67

MATH ECOLE

MARS 1975
14e ANNÉE

MATH ECOLE 67

14e ANNÉE MARS 1975

Préserver l'essentiel

Mathématique, programmes, objectifs, méthodologie, moyens d'enseignement, matériels sophistiqués, unification, coordination, caution de CIRCE, recyclage ! Exigences des programmes, de l'enseignement secondaire, des milieux professionnels, de la vie quotidienne. Et l'enfant, l'écolier, dans tout cela ?
Indépendamment de la vaine querelle des anciens et des modernes qui n'a rien à faire dans la formation mathématique du premier degré, la réforme entreprise portait en elle un immense espoir. Enfin la pédagogie ne se centrait plus exclusivement ni sur le maître, ni sur le programme, ni sur l'enfant omnipotent, mais l'accent était mis sur le processus même de formation, sur l'apprentissage, sur la tâche à accomplir, sur la victoire sur soi-même, sur la démarche expérimentale.
Le plan d'études romand lui-même déclarait le programme de mathématique comme étant cyclique. C'est-à-dire que chaque année, les notions fondamentales allaient être développées et approfondies et que tout était disposé pour que l'enfant puisse être confronté, quel que soit son niveau de développement, à des activités à sa portée, source d'une activité mentale véritable et enrichissante.
Las, oserons-nous employer les termes à la mode et dénoncer la récupération par le système ? A peine le programme romand est-il entré en vigueur en première année que déjà, le chœur des censeurs se déchaîne. «Ils ne savent rien; ils ne connaissent pas leur table d'addition; à ce rythme-là, je ne pourrai tenir mon programme; il est impossible d'adapter l'enseignement à chacun dans une classe de 25 élèves; ils ne savent pas compter»; et j'en passe.
Le nouvel enseignement ne sera-t-il qu'une mode passagère ? Nous ne pouvons l'imaginer. Il ne s'agit pas de lutter pour la mathématique moderne contre les mathématiques traditionnelles, ni pour un programme contre un autre.
Ce qu'il faut, c'est conjuguer toutes nos énergies et lutter sans répit pour que l'école soit faite pour l'écolier et non l'écolier pour l'école. C'est défendre vigoureusement le droit de chaque enfant à une scolarité harmonieuse adaptée à ses capacités, dans laquelle il est heureux de vivre, de se développer, de s'instruire. C'est enfin unir nos efforts, enseignants, parents, administrateurs, chercheurs, pour que les solutions qui nous manquent soient trouvées, pour que les difficultés soient surmontées, pour que l'école d'aujourd'hui soit meilleure que celle d'hier.
Tant que les programmes et les manuels serviront principalement à mettre en évidence l'inadaptation d'une partie des élèves par rapport à un curriculum considéré comme une norme, tant que l'on rejettera la responsabilité d'une formation insuffisante sur la scolarité antérieure sans prendre des mesures pour ajuster l'enseignement à l'enfant, tant que l'on tolérera l'échec répété d'un enfant avec toutes ses conséquences affectives, les vaines disputes sur les programmes pourront continuer à alimenter les conversations mais elles n'apporteront strictement rien à ceux qui cherchent véritablement à munir chaque enfant des instruments essentiels pour la formation de la personne et indispensables à la vie sociale et professionnelle.

Raymond Hutin

Mathématique 3e année (1re partie)

A V E N U E E R : ensembles et relations

Sériation, ordre strict, relation d'ordre

par Paulette Müller, inspectrice d'école, Genève

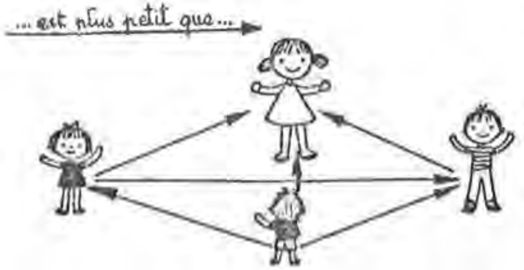
Bien avant son entrée à l'école, le petit enfant s'amuse à aligner des poupées selon l'ordre croissant ou décroissant des tailles, à emboîter les uns dans les autres des gobelets de plus en plus petits, à construire des tours en empilant des cubes de volumes différents, etc. Sans le savoir, il effectue une *sériation*.
Dans la vie de tous les jours, chacun est amené à consulter un dictionnaire, à classer des documents par ordre chronologique, à rechercher telle facture dans un lot de factures numérotées, à mémoriser la succession des arrêts d'une ligne d'autobus, ... autant d'occasions de se référer à une sériation.
Sérier est donc une activité à la fois spontanée et usuelle.
Dans le programme de mathématique des degrés 1 à 4, la sériation permet:
— la compréhension de la construction du nombre;
— l'approche de la mesure;
— l'approche de la notion d'*ordre strict*, puis de la *relation d'ordre*.
De ce fait, elle est présente dans les avenues ER, DE, NU, de même que dans l'avenue OP puisqu'il faut garder en mémoire que les deux sériations suivantes ne sont que deux écritures d'une même suite de nombres:

$\boxed{12} \longrightarrow \boxed{15} \longrightarrow \boxed{18} \longrightarrow \boxed{21}$ ou $\boxed{4 \times 3} \longrightarrow \boxed{5 \times 3} \longrightarrow \boxed{3 \times 6} \longrightarrow \boxed{3 \times 7}$

EN PREMIERE ANNEE, l'enfant effectue des sériations non numériques (assiettes et tasses, emboîtements, violons et archets, etc.: ER jeux 21 et 22) puis numériques (succession des entiers, «... a plus de... que...»: ER jeux 32 et 33). On n'insiste pas sur la formulation du lien verbal: on sait qu'il est tout à fait possible et souhaitable de se passer d'une terminologie qui, dans les activités avec un matériel, risque souvent à cet âge de masquer la notion qu'elle recouvre.
La représentation sagittale, très «parlante» pour l'enfant, est largement utilisée.
Pour comparer deux nombres, on introduit les symboles:

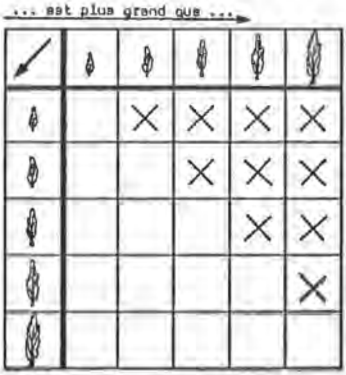
$\ldots < \ldots$ «... est plus petit que...» et
$\ldots > \ldots$ «... est plus grand que...»;

dans un premier temps, il est nécessaire d'associer ces symboles à la représentation sagittale correspondante, en ayant conscience des difficultés de compréhension inhérentes à tout symbolisme.
L'ordre strict est aussi abordé en première année, dans des situations non numériques (tailles de quatre enfants, comparaison d'épaisseurs, etc.: ER jeux 23 et 24) ou numériques (ER jeu 34).
Le seul mode de représentation proposé ici est le diagramme sagittal:



