de 4 opérations, mais en n'opérant qu'avec des nombres compris entre 1 et 9.

Exemple : On part de 456. $456 + 3 = 459$ $459 : 9 = 51$ $51 + 9 = 60$ $60 : 6 = 10$

Pour faire décroître rapidement le nombre initial, il est intéressant de diviser par 9, ce qui peut bien sûr se faire en tâtonnant avec la calculatrice, mais la connaissance de certaines propriétés des nombres (multiples et diviseurs, critères de divisibilité par 9) permet de gagner beaucoup de temps.

Ce jeu existe sous d'autres formes, par exemple « La descente à zéro » où, avec les mêmes règles, il s'agit d'atteindre zéro en un minimum d'étapes. Dans une classe genevoise de 8eB (élèves non prégymnasiaux) les élèves se sont pris au jeu et ont voulu trouver tous les nombres de deux chiffres qui permettaient d'arriver à zéro en trois étapes ou moins. Après de nombreux essais désorganisés, ils ont constaté qu'en dessous de 89 c'est gagné, parce qu'il est possible de construire en une étape un multiple de 9 dont le quotient par 9 est strictement inférieur à 10 (on peut alors atteindre 0 avec une soustraction). Au dessus, les multiples de 9 conviennent mais aussi 96 qui est un multiple de 8, etc[29]. Malgré l'usage de la calculatrice, ils ont beaucoup travaillé les répertoires mémorisés et le calcul réfléchi.

L'utilisation de la calculatrice peut permettre de développer le besoin de preuve.

Il s'agit ici de mettre les élèves en situation de se demander pourquoi c'est comme ça que cela fonctionne. Des jeux avec les nombres peuvent donner lieu à cette question. Un peu moins banal que la preuve que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par trois[30], voici une autre situation qui rend nécessaire l'outil algébrique pour comprendre comment cela fonctionne.

Des résultats inattendus

Choisir deux nombres a et b tels que $a + b = 1$. Calculer $a^2 + b$ et $a + b^2$. Que constate-t-on ? Est-ce toujours le cas ? si oui pourquoi ?

On constate qu'on obtient toujours le même résultat. Pour le prouver, on prend $b = 1 - a$. Le calcul littéral permet ici de comprendre l'égalité.

Critère de divisibilité

On apprend que pour qu'un nombre naturel soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres soit divisible par 3. Pourquoi ?

On peut se poser la même question pour le critère de divisibilité par 11, mais aussi par 5, 4, 2 etc. et les résoudre avec un peu d'algèbre élémentaire.

Comparaison n'est pas raison[31]

Compare les trois nombres suivants :

$A = 999\,999\,999\,999 \times 999\,999\,999\,999$

$B = 999\,999 \times 999\,999 \times 999\,999 \times 999\,999$

$C = 999\,999\,999\,999\,999\,999 \times 999\,999$

Des élèves sachant utiliser la notation scientifique (9e année ou début du collège) peuvent estimer aisément l'ordre de grandeur 10^{24} des trois nombres, mais ensuite ? Selon le modèle, la calculatrice ne peut pas venir en aide. Pour se déterminer, il faut passer par une écriture exacte en utilisant les puissances, par exemple $A = (10^{12} - 1)^2$ ou intro-

29 En fait, on arrive en trois étapes avec les nombres 89, 90, 91, 96, 98 et 99.

30 On demande de calculer la somme de trois nombres consécutifs et de vérifier qu'elle est divisible par 3. Est-ce toujours le cas ? Si oui pourquoi ?

31 Activité conçue par l'IREM de Strasbourg, Des activités pour un enseignement modulaire en seconde.

duire une notation algébrique $x = 999\,999$ et évaluer algébriquement A, B et C en fonction de x. Malheureusement (ou heureusement) la calculatrice distribuée aux élèves genevois détourne la difficulté en donnant la bonne réponse.

Comparaison est encore moins raison[32]
Parmi ces deux nombres, lequel est le plus grand ?
A = 999 999 999 999 x 999 999 999 999
ou B = 999 999 x 1 000 001 x 999 999 x 1 000 001

Dans cette même thèse, nous postulons que : *Les mathématiques ne sont pas seulement une discipline où pour chaque problème une méthode « experte » amène directement à la solution. C'est aussi une branche d'étude qui s'est construite et se construit par l'essai et l'expérimentation.*
Pour faire entrer les élèves dans ces mathématiques-là où le nombre d'essais permet petit à petit de voir apparaître des tendances, de dessiner des lois, il n'est plus raisonnable de leur demander de calculer à la main. Pour trouver le dernier chiffre de 2^{2004}, on doit calculer beaucoup de puissances de 2, avant de réaliser qu'au bout d'un moment le dernier chiffre des puissances se répète selon une régularité[33] !

Carré ou pas carré
Rafael a trouvé 408'423 pour l'aire d'un carré dont la mesure du côté s'exprime par nombre entier, mais Blerina prétend qu'il s'est trompé. Comment l'a-t-elle su, alors qu'elle n'a pas utilisé la calculatrice ?
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Sur le même principe que l'exercice précédent, il s'agit de constater que les carrés d'entiers ont comme dernier chiffre 1 ; 4 ; 9 ; 6 ; 5 ou 0. Pour les cubes, en revanche, tous les chiffres sont possibles.

Maximiser le produit
Chercher parmi les décompositions additives d'un nombre naturel en somme de nombres naturels, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Même avec le choix d'un nombre relativement petit, il y a de nombreuses décompositions additives : pour 10, il y a 11 possibilités en excluant les décompositions comportant des 0 et des 1 que les élèves comprennent rapidement être peu intéressantes. Cette recherche demande organisation et réflexion. La solution générale est la maximalisation du nombre de termes égaux à 3.[34]

La basse-cour
Dans une basse-cour, il y a des poules et des lapins. On voit 45 têtes et 108 pattes. Combien y voit-on d'oreilles ?

Si tel qu'il est présenté il convient bien au dernier cours avant les vacances de Pâques, puisqu'on peut ensuite distribuer des lapins en chocolat, ce problème ancien et classique existe en une multitude de versions. Il est relativement facile à résoudre dès la 8e ou la 9e avec des équations. Avant, les élèves doivent faire des essais, mais par un raisonnement arithmétique, comme on le faisait jusqu'au Moyen-Age[35], ils peuvent s'orienter vers la solution. Pour pousser à une recherche systématique, il peut être intéressant de prendre des nombres beaucoup plus grands

32 Activité conçue par Ruhal Floris pour les calculatrices comme la TI34 qui donnent la réponse à l'activité précédente.

33 Dans une classe d'élèves en grande difficulté, on a posé tout d'abord le problème du dernier chiffre de 5^{2004}, pour qu'ils découvrent par eux-mêmes que cela ne pouvait pas être autre chose que 5. Ensuite ceux qui avaient compris se sont vus proposer 9^{2004} et deux seulement sur les dix élèves ont fini par trouver tout seuls la solution de 2^{2004} !

34 Ce problème figure dans le manuel romand *Mathématiques, Sixième année*, avec le passage du nombre 24 de l'édition 1985 au nombre 25 de l'édition de 2002, pour envisager les cas où le nombre choisi n'est pas un multiple de 3.

35 Voir l'article de M. Ballieu & M.-F. Guissard : *Les problèmes du premier degré : des méthodes de fausse position à la résolution algébrique* (pages 54 à 61 de ce numéro)

tels 2142 têtes et 4978 pattes, qui forcent à construire une démarche au lieu de tâtonner [36].

Somme de nombres naturels consécutifs
Quels sont tous les nombres impairs qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins 3 nombres naturels consécutifs ? Trouver la caractéristique des nombres pour lesquels cette règle fonctionne.
Essayer d'établir une preuve de la conjecture.
Conseil : réfléchir au nombre de termes de la décomposition, est-il pair ou impair ? Faire le lien avec les diviseurs du nombre.

Les élèves peuvent constater par des essais (avec calculatrice pour explorer aussi de grands nombres) que ce sont les nombres impairs non premiers qui conviennent. Pour établir une justification de cette conjecture, on peut montrer que les sommes d'un nombre pair de nombres consécutifs sont des nombres pairs et qu'elles ne peuvent pas être prises en compte, puis que les sommes de 3, 5, 7, 9, ... nombres consécutifs sont, respectivement, des multiples de 3, 5, 7, 9 ... On peut ainsi se convaincre que les nombres premiers ne peuvent pas figurer dans la liste.
Il existe de très nombreux problèmes de ce type, présentés aussi dans les manuels de mathématiques romands, qui jouent avec les nombres entiers ou des situations de combinatoire. Ce qui est important, c'est que l'apport de la calculatrice est essentiel pour ce type de mathématiques.

Somme de nombres naturels consécutifs
Quels sont les nombres naturels qui sont la somme d'au moins deux nombres naturels consécutifs ?

La réponse est que tous les nombres naturels conviennent, excepté les puissances de 2. Si les élèves font suffisamment d'essais, ils peuvent parvenir à ce résultat. En revanche, la preuve mathématique est un peu plus délicate.

f) Pour remplacer les tables numériques *(thèse 8)*

La thèse 8 affirme que *la calculatrice est indispensable quand on travaille une notion pour laquelle la connaissance technique n'est pas au programme ou qui nécessiterait le recours aux tables numériques*. On peut profiter de l'utilisation de la calculatrice pour faire réfléchir les élèves sur ce que signifient les nombres obtenus en pressant la touche √. Voici par exemple une activité qui doit faire prendre conscience de l'existence de nombres au développement décimal infini non périodique, de la difficulté pour la calculatrice de traiter ce type de nombres et pour nous de les concevoir, quand on ne pense qu'en termes d'écriture décimale, alors que le calcul algébrique s'avère un outil particulièrement puissant pour les manipuler.

La calcul de $\sqrt{8}$ [37]

a) Calculer $\sqrt{8}$ avec votre machine et noter le résultat sur une feuille. Appelons x ce nombre.
b) Calculer x^2 avec la calculatrice. Le résultat vous inspire-t-il des remarques ?
c) 2 est-il égal à $\sqrt{8}$? Justifier.
d) Et 3 est-il une meilleure approximation de $\sqrt{8}$?
e) Trouver un encadrement de $\sqrt{8}$ au millième près à l'aide de votre calculatrice.
f) Quel est l'encadrement le plus précis possible que fournit votre machine ?
g) Calculer avec votre machine $\sqrt{8} - \sqrt{7}$, puis $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$ [38].
h) Quelle fiabilité ont ces résultats ?
i) Quelle conjecture peut-on tirer de ces calculs ?
j) Peut-on démontrer cette conjecture ?
k) Généraliser la conjecture établie en g) et la démontrer.

En revenant à des exemples plus terre à terre, notons qu'il est bien agréable de pouvoir demander aux élèves de trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle, l'aire d'un disque ou le sinus d'un angle sans avoir recours aux tables numériques qui nécessitaient aussi un apprentissage spécifique pour une utilisation adéquate. C'est la raison pour laquelle nous sommes parfois choqués par la réponse de collègues qui trouvent qu'enseigner l'utilisation de la calculatrice est une perte de temps par rapport à leur enseignement de mathématiques.

Conclusion

Dès le moment où nos élèves ont à disposition une calculatrice, qui leur a été la plupart du temps fournie par l'école, il nous semble de notre devoir de lui accorder un espace dans notre enseignement. Pour penser cette place, nous avons tenté une catégorisation des fonctions et rôles de la calculatrice à l'école, qui nous ont permis d'argumenter au sujet de sa pertinence en classe de mathématiques. Ensuite, à travers des activités à proposer aux élèves, nous avons essayé d'illustrer un certain nombre d'éléments qui nous tiennent à cœur à propos de son utilisation.

En tant qu'enseignants de mathématiques, nous ne sommes d'ailleurs pas les seuls utilisateurs scolaires de cet instrument. Dans tout cours faisant appel à des données numériques (mathématiques, sciences, économie, etc.) elle a son rôle à jouer car

1. Elle permet de calculer à partir de données réelles, provenant par exemple de mesures expérimentales, tout en gardant une bonne précision au résultat.
2. Elle permet d'éviter des résultats entachés d'erreurs de calcul.
3. Elle remplace les tables numériques.
4. Elle permet de faire du calcul d'erreur sur des données mesurées (estimation de la précision du résultat, recherche d'une pente par la méthode des moindres carrés, etc.).
5. Elle permet de multiplier les essais pour aboutir à une modélisation ou à une conjecture, faisant ainsi faire aux élèves des mathématiques expérimentales.
6. Elle permet la résolution de la vaste classe de problèmes pour lesquels il n'y a pas de solution exacte.

Si ce n'est donc pas uniquement pour un meilleur apprentissage des mathématiques, à une époque où l'on parle beaucoup d'interdisciplinarité, il nous semble essentiel de dire que le cours de mathématiques doit armer les élèves, et tout d'abord les plus faibles, en leur offrant en prime de l'instrument la capacité de l'utiliser correctement.

36 Dans une 9e prégymnasiale genevoise un élève a expliqué que puisque chaque animal avait en tout cas deux pattes, il suffisait de soustraire du nombre total de pattes le double du nombre de têtes et on obtenait directement le nombre d'oreilles. Drôle d'anatomie mais démarche identique à celle qui peut se faire avec le système d'équations décrivant le problème. A parier que l'outil algébrique passera d'autant mieux.

37 Activité proposée par J.-M. Delley dans le cadre d'un groupe de travail de la Commission de l'Enseignement des Mathématiques (CEM) genevoise pour des élèves de 1re année du collège

38 On notera que ces écritures ne sont pas du tout évidentes pour les élèves du début du collège et leur introduction dans la calculatrice, surtout si elle a été peu travaillée dans les classes précédentes peut se révéler un problème en soi..

QUALIFICATIONS RÉGIONALES VALAISANNES : COMMENTAIRES ET DÉVELOPPEMENTS DE QUELQUES PROBLÈMES

Augustin Genoud et François Jaquet

Les problèmes des qualifications régionales valaisannes pour le 19e Championnat des jeux mathématiques et logiques ont été présentés dans un numéro précédent de *Math-Ecole* (213, pp. 50 à 52).
Nous avons eu la curiosité d'aller voir, au-delà des classements obtenus sur la base des réponses justes, ce que pouvait apporter une analyse un peu plus fouillée des résultats, pour les enseignants de mathématiques. L'entreprise s'est révélée passionnante et susceptible d'intéresser les lecteurs de *Math-Ecole*.
Nous présentons ici, en partie A, les analyses des sept premiers problèmes de la catégorie CM (4e et 5e primaire) dont certains ont aussi été résolus par des élèves plus âgés. Pour les autres problèmes, partie B, nous nous contentons de donner la réponse et quelques indications sur les taux de réussite, Nous terminerons par la proposition d'une suite d'activités sur le thème du dernier problème, « Les Euros », partie C.

A. Analyse et commentaires des premiers problèmes

Les analyses des résultats sont effectuées à partir de bulletins-réponses rendus par les participants aux qualifications régionales des centres de Sion, Savièse et Martigny, au total :
- 164 de catégorie CM (degrés 4 et 5, dont 50 de 4P, 77 de 5P ont pu être identifiées avec certitude)
- 141 de catégorie C1 (degrés 6 et 7, dont 75 de 6P et 37 de 1CO ont pu être identifiés)
- 74 de catégorie C2 (degrés 8 et 9)
- 47 de catégorie Ly (degrés 10 à 12)

(Pour les énoncés, voir *Math-Ecole* 213, pages 50 et 519 ou les notes de bas de page.)

1. La poste[1]

De 50 % (en 4P) à 70 % (en 5P) des élèves de catégorie CM ont trouvé la bonne réponse : 15h15.
L'erreur la plus fréquente, 15h30, recueille 20 % des suffrages. Elle correspond à 30 minutes après le départ, au lieu de 15 minutes. Les autres se répartissent assez régulièrement de 15h à 17h30. On ne sait pas à quoi les attribuer, mais si on analyse la tâche, on constate qu'il y a plusieurs occasions de se tromper : dans le premier calcul de la durée de l'école à la maison (de 12h à 12h30 : 30 minutes), dans l'estimation de la moitié de cette durée pour la moitié du parcours : 15 minutes, puis dans la dernière opération consistant à ajouter 15 minutes à 15h00.

2. Les Dupuis[2]

La réponse, 9 ans, a été trouvée par 26 % des élèves de 4P, 42 % de 5P, 79 % de 6P et 62 % au niveau 7, en première année du cycle d'orientation. Il y a là une progression notable avec l'âge et une régression au passage de l'école primaire au cycle d'orientation, très souvent constatée, pour certains types de problèmes, dans les concours de mathématiques.

1 Michel habite à l'extrémité d'une longue avenue. À l'autre bout se trouve l'école, et à mi-chemin, la poste. S'il quitte l'école à midi, il se trouve chez lui à 12 h 30. À 15 h 00, il part de sa maison et va à la poste. A quelle heure arrivera-t-il a la poste ?

2 Dans la famille Dupuis, il y a quatre enfants. Il y a une différence de deux ans entre chaque enfant et l'aîné est trois fois plus âgé que le plus jeune. Quel est l'âge de l'aîné ?

Pour quelqu'un qui a des connaissances algébriques mobilisables, le problème se résout presque mécaniquement en posant par exemple x, $x - 2$, $x - 4$ et $x - 6$ pour les âges des quatre enfants et l'équation $x = 3(x - 6)$, qui se réduit à $x = 9$.
Mais les élèves des degrés 4 à 7 n'ont évidemment pas cette technique à disposition et ce type de situation ne figure pas non plus dans leur répertoire scolaire de problèmes. On peut donc dire qu'ils se trouvent ici devant un « vrai problème », nouveau, pour lequel ils doivent imaginer une stratégie.
Ils peuvent y aller par essais successifs : écarter les hypothèses 1, 3, 5, 7 ans et 2, 4, 6 et 8 ans et retenir 3, 5, 7, 9 ans car 9 est le triple de 3. (On notera que la formulation « trois fois plus » de la langue courante constitue un obstacle pour de jeunes élèves, par sa référence à l'addition et à la multiplication simultanément, sans compter son ambiguïté puisque « une fois plus » et « deux fois plus » sont considérées comme équivalentes.)
Une autre méthode, plus générale, est de penser à l'écart de 6 ans entre le plus jeune et l'aîné, qui doit être le double de l'âge de plus jeune pour que l'âge de l'aîné soit le triple. Le risque est de commettre une erreur sur cet écart : 8 ou 4 et d'aboutir aux réponses respectives de 12 ou 6. Ces erreurs ont effectivement été constatées lors de l'analyse des résultats, avec des fréquences de 9 % et 10 % respectivement.
L'erreur la plus fréquente, surtout en 4P et 5P, n'est cependant pas l'une de celles qui sont mentionnées ci-dessus : 12 % de l'ensemble des élèves ont trouvé 8 ans (et ce taux s'élève à 23 % en 4P). Cette réponse correspondrait à la progression 2, 4, 6, 8, prenant en compte l'écart de deux ans entre chaque enfant, sans tenir compte de la condition sur le rapport entre l'âge de l'aîné et celui du cadet.
Mais on est là dans le domaine des hypothèses. Pour en savoir plus, il suffit de proposer le problème à une ou plusieurs classes et de demander aux élèves d'expliquer comment ils ont trouvé la réponse.

Dans l'attente, on peut déjà considérer que ce problème est potentiellement très intéressant du point de vue d'une évaluation formative : il donne des indications très significatives du niveau de développement des élèves et des compétences qu'ils doivent mettre en œuvre pour arriver à la solution. Il est certes possible de la trouver par hasard après un ou deux essais, mais le jeu sur les variables didactiques permet d'éviter ce biais. Par exemple en choisissant un écart régulier de 4 ans, il faudrait au moins organiser les essais pour arriver au but.

3. La prison [3]

Cette prison est bien étrange et le gardien imprudent ou suspect de familiarité avec ses prisonniers. Ce contexte, saugrenu, n'a vraisemblablement pas aidé les élèves, dont la réussite oscille de 32 % à 48 % selon les degrés.
La majorité des élèves n'ont pas pensé à profiter de la possibilité offerte au gardien : « (chez lui il passe autant de fois qu'il le veut) ».
En effet, les solutions (il y en a beaucoup) reposent toutes sur la visite d'une des cellules voisines de celle du gardien et d'un retour au point de départ (A) avant de passer chez les 14 derniers prisonniers.