L'ordre strict présente plus de difficultés que la sériation: un même élément peut être mis en relation avec plusieurs autres éléments, tandis que dans une sériation, un élément n'est en relation qu'avec l'élément qui le précède ou qui le suit.
Il est dès lors nécessaire d'une part de limiter le nombre des éléments (cinq au maximum) et d'autre part de ne pas exiger d'emblée que le diagramme sagittal soit complet.
Plusieurs fiches (ER 31, 32, 45, 46 et OP 14) concernent l'ordre strict; deux fiches (ER 62 et 64) présentent à la fois la sériation et l'ordre strict, ce qui permet aux enfants une première observation des propriétés respectives des deux relations.

EN DEUXIEME ANNEE, tenant compte en cela du caractère cyclique du programme, on retrouve des *sériations numériques* (ordonnancement de tas de jetons selon le cardinal: NU jeu 5; sériations de volumes et de surfaces: DE, mesure; sériations par différence constante: NU-25 et 26, NU-29 à 32, OP-20, 21, 31). Dans la fiche NU-29 (prédécesseur, successeur), l'enfant peut percevoir ce qu'est la relation réciproque d'une relation donnée.
Bien sûr, les sériations non numériques ne sont pas à délaisser: récipients plus ou moins remplis de liquide ou de sable, sans aucune idée de mesure, par exemple. Une activité (ER jeu 6) développe plus particulièrement l'*ordre strict* (arbres de différentes tailles, enfants portant des ballons en nombres différents). Les enfants y font une approche intuitive de deux propriétés de l'ordre strict:
— l'antiréflexivité, qu'ils expriment en constatant qu'il n'y a aucune boucle dans le diagramme fléché;
— l'antisymétrie, qu'ils expriment en constatant qu'une «flèche-aller» n'est accompagnée d'aucune «flèche-retour».
Il va de soi que ces remarques ne sont possibles que si les enfants ont travaillé parallèlement la relation d'équivalence (ER jeu 5; cf Math-Ecole numéro 63, mai 1974, pp. 3 à 8).



On introduit aussi, pour l'ordre strict, la représentation au moyen d'un tableau cartésien, dans lequel toute flèche du diagramme sagittal est représentée par une croix dans la case correspondante. Les fiches mentionnées au bas des pages 25 et 27 de la Méthodologie, ainsi que les fiches OP-35 et 55 ,portent sur la notion d'ordre strict.

LA METHODOLOGIE DE TROISIEME ANNEE reprend, dans le jeu ER 4, une activité de sériation. L'exemple non numérique proposé est la succession des mois de l'année. On pourrait penser que l'ordre chronologique est une notion trop difficile pour des enfants de cet âge. Il s'agit ici plutôt d'un ordre conventionnel, — tout comme l'alphabet que les élèves doivent déjà maîtriser pour l'utilisation du dictionnare — avec une référence possible au calendrier de l'année en cours.

1. Les enfants sont invités à représenter la relation de lien verbal
   «... précède immédiatement...» ou
   «... vient juste avant...»
   (fig. 1, page 7).
2. On leur propose ensuite de compléter des séries (fig. 2, page 7).
   Cet exercice implique la compréhension intuitive de la relation réciproque
   «... suit immédiatement...» ou
   «... vient juste après...»
3. Cette relation réciproque est mise en évidence (fig. 3, page 7).
   Les enfants éprouvent quelques difficultés à sérier les mois dans l'ordre inverse. De même, une sériation numérique d'ordre décroissant sera plus ardue à effectuer.
4. Dans un prolongement, on suggère de reprendre les mêmes activités avec des exemples numériques, en différentes bases.

On peut souligner le fait que le jeu NU 2 propose également des sériations numériques appuyées par du matériel, que le jeu NU 5 comprend des sériations de nombres en utilisant les signes $<$, $>$ et que le jeu DE 1 comporte également des sériations numériques ou non.

Si aucune fiche d'exploitation ne figure à la fin du jeu ER 4, on trouve cependant de nombreux exercices de sériation dans les trois autres avenues, par exemple NU 17, 18, 20, 21, 22, 26, ... OP 9, 10, 11, 16, 17, 18, ... DE 50, 52.

Le jeu ER 5 est consacré à l'ordre strict. Le centre d'intérêt reste le même que celui du jeu ER 4, comme du reste celui du jeu ER 6: on peut ainsi mieux dégager les différences et les ressemblances des trois types de relation (sériation, ordre strict, équivalence); c'est également un exemple du fait qu'un centre d'intérêt peut être exploité pour plusieurs notions.

1. On propose un exercice plus difficile que ceux qui ont été abordés en deuxième année car:
   — il y a six éléments;
   — la relation ne relève ni d'une perception (... est plus grand que...) ni du domaine numérique (... vaut plus...) mais d'un ordre conventionnel, voire chronologique (... précède dans l'année...).
   On met en évidence la différence de ce lien verbal avec celui de la sériation «... précède immédiatement...» fig. 4, page 7).
2. Le nombre élevé de flèches dans le diagramme sagittal permet de souligner l'utilité du diagramme cartésien. L'ordonnance des entêtes met mieux en évidence les propriétés déjà découvertes en deuxième année (fig. 5, page 7).
   L'absence de croix dans la diagonale procède de l'*antiréflexivité* — les enfants expliquent que le mois de mars ne peut pas précéder le mois de mars —; le fait que les croix sont toutes du même côté de la diagonale principale est dû à l'*antisymétrie* — si le mois de mars précède le mois de juin, alors le mois de juin ne peut pas précéder le mois de mars.
3. Les enfants exercent le passage d'une représentation à l'autre.
   La seconde partie du jeu reprend un exemple non numérique d'ordre strict en mettant en évidence la relation réciproque de la relation donnée.
   Le prolongement prévoit la reprise de ces activités avec des exemples numériques, liés soit à l'avenue NU, soit à l'avenue OP.
   Le jeu NU 4 permet également une approche intéressante de la notion d'ordre strict, notamment en prévoyant la construction d'un diagramme sagittal comptant successivement deux, puis trois, puis quatre, puis cinq et enfin six éléments.