3 Dans cette prison, le gardien habite en A. Il y a un prisonnier par cellule, donc 15 prisonniers. Le gardien veut rendre visite à chaque prisonnier sans passer deux fois dans la cellule d'un même prisonnier (chez lui, il passe autant de fois qu'il veut) et souhaite terminer sa visite en B. Le gardien ne se déplace qu'horizontalement et verticalement. Dessine un chemin possible. (Les cellules A et B sont respectivement en haut à gauche et en bas é droite d'un quadrillage de 4 x 4 cases.)

4 Thérèse regarde une page de son livre de sciences sur laquelle sont dessinés des têtards et des grenouilles. Tiens, les têtards ont une queue, mais n'ont pas de pattes et les grenouilles (têtards adultes) ont quatre pattes alors que leur queue a disparu. Thérèse compte toutes les pattes et les queues et en dénombre 35. Sachant qu'il y a le même nombre de têtards que de grenouilles, combien y a-t-il de grenouilles dessinées sur la page ?

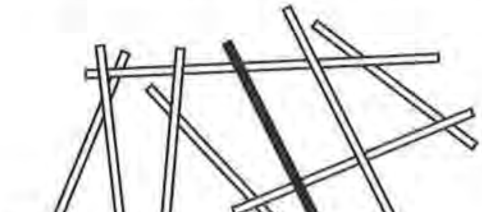
4. Les grenouilles[4]

Il y a 7 grenouilles dessinées (et aussi 7 têtards). La fréquence des bonnes réponses augmente avec les degrés: 34 % en 4P, 46 % en 5P, 76 % en 6P, 83 % au niveau 7, et 95 % aux niveaux 8 et 9, des 2e et 3e années du cycle d'orientation,
Il y a donc une progression sensible en fonction des degrés scolaires sur l'ensemble des degrés du primaire et secondaire.
Si on compare ce problème à celui des « Dupuis », on constate qu'ils ont des structures ressemblantes, mais, lorsqu'on examine leur mise en équation, on voit que celle de « Les grenouilles » ($x + 4x = 35$) est plus simple que la précédente et que, d'un point de vue arithmétique, la recherche correspond à la résolution d'une écriture lacunaire 5 x ... = 35, ou à une simple division par 5.
L'analyse des erreurs fait apparaître un très large étalement de 2 à 280. Les fréquences les plus élevées sont de 3 % pour 17 et 70, de 2 % pour 5, 8 et 12. Il n'est donc pas possible d'émettre des hypothèses sur les raisonnements erronés qui y ont conduit.

5. Les pièces de bois[5]

La solution correcte a été trouvée par:

- 50 % des concurrents des degrés 4 et 5
- 48 % des concurrents des degrés 6 et 7
- 60 % des concurrents des degrés 8 et 9



5 Ces dix pièces de bois, posées sur une table, ont toutes la même épaisseur. Colorie la ou les pièces qui s'appuient sur trois autres pièces.

Il y a peu de variation dans les taux de réussite à ce problème qui fait appel à des compétences originales non développées par les programmes scolaires: être capable de déterminer à quel niveau se situent les pièces, en fonction des parties visibles ou cachées d'une vue de dessus: il y en a 3 directement sur la table, 3 autres sur les précédentes et les 4 dernières, entièrement visibles, à un niveau supérieur.
Les erreurs, dans leur grande majorité, concernent ces dernières pièces. Parmi elles, la plus fréquente consiste à marquer les trois pièces supérieures dont le dessin en plan présente trois intersections avec d'autres pièces.
Ce problème nous paraît excellent pour améliorer ses capacités de reconnaître une disposition spatiale dans une représentation plane.
On peut facilement en créer des variantes et passer, dans l'autre sens, du modèle en trois dimensions à sa représentation sur une feuille.

6. Les cousins[6]

Fanny et Luc sont les frères et sœurs de Jeanne.
Cette réponse juste est obtenue par 34 % des élèves en 4P, 57 % en 5P, 62 % en catégorie C1, 68 % en catégorie C2. La progression est forte pour les degrés 4 à 6 mais les taux se stabilisent ensuite.
Lorsqu'on analyse l'énoncé du problème, on comprend pourquoi le problème est très difficile pour de jeunes élèves. Il y a sept phrases contenant chacune des informations de nature différentes: la première, indique les noms des huit enfants, dont beaucoup seront inutiles; la deuxième, la troisième et la cinquième permettent de savoir qu'il y a trois familles, respectivement de 3, 1 et

6 Grand-père Louis a huit petits-enfants (Fanny, Émile, René, Paul, Tanguy, Luc, Yann et Jeanne) et ne sait plus lesquels sont frères et sœurs. Peux-tu l'aider sachant que Fanny a un frère et une sœur, que Yann est fils unique, que René n'a pas de sœur, que Paul est le plus jeune de quatre enfants et que Luc a deux sœurs. Qui sont les frères et sœurs de Jeanne ?

4 enfants; la troisième et la quatrième indiquent qu'il y a deux familles où il n'y a que des garçons, dont Yann et René, ce qui permet de déduire que ce dernier est dans une famille de 4 garçons; la sixième donne le nom du garçon de la famille où il y a deux filles; la septième (la question), confirme le nom de Jeanne, la deuxième fille de cette famille déjà présentée dans la deuxième phrase. On remarque encore que les pluriels de « les frères et sœurs » de la question n'aident pas les élèves puisque Jeanne n'a qu'un frère et qu'une sœur et qu'il aurait été plus correct d'écrire « les frère et sœur ».

C'est donc un problème de tri de données qui précède plusieurs déductions logiques successives.

7. Le fer à cheval [7]

Ce problème de technologie, plutôt que de mathématiques, nous paraît très intéressant par la variété et l'évolution des réponses en fonction de l'âge des concurrents.
Voici les résultats, en pourcentages, des réponses observées (R.O) les plus fréquentes, selon les catégories

R.O.	4	6	7	8	9	10	12	15	27	autres
CM	16	9	15	2	37	2	2	0	1	16
C1	4	11	26	6	33	1	4	6	5	4
C2	1	1	23	14	16	3	15	11	4	12
Ly	0	0	2	2	2	13	3	57	13	8

La réponse « 4 » correspond aux parties obtenues par 3 coupes, d'une seule partie à la fois, sans superposition. On la rencontre surtout en 4P et 5P et quasi plus dans les degrés suivants.
Pour la réponse « 6 », en l'absence d'explications ou de dessins, on reste dans le domaine des hypothèses. S'agit-il de 3 coupes donnant chacune 2 morceaux, sans rapport avec la réalité?
Près d'un quart des élèves du secondaire I ont trouvé 7 morceaux, ce qui pourrait correspondre à 3 coupes parallèles, perpendiculairement à l'axe de symétrie du fer à cheval, sans superpositions.
La réponse « 8 » laisse imaginer des partages en 2 pièces avec superpositions successives, correspondant à 2^3.

7 Ce fer à cheval a appartenu à un cheval célèbre. Nombreux sont ceux qui souhaitent en obtenir un morceau. Pour le partager, on utilise une scie ne pouvant faire que des coupes en ligne droite. Les pièces peuvent être empilées mais pas pliées ni tordues. Ainsi, en une coupe, on peut faire 3 morceaux. En trois coupes, combien de morceaux peut-on obtenir, au maximum ? (Accompagné du dessin d'un fer à cheval)

Un tiers des élèves, des niveaux 4P, 5P, 6P et 1CO arrivent à 9 morceaux. Il est vraisemblable qu'une lecture à la lettre de l'énoncé y soit pour quelque chose: ... en une coupe, on peut faire 3 morceaux. En trois coupes combien de morceaux peut-on obtenir ...
Cette interprétation est beaucoup moins fréquente chez les élèves plus âgés.
Chez ces derniers, les réponses « 10 ou « 12 » ne sont pas fortuites. Il est assez naturel de placer les deux « extrémités » détachées du fer lors de la première coupe sur les deux parties « rectilignes » qui restent, de ne voir que cinq morceaux à la deuxième coupe, au lieu de sept, puis d'imaginer qu'ils vont doubler si on les partage chacun en deux lors de la troisième coupe. On peut aussi imaginer que les 3 parties obtenues lors de la première coupe ne soient partagées qu'en deux lors des coupes successives, ce qui conduit à $3x2x2 = 12$.
La réponse « 15 » révèle un effet de « contrat » entre le concurrent et l'énoncé du problème à propos des pièces qui peuvent être empilées, effet moins visible que dans les cas précé-

dents où il n'y avait pas d'optimisation des superpositions ou du découpage d'une partie en 3 morceaux: le candidat imagine des contraintes inexistantes mais vraisemblables par rapport à son expérience scolaire ou pratique. Par exemple: les coupes doivent être perpendiculaires à l'axe de la figure (placé comme d'habitude dans le contexte scolaire parallèlement à un des bords de la feuille), les pièces doivent se superposer exactement (comme toujours, ou pour permettre d'être mieux tenues entre elles lors de la coupe), les morceaux doivent être de taille et de forme pas trop différente, à l'exception de la partie la plus courbée, etc. Avec ces contraintes imaginaires, on place (comme dans le cas « 10 ») les deux « extrémités » détachées du fer lors de la première coupe sur les deux parties « rectilignes » qui restent et l'on obtient sept pièces après la deuxième coupe (6 « segments » et 1 « arc » avec encore deux parties « rectilignes »), puis on recommence pour obtenir 15 morceaux: 14 « segments » (6x2 + 2) et un « arc ».
La réponse « 27 » est celle du concurrent qui envisage des figures géométriques, sans tenir compte de l'épaisseur des coupes, de la matière dont est fait le fer à cheval. C'est aussi celle du mathématicien. En effet, on peut effectuer une première coupe en « oblique » laissant suffisamment de courbure à chacune des trois pièces pour pouvoir les partager ensuite chacune en 3 parties en les plaçant judicieusement dans le plan de la deuxième coupe. C'est plus délicat pour certaines des 9 parties ainsi obtenues, mais théoriquement possible.

Mais, comme il arrive parfois, les auteurs et relecteurs de problèmes tombent aussi dans le piège ou, pressés par le temps, laissent quelques ambiguïtés dans l'énoncé des problèmes. C'est la réponse « 15 » qui a été considérée comme « juste ». Il en va ainsi, souvent, lorsqu'on souhaite trouver un habillage original à une question de mathématique: il est difficile d'atteindre le niveau de rigueur des énoncés classiques. Les concurrents qui se sentiraient lésés n'en mourront pas et, s'ils recourent, les organisateurs les réhabiliteront.