Parmi les fiches proposées au bas de la page 29, arrêtons-nous un instant à la fiche ER 16 (voir page suivante).

Compte tenu du fait que les champions **2** et **3** sont placés à la même hauteur, les relations de lien verbal

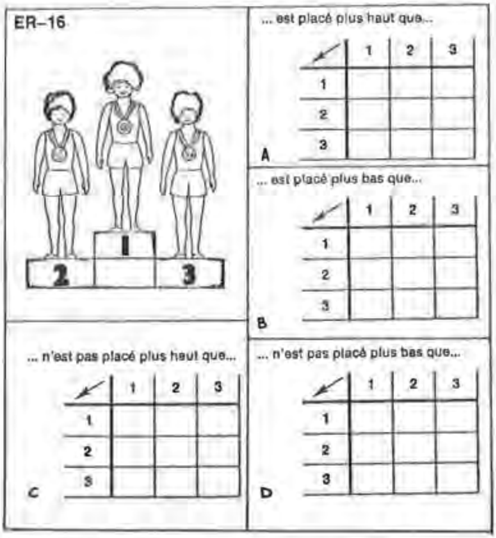
... est placé plus haut que...
... est placé plus bas que...

sont des relations d'ordre strict partiel puisque deux des éléments — **2** et **3** — ne sont pas comparables.

En comparant les tableaux de ces deux relations, les enfants constatent que les croix du second sont placées symétriquement, par rapport à la diagonale principale, aux croix du premier — si **1** est placé plus haut que **2**, alors **2** est placé plus bas que **1**. Ils approchent ainsi la notion que les deux relations sont la réciproque l'une de l'autre.

Les relations de lien verbal

... n'est pas placé plus haut que...
... n'est pas placé plus bas que...



sont des relations d'ordre partiel. En comparant les tableaux de ces deux relations aux tableaux des deux relations d'ordre strict partiel correspondants, les enfants remarquent qu'il y a des croix dans les cases des diagonales principales — **1** n'est pas placé plus haut que lui-même — et ils approchent ainsi la propriété de réflexivité de la relation d'ordre.

S'ils découvrent que la superposition des tableaux A et C, B et D, donne des tableaux dans lesquels chaque case a une croix, ils découvrent intuitivement que les relations de lien verbal

... est placé plus haut que... et
... n'est pas placé plus haut que...

sont complémentaires.

Des fiches telles que NU 27, 29, 30, 40 sont aussi des exploitations du jeu ER 5.

Le jeu ER 6, consacré à la relation d'équivalence, permet la mise en parallèle des deux relations. Par la comparaison des diagrammes, les enfants appréhendent les différences au niveau des propriétés, particulièrement:

— *réflexivité* et *symétrie* de la relation d'équivalence;
— *antiréflexivité* et *antisymétrie* de la relation d'ordre strict.

Les enfants sont également appelés à tirer des informations d'un diagramme (b) p. 41).

Parmi les fiches proposées à la fin du jeu ER 6 p. 41, retenons la fiche ER 22 (fig. 6, page 7).

Elle permet la comparaison entre:

— une relation d'ordre strict partiel:
  ... a plus de lettres que...
— une relation d'équivalence:
  ... a le même nombre de lettres que...
— une relation d'ordre partiel:
  ... n'a pas moins de lettres que...

Il va de soi qu'en troisième année, le maître n'utilise pas avec ses élèves des termes tels que

«relation d'ordre»	«réflexivité»
«relation d'équivalence»	«antisymétrie»

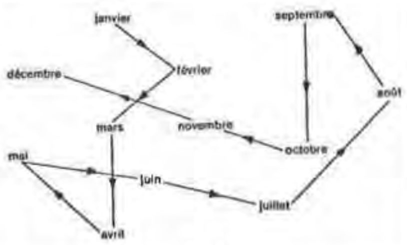


fig. 1

fig. 2

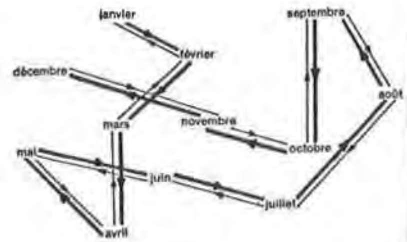


fig. 3

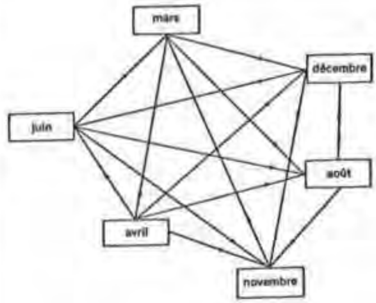


fig. 4

↗	juin	mars	novembre	avril	août	décembre
juin			×		×	×
mars	×		×	×	×	×
novembre						×
avril	×		×		×	×
août			×			×
décembre						

↗	mars	avril	juin	août	novembre	décembre
mars		×	×	×	×	×
avril			×	×	×	×
juin				×	×	×
août					×	×
novembre						×
décembre						

fig. 5

fig. 6

ER–22

EN QUATRIEME ANNEE, on retrouvera des exercices de sériation, liés à la numération, aux opérations, à la mesure.
La relation d'ordre strict sera reprise avec un accent particulier sur la propriété de *transitivité* plus difficile à mettre en évidence. La relation d'ordre sera plus systématiquement abordée.
On peut remarquer que dans les fiches de troisième année, la notion d'ordre apparaît déjà. Ce sont toujours des cas simples (peu d'éléments, lien verbal facile à comprendre, comparaison avec d'autres relations).
La difficulté de cette relation n'est pas due à ses propriétés:
— *réflexivité*
— *antisymétrie*
— *transitivité*
mais plutôt à la compréhension du lien verbal:

... n'est pas plus grand que...
... est supérieur ou égal à...

En effet, les enfants ont souvent des difficultés, au niveau de la langue, à saisir des expressions qui comportent une négation ou le mot «ou».
A remarquer que, pour les mêmes raisons, les enfants réussissent mieux une sériation si le lien verbal «... vaut 2 de plus que...» est remplacé par la notation symbolique équivalente: $\xrightarrow{-2}$.

La mathématique est une création de l'intelligence humaine indépendante des réalités physiques et ce n'est que l'activité interne du sujet qui permet de la retrouver et de la reconstruire a priori.
C'est à partir de l'expérience perceptive et manipulatrice que peuvent s'élaborer les éléments mathématiques de base.
Il y a une double activité du sujet: l'une puise des indices, des signaux dans le monde réel; l'autre travaille sur ces indices, en dégage certaines propriétés relationnelles, organise ces dernières en rapports de plus en plus détachés du réel physique, et à la limite passe à la formalisation.