B. Réponses et taux de réussite aux autres problèmes

8. Les treize pièces

Il y a deux solutions: 1251112 ou 1212331 dont une seule suffisait
Taux de réussite: 29 % en C1, 44 % en C2 et 76 % en Ly

9. Le télésiège

Il y a 268 sièges en tout. Taux de réussite: 30 % en C2 et 74 % en Ly

10. L'âge de grand-père

Mon grand-père a 91ans. Taux de réussite: 16 % en C2 et 32 % en Ly

11. Les trous

Le volume du solide est 608 cm^3. Taux de réussite: 4 % en C2 et 28 % en Ly

12. Les poules

Marie et Henri ont 700 poules. Taux de réussite: 30 % en Ly

13. L'héritage

Le fermier peut mettre la borne en tout point du champ. Taux de réussite: 19 % en Ly

14. Les euros

La pièce effectue 5/3 de tours sur elle-même.
Taux de réussite: 0 % en Ly

C. Proposition d'activités sur les rotations de disques roulant d'autres objets

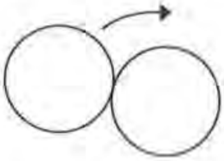
L'échec total au dernier problème de l'épreuve nous conduit à proposer une série de questions pour faire émerger une stratégie permettant de résoudre relativement facilement ce type de problème? Les propositions de lecteurs ou les comptes rendus d'expérimentations en classe seront les bienvenues.

Dans les problèmes qui suivent, la question est toujours la même. Combien de tours sur elle-même fait une pièce circulaire?

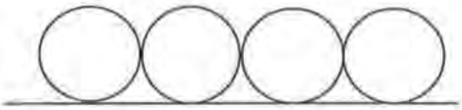
(Les réponses doivent être données en nombre de tours. Si nécessaire, on prendra 22/7 comme approximation de π.)

1. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule sur une ligne droite selon le schéma suivant. En avançant de 50 cm, combien de tours sur elle-même fait-elle?

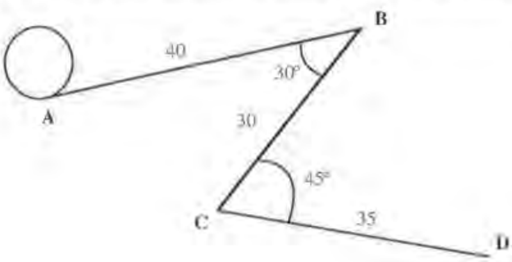
2. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 7 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?



3. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 14 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
4. Une pièce circulaire de 14 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 7 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
5. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'une autre pièce circulaire de 12 cm de diamètre. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet de l'autre pièce?
6. Quatre euros identiques sont alignés côte à côte sur un support horizontal. La pièce de gauche va rouler par-dessus les autres pour venir se placer sur le support à droite de la dernière pièce. Combien de tours sur elle-même a-t-elle effectués



7. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'un rectangle dont la largeur vaut 12 cm et la longueur 20 cm. Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet du rectangle?
8. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule autour d'un triangle équilatéral de 25 cm de côté? Combien de tours sur elle-même fait-elle en faisant un tour complet du triangle?
9. Une pièce circulaire de 7 cm de diamètre roule le long de la ligne **ABCD**. Combien de tours sur elle-même fait-elle?



13e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la deuxième épreuve

1. SPECTACLE DE FIN D'ANNÉE (Cat. 3)

Dans la classe de Luc, il y a 21 élèves, qui ont tous un prénom différent.
Pour le spectacle de fin d'année, les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique ou qui savent danser préparent le ballet.
Les autres élèves de la classe, qui ne savent ni jouer d'un instrument ni danser, préparent une pièce de théâtre.

- Les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique sont : Jean, Laure, Luisa, Luc, Marc, Robert, Sara, Valentine.
- Les élèves qui savent danser sont : Claire, Julie, Laure, Marta, Robert, Sara, Valentine.

Combien d'élèves préparent le ballet ?
Combien d'élèves préparent la pièce de théâtre ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

2. QUEL ÂGE AS-TU ? (Cat. 3, 4)

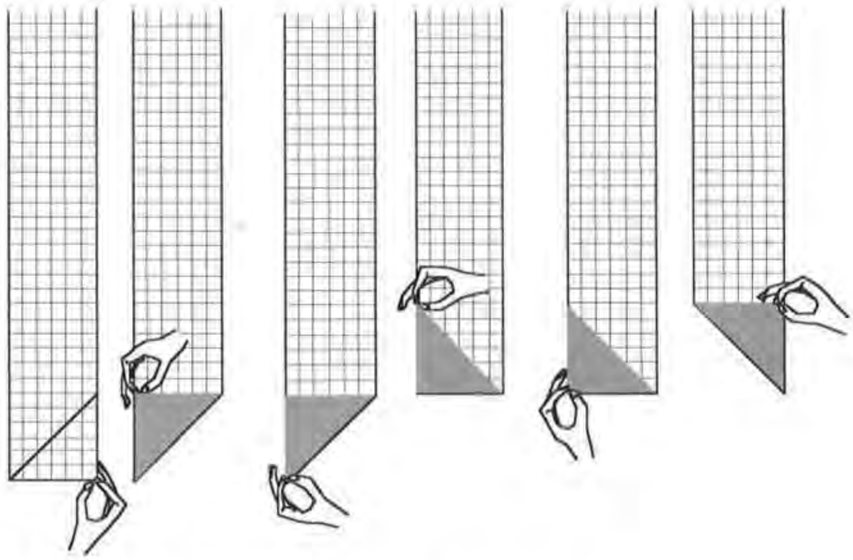
Lisa, Julie et Tom sont trois frères et sœurs. Antoine aimerait connaître leurs âges.
Tom lui donne les informations suivantes :

- J'ai 7 ans de plus que Julie.
- Lisa a 9 ans de plus que Julie.
- Si tu additionnes nos trois âges, tu obtiens l'âge de notre maman, qui a 40 ans.

Quel est l'âge de chacun des 3 enfants ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver.

3. PLIS ET REPLIS (Cat. 3, 4, 5)

Andréa souhaite obtenir plusieurs triangles, tous identiques, en repliant une bande de papier quadrillé comme le montrent les dessins ci-dessous. La bande de papier a une longueur de 70 carreaux et une largeur de 6 carreaux.



Combien de triangles Andréa peut-elle obtenir en continuant à plier la bande ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

4. LES POTS (Cat. 3, 4, 5)

Devant l'arrosoir, qui contient exactement 11 litres d'eau, il y a sept pots vides: de 1 litre, 2 litres, 3 litres, 4 litres, 5 litres, 6 litres et 7 litres.

Mario doit choisir quelques pots dans lesquels il versera toute l'eau de son arrosoir.
Les pots choisis devront être entièrement pleins, mais il ne faut pas qu'ils débordent !

Quels pots Mario peut-il choisir ?

Par exemple, si Mario choisit les pots 3, 4 et 6, il n'aura pas assez d'eau pour les remplir tous.
S'il choisit les pots 6 et 2, il n'arrivera pas à vider entièrement son arrosoir.
S'il choisit les pots 3, 6 et 2, c'est possible, il pourra vider l'arrosoir et remplir entièrement les pots.

Mais il y a encore d'autres possibilités.
Indiquez-les toutes et expliquez comment vous les avez trouvées.

5. EN FILE (Cat. 3, 4, 5)

Sept enfants marchent l'un derrière l'autre sur un sentier étroit, certains se tiennent par la main.

- Il y a deux enfants entre Charles et Danielle;
- Émile, le plus petit, donne la main à Danielle et à Françoise;
- il y a le même nombre d'enfants derrière Bernadette que devant elle;
- Georges est un des enfants de la file qui est devant André.

Indiquez dans quel ordre les sept enfants peuvent être placés dans la file.
Expliquez comment vous avez trouvé.

6. LE GÉANT GARGANTUA (Cat. 4, 5)

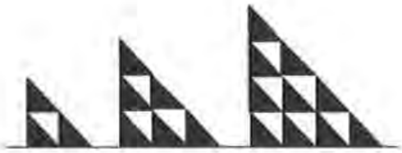
Gargantua veut être admis à l'école des géants. La condition d'admission est d'avoir une barbe d'au moins 80 cm de longueur le matin.

En 24 heures, la barbe de Gargantua s'allonge de 5 cm, de manière régulière. Pour empêcher que Gargantua ne soit admis trop rapidement à l'école, sa femme lui raccourcit la barbe de 2 cm chaque nuit. Ce matin, Gargantua a une barbe de 15 cm.

Dans combien de jours Gargantua sera-t-il admis à l'école des géants ?
Expliquez votre raisonnement.

7. UN TRIANGLE QUI GRANDIT
(Cat. 4, 5, 6)

Pour construire la figure à deux niveaux (a), on utilise 3 triangles noirs et 1 triangle blanc.
Pour construire la figure à trois niveaux (b), on utilise 6 triangles noirs et 3 triangles blancs.
Pour construire la figure à quatre niveaux (c), on utilise 10 triangles noirs et 6 triangles blancs.



Roland a construit une figure beaucoup plus grande en utilisant exactement 55 triangles noirs.

- ***De combien de niveaux se compose cette figure ?***
- ***Combien de triangles blancs ont été nécessaires à Roland pour sa construction ?***

Expliquez comment vous avez trouvé.

8. LES TROIS COFFRES (Cat. 5, 6)

Le contenu de chacun de ces trois coffres a la même valeur que 30 pièces d'or.
Dans chaque coffre, il n'y a que des lingots.
Dans le premier coffre, il y a 4 petits lingots et 1 lingot moyen.
Dans le second coffre, il y a 2 petits lingots et 2 lingots moyens.
Dans le troisième coffre, il y a 1 lingot moyen et 1 grand lingot.