Trois hypothèses d'accès à la connaissance mathématique, selon C. Hug in «L'enfant et la mathématique», Bordas.

Propriétés des réseaux

par Josée Wetzler, maîtresse de méthodologie, Fleurier

Un thème se retrouve chaque année dans le programme primaire de mathématique et laisse nombre de collègues perplexes: c'est l'étude des propriétés des *réseaux*. Quelle est l'utilité du travail proposé et qu'apporte-t-il aux enfants ? Est-il judicieux de l'introduire à l'école primaire ?
Avant d'essayer de répondre à ces questions, nous présenterons ce thème tel qu'il apparaît dans la méthodologie et sur les fiches d'élèves.

EN PREMIERE ANNEE, les enfants distinguent les réseaux *ouverts* des réseaux *fermés*.
Exemples tirés des fiches d'élèves (fig. 1, page 10).
On constate, par exemple, qu'une petite voiture qui parcourt un réseau ouvert ne peut pas revenir à son point de départ sans passer deux fois sur le même chemin; par contre, la voiture peut le faire, si le réseau est fermé.
Dans un réseau ouvert, les points de départ et d'arrivée sont distincts; ils sont confondus dans un réseau fermé.

EN DEUXIEME ANNEE, les enfants remarquent que certains réseaux comprennent des points d'intersection (réseaux *non simples*) tandis que d'autres n'en ont pas (réseaux *simples*).
Exemples tirés des fiches d'élèves (fig. 2, page 10).
On peut alors classer les réseaux selon les deux critères:
a) ouvert ou fermé;
b) simple ou non simple.
Exemple: fiche DE-21 (fig. 3, page 10).

EN TROISIEME ANNEE on découvre intuitivement deux nouvelles propriétés des réseaux: Choisissons deux points quelconques d'un réseau; si, en suivant son tracé, on peut cheminer d'un point à l'autre, sans lever le crayon, le réseau est *connexe*. Si au contraire on peut trouver sur le réseau deux points tels que ce cheminement soit impossible, alors le réseau est *non connexe*.
Exemples (fig. 4, page 10).
Il va de soi que l'on ne demande pas aux enfants de connaître cette définition, ni même d'employer les mots connexe et non connexe.
Dans une première étape, on recherche des réseaux que l'on peut reproduire d'un seul coup de crayon sans passer deux fois sur une même partie de la ligne.

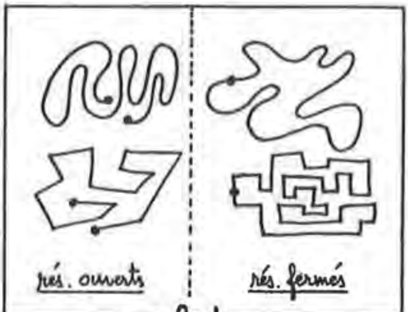


fig. 1

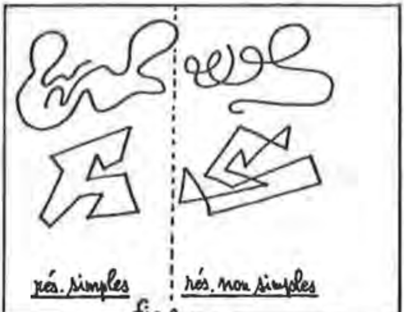


fig. 2

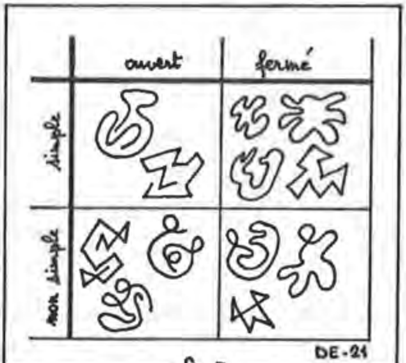


fig. 3

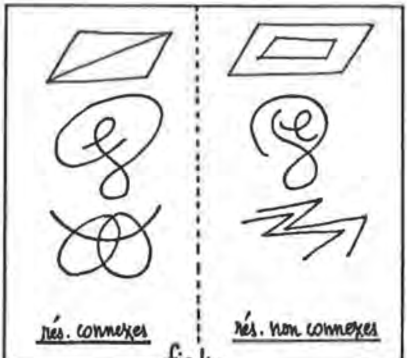
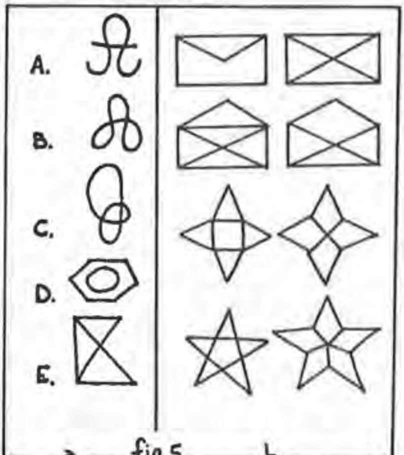


fig. 4



a — fig. 5 — b

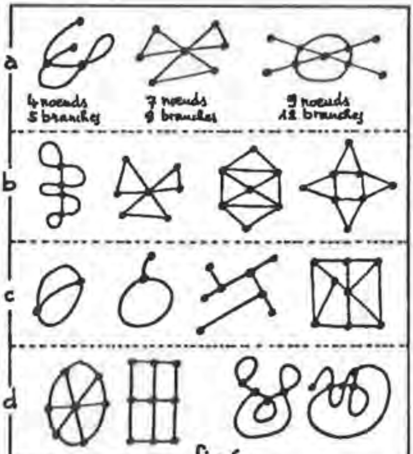


fig. 6

Exemples tirés de la méthodologie (fig. 5 a, page 10).
Les enfants remarquent que cela est impossible pour A et D; en revanche, B et C peuvent être dessinés au moyen d'un seul trait; cela est aussi possible pour E à la condition de choisir judicieusement le point de départ.

Dans une deuxième étape, on considère des réseaux non simples et connexes et on essaie de déterminer s'il est possible ou non de les tracer d'un seul coup de crayon.
Exemples tirés de la méthodologie (fig. 5 b, page 10).

Pour continuer cette recherche on introduira, EN QUATRIEME ANNEE, la terminologie: nœud d'ordre pair, nœud d'ordre impair, branche. On nomme *nœud* tout point d'intersection ou toute extrémité d'une ligne; on nomme *branche* tout trait d'un réseau ayant un nœud à chacune de ses extrémités. Un nœud est d'*ordre pair* si le nombre de branches issues de ce nœud est pair, d'*ordre impair* si ce nombre est impair (fig. 6 a, page 10).