Combien de pièces d'or vaut un petit lingot ?
Combien de pièces d'or vaut un lingot moyen ?
Combien de pièces d'or vaut un grand lingot ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

9. LES CAMARADES DE JUDITH
(Cat. 5, 6)

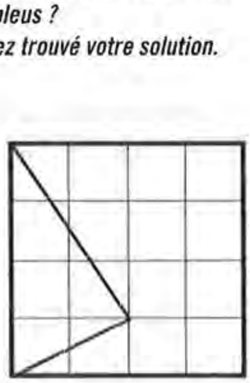
Judith a remarqué que, dans sa classe, il y a quelques élèves qui ont les cheveux noirs et les yeux bleus.
Comme Judith est curieuse de nature, elle se met à observer tous les élèves des quatre classes de son école.
Après quelques jours, elle découvre que:

- la moitié des élèves sont des garçons,
- un tiers des élèves ont les cheveux noirs,
- en divisant le nombre d'élèves de l'école par 7, on trouve le nombre des élèves qui ont les yeux bleus,
- dans chaque classe, il y a au moins 20 élèves mais pas plus de 30.

Dans les quatre classes observées par Judith, combien d'élèves n'ont pas les yeux bleus ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

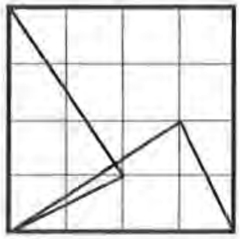
10. KALÉIDOSCOPE I (Cat. 6, 7)

Vous disposez de deux cartes carrées transparentes. Sur chacune d'elle est dessiné un quadrillage et un triangle comme le montre la figure ci-contre:



(Le quadrillage et le triangle se voient d'un côté comme de l'autre puisque les cartes sont transparentes.)

Si l'on superpose les deux cartes en faisant coïncider leurs bords, on peut obtenir, par exemple, cette figure, qui n'a pas d'axe de symétrie :



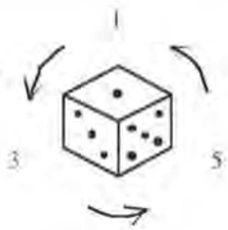
Toujours en superposant exactement les 2 cartes, combien de figures différentes, mais avec un axe de symétrie, peut-on obtenir ?
Dessinez toutes les figures différentes, avec un axe de symétrie, que vous avez trouvées.

11. LE TRÉSOR DANS LE COFFRE-FORT (Cat. 6, 7, 8)

L'ouverture d'un coffre-fort est commandée à partir d'un clavier comme celui représenté par la figure ci-contre. En pressant les touches numérotées, les nombres correspondants sont additionnés et lorsque cette somme vaut 21, le coffre-fort s'ouvre et le trésor apparaît.
Mais attention ! Il faut obtenir exactement 21, ni plus, ni moins. L'ordre dans lequel on appuie sur les touches n'a pas d'importance. Une même touche peut être utilisée plusieurs fois.
Rita aimerait que le coffre s'ouvre après avoir pressé exactement 8 touches, mais sans jamais presser la touche numérotée 1.

De combien de manières Rita peut-elle ouvrir le coffre-fort ?
Indiquez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

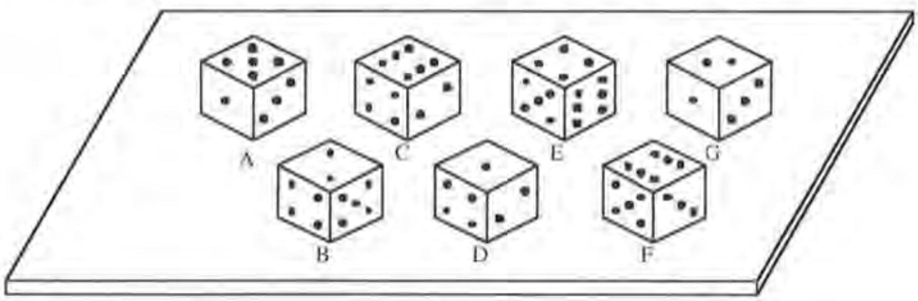
12. LES DÉS (6, 7, 8, 9)



Un dé (de type « occidental ») est construit correctement s'il respecte les règles suivantes :

- la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est 7;
- si l'on regarde le dé de façon à voir les trois faces indiquant un nombre impair, on remarque que le « un », le « trois » et le « cinq » sont placés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La figure suivante montre sept dés déposés sur une table. Parmi eux, trois dés « irréguliers » ont été insérés.



Indiquez quels sont ces trois dés et en quoi ils sont irréguliers.
Indiquez comment vous avez procédé.

13. LES ONCLES DE PIERRE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pierre décide de rendre visite à ses trois oncles Antoine, Bruno et Charles. Il sait que :

- la maison de l'oncle Antoine est à 20 minutes de chez lui, à 40 minutes de celle de l'oncle Bruno et à 35 minutes de celle de l'oncle Charles,
- la maison de l'oncle Bruno est à 25 minutes de chez lui et à 45 minutes de celle de l'oncle Charles,
- la maison de l'oncle Charles est à 50 minutes de chez lui.

Pierre désire partir de chez lui, rendre visite à ses trois oncles et rentrer chez lui, en prenant le moins de temps possible pour tous ces déplacements.

Dans quel ordre devra-il rendre visite à ses trois oncles ?
Combien de temps prendra-t-il en tout pour se déplacer ?
Indiquez les solutions possibles et expliquez votre raisonnement.

14. AVENTURE SUR LA RIVIÈRE (Cat. 7, 8, 9)

Durant une excursion en montagne, un groupe de touristes a dû traverser une rivière à un endroit où il était possible de passer d'une rive à l'autre en sautant sur 15 grosses pierres successivement.
Tout le groupe a traversé la rivière en 3 minutes de la façon suivante :

- le premier touriste a sauté sur la première pierre, puis quand il est passé sur la deuxième pierre, le deuxième touriste a sauté sur la première pierre ;
- quand le premier touriste est passé sur la troisième pierre, le deuxième touriste a sauté sur la deuxième pierre et le troisième sur la première ;
- ainsi de suite, l'un après l'autre, tous les touristes du groupe ont sauté sur les 15 pierres en respectant le rythme d'un saut toutes les 2 secondes.

Combien de touristes y a-t-il dans le groupe ?
Expliquez votre raisonnement.

15. CHATEAU DE CARTES (Cat. 7, 8, 9)

Andréa s'amuse à construire des châteaux avec des cartes à jouer. Elle a construit deux châteaux : le premier a deux niveaux et est fait de 7 cartes ; le deuxième a trois niveaux et est fait de 15 cartes.

Combien de cartes Andréa devrait-elle utiliser pour construire un château de 25 niveaux ?
Expliquez votre raisonnement.

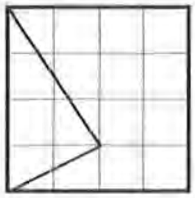
16. NUMÉROS GAGNANTS (Cat.7, 8, 9)

Louis organise une loterie : il prépare 2000 billets, numérotés de 1 à 2000, pliés de manière qu'on ne puisse pas lire le numéro et les place dans un panier. En payant 1 euro, on a le droit de tirer un billet.

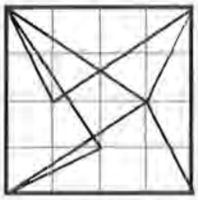
- Les numéros gagnants sont ceux qui sont formés de 2, 3 ou 4 chiffres consécutifs en ordre croissant (par exemple : 45 et 234 sont des numéros gagnants tandis que 54 et 457 ne le sont pas).
- Un numéro gagnant rapporte 10 euros.

Combien de billets au minimum devront être tirés pour que Louis soit certain de ne pas perdre d'argent ?
Expliquez votre solution.

17. KALÉIDOSCOPE II (Cat. 8, 9)



Vous disposez de quatre cartes carrées transparentes. Sur chacune d'elle est dessiné un quadrillage et un triangle, comme le montre la figure ci-contre :
(Le quadrillage et le triangle se voient d'un côté comme de l'autre puisque les cartes sont transparentes.)

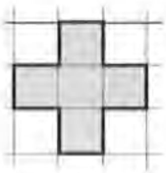


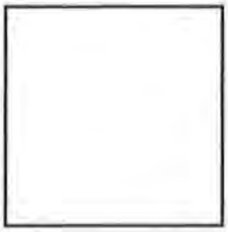
Si l'on superpose parfaitement les quatre cartes selon leurs bords, de manière à ce qu'aucun des quatre triangles ne coïncide avec un autre, on peut obtenir, par exemple, cette figure, qui n'a pas d'axe de symétrie :

Toujours en superposant parfaitement les quatre cartes, combien de figures différentes, composées de quatre triangles distincts et avec au moins un axe de symétrie, peut-on obtenir ?
Dessinez toutes les figures différentes que vous avez trouvées, avec quatre triangles distincts et au moins un axe de symétrie.

18. LA CROIX GRECQUE (Cat. 9)

La figure ci-contre est une croix grecque qui a tous ses côtés égaux :



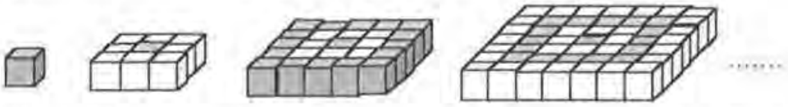


En suivant le quadrillage, on veut couper ce carré en un minimum de pièces de façon à former avec elles, deux croix grecques de dimensions différentes, chacune d'entre elles ayant tous ses côtés égaux.

Indiquez votre manière de découper le carré et dessinez les deux croix grecques que vous obtenez.

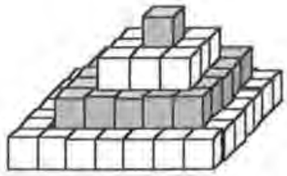
19. LES PYRAMIDES DE PHILIPPE (Cat. 9)

Philippe construit des plates-formes toujours plus grandes à partir d'un petit cube gris, en l'entourant alternativement d'une bordure de petits cubes blancs puis d'une bordure de petits cubes gris.



Avec le cube gris et la première plate-forme, il construit une pyramide à deux étages, avec le premier petit cube gris et les deux premières plates-formes, il construit une pyramide à trois étages. La figure ci-dessous montre une pyramide à quatre étages.

Philippe constate que pour construire cette pyramide, il a utilisé plus de cubes blancs que de cubes gris. Il se demande ce qui se passerait pour une pyramide à cinq étages et pour une pyramide à onze étages.



Pour chacun de ces deux cas, calculez la différence entre le nombre de petits cubes de chaque couleur.
Expliquez votre réponse.

LES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ : DES MÉTHODES DE FAUSSE POSITION À LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE[1]

M. Ballieu & M.-F.Guissard CREM[2].

Avant-propos

Dans toutes les branches des mathématiques et de diverses autres sciences, le problème qui se pose le plus souvent et le plus concrètement est de trouver des solutions d'équations. C'est l'algèbre qui permet de réaliser cela et, à ce titre, c'est une discipline fort ancienne. On trouve en effet des résolutions d'équations dans des tablettes mésopotamiennes et des papyrus égyptiens datant de plus de deux mille ans avant notre ère.

Dans les Éléments d'Euclide, qui datent du troisième siècle avant Jésus-Christ, il y a également une forme d'algèbre en ce sens qu'on y trouve des méthodes générales de résolution d'équations, par des procédés géométriques. Chez Diophante d'Alexandrie, que les historiens situent entre 250 et 350 de notre ère, on trouve également de l'algèbre ; mais, tout comme les tablettes babyloniennes et les papyrus égyptiens, le texte de Diophante consiste en un recueil de problèmes particuliers avec solutions et ne peut donc être considéré comme un traité théorique qui aurait pour souci de donner une méthode générale de résolution.

Quant aux méthodes dites « de fausse position » (simple ou double), qui ont été utilisées pendant des siècles, elles fournissent des méthodes générales de résolution des problèmes du premier degré, mais par des procédés purement arithmétiques.

Il est admis par les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application, a été la publication d'un petit ouvrage intitulé *Muhtasar fi hisab al-gabr*[3] *wa l-muqabala (Abrégé de calcul par le gabr et la muqabala.)*. Ce texte est l'œuvre du savant d'origine persane Muhammad ibn Musa Al Hwarizmi[4] (vers 780-- vers 850) qui travaillait à Bagdad dans la Maison de la Sagesse, fondée par le calife abbasside al-Ma'mun. La dédicace au calife, qui régna jusqu'en 833, permet de situer l'œuvre dans le temps.

1. La fausse position simple chez les Égyptiens

1.1. Introduction

L'une des méthodes utilisées depuis la plus haute Antiquité est ce qu'on appelle la méthode de fausse position (simple). Elle consiste à donner une valeur à l'inconnue, à opérer les calculs décrits dans l'énoncé puis, en fonction de l'erreur qui apparaît, à ajuster la valeur donnée *a priori* à l'inconnue.

1 Cet article a été publié dans la revue de nos collègues belges, Mathématique et pédagogie, n° 150, janvier-février 2005. La rédaction de Math-Ecole remercie les éditeurs de cette excellente revue et les deux auteurs de l'avoir aimablement autorisée à reproduire leur texte.

2 CREM : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Nivelles, BE .

3 Al-gabr (qui a donné naissance au mot algèbre) et al-muqabala sont les deux principales opérations qui permettent de réduire les équations algébriques à une des formes canoniques dont la solution est donnée dans le traité.

4 Comme son nom l'indique, il est originaire du Hwarizm, région au sud de la mer d'Aral.

Nous nous proposons ici d'analyser cette méthode à partir du problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* conservé au *British Museum* (où il est catalogué sous les numéros BM10057 et BM10058). Ce papyrus est l'une des principales sources d'information sur les connaissances mathématiques égyptiennes. Outre des tables de multiplication, on y trouve quelque quatre-vingt-sept problèmes d'arithmétique et de géométrie, avec les solutions.

1.2. Problème 24

Voici l'énoncé du problème 24 tel qu'il apparaît sur le papyrus. Il s'agit d'un texte en écriture hiératique qui est l'écriture cursive du scribe.

Les égyptologues qui ont étudié le manuscrit l'ont transcrit en hiéroglyphes, plus faciles à décrypter.
Notons que le texte du papyrus Rhind est écrit de droite à gauche.
Cette transcription en hiéroglyphes est donnée ci-dessous :

Une traduction littérale en est :

Une quantité, un septième d'elle sur elle devenir elle en tant que 19

ce que nous écririons aujourd'hui

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Le problème est résolu par la méthode de fausse position simple. Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7, nombre qui permet d'éviter l'apparition trop rapide de fractions. Il calcule alors la quantité et son septième : $7 + 1 = 8$.
Ce résultat est faux puisqu'il aurait dû trouver 19. Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi au départ pour des raisons de facilité. Il est ainsi amené à diviser 19 par 8, c'est-à-dire qu'il recherche par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19.
Ce rapport de la proportion, que nous noterions, $\frac{19}{8}$, le scribe égyptien - qui utilise essentiellement des fractions de numérateur 1 - le note $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, nombre qu'il multiplie ensuite par 7. Il obtient ainsi la solution $16\,\frac{1}{2}\,\frac{5}{8}$.
Le scribe termine en vérifiant qu'en ajoutant à cette quantité son septième, qui vaut, $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ on obtient bien 19.
Notons que le scribe multiplie $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ par 7 et non 7 par $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Or, dans l'esprit de la méthode de fausse position, lorsqu'on a trouvé le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 8 à 19 (dans le second membre), il serait logique de multiplier ensuite 7 (la fausse position) par ce même coefficient. Cette inversion de l'ordre des facteurs, qui simplifie le calcul, semble indiquer que les Égyptiens avaient une connaissance intuitive de la commutativité de la multiplication.
Le raisonnement qui sous-tend cette méthode de résolution peut être condensé dans le tableau de proportionnalité suivant

	x	$x + \frac{x}{7}$	
$\times 2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$	7	8	$\times 2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$
	$16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$	19	

où l'on passe de la deuxième à la troisième ligne en multipliant par le facteur. Le principe de la méthode se base sur la proportionnalité de x et $\frac{x}{7}$.

La fausse position simple a été utilisée très longtemps. On la retrouve notamment dans les textes arabes, dans le *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci (XIIIe siècle) et dans *La summa* de Luca Pacioli} XVe siècle). Notons que l'inconnue peut être calculée à partir d'un rapport interne du tableau, comme c'est le cas ici, mais également à partir du rapport externe, comme nous le verrons à la page 26.

2. La double fausse position chez les Arabes

2.1. Introduction

Ying buzu (excédent et déficit), *al-hata'ayn* (les erreurs), *regula duarum falsarum positionum, regola della doppia false positioni, règle des plateaux de la balance.* Ce sont là quelques appellations qui, toutes, désignent un même procédé permettant de résoudre des problèmes exprimables par des équations linéaires à une inconnue ou par des systèmes linéaires à deux inconnues.
Cette fameuse règle des deux fausses positions était sans doute connue à Bagdad à l'époque de l'algébriste Al Hwarizmi dans la première moitié du neuvième siècle. Nous l'illustrerons par un extrait d'un manuscrit traduit de l'arabe en latin, intitulé *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*; c'est-à-dire le Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.
L'auteur arabe de cet ouvrage est inconnu; certains historiens pensent ou ont pensé qu'il pourrait s'agir d'Abu Kamil Suga ibn Aslam ibn Muhammad Al-Hasib, qui florissait vers les années 900. D'autres attribuent le texte, ou du moins sa traduction en latin, au juif espagnol Abraham ibn Ezra. Le titre pourrait laisser croire que la paternité de la règle revient aux savants indiens. Cependant la ressemblance de la terminologie avec les expressions chinoises *ying* (excédent) et *buzu* (déficit) donne à penser que cette règle, connue bien avant en Chine[5], ait pénétré dans la littérature arabe par un chemin qui est passé par l'Inde ou par la Route de la soie. Il faut en effet constater que, dans les ouvrages mathématiques indiens connus à ce jour, qui sont antérieurs au douzième siècle, on ne trouve pas trace de cette règle.
Ce procédé de résolution d'équations linéaires se perpétue chez de nombreux auteurs arabes comme Al Karagi (mort vers 1025) et en Europe, chez Leonardo Pisano Fibonacci au treizième siècle et chez Luca Pacioli} au quinzième.
Le principe en est le suivant. On donne à l'inconnue deux valeurs « quelconques[6] » qui se révèlent le plus souvent être de fausses valeurs et, à partir de là, il est possible de calculer la solution vraie. Trois cas évidemment se présentent :

- Les deux fausses valeurs sont plus petites que l'inconnue.
- Les deux fausses valeurs sont plus grandes que l'inconnue.
- L'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

Le texte qui suit illustre la résolution d'un problème par la méthode de double fausse position dans le cas où l'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

2.2. Un problème linéaire

Voici une traduction d'un extrait de l'ouvrage en latin attribué à Abraham ibn Ezra.
Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de

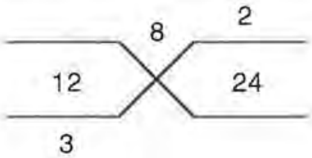
5 Voir à ce sujet le chapitre sept du Jiuzhang Suanshu [6] titre généralement traduit par les Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul, qu'on peut dater d'un peu avant le début de notre ère.

6 En fait, elles sont généralement « bien choisies » pour simplifier les calculs.

l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census[7] duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité, qui est divisée par la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.
Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

7 Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

Remarquons tout d'abord que, même s'il est question de census, ce problème est en fait un problème du premier degré. L'auteur nous explique la règle des plateaux de la balance, illustrée par la figure ci-dessous :



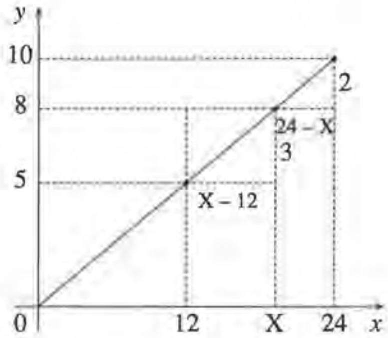
La première fausse position qu'il choisit est 12. C'est une valeur dont il est facile de soustraire le tiers et le quart. On trouve 5, c'est-à-dire qu'il y a un déficit de 3 par rapport à la valeur 8 qu'il faudrait obtenir. On place ces 3 en-dehors du plateau de la balance qui contient la valeur 12, comme le montre la figure. On recommence l'opération pour la seconde fausse position, dont la valeur choisie est 24. Le résultat 10 présente un excès de 2 par rapport à la valeur attendue 8. Cette valeur 2 est placée au-dessus du deuxième plateau. Il faut ensuite effectuer l'opération suivante :

$$\frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2 + 3} = \frac{96}{5}$$

La traduction moderne du problème nous donne l'équation

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8 \text{ ou } \frac{5x}{12} = 8 \ (*) \quad \text{c'est-à-dire } x = \frac{96}{5}$$

Nous constatons que la réponse obtenue par la méthode de fausse position est bien celle que nous trouvons en résolvant l'équation (*). Comment pouvons-nous expliquer cela? Représentons graphiquement la fonction linéaire $y = \frac{5x}{12}$ qui correspond au premier membre de l'équation (*).