On trace des réseaux dont tous les nœuds sont d'ordre pair, par exemple (fig. 6 b, page 10).

De même, on recherche des réseaux dont tous les nœuds sont d'ordre impair, par exemple (fig. 6 c, page 10).

On recherche également des réseaux qui possèdent à la fois des nœuds pairs et des nœuds impairs, par exemple (fig. 6 d, page 10).
Les élèves font de nombreuses constatations, par exemple:
— Il n'est pas possible de construire de réseau ayant un nombre impair de nœuds impairs.
— On peut toujours tracer d'un seul coup de crayon, sans passer deux fois sur une même partie de la ligne, un réseau qui ne comprend pas de nœud impair. Le point de départ et le point d'arrivée sont confondus.
— Si le réseau comprend deux nœuds impairs, on peut le tracer d'un seul trait à condition de choisir l'un des deux nœuds impairs comme point de départ; le point d'arrivée est l'autre nœud impair.
— Si le réseau comprend plus de deux nœuds impairs, il n'est pas possible de le tracer d'un seul coup de crayon sans passer deux fois sur une même partie de la ligne.

En présentant brièvement ce thème, nous avons voulu montrer que, quel que soit leur âge, les enfants peuvent observer des situations, faire des constatations, émettre des hypothèses qu'ils essaient ensuite de vérifier en les confrontant à d'autres situations. Sans être tributaire d'instruments tels que compas, règle ou équerre, sans être soumis à des contingences telle que la mesure, ils ont l'occasion de s'habituer à une véritable attitude de recherche, qui est une composante essentielle de l'activité mathématique.

Suite de la présentation de «Mathématique 3e année»,, numéro 68, mai 1975.

Mathématique... tessinoise

par Maurice-Denis Froidcoeur

Un exemple, parmi tant d'autres, de «Centre d'intérêt matématique»: Le papier d'emballage de l'Innovazione (voir figures, page 15)

Comme précédemment pour le barycentre, sans aucune prétention ni trop de commentaires techniques ou pseudo-didactiques, voici quelques idées qui ont été exploitées avec plus ou moins de succès selon les cas dans nos classes de cinquième. Les travaux et recherche se sont prolongés durant environ deux semaines de leçons régulières.

Observation et description

Le problème est simple ! Il s'agit d'expliquer au téléphone comment est fait le papier d'emballage des magasins «Innovazione». Tout le monde est bien capable de le *«reconnaître»*, mais quant à le décrire de manière explicite, c'est une autre paire de manches ! En bref, la conclusion fut qu'il y avait des triangles et des «fleurs» de 2 ou 3 tailles, disposés «en désordre»...

Classements

Pour y voir clair, rien de tel que d'utiliser les divers diagrammes de Venn, de Carroll, en arbre; c'est ainsi seulement qu'on arrive à découvrir des *règles:*

— fleurs et triangles mis ensemble sont toujours de dimension correspondante;
— fleurs et triangles de même couleur ne sont jamais mis ensemble;
— le mot «Innovazione» a bien les 3 couleurs possibles, mais est toujours de la même grandeur; et un «trou» inexpliqué: il manque une combinaison (trouvez-la vous-mêmes !).

Combinatoire

A ce point on ne résiste pas facilement à l'envie de dénombrer toutes les combinaisons possibles, en excluant des règles ou en les changeant comme bon semble à chacun.

Relations

L'observation de la taille des dessins (petits, moyens, grands) conduit, surtout si on étend la comparaison à du papier de formats divers (sachets de poche ou papier «géant»), au concept de similitude exprimé de manière très imagée:

«Le dessin moyen est-il le petit du grand ?», c'est-à-dire en termes plus rigoureux: «Le rapport de similitude est-il réellement maintenu comme il paraît au premier regard ?» (La réponse dépend, comme bien souvent en mathématique appliquée, de la marge d'erreur admise). Il est alors amusant de construire avec règle et compas le «bébé» du plus petit des dessins, ou l'«ancêtre» de tous.

Topologie

On a tenté, mais sans y arriver (aucune honte pour autant: Leibnitz n'a pas réussi non plus à nous donner le langage nécessaire à l'*Analysis situs !*) de décrire les relations de voisinage entre les divers éléments. (Peut-être quelque lecteur pourrait-il nous éclairer sur ce point...). Mais la recherche n'a pas été vaine car on a découvert finalement le «*pavé*» de base qui se répète régulièrement.

Probabilités

Découvert le pavé de base, on en dénombre les éléments, et l'on peut ainsi répondre correctement à la question: «Quel est le triangle qui se répète le plus souvent, et dans quelle fréquence par rapport aux autres». On trouve même une relation entre cette fréquence et la taille des dessins.
Et des problèmes topologiques sont venus au jour:
— Quelles sont les formes (et en particulier quels polygones) permettant un pavage ?
Pourquoi ? (relation entre les angles internes et la formule d'Euler).
— Les tentatives non concluantes dans le plan nous font amorcer la recherche dans l'espace: comment sont faits les ballons de football ? Comment pourrait-on «remplir» un espace avec des polyèdres réguliers ?
— Trouver tous les «hexatriminos» possible, c'est-à-dire les dessins de 6 triangles.

Arithmétique

... Un peu, puisqu'elle se présente sans invitation: pour couvrir de pavés carrés une surface plane rectangulaire, ou pour remplir de cubes une boîte, quelles sont les dimensions à donner au pavé, au cube ?
— «C'est le PGCD (ou mieux, comme dit Papy: le plus *haut* commun diviseur !»

Informatique

Ou du moins le «Diagramme de flux» pour la recherche de ce PGCD. Peu importe comment (méthode des restes, méthode des diviseurs premiers, méthode ensembliste pure ou autre), ce qui compte c'est d'arriver à *décrire* avec exactitude le procédé adopté (on récupère ainsi, mais à un tout autre niveau, l'objectif de départ et qui avait été manqué par ignorance des éléments à transmettre).

Mesure

On connaissait le calcul des aires par la formule de Pick sur les géoplans carrés; mais on est maintenant sur un «triplan» (géoplan triangulaire). Que devient-elle (prenant évidemment comme unité le triangle de base de la grille) ?
Constatation d'importance primordiale: les figures qui s'appliquent sur le géoplan ne peuvent s'appliquer sur le triplan, et réciproquement: les nombres «irrationnels» sont à la porte, on pourra en parler bientôt en connaissance de cause !
Autre constatation: c'est le fameux carré du rapport des aires de deux figures semblables, retrouvé à partir de l'observation des différents dessins de notre papier; on généralise au cas de l'espace à trois dimensions.

Géométrie

C'est chaque fois un nouveau plaisir de pouvoir construire avec règle, équerre et compas ! On en profite pour redécouvrir les procédés de construction des polygones réguliers, et pour élaborer des «pavements» réguliers les plus variés.
Problème: transformer un triangle en un carré de même aire.

Séries numériques

On constate d'abord avec stupéfaction que le «triplan» travaille en base quatre, et non en base trois comme on s'y attendait; puis on découvrit les hexagones: le triplan devint «apiplan» et l'on compta en base six. Enfin le «beau» problème: «Quelle est la succession du nombre de petits triangles que contiennent les hexagones réguliers successifs ?» Il a fallu quelques coups de pouce pour y reconnaître la chose la plus normale: qu'il s'agissait de la suite des carrés multipliés par 6. Mais alors on reparla de nos nombres triangulaires pour énoncer deux résultats:
— Tout nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs.
— Tout nombre parfait est triangulaire.

Vectoriel

On a peu exploité la situation dans ce sens, se limitant à expliciter les «transports» de pavés. Les bonnes choses ne doivent pas être «réchauffées»; aussi nous nous en sommes tenus là dans l'exploitation de cette mine d'activités à fleur d'un... bout de papier ! (D'autant qu'on a renouvelé l'expérience du «journal» et de la «vidéocassette» déjà inaugurée par le barycentre).[1]

[1] Math-Ecole numéro 66, pages 17 à 21.

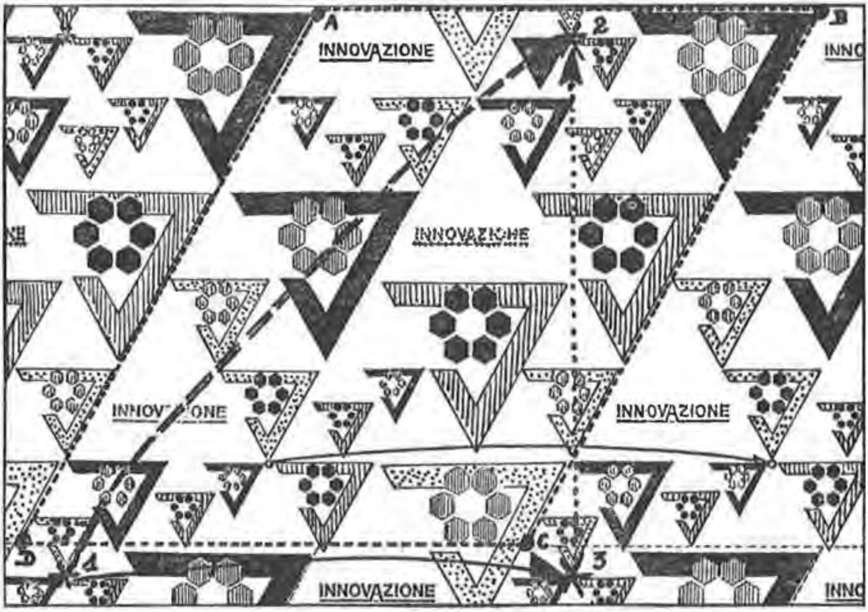


Fig. 1 Le pavé ABCD et les transports 1 ⟼ 2 et 1 ⟼ 3

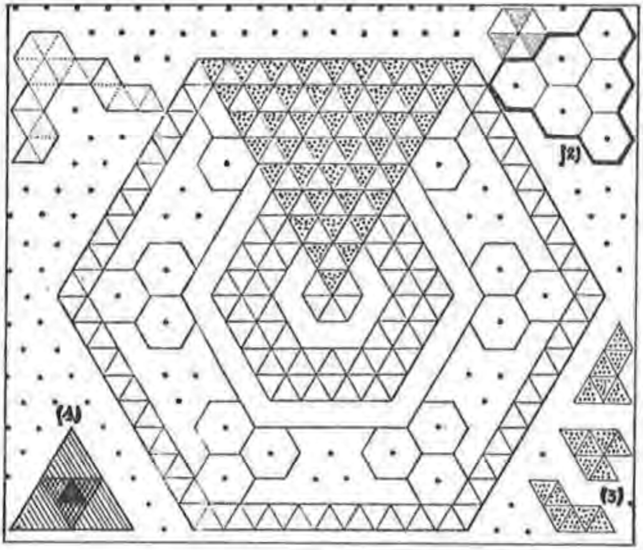


Fig. 2 Du Triplan à l'Apiplan : (1) en base quatre
(2) en base six
(3) trois "hexatriminos

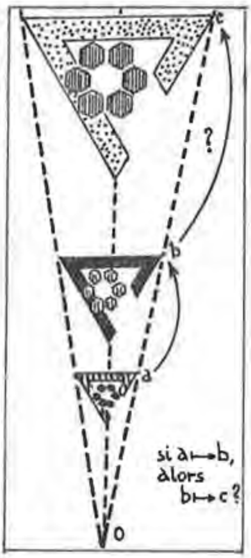


Fig. 3 Similitudes

Contribution à l'évaluation de l'enseignement de la mathématique
dans les écoles primaires de la Suisse romande, la thèse de M. Jean Brun:

Education mathématique et développement intellectuel

Recherche à propos de l'enseignement rénové de la mathématique
sur des enfants en fin de scolarité primaire