Comme le montre la figure ci-dessus, la valeur de cette fonction est
5 pour $x = 12$,
10 pour $x = 24$,
La valeur cherchée est celle, notée X, pour laquelle la fonction prend la valeur 8. La figure montre deux triangles rectangles semblables, dont les bases sont respectivement X–12 et 24–X, et dont les hauteurs sont 3 et 2. Les relations de proportionnalité entre les mesures des côtés de deux figures semblables nous permettent d'écrire

$$\frac{X - 12}{24 - X} = \frac{3}{2}$$

Résolvons cette équation sans effectuer les multiplications,

$$2 \times (X - 12) = 3 \times (24 - X)$$
$$2X - 2 \times 12 = 3 \times 24 - 3X$$
$$2X + 3X = 2 \times 12 + 3 \times 24$$
$$(3 + 2)X = 2 \times 12 + 3 \times 24$$

et finalement

$$X = \frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2 + 3}$$

Nous retrouvons ainsi la formule de la double fausse position.

L'auteur tente de convaincre le lecteur de la généralité de sa méthode en multipliant les exemples. Il justifie à chaque fois le résultat obtenu en traitant le problème d'une autre manière. Ainsi, dans le dernier paragraphe, il termine son exposé en résolvant l'équation par la méthode de fausse position simple. La fausse position choisie est 12, ce qui donne 5 pour la valeur de $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$. Il se demande alors par combien il faut multiplier 5 pour retrouver 12 ; il cherche donc le facteur qui permet de passer de la deuxième colonne du tableau ci-dessous à la première. Il trouve $2\frac{2}{5}$, qu'il multiplie par 8 pour trouver la solution $19\frac{1}{9}$. Remarquons que comme dans le problème 24 du papyrus Rhind, l'ordre des facteurs est inversé.

x	$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$
12	*5*
$19\frac{1}{5}$	*8*

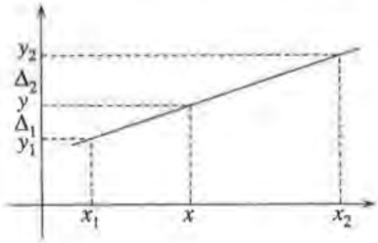
$\longleftarrow$
$\times 2\frac{2}{5}$

Voici donc un exemple de fausse position simple où l'inconnue est calculée à partir du rapport externe du tableau de proportionnalité. La règle peut être appliquée aux problèmes généraux du premier degré.

Soit l'équation

$$ax + b = y$$

Considérons les deux fausses positions x_1 et x_2 qui produisent les deux valeurs y_1 et y_2.



$$ax_1 + b = y_1 \qquad \Delta_1 = |y_1 - y|$$
$$ax_2 + b = y_2 \qquad \Delta_2 = |y_2 - y|$$

Dans la figure ci-dessus, qui illustre le cas où la valeur cherchée est située entre les deux fausses positions, nous avons

$$\Delta_1 = |y_1 - y| = y - y_1 = a(x - x_1),$$
$$\Delta_2 = |y_2 - y| = y_2 - y = a(x_2 - x).$$

De l'expression de la proportion

$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ on peut tirer la valeur de x qui vaut

$$x = \frac{x_2 \Delta_1 + x_1 \Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_2}$$

Ceci montre que la valeur de x obtenue par la règle de la balance peut encore être interprétée comme le barycentre des deux fausses positions x_1 et x_2, munies des poids Δ_2 et Δ_1. Un raisonnement similaire permet d'établir la formule dans les cas où les deux fausses positions sont, soit plus petites, soit plus grandes que l'inconnue.
Nous obtenons

$$x = \frac{x_2 \Delta_1 - x_1 \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{x_1 \Delta_2 + x_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}$$

en tenant compte du fait que toutes les quantités qui interviennent dans le calcul sont nécessairement positives (*Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande ...* , nous indique Abraham ibn Ezra).

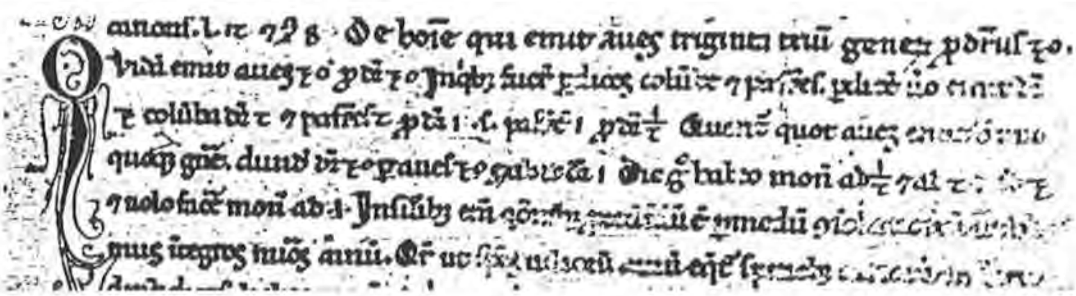
3. Les combinaisons linéaires chez Léonard de Pise

3.1. Introduction

On possède peu de renseignements sur Léonard de Pise, autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *Liber abaci*: son père était *publicus scriba*, scribe pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie, en Algérie. Il fit venir auprès de lui le jeune Léonard afin de lui faire apprendre, au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen de figures indiennes (ce que nous appelons « chiffres arabes »). Plus tard, Fibonacci parcourut tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence) pour étancher sa soif de savoir. Il a contribué à répandre en Occident l'arithmétique basée sur la numération de position (chiffres indo-arabes).

Dans le chapitre onze du *Liber abaci*, Fibonacci introduit la notion de « compensation » des monnaies; ce sont des problèmes de proportionnalité qui montrent comment calculer le nombre de livres-monnaie qu'on peut battre à partir d'un certain nombre de livres-poids d'argent, lorsqu'on se fixe un taux d'argent dans l'alliage de la livre-monnaie. La technique de résolution qu'il expose à cette occasion lui permet, plus loin dans le chapitre, de résoudre des équations diophantiennes (dans l'ensemble des entiers positifs) indéterminées. Voici le texte d'un de ces problèmes où l'auteur utilise des combinaisons linéaires pour rechercher des solutions.

3.2. Le problème des oiseaux



De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

Voici la traduction du texte original en « bas latin ».

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour 1/2 denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a acheté.

Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire: j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde; 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

Le système linéaire qui traduit ce problème est

$$\begin{cases} 3x + 2y + \frac{z}{2} = 30 \\ x + y + z = 30. \end{cases}$$

Fibonacci observe tout d'abord que, pour acheter 30 oiseaux pour 30 deniers, il faut constituer des ensembles de *n* oiseaux pour *n* deniers de manière que *l'espèce des oiseaux* les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères. Réaliser une telle égalité avec trois espèces d'oiseaux semble difficile; une manière de simplifier le problème consiste à rechercher des combinaisons de deux espèces d'oiseaux dans la même proportion.

Fibonacci observe que

$$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$$

ce qui lui fournit un ensemble de *cinq oiseaux* (une perdrix et quatre moineaux) pour *cinq* deniers (ensemble E_1 du tableau ci-dessous).

Il observe encore que

$$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

ce qui lui donne cette fois un ensemble de trois oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour trois deniers (ensemble E2 du tableau ci-dessous).

En considérant une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtiendra alors *trente* oiseaux pour *trente* deniers. Cette combinaison linéaire consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second ($E = 3E_1 + 5E_2$)

	Perdrix (3 deniers)	Colombes (2 deniers)	Moineaux (1/2 denier)	nombre d'oiseaux	coût
E_1	1		4	5	1 x 3 + 4 x 1/2 = 5
E_2		1	2	3	1 x 2 + 2 x 1/2 = 3
E	3	5	22	30	3 x 3 + 5 x 2 + 22 x 1/2 = 30

L'ensemble $E = 3E_1 + 5E_2$ fournit bien une solution du problème, puisqu'il s'agit d'un ensemble de 30 oiseaux, de trois espèces différentes pour une somme de 30 deniers.
L'auteur termine en nous signalant qu'il est possible de trouver des combinaisons linéaires qui réalisent des ensembles de n'importe quel nombre *n* d'oiseaux pour *n* deniers, si *n* est supérieur à 15. Mais pour *n* inférieur à 15, il affirme que le problème n'est possible que pour 8, 11 et 13 oiseaux, et il décrit la combinaison qui fournit la solution dans chacun des cas.
On peut obtenir

16 oiseaux pour 16 deniers par la combinaison $2E_1 + 2E_2$
17 oiseaux pour 17 deniers par la combinaison $1E_1 + 4E_2$
18 oiseaux pour 18 deniers par la combinaison $3E_1 + 1E_2$,

et à partir de là, on obtient 19, 20 et 21 oiseaux en ajoutant $1E_2$ à chacune des combinaisons précédentes, et ainsi de suite.
On peut aussi obtenir 14 oiseaux pour 14 deniers par la combinaison
$1E_1 + 3E_2$, solution que Fibonacci a oubliée.

Quelques réactions d'élèves

Ces différentes méthodes de résolution de problèmes linéaires ont été exposées à des classes de quatrième année[8] de l'enseignement général.
Les élèves ont été stupéfaits d'apprendre que les méthodes de résolution anciennes n'étaient pas « exactes ». Le fait qu'il fallait supposer une valeur (qui avait toutes les chances d'être fausse) pour la réponse afin de la corriger ensuite leur paraît une démarche beaucoup plus lourde que l'algèbre d'aujourd'hui.
Ils ont été surpris de voir que les problèmes de mathématique pouvaient être résolus en langage courant, par un texte dépourvu de formules, mais que c'était « encore plus compliqué qu'avec des maths ». Après avoir constaté les difficultés et la lourdeur de ce mode d'expression, ils acceptent mieux le formalisme actuel dont l'utilité leur paraît plus évidente.
Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme actuellement.
Ils estiment qu'il faudrait plus souvent introduire les chapitres du cours de mathématique par un peu d'histoire, pour mieux en percevoir la portée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ballieu, M. (1993), Le liber abaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement ..., *Nouvelles tendances en histoire et philosophie des sciences*, p. 123-133. Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Comité National de Logique, d'Histoire et de Philosophie des Sciences. R. Halleux & A.-C. Bernès coordinateurs, Bruxelles.