Jean Brun était, depuis plusieurs années, collaborateur de Raymond Hutin au service de la recherche pédagogique de Genève. Il a présenté sa thèse à l'Université de Lyon (thèse pour le doctorat de troisième cycle/Psychologie), le 25 février de cette année, et obtenu la mention «très bien, avec félicitations». L'ouvrage de Jean Brun sera sans doute bientôt publié. Il convient pourtant de signaler déjà son existence aux lecteurs de Math-Ecole. Parce qu'il s'agit d'une étude qui, s'insérant dans l'évaluation générale du nouvel enseignement de la mathématique des écoles de la Suisse romande, atteste que cette innovation — qui est de taille et qui comporte un certain nombre de risques — est suivie de près par des gens avertis, Jean Brun étant l'un deux, et des plus sagaces. Parce que aussi cette étude apporte des éclaircissements sur des points importants.
Tout d'abord, elle montre que les enfants mis à la math moderne pendant les six premières années de leur scolarité obligatoire (les observations ont été faites au niveau du degré 6), n'ont pas pâti de cet enseignement et que, au contraire, en ce qui concerne le maniement des notions logiques, ils sont en avance sur leurs camarades des classes témoins (arithmétique traditionnelle).
Ceci dit, Jean Brun qui a poussé ses analyses de manière à la fois profonde et fine, en arrive à constater que l'enseignement nouveau — tel du moins qu'il s'est offert à son regard d'investigateur, à Genève en 1972 et 1973 — n'est pas à l'abri, déjà, d'une certaine raideur qui l'empêcherait de porter tout ses fruits. Cet enseignement est trop fragmenté, voire atomisé. Il est découpé en notions qu'on apprend, en savoir-faire à la maîtrise desquels on s'entraîne. Le dressage de jadis paraît refaire son apparition. D'où un freinage dans le développement même de la pensée, une inhibition contraignante. La pensée court le risque d'être mise sur rails et de ne pas pouvoir s'exercer de manière divergente, créatrice et conquérante.
Par ailleurs, on se demande, une fois de plus, si l'accent ne devrait pas être mis, d'abord, sinon toujours, sur ce qui répond aux intérêts profonds des enfants, sur ce qui suscite, au moment de l'action — et tout particulièrement de l'action d'apprendre — l'engagement de la personnalité tout entière.

Un retour, au-delà de Piaget, au fonctionnaire de Claparède semble s'esquisser. Les travaux de celles qui, à la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation (Genève) succèdent à Piaget — Hermine Sinclair, Magali Bovet, Constance Kamii et Bärbel Inhelder — sont, sur ce point, explicites: on estime que les activités demandées aux enfants doivent toujours être chargées de *sens*. L'accord se fait, du même coup, avec plusieurs mathématiciens. Ainsi, le professeur André Delessert, dont les écrits dans Math-Ecole, sont cités par Jean Brun, a maintes fois demandé un enseignement qui prenne, aux yeux des enfants, une signification réelle. D'autres, et des plus grands, comme René Thom de Paris et Ferdinand Gonseth s'expriment dans le même sens. La structure, toute vide, toute nue, ne suffit pas. Elle ne mérite d'être prise en considération qu'*avec* les contenus dont elle n'est que l'armature interne et auxquels elle ne peut jamais être substituée. Si on commettait l'erreur d'un tel dessèchement, on aboutirait à un enseignement pauvre et inintéressant.
Dès lors, une question se trouve posée, à laquelle Jean Brun amène son lecteur; le moment n'est-il pas venu de se «décrisper» par rapport à un certain nombre de notions «ensemblistes» considérées comme les objets d'un nouveau dogme, et de se plonger dans la réalité concrète et palpitante pour y vivre, là, des expériences intellectuelles, voire mathématiques, authentiques ? Reprenant une image chère à Bergson, Jean Brun se demande si l'enseignement actuel ne procède pas par «instantanés» qui sont d'autant d'états découpés artificiellement au sein d'un réel qui est essentiellement mouvance et dynamisme.
Rien de tout cela ne condamne l'effort tenté pour faire mieux penser les enfants et pour les aider ainsi à affronter des problèmes dont les termes mêmes nous sont inconnus. Cela, du moins, avertit. L'enseignement nouveau est exigeant — terriblement —. Il postule de l'audace pour s'immerger dans le foisonnement de la complexité des choses, du courage pour y rester sans crainte de s'y perdre, de l'imagination pour découvrir des issues, de l'opiniâtreté pour ne jamais se contenter de l'acquis et pour toujours recommencer comme si tout devait être, éternellement, neuf.

S. Roller

● A la garde montante, salut !

La «population» des abonnés de Math-Ecole, pour parler comme les sociologues, vieillissait. Les avis de désabonnement tombaient sur notre table comme les feuilles des arbres à l'automne. Elles provenaient d'enseignants mis au bénéfice d'une retraite que nous leur souhaitons, par ailleurs, heureuse et longue. Il fallait aviser. Ce qui fut fait. Les écoles normales, alertées, ont, quelques-unes du moins, pas toutes, hélas, répondu; et aujourd'hui déjà — mi-mars — nous pouvons compter, au nombre de nos lecteurs, des normaliens jeunes et intéressés. Bienvenue à eux dans notre cercle. Mais jeunesse, elle aussi, oblige. Veuillent donc ces collègues en puissance ne pas se contenter de lire Math-Ecole — ce qui serait déjà pas mal — mais aussi accepter de nous écrire pour nous faire part de leurs observations, de leurs critiques et de leurs désirs. Car, en fait, Math-Ecole, c'est déjà leur affaire.

S.R.

Le loto polybase

Le nouveau jeu de loto de Monsieur J.-J. Dessoulavy, le loto polybase, nous paraît hautement recommandable pour les classes de deuxième et de troisième années primaires. Voilà l'occasion pour les enfants non seulement de mettre en pratique ce qu'ils savent de la numération de position, mais encore d'exercer d'une façon plaisante le calcul oral jusqu'à vingt-quatre. La notice explicative propose différentes façons de tirer parti du matériel, mais l'imagination du maître et des enfants en feront découvrir d'autres: selon les besoins des élèves, plus faciles ou plus «tordues». Ce loto est une preuve nouvelle pour les sceptiques, s'il en reste, que l'on peut apprendre en s'amusant.
Remarque: pour prolonger l'existence du jeu, il est recommandé de couvrir les feuilles de carton de papier plastique transparent autocollant avant de les découper.
Ce matériel a déjà été présenté par F. Brunelli dans «Math-Ecole» 64 et dans «Educateur», numéro 29, 4.10.74.

C. Rübner

Nouvelle revue reçue à l'IRDP et consacrée à l'enseignement de la mathématique

«*Chantiers de pédagogie mathématique*», Bulletin bimestriel de la Régionale Parisienne. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, rue du Jura 13, F - 75013 Paris. Directeur: Professeur Gilbert Walusinski.

Lu pour vous

La mathématique vivante — Les ensembles et leur logique
par Z. P. Dienes. O.C.D.L. Paris, 1974, 169 p.

Voici un ouvrage qui traite sur un mode concret toute la logique bivalente que l'enseignement de la mathématique moderne a mis à l'honneur dans les classes. Je pense qu'il n'échappe à personne qu'il y a contradiction dans les termes, la logique étant «la science ayant pour objet l'étude, surtout formelle, des normes de la vérité» (Le Petit Robert). Aussi Dienes intitule-t-il son ouvrage non pas «Logiques», mais «les ensembles et leur logique», ce qui permet de contourner la difficulté, au moins au niveau du titre. Mais qu'en est-il du contenu lui:même ? Il me semble qu'un texte introductif, précisant les objectifs poursuivis, et rapportant des expériences faites avec des enfants, fait cruellement défaut. On en est réduit aux conjectures.
En effet, je pense qu'il est fort possible de jouer tous les jeux proposés, même avec des enfants relativement jeunes et qu'il en résulte pour eux une excellente gymnastique de l'esprit. Si c'est là le but que poursuit l'auteur et les personnes désireuses de le suivre, ils réussissent, sans doute aucun. Mais dans ce cas, on peut se demander s'il ne serait pas préférable d'avoir recours à d'autres moyens, pour ne pas déflorer prématurément un sujet difficile et passionnant.
Si les exercices proposés ont pour but d'illustrer l'enseignement de la logique elle-même, et que cet enseignement ne se fait qu'à travers eux, alors je ne pense pas qu'on soit sur le bon chemin. La logique est abstraite par nature et l'on ne peut pas faire l'économie de cette abstraction. «*Il n'est pas de véritable éducation mathématique sans un ascétisme de la pensée abstraite qui seul peut conduire à dominer la connaissance expérimentale qui reste autrement accumulation de faits sans consistance*» (Maurice Loi: «Mathématique et philosophie» dans l'«Education», numéro 214 du 30 mai 1974). Citons également Francine Jaulin-Mannoni:
«*Si les exercices concrets sont nécessaires, on ne doit jamais perdre de vue qu'il ne*

constituent qu'une étape provisoire en vue d'un développement ultérieur où se révèlera la vraie nature des opérations.
Il ne faudrait pas croire par conséquent que le but de ces procédés pédagogiques est d'amener l'enfant à découvrir des mathématiques qui seraient dans les objets. Les mathématiques, c'est évident, ne peuvent être découvertes dans un monde où justement elles n'existent pas. Le matériel concret n'est pas autre chose qu'un moyen de communication plus accessible à l'enfant que ne l'est la parole.» *(Francine Jaulin-Mannoni in La rééducation du raisonnement mathématique (Introduction, p. 15) Les Editions sociales françaises 1965).*

Il me semble donc que ce petit livre, fort bien fait au demeurant, ne peut être utile qu'en tant qu'auxiliaire momentané de l'enseignement de la logique au secondaire, et même au secondaire supérieur. Il permettra au maître d'illustrer son propos, de le rendre plus accessible et pourra dans ce domaine être d'un grand secours. Mais même alors, il faut s'en servir comme d'une source d'inspiration et non pas le suivre pas à pas, page après page.
En résumé, il s'agit d'un bon livre du maître, pour autant que celui-ci s'en serve à bon escient.

Catherine Rübner, IRDP

Les six étapes des processus d'apprentissage en mathématique

Paris, 1970, OCDL, Z. P. Dienes, IRDP 5490.

Cette brochure me paraît fort utile pour qui veut étayer son enseignement du nouveau programme de la mathématique, par la connaissance de la façon dont les enfants apprennent et l'on peut se demander si ce ne sont vraiment que les enfants de l'école primaire qui sont concernés.
Dienes a le grand mérite d'exposer dans un langage clair, précis et concis, les six étapes qu'il a distingués dans l'apprentissage, étapes qui ne sont pas sans rappeler les types d'apprentissage hiérarchisés de Gagné [1]. Les maîtres reconnaîtront ces étapes pour les avoir maintes fois formulées. C'est pourquoi cette brochure ne peut que rendre service à ceux qui désirent être plus conscients de leur action pédagogique.

C. Rübner, IRDP

[1] Gagné, Robert M. *The conditions of learning.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, Chicago, etc. 1965.

L'enfant et les géométries

par Jean et Simonne Sauvy. Collection «Orientations E3», Casterman, Tournai, 1974.

Jean, ingénieur civil des Ponts et Chaussées, diplômé d'études supérieure de Lettres et de l'Institut d'ethnologie, se consacre à la formation des adultes et anime plusieurs clubs de mathématique moderne pour les parents et les enseignants. Simonne, elle, applique sa double formation psychologique et scientifique à la recherche dans l'enseignement des mathématiques en particulier à l'Ecole Decroly de Saint-Mandé (Paris). Elle dirige la revue «Activités et recherches pédagogiques». C'est dire que les auteurs de «L'Enfant et les Géométries» étaient particulièrement qualifiés pour introduire leurs lecteurs dans la genèse de la pensée géométrique. Largement informés des travaux de Jean Piaget, les Sauvy prolongent la «*Géométrie spontanée de l'enfant*» et déroulent le film d'une évolution qui va de la topologie originelle aux deux autres géométries projective et métrique. L'ouvrage n'est pourtant pas fait de psychologie uniquement. Il est pédagogique et comme tel fournit à l'éducateur des idées et des suggestions à foison. Disons bien: «à l'éducateur» car il ne s'agit pas ici de passer en revue un «programme

de géométrie» qui donnerait, méthodologie à l'appui, la liste des notions à «entonner» dans le cerveau des enfants, mais bien davantage de stimulations propres à faire agir les esprits appelés à construire leur propre géométrie et, par elle, à se situer dans leur monde concret et dans celui de ses représentations.
Ajoutons que Jean et Simonne Sauvy collaborent à Math-Ecole. Voir, dans le numéro 65, leur article «L'acte mathématique en devenir», p. 11.

S.R.

- **Intendance**

Laurence Cattin fait son plus beau sourire à chacun et particulièrement à ceux qui ne lui auraient pas encore fait parvenir le montant de l'abonnement 1975.
10 fr. Merci.

Il semble raisonnable de penser que les enfants ne doivent pas apprendre les mathématiques pour savoir au cours préparatoire vérifier leur monnaie, ou au cours moyen calculer le prix de revient d'une tapisserie... mais pour faire connaissance de façon plus large avec le mode de pensée, les moyens de décrire le monde, de l'analyser et d'agir sur lui que donnent les mathématiques. Il est évident que ce but primordial a normalement pour conséquence de savoir vérifier sa monnaie ou calculer un prix de revient, car il doit permettre de réagir en face de tout problème, même et surtout si on ne l'a jamais rencontré auparavant.

M. A. Touyarot, cité in
«Psycho-pédagogie pratique»,
R. Toraille et alii.

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

Mademoiselle
Madeleine BRAUTIGAM
Maîtresse d'applica
Rue Lo-de-Savoie 27

1110 MORGES

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311