[2] Boyer, C.B. et Merzbach, U.C. (1989), *A History of Mathematics*, Wiley, New York.

[3] Chace, A.B., Bull, L., Manning, H.P., et Archibald, R.C. (1927-1929), *The Rhind Mathematical Papyrus* (2 vol.), Mathematical Association of America, Providence, RI. Rééd. 1979.

[4] CREM (2002), *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. Rapport final août 2002.

[5] Fibonacci, Leonardo Pisano, *Liber abaci*,
- Manuscrit 172 SUP, Biblioteca Ambrosiana, Milano.
- Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* no 2616 *codice Magliabechiano, Badia Fiorentina)*, Biblioteca Nazionale, Firenze.
- *Codici Gaddiani Reliqui* nº XXXVI, Biblioteca Laurenziana, Firenze.
- *Codice Riccardiano* nº 783, Biblioteca Riccardiana Firenze.

[6] Kangshen, S., Crossley, J. N., et Lun, A. W.-C. (1999), *The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion & Commentary*, Oxford University Press.

[7] Libri, G. (1838-1841), *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (vol. I), G. Olms Hildesheim. Rééd. 1967.

[8] Lüneburg, H. (1993), *Leonardo Pisani Liber Abaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

[9] Pacioli, Luca, (1494) *Summa de Arithmetica*, édition fac-similé du cinq centième anniversaire, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma. Rééd. 1994.

REVUE DES REVUES

TANGENTE
JEUX & STRATÉGIE

Il y a cinq ans, les éditions POLE lançaient un nouveau magazine « Démineur & Compagnie » dans lequel on trouvait six jeux : « Démineur », « Bataille navale », « Dominos », « Virages », « Mare'L » et « Gratte-ciel », dont certains appartenaient déjà à la tradition des jeux logiques sur grilles à compléter, avec indices. (Voir en annexe, quelques exemples de « Gratte-ciel ».
Après quelques numéros, l'entreprise s'est transformée et enrichie d'une rubrique sur l'actualité du jeu pour devenir, dès 2002, la revue « Tangente Jeux ». De nouveaux jeux logiques sont venus s'ajouter à ceux d'origine : « Circuit », « Museum », « Haltères », ...
En 2005, une fusion entre « Tangente Jeux » et VOX LUDI aboutit à une revue sensiblement étoffée par une partie magazine et un dossier, « Tangente, Jeux & Stratégie », qui fait renaître, après la disparition de « Jeux & Stratégie », un nouveau magazine de jeux, de référence, généraliste, ouvert sur le monde.
Les deux premiers numéros sous la nouvelle formule « Tangente, Jeux & Stratégie » laissent augurer un bel avenir pour la revue lorsqu'on connaît le dynamisme de l'équipe de « Tangente » et, pour les lecteurs, des lectures passionnantes ainsi que de nombreux problèmes bien consistants.
Qu'on en juge par cet extrait des sommaires des numéros 12 et 13, de 2005 :

- un dossier Jules Vernes fort bien documenté, avec des informations biographiques originales, les liens historiques entre les œuvres de l'inventeur de la science-fiction et le jeu, etc.
- un dossier sur le poker et le bluff, où la superstition des joueurs se combine avec le rationnel de la réflexion logique,
- l'histoire du jeu d'Othello,
- le point sur les jeux de rôle,
- une sélection des meilleures nouveautés ludiques,
- une analyse économique du vrai prix d'un jeu,
- la rubrique des jeux logique d'origine, auxquels il faut ajouter « Drapeau »
- la rubrique des jeux culturels du genre : Anagrille – Scrabble – Anathèmes - Nid d'abeille - Rébus, Diaganagrammes - Double sens – Mots carrés - ...
- la rubrique des jeux classiques : Dames – Go – Echecs – Othello – Awalé – Abalone ...
- les solutions de tous les jeux et énigmes du numéro.
- ...

« Tangente, Jeux & Stratégie » paraît à la fréquence de 6 numéros par an, la revue est en vente en kiosque, en France, Benelux et Canada. Pour la Suisse, on peut s'y abonner au prix de € 25.– par année ou 46.– pour deux ans. (Payement par carte bancaire à partir de € 30.–). Bulletin d'abonnement à envoyer à Tangente – BP 10214 – F-95106 Argenteuil cedex, avec nom, prénom, adresse postale, mail, numéro de carte bancaire, date et signature, à prendre sur le site http://www.jeuxetstrategie.com. Ce site donne toutes les informations utiles sur la revue.

FJ

LE JEU « GRATTE-CIEL »

Tiré de « Tangente, Jeux & Stratégie », avec l'aimable permission de la rédaction.
Auteurs : Bernard Novelli et Martin Rivière

Règle du jeu

Un bloc de la ville de New-York est représenté dans une grille. Chaque case contient un immeuble de 10, 20, 30 ou 40 étages.
Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes.
Les informations données sur les bords indi-

quent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante, par un observateur situé à cet endroit. Par exemple, si une ligne contient la disposition 20-40-30-10, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche (le 20 et le 40) et trois immeubles sont visibles à partir de la droite (le 10, le 30 et le 40). Retrouver la hauteur de chaque immeuble.
Tous les problèmes ont une solution.

Exemple :

	4	1	3	2	
2					2
3					1
2					2
1					3
	1	2	2	2	

et solution :

	4	1	3	2	
2	10	40	20	30	2
3	20	10	30	40	1
2	30	20	40	10	2
1	40	30	10	20	3
	1	2	2	2	

La résolution de cet exemple fait immédiatement apparaître deux règles élémentaires :

- l'indication « 4 » en tête de rang ne donne qu'une manière d'y placer les immeubles : l'ordre croissant à partir de cette case ;
- l'indication « 1 » signifie qu'on ne voit qu'un immeuble, c'est à dire celui de 40 étages, à côté de cette case.

Trois immeubles de 40 étages étant placés à partir des « 1 » et du « 4 », il ne reste qu'une case pour le quatrième, qui respecte la règle du jeu : « Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes. » On obtient alors la grille intermédiaire A ci-dessous.

Dans la deuxième ligne, il reste deux possibilités, de gauche à droite respectivement : 10 et 30 ou 30 et 10. Dans la troisième ligne, il y a aussi deux manières de placer le 10 et le 20. Dans la quatrième ligne, on trouve trois dispositions respectant l'indication « 3 » de droite : 10, 30, 20 ou 20, 30, 10 ou encore 30, 10, 20.
On pourrait alors penser qu'il s'agit d'essayer une à une les possibilités et, avec un peu de chance, de tomber sur la solution. Mais on peut procéder de manière plus directe par déductions en deux étapes.
Par exemple, pour la première ligne, où il semble qu'il y a deux dispositions pour le 20 et le 30, on s'aperçoit que le 30 ne peut pas être en troisième position car, s'il l'était, on aurait le 20 en quatrième position, ce qui contredirait l'information « 2 » de droite.
Un même type de raisonnement s'applique à la deuxième colonne, où le 30 ne peut être qu'en bas selon l'information « 2 » du bas.
On en arrive alors à situer deux nouveaux immeubles de 30 étages, et la place du dernier est déterminée univoquement, selon la grille intermédiaire B.

Grilles intermédiaires A :

	4	1	3	2	
2	10	40			2
3	20			40	1
2	30		40		2
1	40				3
	1	2	2	2	

et B :

	4	1	3	2	
2	10	40	20	30	2
3	20		30		1
2	30				2
1	40	30			3
	1	2	2	2	

La résolution se poursuit ainsi de manière rigoureuse, à coups de négations, d'implications et de conjonction de critères.
Ceci nous amène à dire que les problèmes du jeu « Gratte-ciel » ont leur place en classe de mathématiques, pour autant qu'on ne se contenter pas de vérifier si les grilles complétées sont justes ou non, sans savoir si c'est le hasard ou des essais non organisés qui ont aboutit à la réussite. Il y a tout un travail de justification et d'explicitation des raisonnements logiques à conduire avec les élèves.
La question qui reste en suspens est de savoir à quel âge les enfants peuvent tirer profit de ce type d'activités. Selon nous, il est très variable, d'un individu à l'autre. Nous avons vu, lors d'un concours organisé dans le cadre d'un Salon de la culture et des jeux mathématiques organisé à Paris, des enfants de 10 à 12 ans résoudre ce genre de problèmes avec une facilité déconcertante. Et certains adultes ont de la peine à y entrer.
Les lecteurs de *Math-Ecole* peuvent essayer eux aussi de résoudre les 6 grilles suivantes, de « Gratte-ciel », dont certaines sont vraiment avares en indices, mais qui ont pourtant toutes une solution unique, données en page 27.
Pour les « accros », chaque numéro de « Tangente, Jeux et Stratégie » propose, entre autres, une dizaine de grilles de « Gratte-ciel », qui ne se limitent pas aux dimensions 4x4 mais vont à 5x5, 6x6, avec des immeubles de 50, 60 étages...
Pour information, les Éditions POLE ont publié un recueil de 100 grilles de ce jeu. (Ainsi que « Démineur », Dominos à placer » et « Combat naval ». Voir http:www.poleeditions.com.

Gratte-ciel 1 :

	1	2	2	2	
1					3
2					3
3					1
3					2
	4	3	1	2	

Gratte-ciel 2 :

	2	2	1	2	
3					2
1					3
2					3
3					1
	3	2	4	1	

Gratte-ciel 3 :

			2		
2					
					3
		3		2	

Gratte-ciel 4 :

				2	
					4
4					
		2			

Gratte-ciel 5 :

				3	
					3
					4

Gratte-ciel 6 :

1					
2					
		1	3		

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des contes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Pythagore et Thalès,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths,ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini,ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
L'Almanach du petit matheux en herbe, Edition Archimède G. Sarcone	...	(ex à Fr. 18.-)**
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	...	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	...	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	...	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	...	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial Grand N)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	...	(ex à Fr. 55.-)

Problèmes de rallyes et concours:

Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	...	(ex à Fr. 28.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Luxembourg, 03)	...	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**
Enigmes mathématiques pour les moins de 10 ans (POLE Editions)	...	(ex à Fr. 16.-)**

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-ecole.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à:
Math-Ecole, Institut de mathématiques
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel