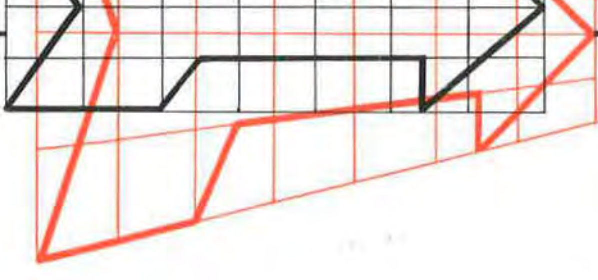
74



MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1976
15e ANNEE

MATH ECOLE 74

15e ANNEE SEPTEMBRE 1976

Editorial

L'axiome de choix

Il y a, en théorie classique des ensembles, un axiome appelé «axiome de choix».
Il parle de la possibilité de «choisir» convenablement un certain type de correspondance.
Mon propos n'est point d'en discourir: ce n'en est guère le lieu; et puis il y a déjà assez de livres pour ça, qui l'expliquent, le discutent ou simplement l'utilisent, pour ceux qui s'intéressent. En écrivant cela, je me rends bien compte que je sacrifie à l'habitude invétérée, à la loi institutionnelle du silence autodéfensif de l'école: «Tu apprendras ça plus tard ! Ce n'est pas au programme de cette année ! Va voir le dictionnaire si tu veux !...» Mais la feuille blanche ne pose pas de question, et me laisse choisir plutôt de rêver sous l'enchantement de l'expression même:

«Il y a, en enseignement de la mathématique, un axiome de choix».

Ce qui signifie que pour bien enseigner la mathématique, il faut choisir.
Choisir, non plus tant entre tenter de renouveler l'enseignement ou rester embourbé dans les ornières traditionnelles: il faut espérer que plus personne n'hésite, vu l'échec radical des programmes et méthodes d'hier.
Ni même entre obéir aux arrêtés des lois, administratives les unes, pédagogiques les autres, mais toutes abstraites et vaines, élaborées par les «autorités» pontifiantes du haut des chaires ou dans les salles de conseil, ou bien décider en toute liberté de science et de conscience comment faire l'école: il serait grand temps que les vrais opérateurs éducatifs, maîtres et maîtresses, prennent en charge leurs propres pouvoirs et responsabilités.
Donc, non pas liberté de choisir de faire ou ne pas faire. Mais bien possibilité réelle de construire une stratégie méthodologique qui permette de choisir, au fur et à mesure des sollicitations des élèves et en fonction de leurs désirs:

- entre jouer avec les nombres ou avec les blocs logiques,
- entre calculer de tête ou avec les calculatrices,
- entre apprendre des formules d'aire ou inventer des dessins,
- entre voir le monde de manière géométrique ou étudier la géométrie par l'algèbre,
- entre s'énerver à reconstruire un puzzle ou s'amuser à composer des figures avec les pièces du Tangram chinois,
- entre prendre son temps à contempler les trouvailles ou le perdre à s'exercer sur des techniques surannées,
- entre trembler à la seule pensée des exigences des études ultérieures ou jouir pleinement du temps présent,
- ...

N'est-ce pas vraiment un axiome «de choix» que celui-là ?

Denis Froidcoeur, Bellinzone

Quelques considérations sur les relations transitives

par André Calame

1) Notion de transitivité

Voici une notion que l'on rencontre souvent quand on parcourt l'avenue ER (Ensembles - Relations) du programme romand. Qu'il s'agisse d'approcher la notion d'ordre ou la notion d'équivalence, nombreux sont les jeux qui font appel de manière plus ou moins explicite à la transitivité. Or, cette notion n'est pas simple à cerner et c'est pourquoi Math-Ecole a cru bon de lui consacrer quelques pages.

Après un rappel de la définition de la transitivité et de quelques exemples de relations transitives courantes, nous envisagerons des questions que se posent souvent des adultes, des enseignants en particulier. Dans cette perspective, le lecteur est prié de se munir d'un crayon et d'une feuille de papier pour esquisser ses propres réponses. Nous nous tournerons ensuite vers les élèves, tout au moins vers les fiches qui leur sont destinées dans les premières années primaires. Le troisième volet de cet article tentera de dégager quelques réflexions plus générales sur le rôle de la transitivité dans l'étude des relations.

Rappelons d'abord la définition de la transitivité d'une relation $\mathscr{R}$ dans un ensemble E. Etant donné dans E trois éléments quelconques x, y, z, distincts ou non, supposons que si x est en relation avec y et si y est en relation avec z, alors x est aussi en relation avec z; on dit que la relation est transitive.

On peut résumer la transitivité ainsi:

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Si } x \textit{ est en relation avec } y\\ \textit{et}\\ \textit{si } y \textit{ est en relation avec } z\end{array}\right\} \textit{alors } x \textit{ est en relation avec } z$$

Plus symboliquement:

$$(x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \Longrightarrow x \mathscr{R} z$$

Cette dernière manière d'écrire, plus rapide, plus concise, a le désavantage de masquer l'importance des *si*. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la suite.

Voici quelques exemples de relations transitives [1] [2] (les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie citée en fin d'article):

(1) dans l'ensemble des blocs logiques:	«a la même couleur que»
(2) dans l'ensemble des nombres:	«est égal à»
(3) dans l'ensemble des droites du plan:	«est parallèle à»

(4) dans l'ensemble des nombres naturels: «est plus petit que»
(5) dans l'ensemble des nombres naturels: «précède»
(6) dans l'ensemble des nombres naturels: «est un diviseur de»
(7) dans l'ensemble des parties d'un ensemble: «est inclus dans»

Les trois premières relations sont réflexives, symétriques et transitives; ce sont des relations d'équivalence. Les quatre dernières relations sont des relations d'ordre.
Par opposition à l'exemple (5), la relation «précède immédiatement» ou «vient juste avant» n'est pas une relation transitive. Par exemple:

4 vient juste avant 5,
5 vient juste avant 6,
mais 4 ne vient pas juste avant 6.

2) Diagrammes fléchés

Etant donné une relation $\mathscr{R}$ dans un ensemble E, il est courant de représenter cette relation par un diagramme. Comme dans un diagramme de Venn-Euler, on représente les éléments de l'ensemble par des points ou des croix; ce sont les *sommets* du graphe. Pour indiquer que l'élément x est en relation avec l'élément y, on dessine un arc orienté de x vers y. Les arcs orientés ou fléchés sont les *arcs* du graphe. On appelle couramment cette représentation un *diagramme fléché* ou plus savamment un diagramme sagittal.

A titre d'exemple, soit $E = \{-1, +1, +2, +3, +6\}$ et la relation $\mathscr{R}$: «est diviseur de»

On a $-1 \ \mathscr{R} +1$; -1 est diviseur de $+1$, car $(-1) \cdot (-1) = +1$
On a $+2 \ \mathscr{R} +6$; $+2$ est diviseur de $+6$, car $(+2) \cdot (+3) = +6$
On a $+3 \ \mathscr{R} +3$; $+3$ est diviseur de $+3$, car $(+3) \cdot (+1) = +3$

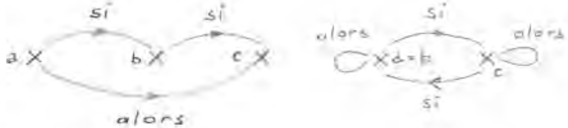
Le lecteur est invité à construire le diagramme fléché de cette relation.

Question 1

a) La relation $\mathscr{R}$ est-elle une relation d'équivalence dans E ?
b) Est-elle une relation d'ordre dans E ?
c) La relation $\mathscr{R}$ est-elle transitive ?
(Le lecteur trouvera les réponses en fin d'article.)

Sur le diagramme fléché, la transitivité se traduit ainsi: chaque fois qu'une flèche relie un premier élément à un deuxième et chaque fois qu'une flèche relie ce deuxième élément à un troisième, (distinct ou non), alors il existe une flèche qui relie le premier élément au troisième [1; p. 137].

Figure 1



Plus simplement, deux arcs consécutifs sont accompagnés d'un arc unique ayant même point de départ (a) et même point d'arrivée (c).
Afin de ne pas reprendre ici en détail toutes les propriétés des relations d'équivalence et d'ordre, nous nous contentons de les résumer dans le tableau ci-dessous:

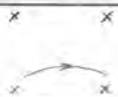
		Relation d'équivalence	Relation d'ordre large	Relation d'ordre strict
Réflexivité		toujours	*toujours*	*jamais*
		parfois jamais	parfois parfois	parfois parfois
Symétrie		**toujours**	**jamais**	**jamais**
Transitivité		toujours	toujours	toujours

Figure 2

A noter que la différence entre relation d'équivalence et relation d'ordre se joue au niveau de la symétrie; la différence entre ordre large et ordre strict se situe au niveau de la réflexivité.

3) Tableau à double entrée

Dès que le nombre des arcs est important, le diagramme fléché devient peu lisible. On peut lui préférer le diagramme à double entrée. Nous donnons dans la figure 3 le diagramme à double entrée de la relation «est diviseur de» dans l'ensemble E = { —1, +1, +2, +3, +6}.

$\longrightarrow$	—1	+1	+2	+3	+6
—1	x	x	x	x	x
+1	x	x	x	x	x
+2			x		x
+3				x	x
+6					x

Figure 3

Sur un tel tableau, la transitivité est moins immédiatement visible que dans le diagramme fléché. Toutefois, on peut indiquer une méthode de vérification. Choisissons une case marquée d'une croix, par exemple la case de la ligne de —1 et de la colonne de +2; nous désignons cette case par le couple (—1; +2) pour lequel on a la relation (—1) $\mathscr{R}$ (+2), puisque —1 est un diviseur de +2. Choisissons ensuite une autre case dans la ligne de +2. Pour cela, il suffit de suivre la colonne de +2 jusqu'à l'intersection avec la diagonale principale du tableau, c'est-à-dire la case (+2; +2) puis de choisir une case dans la ligne correspondante, par exemple le couple (+2; +6). De (—1) $\mathscr{R}$ (+2) et de (+2) $\mathscr{R}$ (+6), nous déduisons par transitivité (—1) $\mathscr{R}$ (+6). La case correspondante (—1; +6) occupe le quatrième sommet du rectangle construit sur les trois cases précédentes.

Notons, bien sûr, que cette méthode doit être appliquée à chaque case marquée d'une croix, si l'on veut vérifier pas à pas que la relation est transitive. Cette vérification peut devenir rapidement fastidieuse quel que soit le diagramme choisi, fléché ou à double entrée.

4) Quelques questions pour grandes personnes

Voici d'abord le diagramme fléché d'une relation $\mathscr{R}$ dans un ensemble de cinq éléments:

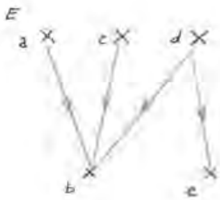


Figure 4

Nous nous posons la question suivante:

Question 2

Est-ce le diagramme fléché d'une relation transitive ?
Le lecteur voudra bien déterminer parmi les trois réponses suivantes celle qui lui paraît correcte:

(a) — Comme le diagramme ne contient pas deux flèches consécutives, on ne peut rien conclure.
(b) — Comme le diagramme ne contient pas deux flèches consécutives, la relation n'est pas transitive.
(c) — Il n'y a aucune raison pour que la relation ne soit pas transitive; donc elle est transitive.

Comparez votre réponse à celle donnée en fin d'article.

Développons l'argumentation (c) en passant par la forme négative. Si la relation n'était pas transitive, il existerait des éléments x, y, z, distincts ou non tels que x $\mathscr{R}$ y et y $\mathscr{R}$ z, sans que l'on ait x $\mathscr{R}$ z. Comme tel n'est pas le cas, la relation est transitive.
L'erreur de l'argumentation (b) peut provenir d'une mauvaise interprétation des hypothèses. Une relation est transitive si, chaque fois que x $\mathscr{R}$ y et y $\mathscr{R}$ z, on a aussi x $\mathscr{R}$ z. L'existence de deux flèches consécutives n'est pas une *condition nécessaire* à la transitivité, mais une *condition suffisante*. Pour qu'une relation soit transitive, *il suffit* que x $\mathscr{R}$ y et y $\mathscr{R}$ z implique x $\mathscr{R}$ z, quels que soient les éléments x, y, z, distincts ou non. Pour renforcer notre affirmation et sortir du doute ceux qui auraient choisi une autre réponse, donnons un exemple. Posons $a = 2$, $b = 30$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 35$ et envisageons la relation x $\mathscr{R}$ y: «x est un diviseur strict de y». (On entend par là que x divise y, avec x différent de y; en particulier, 30 n'est pas un diviseur strict de 30). Le diagramme fléché de cette relation est précisément celui de la figure 4. Or la relation «est diviseur strict de» est une relation transitive. En effet, dans l'ensemble des nombres naturels:

Si x est diviseur strict de y, on a $y = x \cdot r$ avec $r > 1$.
Si y est diviseur strict de z, on a $z = y \cdot s$ avec $s > 1$.

Des deux égalités, on déduit: $z = y \cdot s = (x \cdot r) \cdot s = x \cdot (r \cdot s) = x \,.\, t$ en posant $r \cdot s = t$ où $t > 1$. On a donc $z = x \cdot t$ avec $t > 1$, si bien que x est un diviseur strict de z.
Nous avons prouvé la transitivité de cette relation dans l'ensemble des nombres naturels; elle reste donc vraie dans tout sous-ensemble de nombres naturels tel que $E = \{2, 3, 5, 30, 35\}$.

Voici une autre situation représentée par le diagramme fléché de la figure 5.

Question 3

Est-ce le diagramme fléché d'une relation transitite ? Imaginez un modèle de cette relation où a, b, c, d, e sont des droites du plan et la relation envisagée le parallélisme.

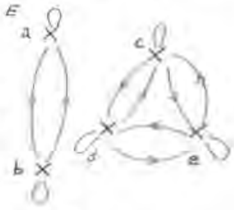


Figure 5

Vous trouverez une telle situation en fin d'article.

Considérons maintenant l'ensemble des villes suisses suivantes: {Zurich, Winterthour, Lausanne, Fribourg, Neuchâtel}. Examinons la relation $\mathscr{R}$: «est à moins de 100 km de». Le lecteur voudra bien construire le diagramme fléché de cette relation.

Question 4

La relation $\mathscr{R}$ est-elle transitive dans l'ensemble E ?
(Voir la réponse en fin d'article).

La réponse peut troubler. Neuchâtel est à moins de 100 km de Fribourg; Fribourg est à moins de 100 km de Lausanne. La transitivité joue, puisque Neuchâtel est à moins de 100 km de Lausanne et qu'on peut répéter le même raisonnement en permutant les trois villes de toutes les façons possibles. Pourtant notre malaise demeure et provient du fait que la conclusion: «Neuchâtel est à moins de 100 km de Lausanne» n'est pas une conséquence logique des deux énoncés précédents concernant Neuchâtel et Fribourg d'une part, Fribourg et Lausanne d'autre part. Il suffirait d'ailleurs de remplacer Lausanne par Martigny pour que la transitivité soit en défaut. Il n'y a, en effet, aucune raison que la transitivité soit en défaut. Il n'y a, en effet, aucune raison logique pour que

si x est à moins de 100 km de y
et *si* y est à moins de 100 km de z
alors x est à moins de 100 km de z.

La liaison entre les deux *si* et le *alors* n'est pas un lien de causalité. La transitivité ne peut jouer que dans des cas très particuliers comme celui que nous avons envisagé. La conclusion est ici l'inverse de celle de l'exemple précédent: Si une relation est transitive dans un ensemble donné, il n'est pas certain qu'elle reste transitive quand on l'étend à un ensemble plus vaste.
L'attitude du mathématicien sera toujours d'envisager une relation dans sa plus grande généralité et de préciser dans quel référentiel elle est transitive ou non. Par abus de langage, on dira même: la relation «est à moins de 100 km

de» n'est pas une relation transitive, sans préciser dans quel ensemble. On admet que chacun est capable d'imaginer un ensemble de villes pour lequel la transitivité est en défaut.
Nous terminons nos questions aux grandes personnes par l'examen d'un bref raisonnement.

Soit un ensemble E muni d'une relation $\mathscr{R}$ symétrique et transitive.
Soit a $\mathscr{R}$ b. Par symétrie, on a aussi b $\mathscr{R}$ a.
De a $\mathscr{R}$ b et b $\mathscr{R}$ a, on déduit par transitivité: a $\mathscr{R}$ a.

Donc, une relation symétrique et transitive est nécessairement réflexive.

Question 5

Ce raisonnement est-il correct ? (Réponse en fin d'article).
Une fois de plus, c'est l'occasion de souligner le rôle des *si* dans l'usage de la transitivité. Tout repose ici sur une condition: *si a est en relation avec b*, alors a $\mathscr{R}$ a.

5) La transitivité dans l'enseignement primaire

Les question du paragraphe précédent ont peut-être rendu le lecteur prudent au point de se demander ce qu'on peut bien découvrir de la transitivité dans les premières années d'école.
Partons d'une situation très simple où la transitivité apparaît tout naturellement: l'ordre chronologique. Imaginons un ensemble de photos prises semaine après semaine lors de la construction d'une maison. Un élève de six ans n'aura pas trop de peine à placer les photos dans l'ordre chronologique: telle photo vient avant telle autre, celle-ci vient après celle-là. Il pourra ainsi reconstituer l'histoire de la maison.
Pour l'adulte, il est évident que l'ordre chronologique est une relation transitive: *si* a vient avant b et *si* b vient avant c, *alors* a vient avant c. Mais une telle déduction n'est pas à la portée d'un écolier de six ans. Pourtant, on trouve dans les fiches ER - 28 et 29 de première année [3] l'histoire d'une cueillette de pommes et l'histoire de la construction d'une maison. Mais les auteurs rendent attentifs les enseignants à l'objectif de ces fiches: «On veillera à ne représenter que les flèches allant d'une scène à celle qui la suit immédiatement: il ne s'agit ici que de sériations, mais pas encore de véritables relations d'ordre» (Comm. ER, p. 3).
Même quand les fiches proposent des relations d'ordre (ER 31 à 34), «il s'agit d'amener les élèves à découvrir le plus grand nombre possible de flèches, sans leur imposer cependant le diagramme complet» (Comm. ER, p. 4). De

même, dans l'approche des relations d'équivalence, «il est vain de vouloir imposer aux enfants l'obligation de placer toutes les flèches.» (Méth. ER, p. 41).

Avant de quitter ce niveau de la première année primaire, citons une expérience de Mme Jaulin-Mannoni [4; p. 178] portant sur la «transitivité de la bijection»: «Nous donnions à l'enfant une feuille de papier sur laquelle étaient dessinées des maisons. Nous placions, avec l'aide de l'enfant, une allumette sur chaque maison en disant qu'elle figurait une cheminée. Nous ramassions ensuite les allumettes de manière à former un tas unique. Puis nous placions sur chaque maison un trombone figurant une porte. Nous ramassions tous les trombones en un tas et nous demandions s'il y avait «plus de trombones ou plus d'allumettes». La description des réponses montre que certains enfants n'admettent pas encore la transitivité de l'égalité au niveau des opérations concrètes.

Dans les années suivantes, on peut s'attendre à ce que les élèves dessinent des diagrammes de plus en plus complets. Mais là encore, il serait faux d'imposer ce qui doit être découvert. Ce que les enseignants doivent savoir, c'est que même lorsque les élèves dessinent toutes les flèches d'une relation d'ordre ou d'une relation d'équivalence, il n'ont pas encore acquis la notion de transitivité. La plupart des flèches sont dessinées pour elles-mêmes, sans lien les unes avec les autres.

Qu'on nous permette à ce propos de souligner les risques de confusion entre les sériations dont le lien verbal est souvent donné par «vient juste avant» et les relations d'ordre strict dont le lien verbal est «vient avant». Le risque est d'autant plus grand quand deux telles fiches se suivent et portent sur une même situation concrète. Ainsi, en troisième année (ER - jeux 4 et 5), la sériation des mois de l'année, puis le passage à leur ordre strict. N'y a-t-il pas un certain danger à écrire (Méth. ER, p. 28):

«Les enfants peuvent proposer, par exemple, de faire une sériation. Sans refuser cette solution, la maîtresse amène le groupe à une représentation de l'ordre strict...» [5]. Bien sûr, tout est dans la manière d'amener (!), mais on peut craindre quelque tour de passe-passe au niveau des liens verbaux «juste avant» et «avant».

En quatrième année, on parle dans la méthodologie (ER, p. 39) de réflexivité, de symétrie, de transitivité; mais il faut entendre par là l'observation de diagrammes. Les jeux et les flèches sont très pauvres en questions du genre suivant: Si l'on sait que Paul est plus petit que Jean et que Jean est plus petit que Louis, que peut-on dire de Paul et Louis ? La prudence observée dès la première année reste de mise.

En résumé, nous insistons sur le fait que chaque relation est étudiée pour elle-même, dans une situation donnée. On ne peut espérer, en raison des difficultés citées précédemment, que les élèves puissent acquérir la notion de relation transitive pour elle-même, en tant que propriété d'une relation abstraite. La transitivité, dans la mesure où elle est perçue, est liée à un contenu sémantique: «est diviseur de», «précède», etc.

Même dans l'enseignement secondaire inférieur, il paraît peu judicieux de prouver la transitivité de la relation «est diviseur de» en passant par des inclusions d'ensembles [6; p. 136]. En simplifiant les notations de Queysanne-Revuz, on a le point de départ suivant:

> *Si a est un diviseur de b, alors l'ensemble des multiples de b est inclus dans l'ensemble des multiples de a et réciproquement.*

Par exemple:

$$\begin{aligned} &6 \text{ est diviseur de } 18 \Longleftrightarrow M_{18} \subseteq M_6 \\ \text{avec } &M_{18} = \{18, 36, 54, 72, ...\} \\ &M_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\} \end{aligned}$$

Formellement:

$$(\text{a divise b}) \Longleftrightarrow (M_b \subseteq M_a)$$

La transitivité de la relation de divisibilité découle alors de la transitivité de la relation d'inclusion. Ce détour nous paraît un peu artificiel et nous lui préférons la démonstration donnée plus haut dans le paragraphe 4. Il est, en effet, peu probable que le passage par les inclusions incite les élèves à prévoir que toute relation d'ordre peut se ramener à une relation d'inclusion entre ensembles [7; p. 11].

Après avoir esquissé les limites de l'étude de la transitivité dans les premières années d'école, essayons d'approfondir la question et de proposer deux objectifs pour l'enseignement secondaire dans ce domaine: la composition des relations et l'épuration des diagrammes fléchés.

6) Transitivité et composition des relations

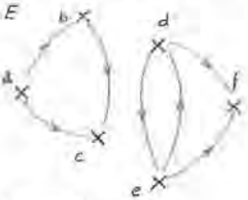


Figure 6

Soit un ensemble E muni d'une relation $\mathscr{R}$. Pour fixer les idées, on peut se reporter au diagramme de la figure 6. Dans E, nous envisageons la composition de la relation $\mathscr{R}$ avec elle-même. C'est une nouvelle relation que nous noterons

$$\mathscr{S} = \mathscr{R} \circ \mathscr{R}$$
$$(\mathscr{R} \text{ suivie de } \mathscr{R})$$

La définition de $\mathscr{S}$ est la suivante: un couple (x;y) satisfait à la relation $\mathscr{S}$ si et seulement si dans E existe un élément t tel que x $\mathscr{R}$ t et t $\mathscr{R}$ y.

Puisque a $\mathscr{R}$ b et b $\mathscr{R}$ c, on a a $\mathscr{S}$ c.
Puisque d $\mathscr{R}$ e et e $\mathscr{R}$ d, on a d $\mathscr{S}$ d.
Puisque d $\mathscr{R}$ e et e $\mathscr{R}$ f, on a d $\mathscr{S}$ f. etc.

Le diagramme fléché de $\mathscr{S} = \mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ est celui de la figure 7.

La liaison entre composition de relations et transitivité réside dans la proposition suivante:

Une relation $\mathscr{R}$ est transitive si et seulement si $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}$.

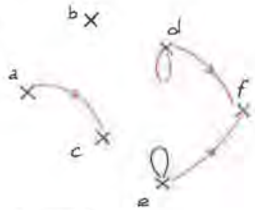


Figure 7

En d'autres termes, $\mathscr{R}$ est transitive si tous les arcs fléchés de $\mathscr{S} = \mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ sont des arcs fléchés de $\mathscr{R}$. Ainsi, la relation $\mathscr{R}$ de l'exemple précédent n'est pas transitive, puisque les boucles de $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ en d et en e n'appartiennent pas au graphe de $\mathscr{R}$. En revanche, on sait que la relation «est diviseur strict de» dans l'ensemble E = {2, 3, 4, 6, 12} est transitive. Vérifions que $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}$.

$\mathscr{R}$ $\qquad$ $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$

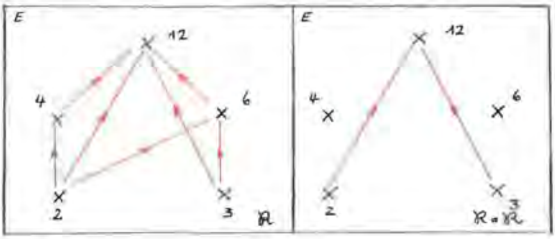


Figure 8

Les deux arcs du diagramme de $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ appartiennent bien au diagramme de $\mathscr{R}$.
Dans l'ensemble E = {2, 3, 5, 30, 35}, pour la même relation «est diviseur strict de», le graphe de $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ est vide; il ne comprend aucun couple, puisque le graphe de $\mathscr{R}$ ne comprend jamais deux arcs successifs comme nous l'avons remarqué plus haut. Comme l'ensemble vide est considéré comme un sous-ensemble de $\mathscr{R}$, la relation est transitive; nous retrouvons sous une autre forme la conclusion donnée dans le paragraphe 4.
Nous pensons que la relation de transitivité ne peut être comprise que dans le cadre de la composition des relations. Cette opinion rejoint l'avis exprimé dans [8; p. 46-47].

7) Epuration des diagrammes fléchés

On demande souvent aux élèves, nous l'avons vu, de construire des diagrammes fléchés. Ce n'est pas une activité intéressante en soi; elle doit mener à une réflexion sur les propriétés de la relation étudiée. En fait, la construction du diagramme a surtout une valeur dynamique temporaire. C'est pendant que l'élève effectue le travail qu'il est amené à se poser des questions. Le diagramme, une fois terminé, devient statique; il est parfois peu lisible, encombré de flèches disposées avec plus ou moins de bonheur. Des parents non avertis ne manqueront pas de critiquer ces griboullis et ne cacheront pas leur agacement de les voir baptisés pompeusement du nom de représentation sagittale. Sans vouloir justifier une telle attitude, il est vrai qu'un graphe doit fournir des renseignements clairs et précis. C'est pourquoi nous pensons que l'étude des relations doit conduire à épurer les diagrammes. Il y a là une démarche mathématique intéressante dont on devrait tirer profit dès l'enseignement secondaire inférieur. Elle consiste à simplifier les diagrammes pour n'en garder que les éléments essentiels.

Imaginons, par exemple, que l'on sache qu'une relation $\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive. $\mathscr{R}$ est donc une relation d'ordre large. On peut épurer le diagramme fléché en trois étapes comme suit:

Du moment que la relation est réflexive, il y a une boucle en chaque sommet du graphe. Il est donc inutile de les indiquer, puisqu'aucun sommet ne se distingue des autres de ce point de vue-là.

La relation étant transitive, on supprimera tout arc de a à c, s'il existe un élément b intermédiaire tel que les arcs de a à b et de b à c appartiennent au graphe.

Enfin, la relation étant antisymétrique, il existe au plus un arc entre deux éléments distincts m et n. Si l'on décide de représenter la relation m $\mathscr{R}$ n en plaçant m en-dessous de n, il est inutile d'orienter l'arc; la lecture de bas en haut suffit à indiquer le sens de la relation.

Pour une relation d'ordre large, cette épuration en trois temps conduit au diagramme de Hasse [9; p. 258]. L'exemple des diviseurs de 18 muni de la relation «est diviseur de» montre l'élégance du diagramme de Hasse, sur lequel on peut lire sans peine le plus petit commun multiple ou le plus grand commun diviseur de deux nombres. Une épuration analogue appliquée aux relations d'équivalence reviendrait simplement à indiquer les classes d'éléments équivalents, c'est-à-dire à former la partition de l'ensemble pour la relation donnée. En effet, dans une classe d'équivalence, chaque élément est en relation avec tous les éléments de la classe; le nombre comprend tous les arcs possibles; il est donc inutile de les dessiner.

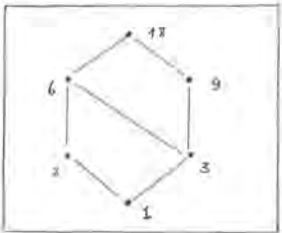


Figure 9

Réponses

Question 1

a) La relation «est diviseur de» n'est pas une relation d'équivalence dans $E = \{-1, +1, +2, +3, +6\}$, car elle n'est pas symétrique.
On a $(+2)\ \mathscr{R}\ (+6)$, mais on n'a pas $(+6)\ \mathscr{R}\ (+2)$.

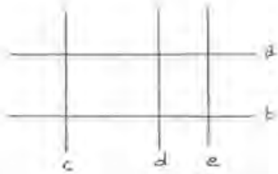
b) La relation $\mathscr{R}$ n'est pas non plus une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique.
On a à la fois $(-1)\ \mathscr{R}\ (+1)$ et $(+1)\ \mathscr{R}\ (-1)$ avec $-1 \neq +1$
c) La relation est transitive (voir la suite du texte).

Question 2

c) — La relation est transitive.

Question 3

Il s'agit d'une relation d'équivalence; cette relation étant réflexive, symétrique et transitive (voir fig. 2). Voici un modèle possible correspondant au diagramme fléché:

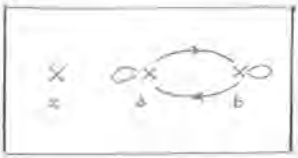


Question 4

Le diagramme fléché est le même que celui de la figure 5: les villes de Zurich et Winterthour sont à moins de 100 km l'une de l'autre; les trois villes de Lausanne, Fribourg et Neuchâtel sont deux à deux à moins de 100 km l'une de l'autre. Puisque nous avons répondu à la question 3 que le diagramme fléché de la figure 5 est le diagramme d'une relation transitive, il en est de même de la relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E.

Question 5

Le raisonnement est incorrect dans la dernière partie. On a seulement prouvé que a $\mathscr{R}$ a dans le cas où a est en relation avec un autre élément b. S'il existe dans E un élément x en relation avec aucun autre élément, on ne pourra pas prouver que x $\mathscr{R}$ x. Le diagramme ci-contre illustre ce cas.



Références bibliographiques

[1] Ch. Burdet, *Mathématique de notre temps (I)*, Payot, 1972.
[2] A. Calame, *Introduction aux mathématiques modernes*, Griffon, 1971.
[3] M. Ferrario et al., *Mathématique - Première année*, Office romand des éditions scolaires, 1972.
[4] F. Jaulin-Mannoni, *Le pourquoi en mathématique*, Ed. E.S.F., 1975.
[5] M. Ferrario et al., *Mathématique - Troisième année*, Office romand des éditions scolaires, 1974.
[6] Queysanne-Revuz, *Mathématique - Classe de cinquième*, 1969.
[7] Kurosh, *Algèbre générale*, Dunod, 1967.
[8] * * * *Mathématique - Classe de cinquième*, in Recherches pédagogiques No 42 (IPN).
[9] Kaufmann-Précigout, *Cours de mathématiques nouvelles (I)*, Dunod, 1966.

Une opération difficile: la soustraction

par Raymond Hutin

«Les opérations peuvent être présentées de bonne heure à l'enfant si elles consistent en manipulations concrètes, associées graduellement à leurs symboles. Elles s'expriment tout d'abord sous la forme orale. Le calcul écrit, par sa perfection même, est d'un ordre d'abstraction plus élevé. La forme des chiffres n'a rien qui éveille l'idée de nombre; leur emploi prématuré en fausse donc le développement. De même, les signes d'opérations (+ — × : =) n'ont rien d'expressif. Enfin les cycles uniformes qui constituent la trame des opérations conduisent à un automatisme qui a ses avantages, mais aussi l'inconvénient de vite conduire à des évolutions dans le néant.»

De qui est ce texte ? Encore un de ces ultras de la mathématique moderne qui refuse d'enseigner les opérations arithmétiques dès le début de la scolarité ? La formulation quelque peu désuète du propos vous a mis sur la voie. Ces pages figurent dans l'ouvrage que Louis Grosgurin consacrait en 1922 à la méthodologie de l'enseignement de l'arithmétique. Les mots choc — ces «évolutions dans le néant» — paraissent particulièrement adaptés à la soustraction qui, aujourd'hui comme hier, continue à mobiliser d'innombrables heures d'enseignement pour un résultat des plus décevants.

Et pourtant, me direz-vous, j'enseigne la soustraction avec succès et je suis satisfait des performances de mes élèves dans ce domaine !

Quelques chiffres qui doivent être considérés comme des ordres de grandeur et qui concernent des élèves ayant exclusivement suivi un enseignement d'arithmétique classique vont illustrer mon propos. Ils sont extraits de divers rapports élaborés par le service de la recherche pédagogique de Genève.

Date	Degré	Enoncé	Réponses exactes
1966	Fin de la scolarité obligatoire (population scolaire totale)	Soustrayez 19,004 de 100	55%
1970	3e année	1010 - 753 =	71%
1971	6e année	963,45 - 543,83	72%
1971	7e année	118 - 87 =	65%
1971	7e année	0,7 - 0,58	85%

Inutile d'allonger la liste; la comparaison du rendement obtenu en troisième année avec ceux des degrés supérieurs et surtout celui qui marque la fin de la scolarité obligatoire met en évidence le fait que la construction a été édifiée sur le sable pour une forte proportion des élèves.
Nous ne cherchons pas ici à justifier la réforme de l'enseignement en cours car il faut reconnaître que l'enseignement de la mathématique dite moderne n'a guère modifié les performances dans ce domaine et que de nombreux enfants ou adolescents continuent a être en échec devant la soustraction.
Cette opération, qui n'en est pas vraiment une du point de vue du mathématicien, est plus difficile qu'on ne le croit généralement. De plus, quoi qu'on en dise, elle est extrêmement rare en dehors de l'école.
Ici prend place une nouvelle objection du lecteur:

— Dans le commerce, lorsqu'il s'agit de rendre la monnaie sur un billet de 20 ou de 100 francs, la soustraction est indispensable !

Il suffit d'un bref retour sur soi-même pour se rendre compte que jamais la soustraction n'intervient dans un tel problème. En fait, s'il s'agit de payer 23,80 F avec un billet de 50 F, on entendra: 23,80, +20, 24, +6, 30, +20, 50, l'ambiguïté entre centimes et francs n'étant présente qu'ici car elle est levée par la manipulation des pièces et des billets.
Ceci ne signifie en rien que l'enfant ne doive pas apprendre à soustraire à l'école mais montre que le problème du calcul numérique est souvent plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord.
Qu'on nous permette encore une digression pour montrer, si besoin est, combien la tâche de l'enseignant est difficile. D'une manière générale, l'école cherche de nos jours à limiter le redoublement de classe et à rendre plus aisé le passage au travers de la scolarité élémentaire. D'autre part, l'entrée de la quasi totalité des élèves dans l'enseignement secondaire, du moins dans un certain nombre de cantons, fait qu'on exige aujourd'hui de tous les enfants de 11-12 ans ce qui n'était hier demandé à cet âge qu'à la petite minorité passant au collège et visant des études longues. De plus, la modification des habitudes domestiques fait que les enfants ont plus rarement que par le passé l'occasion d'effectuer des achats pour leur maman; et s'ils le font, dans bien des cas une machine automatique les dispense de contrôler leur monnaie. Enfin le temps consacré aux jeux de société, aux cartes par exemple qui fournissent d'innombrables occasions de calcul, tend à diminuer considérablement en particulier du fait de la place prise par la télévision dans les loisirs.
Pour en revenir à notre sujet, l'apprentissage de la soustraction, essayons de cerner quelque peu le problème.
Du point de vue mathématique, l'addition est attachée à la réunion d'ensembles disjoints, le cardinal de la réunion étant égal à la somme des cardinaux des ensembles de départ. La situation est claire: lorsqu'un ensemble de 5 objets est réuni à un autre ensemble formé de 3 objets, l'enfant voit le tas de 5 et le tas de 3 qui, une fois réunis, peuvent perceptivement rester disjoints (jetons de couleurs différentes par exemple).

L'opération inverse, c'est-à-dire la partition de l'ensemble ayant pour cardinal 8 en deux sous-ensembles de cardinal 5 et 3 respectivement, est également aisée mais l'enfant y verra la décomposition de 8, soit $8 = 5 + 3$, et non la soustraction $8 - 3 = 5$ que l'enseignant a dû généralement lier à une situation dynamique — on enlève, on mange, on casse, on perd, etc. — pour lui trouver une justification. Mais lorsque l'enfant a abordé la soustraction dans un processus dynamique, il est presque aussitôt confronté à une autre situation, statique celle-là, quand la soustraction est attachée à la relation d'inclusion. Dans ce second cas, il n'est plus question d'enlever et de faire disparaître quelque chose, mais il faut comprendre la relation de partie à tout et assimiler l'idée de complémentaire, c'est-à-dire maîtriser la négation dont de multiples travaux montrent la difficulté et l'apparition tardive par rapport à l'affirmation. Pour conserver le même exemple, nous traduisons cette situation par l'énoncé:
J'ai 8 jetons, 5 sont rouges, combien ne sont pas rouges ?
Il faut comprendre ici que les cinq jetons rouges sont à la fois éléments de l'ensemble des rouges et éléments de l'ensemble des jetons.
Mais nous ne sommes pas au bout de nos peines car un troisième aspect important qui touche à la soustraction consiste en la notion de différence.

— Quelle est la différence entre un paquet de 8 jetons et un autre paquet de 5 jetons ?

Ici, il n'est plus question d'inclure les 5 jetons dans les 8 ni d'effectuer une partition de l'ensemble de 8 pour constituer une collection de 5, mais les 8 jetons constituent un terme de référence auquel nous allons comparer l'ensemble donné de 5 jetons et un autre ensemble à construire de telle manière qu'une bijection soit possible entre l'ensemble initial de 8 d'une part et la réunion de l'ensemble de 5 et du nouvel ensemble construit d'autre part.
On imagine aisément combien la confusion entre ces trois types de problèmes peut troubler l'enfant et il ne faut pas s'étonner s'il éprouve tant de difficultés dans ce domaine.
Nous n'aurons garde de négliger dans tout ceci le problème supplémentaire du langage et de la symbolisation. Un seul exemple: le rejet par l'enfant de l'écriture «8—5» parce que 8 *n'est pas moins que 5*. On sait depuis longtemps que l'élève n'apprend pas en fonction de ce que dit le maître, nous irions même jusqu'à penser que, dans bien des cas, l'enfan [illegible]
dit le maître. Seule la construction personnelle est véritablement porteuse de fruit. Le rôle de l'enseignant, capital, consiste à placer l'élève dans la situation qui sera favorable à cet apprentissage.
Pour cela, il semble qu'on n'attache pas assez d'importance à la construction des relations entre les nombres. Tout d'abord, chez les élèves les plus jeunes, la construction de la soustraction ne peut guère s'effectuer que comme une autre écriture de l'addition. En liant réunion d'ensembles disjoints et partition, l'enfant pourra peu à peu associer:

$$\begin{array}{lll} 5 + 3 = 8 & 8 = 5 + 3 & 8 - 5 = 3 \\ 3 + 5 = 8 & 8 = 3 + 5 & 8 - 3 = 5 \end{array}$$

Une autre erreur pédagogique fréquente dans de nombreux manuels consiste à travailler en sautant du coq à l'âne, c'est-à-dire en présentant des séries d'opérations sans lien entre elles. Pour élaborer peu à peu les 90 relations élémentaires apparaissant dans la soustraction (de 1 — 1 = ... à 18 — 9 = ... pour la soustraction dans **N**, il est avantageux de travailler de proche en proche. Si l'exercice initial a porté sur le triplet (8; 5; 3), pourquoi ne pas enchaîner avec des questions du type 9 — 5 = ...; 7 — 5 = ...; 8 — 4 = ...; 8 — 6 = ...; qui font varier un des éléments d'une unité plutôt que de jongler de 8 — 5 à 9 — 6 en passant par 5 — 3; 10 — 7; 8 — 4; etc., où l'enfant qui se trouve dans le stade de la construction n'aura pas d'autre possibilité que de préparer chaque fois les collections correspondantes... ou de compter sur ses doigts. En revanche, les situations du type «— Que se passe-t-il si l'on ajoute 1 (ou si l'on enlève 1) à l'un des nombres... ?» favoriseront cette mise en relation des nombres les uns avec les autres.

Il est évident que la soustraction en colonnes avec la notion de «retenue» qu'elle comporte est une notion indispensable, en particulier pour aborder ensuite la technique de la division. Cependant, on croit trop souvent que le bon moyen d'acquérir l'algorithme consiste à faire et à faire encore des soustractions avec retenue. Outre qu'il est fastidieux, cet exercice peut probablement accroître la rapidité d'exécution mais il ne permet guère à l'enfant qui ne sait pas, de faire de grands progrès. Sans négliger cet aspect des choses, il paraît utile de consacrer plus de temps à des activités permettant une recherche active. Voici un exemple de fiche de travail qui fera comprendre notre intention. Selon le degré d'habileté des élèves, elle peut être effectuée de tête, mais elle peut aussi donner lieu à une recherche intéressante lorsqu'on utilise une petite machine à calculer.

Fiche de travail **Soustraction**

Pars du nombre 1240.

Soustrais plusieurs fois de suite 25.

— Combien de fois dois-tu soustraire 25 pour retrouver un nombre qui se termine par zéro ?
  Quel est ce nombre ?
  Pourquoi celui-ci et pas un autre ?
— Trouve, sans calculer, d'autres nombres se terminant par zéro, par lesquels tu es sûr de passer en continuant à soustraire 25.
  Contrôle en effectuant le calcul.
  Est-il possible d'arriver sur un nombre qui se termine par deux zéros ?
  Pourquoi ?

— En continuant à soustraire 25 combien trouveras-tu de nombres qui se situent entre 1200 et 1100, entre 1100 et 1000, entre 1000 et 900 ?
— Peux-tu, à l'avance déterminer sur quel nombre se terminera la série ?
— Entre 1240 et ce nombre, es-tu capable de trouver à l'avance combien il y aura d'étapes ?
Aide-toi du dessin d'une ligne sur laquelle tu porteras quelques-uns des nombres trouvés.
— Combien faudrait-il soustraire de fois 25 pour passer de 3000 à 2000 ?
Explique ton raisonnement.
— Pierre a soustrait 17 fois 25 et il est arrivé à 1670. Il dit qu'il est parti de 2100. Qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse.

Notre remarque finale sera destinée aux enseignants des élèves plus âgés. La fiche de travail ci-dessus porte sur les nombres entiers. Le maître qui reçoit des élèves de 10 ans et plus à tendance à considérer la soustraction comme une opération connue et il ne prend pas toujours suffisamment de temps pour la consolider, en particulier à propos des nombres décimaux. La même fiche pourra donc être offerte en remplaçant par exemple 1240 par 12,4; 25 par 0,25 etc. On sera probablement surpris de l'intérêt que manifestent les élèves pour ce type d'activité et des difficultés que certains d'entre eux rencontreront dans le raisonnement de type récurrentiel. La même remarque vaudra d'ailleurs pour les grands nombres et cette fiche pourrait être transposée pour travailler les centaines de milliers et les millions.

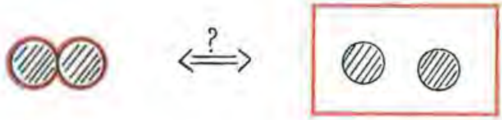
Les approches de la soustraction: sources des problèmes ?

par M.-L. Leoni et N. Guignard

Il n'est pas possible de se pencher sur le problème posé par l'apprentissage de la soustraction sans le replacer dans son contexte logique et mathématique et sans garder à l'esprit le souci didactique de «procurer un outil intellectuel utilisable dans les situations les plus diverses de la vie courante» (plan d'études romand).
En effet, les enfants de première année qui sont censés apprendre l'opération de soustraction, sont quotidiennement confrontés à des situations de la vie courante comportant la séparation d'une «partie» d'un «tout». («J'ai 5 bonbons dans ma poche, j'en mange trois... je t'en donne un... etc.»). Cela ne signifie pas pour autant que l'enfant est automatiquement en mesure de comprendre une expression telle que: $5 - 3 = 2$.

Présupposés logiques de la soustraction

La soustraction est, du point de vue logique, liée à un ensemble de notions qui sont à la base des propriétés mathématiques de l'opération.
La plus importante de ces notions est l'inclusion dont la construction fait elle-même appel à des notions telles que la vicariance (ou complémentarité), l'addition logique de classe, la réunion des parties dans un tout; chacune de ces notions posant alors le problème de sa représentation et du symbolisme inhérent à l'inclusion.
L'inclusion procède de l'addition logique qui est la réunion. Comme toute opération logique, l'addition complète suppose une double action effective et réversible: l'action de réunir et son inverse l'action de séparer ou d'exclure.
La construction de l'inclusion implique la coordination de ces deux actions et le rapport qui existe entre les parties (ou sous-ensembles) et entre chaque partie avec le tout (classe totale).
Cette construction de l'inclusion est longue et laborieuse jusqu'à ce que l'enfant comprenne et domine ce rapport partie à tout et qu'il soit capable de le quantifier. Ce rapport nécessite la réversibilité de la réunion (la réunion étant $A + A' = B$) dont la forme s'exprime par $A = B — A'$. Quand l'enfant est en mesure de comprendre réellement cette forme-là, cela signifie qu'il a élaboré tout le processus de construction de l'inclusion, qu'il sait par conséquent ce qu'est la complémentarité (A' est le complémentaire de A mais aussi sa négation: $\overline{A}$). Or ce palier d'achèvement de la construction de l'inclusion est tardif; beaucoup d'enfants de 11-12 ans présentent encore des difficultés par rapport à cette notion.
Du point de vue scolaire, dominer la notion d'inclusion veut également dire que l'enfant est capable de manipuler tout le symbolisme qui s'y rattache et cela sous-entend qu'il a assez intériorisé le système inclusif pour être à même de représenter une situation par différents diagrammes. Et il convient de savoir que le problème de la représentation d'une notion et le maniement de ses symboles est encore plus complexe parce que faisant intervenir d'autres notions (par exemple la différenciation entre la réunion et l'intersection, la multiplication de classifications, etc.). A titre d'exemple, nous pouvons nous demander comment l'enfant établit une équivalence entre ces deux façons de représenter une réunion:



Est-ce que l'enfant saisit que l'espace entre les deux ensembles et le référentiel est un ensemble vide ?
Que devient la représentation de la complémentarité dans une telle représentation ? etc.

On constate que l'approche même de la soustraction pose un ensemble considérable de problèmes et on peut se demander comment un apprentissage de la soustraction en première année primaire est encore possible étant donné ce décalage temporel entre le moment où l'enfant commence à maîtriser l'inclusion et le moment où il doit apprendre la soustraction.
Ce qui devient important, c'est de comprendre le caractère dynamique de la formation des connaissances. Si la maîtrise d'un système d'opérations n'est réalisée que lorsque chaque sous-système est différencié l'un de l'autre puis coordonné en une structure d'ensemble, sa construction repose sur tout un ensemble de schèmes ou de notions partielles dont l'acquisition sert à l'apprentissage des opérations. Il devient donc urgent de prendre conscience — et de faire prendre conscience à l'enfant — des pré-requis qui sont à la base des opérations logiques. Et pour toute opération logique, le principal «pré-requis» est une ACTION.
C'est dans la mesure où cette action a été agie effectivement par l'enfant, avec son inverse, que l'enfant pourra passer de la compréhension logique de l'opération à la compréhension mathématique. Seulement ce passage du «logique» au «mathématique» n'est pas à concevoir comme une addition temporelle mais comme deux facettes d'un même objet interdépendantes l'une de l'autre.

Présupposés mathématiques de la soustraction

Du point de vue mathématique, l'écriture (5 — 3 = 2) comporte la prise de conscience de chaque terme dont chacun est le résultat d'une action. En effet, chaque nombre doit d'abord être construit pour lui-même et en fonction de l'itération. Les cinq bonbons placés dans la poche de l'enfant abandonnent leurs caractéristiques spécifiques (grandeur, parfum, couleur, etc.) au profit de la notion d'unité mathématique (5 unités).
La compréhension de la notion de la soustraction repose donc, comme toute autre opération mathématique, sur la construction du nombre. Cette problématique est déjà celle de l'addition, notion abordée plus tôt dans les programmes et qui n'est nullement dissociable de la soustraction (opération directe et inverse).
En ce qui concerne les signes (+, —, =), chacun désigne une action précise: «+» une réunion; «—» une exclusion (ou séparation); «=» exprime la possibilité d'une substitution.
Chaque symbole assume ainsi toute sa signification puisqu'il se réfère à une situation *réelle* que le langage mathématique désigne abstraitement en fonction des opérations de la pensée.
Il ne suffit donc pas d'«habituer» l'élève à une nouvelle écriture, mais il doit parvenir à la notation en passant par la construction et la prise de conscience de chaque terme ainsi que par la signification de leur mise en relation.
Mathématiquement, la soustraction ne constitue pas une nouvelle opération par rapport à l'addition puisque toute soustraction peut se résoudre par son

inverse. Les enfants le perçoivent inconsciemment. A un énoncé verbal dont le résultat devait être obtenu par soustraction, 73 % des élèves de troisième année primaire ont donné un résultat correct. 60 % seulement ont été capable d'écrire l'opération. A tous les problèmes de ce type, on constate que les enfants font d'abord mentalement une soustraction, ce qui les amène à donner un résultat correct. Mais quand il s'agit d'écrire le calcul qu'ils ont effectué pour obtenir ce résultat, ou bien l'opération n'a rien à voir avec l'énoncé, ou bien l'opération est correcte mais sous forme additive. On obtient moins souvent l'opération de soustraction. Capables de soustraire, ces enfants n'ont pas pris conscience que la soustraction est l'inverse effectif de l'addition. (Ce problème va d'ailleurs se retrouver identique en ce qui concerne la division).
Ce qui précède tend donc à montrer qu'il n'est pas possible de dissocier les présupposés logiques et mathématiques, chacun trouvant sa place et sa relation aux autres dans une situation d'apprentissage concrète devant laquelle il convient de placer l'enfant.

Didactique et apprentissage

Alors que l'enseignement traditionnel des mathématiques présentait de prime abord la soustraction sous sa forme algorithmique (nombres et signes) en faisant l'économie de presque toute la construction logique, l'enseignement rénové n'a jusqu'à présent, pas mieux résolu, dans son ensemble, le problème de la soustraction. Aborder une notion par le biais de la mathématique ensembliste ne revient pas à travailler le concept logique de la notion en question. Le programme romand, qui aborde la soustraction à partir du diagramme de Venn,  risque de poser encore plus de problèmes car on part de quelque chose que l'enfant ne domine pas: la représentation de deux sous-ensembles à l'intérieur d'un référentiel perceptivement plus grand que la réunion des deux sous-ensembles. En effet, l'enfant n'a pas encore construit l'inclusion et à plus forte raison le symbolisme qui s'y rattache. Certes, l'enfant de première année est capable de remplir les ensembles ou de placer des étiquettes mais il ne saurait utiliser ce moyen de représentation pour illustrer une situation de classification. D'autre part, jouer sur la comparaison entre deux sous-ensembles renforce la démarche spontanée de l'enfant qui consiste, dans une situation d'inclusion, à comparer les deux classes symétriques au détriment du rapport entre une de ces classes et la classe totale.

Un autre type d'approche

Abandonner le symbolisme ensembliste ne signifie pas renoncer à la construction logique de la soustraction.
Une solution est peut-être à trouver dans un autre type d'approche qui tienne compte des présupposés définis plus haut.

Il ressort en effet de tout ceci trois points importants:

1. Le retour à l'ACTION de base effective (la réunion).
2. La mise en relation de cette action avec son inverse (la séparation ou l'exclusion).
3. Le passage direct à l'écriture comme faisant partie de toute activité mathématisante parce que le lien entre l'action et l'expression écrite est à *construire;* il ne se fait pas magiquement.

Cela signifie qu'en repensant la didactique de la soustraction, on repense également celle de l'addition comme devant donner lieu à une activité plus complète. *Chaque* réunion devrait être agie réellement et représentée directement avec le signe comme la traduction d'une «communication sociale» et moyen d'économie (il remplace tout une phase: je réunis à, j'ajoute, etc.) afin d'éviter l'erreur souvent rencontrée que 4 + 3 signifie 4 plus que 3. D'autre part, déjà avec l'addition, il faut construire la notion du tout. L'enfant doit prendre conscience que s'il a «réuni» des objets, c'est en fait pour dénombrer un avoir: le tout.
Dès lors, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Tout est en place pour aborder la soustraction et il n'est pas nécessaire de la remettre à l'année suivante. Quand l'enfant a agi et a construit la représentation de cette action, quand il est capable de retrouver «l'histoire» à partir de sa notation, il est en mesure d'agir l'opération inverse.
L'opération de soustraction n'est pas alors quelque chose de nouveau mais repose sur un vécu, en lien direct avec ce qu'il connaît déjà. C'est d'ailleurs la seule possibilité de respecter le fonctionnement de sa pensée qui procède par prise de conscience, différenciation et coordination des schèmes et des notions. Et de plus, le symbolisme n'est pas un nouvel objet mais un outil pratique conçu comme la représentation directe de son signifié.
Nous sommes conscientes de tous les nouveaux problèmes que supposerait une telle approche mais ne voudrait-il pas la peine de se donner les moyens d'atteindre le but fixé par les objectifs du nouvel enseignement ?

A propos des retenues dans les soustractions

par Th. Bernet

Le but de cet article est d'examiner un aspect de l'apprentissage de la technique de soustraction: celui de l'explication des retenues. On rencontre couramment deux explications qui correspondent aussi à deux façons de noter différentes: les méthodes dites «par emprunt» et «par compensation». Examinons-les successivement sur la base d'un exemple:

$$834 - 456 = 378.$$

Méthode «par emprunt»

Quelle que soit la façon de s'y prendre, on a besoin de 14 unités au lieu de 4 dans la colonne des unités pour le nombre supérieur. Une façon de s'arranger est de dire: «les 10 unités que j'ajoute à 4, je les prends dans la colonne des dizaines en enlevant une dizaine à 3».

$$\begin{array}{rccc} & & 12 & \\ & 7 & \cancel{2} & 14 \\ & \cancel{8} & \cancel{3} & 4 \\ - & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 3 & 7 & 8 \end{array}$$

Méthode «par compensation»

Dans ce cas également, il faut pouvoir disposer de 14 unités au lieu de 4, mais l'on utilise le fait que la différence de deux nombres ne change pas si l'on ajoute un même nombre à chacun d'eux. En l'occurrence, on ajoute 10 à chacun: 10 unités au premier et une dizaine au second. L'écriture peut prendre plusieurs formes:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rccc} & & 13 & 14 \\ & 8 & \cancel{3} & \cancel{4} \\ - & \overset{5}{\cancel{4}} & \overset{6}{\cancel{5}} & 6 \\ \hline & 3 & 7 & 8 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rccc} & & +10 & +10 \\ & 8 & 3 & 4 \\ - & \overset{+1}{4} & \overset{+1}{5} & 6 \\ \hline & 3 & 7 & 8 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{rccc} & 8 & 3 & 4 \\ - & \overset{+1}{4} & \overset{+1}{5} & 6 \\ \hline & 3 & 7 & 8 \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{rccc} & 8 & 3 & 4 \\ - & \bar{4} & \bar{5} & 6 \\ \hline & 3 & 7 & 8 \end{array}$$

Seules c) et d) sont vraiment pratiques. La forme a), d'ailleurs compliquée, n'est pas indispensable à la bonne compréhension du processus. De b) on passe aisément à c) ou à d) en laissant tomber les indications «+10» qu'il n'est pas nécessaire de garder en mémoire longtemps.

Avantages et inconvénients respectifs

La méthode de l'emprunt est plus facile à comprendre. Si l'on fonde l'apprentissage de la soustraction sur l'idée d'«enlever» (nous reviendrons plus loin sur cet aspect de la question) c'est la méthode qui se présente naturellement à l'esprit de l'enfant qui cherche. En revanche elle peut donner lieu au départ à des écritures compliquées qu'il faut ensuite s'exercer à simplifier. De plus, elle va nettement moins bien dans les cas où la présence de zéros dans le premier terme oblige à faire des emprunts en chaîne, comme dans l'exemple ci-contre.

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 9 & 9 & \\ & 1 & \cancel{10} & \cancel{10} & \cancel{10} & 14 \\ & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ - & 1 & 2 & 7 & 4 & 8 \\ \hline & & 7 & 2 & 5 & 6 \end{array}$$

La méthode de compensation a, bien sûr, les inconvénients et avantages inverses. Elle exige que les élèves comprennent le principe de la compensation qui repose sur une propriété de la soustraction. Il faut donc qu'ils aient une bonne connaissance de la soustraction avant de pouvoir l'appliquer. De là vient qu'on les oblige parfois à passer par les deux étapes: emprunt d'abord, compensation ensuite. Car la méthode de compensation est nettement plus pratique. On peut toujours additionner une unité à un nombre de 1 chiffre, alors qu'on ne peut pas la soustraire lorsque ce nombre est 0. Et les retenues peuvent se noter très simplement.

Il existe une méthode ne faisant appel ni à l'emprunt, ni à la compensation

Elle ne présente ni les difficultés d'écriture de la première, ni celles de compréhension de la seconde. En bref, elle n'a aucun des inconvénients cités plus haut.
Pour la comprendre, il suffit de bien savoir additionner, condition nécessaire quelle que soit la méthode.
On sait que la soustraction dans **N** est l'opération inverse de l'addition dans **N**.
Pour rester le plus près possible de la notion, il est donc utile de se fonder sur l'idée qu'une soustraction telle que 627 — 473 correspond à la recherche du terme manquant dans ... + 473 = 627 ou dans 473 + ... = 627.
Pratiquement cette recherche prend alors la forme suivante [1]:
L'élève écrit l'un sous l'autre les nombres 627 et 473 et se pose d'abord la question: «que faut-il additionner à 3 pour obtenir 7 ?» La réponse est: «4 + 3 = 7» et l'élève note 4.

$$\begin{array}{r} 6\,2\,7 \\ -\,\overset{1}{4}\,7\,3 \\ \hline 1\,5\,4 \end{array}$$

Pour les dizaines l'élève se dit: «que faut-il additionner à 7 pour obtenir 2 ? Ce n'est pas possible; mais on peut obtenir 12 en additionnant un nombre à 7: 5 + 7 = 12». L'élève note le 5 ainsi qu'une retenue sur le 4 de la colonne des centaines. Insistons: cette retenue est une *retenue d'addition*. Elle vient de ce que 5 + 7 n'est pas égal à 2, mais à 12. Pour les centaines on ne dira pas «combien additionner à 4 pour obtenir 6 ?» mais «combien additionner à 5 ...» car l'addition des dizaines a déjà fourni une centaine.

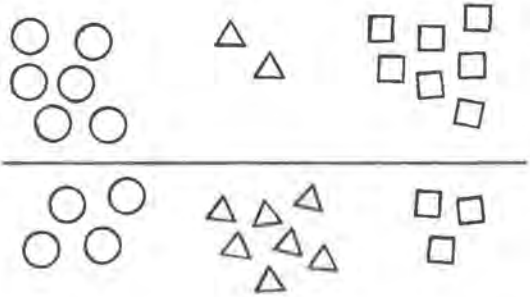
$$\begin{array}{r} 4\,7\,3 \\ \\ \hline 6\,2\,7 \end{array}$$

L'apprentissage serait plus naturel si l'on posait la soustraction comme ci-contre. Les retenues viendraient se noter automatiquement au bon endroit. On pourrait fort bien commencer l'apprentissage de cette manière mais il faudrait tôt ou tard revenir à la manière usuelle parce que, dans les divisions, il est nécessaire que le reste soit écrit sous les deux termes de la soustraction.
Voici comment pourrait se présenter une manipulation conduisant au même apprentissage (figure, page suivante).

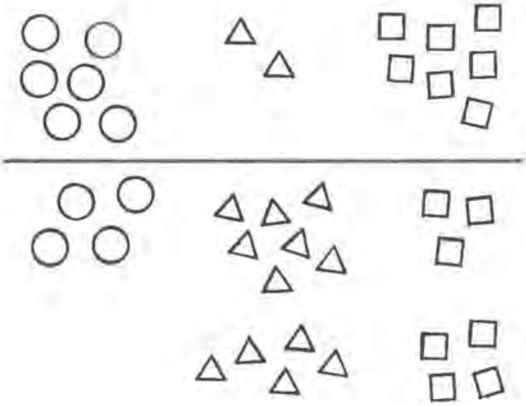
L'élève prépare les collections de jetons correspondant aux nombres 627 et 473. Puis il se demande quels jetons ajouter à la deuxième collection pour obtenir la première. Pour ce qui est des carrés, c'est simple. Il en faut 4. L'élève note 4. Pour ce qui est des triangles, c'est plus compliqué puisque la

[1] Ce n'est pas l'exemple qui conviendrait pour un premier apprentissage.

deuxième collection comprend déjà plus que 2 triangles. Par l'expérience qu'il a de l'addition, l'élève sait qu'il peut aussi obtenir un 2 lorsque le total d'une colonne est en réalité de 12. Il adjoint donc 5 triangles pour en obtenir 12 et note 5.



La figure ci-contre représente la manipulation lorsque l'élève en est arrivé là. A ce stade, celui-ci va remplacer 10 triangles par un rond, de sorte qu'il continuera le raisonnement avec 5 ronds au lieu de 4.



Cette méthode qui, autant que je sache, est peu usitée en Suisse romande est, sauf erreur, la méthode enseignée dans le canton de Zurich, ou du moins l'une des méthodes enseignées dans ce canton. Il semblerait donc qu'elle soit praticable. Au vu des avantages qu'elle présente, il vaudrait la peine que quelques collègues en fassent l'essai.

A propos de l'illustration de soustractions par l'action d'enlever

Au moment d'enseigner une opération, le maître cherche des situations concrètes lui permettant de l'illustrer. C'est ainsi qu'il choisit volontiers l'action d'enlever pour la soustraction. A ce propos, je voudrais semplement faire remarquer qu'il n'existe pas de situations essentiellement «soustractives». Par exemple, lorsqu'on a une quantité initiale, une quantité enlevée et un reste, il faut faire une addition pour trouver la quantité initiale.
Lorsqu'une situation peut être décrite par une addition, elle peut l'être aussi par une soustraction et vice-versa. C'est la raison pour laquelle je pense qu'il n'est pas fondamental d'associer la soustraction principalement à l'idée d'enlever. Il est probablement plus utile de chercher une présentation qui montre dès l'abord la relation entre soustraction et addition.

Les calculateurs électroniques à l'école ?

Nous remercions vivement Mme C. Rübner et MM. J. Cardinet et A. Perrot (IRDP) qui ont aimablement accepté de nous conseiller au début de cette expérience menée dans quelques classes neuchâteloises.

A. Blaser
Classe de quatrième primaire
Peseux

S. Guinchard
Ecole Normale
Neuchâtel

La préparation des expériences

par S. Guinchard

REMARQUE PREALABLE

Envisager l'utilisation des calculatrices à l'école, et particulièrement à l'école obligatoire, déclenche presque toujours une prise de position: on est favorable ou défavorable, rarement indifférent.
Face aux nouveaux produits de la technique, n'avons-nous pas mieux à faire que de nous poser la question «Pour ou contre ?» Si l'école désire vraiment préparer à la vie actuelle, sinon future, ne convient-il pas qu'elle assimile le plus lucidement possible les nouveaux outils ?
En 1973, au moment de nos premières expériences, les prix des calculatrices commençaient à baisser. On pouvait déjà penser que l'emploi de ces calculatrices deviendrait de plus en plus populaire. De là à estimer que les maîtres doivent s'attendre à les voir apparaître pendant les leçons de mathématique, il n'y a qu'un pas... que les élèves commencent à franchir. Il est donc devenu nécessaire de se préparer méthodologiquement de manière à en tirer le meilleur parti possible le moment venu.

PREMIERE EXPERIENCE

Au cours de l'année scolaire 73-74, nous avons fait un essai dans cinq classes de quatrième année de la section préprofessionnelle (dernière année de la scolarité obligatoire). Nous disposions d'une dizaine de calculatrices prêtées par une maison de distribution, c'est pourquoi l'essai n'a duré que deux ou trois semaines dans chaque classe. Bien entendu, les résultats obtenus doivent être considérés avec beaucoup de prudence; cependant, malgré la brièveté de l'essai, ces résultats étaient suffisamment encourageants pour justifier une expérience de plus longue durée. Cela correspondait d'ailleurs au désir des maîtres: ils avaient bien constaté que leurs élèves considéraient la leçon de mathématique d'une manière plus positive, mais ils pensaient que l'utilisation de ces calculatrices ne provoquerait qu'un enthousiasme fort limité dans le temps.

DEUXIEME EXPERIENCE

Les objectifs

— Déterminer si l'intérêt des élèves pour la leçon de mathématique reste stimulé après plusieurs mois;
— faire sentir aux élèves que la rigueur mathématique n'est pas imposée seulement par le maître — ses exigences leur paraissent bien souvent arbitraires — mais également, et même surtout, par l'utilisation des calculatrices qui n'«acceptent» aucun compromis;
— favoriser l'esprit de recherche en faisant découvrir, puis exploiter, les possibilités de la calculatrice;
— amener les élèves à prendre conscience des limites de la calculatrice: elle ne fait qu'exécuter des ordres;
— vérifier si les approximations restent utiles et, si c'est le cas, concilier l'utilisation de la calculatrice et l'établissement d'approximations;
— essayer de remplacer l'alimentation par piles — pas toujours très pratique (les piles sont rapidement déchargées) et coûteuse — par l'alimentation par le réseau.

La réalisation

— L'expérience a eu lieu dans une seule classe, celle de M. Blaser, de janvier à juin 1975;
— l'effectif de la classe peu élevé a permis de placer une calculatrice par table de deux élèves;
— nous avons utilisé un nouveau modèle: en plus des touches pour les nombres de 0 à 9 et pour les quatre opérations, ces calculatrices comprenaient:
  — le signe égal séparé des signes + ou —,
  — le changement de signe (+/—),
  — le pour-cent,
  — la racine carrée,
  — la mise en mémoire,
  — le rappel de la mémoire,
  — l'effacement de l'affichage, des résultats ou de la mémoire.

La progression proposée

1. *Résolution d'équations*

1.1 *Recherche libre*

a) individuelle;
b) par groupes de deux élèves;
c) par groupes de deux élèves avec communication des découvertes aux autres groupes sous la forme d'équations à résoudre.

Remarques:

a) Aux élèves en difficulté, le maître peut suggérer d'essayer les premiers exercices du livret d'instructions de la calculatrice, puis de préparer eux-mêmes des exercices analogues;
b) la communication aux autres groupes est plus aisée lorsque les élèves disposent de calculatrices du même type; en effet, sur des calculatrices de types différents, pour une même équation, les manipulations peuvent être différentes;
c) la communication amène les élèves à utiliser un code pour indiquer la manipulation utilisée; l'exemple suivant facilite la comparaison des différentes solutions et met en évidence la plus rationnelle:

Combien mesure la surface latérale d'une chambre dont les dimensions sont:

longueur = 4,50 m; largeur = 3,75 m; hauteur = 2,40 m ?

Surface latérale en m2:

1re solution

Equation : (4,5 × 2,4 × 2) + (3,75 × 2,4 × 2) = 39,6

N° des pas :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Touches :	$\boxed{4,5}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{2,4}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{2}$	$\boxed{+M}$	$\boxed{3,75}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{2,4}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{2}$	$\boxed{+M}$	$\boxed{MT}$
Affichage :	4,5	4,5	2,4	10,8	2	21,6M	3,75M	3,75M	2,4M	9M	2M	18M	39,6M

b) le tableau précédent peut être simplifié de la manière suivante:

Equation : (4,5 × 2,4 × 2) + (3,75 × 2,4 × 2) = 39,6

Touches : $\underbrace{\boxed{4,5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2,4}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{+M}\ \boxed{3,75}\ \boxed{\times}\ \boxed{2,4}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{+M}\ \boxed{MT}}_{13\text{ pas}}$

2e solution (disposition simplifiée, comme pour b) ci-dessus)

Equation : (4,5 + 3,75) × 2 × 2,4 = 39,6

Touches : $\underbrace{\boxed{4,5}\ \boxed{+}\ \boxed{3,75}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{2,4}\ \boxed{=}}_{8\text{ pas}}$

Au cours de cette recherche, les élèves peuvent utiliser toutes les touches de la calculatrice, mais le maître ne cherche pas à leur faire découvrir toutes les possibilités.

1.2 *Etude systématique*

Pour établir une progression, nous nous sommes inspirés du manuel d'utilisation livré avec la calculatrice et nous avons cherché à mettre en évidence les démarches suivantes:

— les premiers exercices portent sur des petits nombres; le résultat peut être trouvé mentalement, cela permet un contrôle instantané;
— assez rapidement, les exercices font appel à des nombres plus grands; le calcul mental devient impossible; nous demandons alors aux élèves de faire intervenir au moins un des deux contrôles suivants:

   a) avant d'utiliser la calculatrice, établir une approximation (oralement ou par écrit) et noter ce résultat;
   b) à l'aide de la calculatrice, refaire le calcul si possible d'une autre manière;

— en cas de doute sur le procédé à utiliser avec la calculatrice, l'élève reprend la même suite d'opérations avec des nombres plus petits et il compare le résultat affiché à celui qu'il calcule mentalement;
— certaines équations sont mises en relation de manière à mettre en évidence les propriétés des opérations; par exemple:

$$(20 - 14) - 5 = \dots$$
$$20 - (14 - 5) = \dots$$

2. *Résolution de problèmes*

Cette activité constitue le prolongement naturel de la résolution des équations telle qu'elle a été présentée sous le point 1.2 (Etude systématique). Ainsi, la résolution de problèmes se déroule selon les étapes suivantes:

a) *équation;* les élèves peuvent utiliser des expressions plus ou moins élaborées; cela peut aller de l'opération ne portant que sur deux nombres à l'expression fractionnaire unique pour un problème;
b) *approximation;* elle est effectuée par écrit ou oralement, mais le résultat est toujours écrit;
c) *calcul;* utilisation de la calculatrice.

La réalisation des expériences

par A. Blaser

DEROULEMENT DE L'EXPERIENCE

Une première expérience de courte durée (3 semaines) fut suivie, l'année scolaire suivante, d'une tentative plus sérieuse qui dura 6 mois. Ces essais se déroulèrent avec 8 calculatrices branchées sur le réseau. Les élèves font partie d'une classe de quatrième préprofessionnelle mixte (effectif 13 élèves). Jusqu'alors, ces élèves utilisaient la règle à calcul. Cet outil donnait d'assez bon résultats mais une bonne partie des élèves n'éprouvait pas une sécurité suffisante dans son maniement. L'estimation de l'ordre de grandeur du résultat leur posait, souvent d'insondables problèmes. La nouvelle de l'arrivée prochaine de calculatrices électroniques dans la classe fut accueillie avec enthousiasme.
Afin de contrôler l'expérience, une classe témoin fut choisie. Cette classe continuait naturellement d'utiliser les moyens de calculs habituels. Au début de l'expérience une série d'épreuves furent somises aux deux classes, soit: un test mesurant le raisonnement arithmétique et deux autres épreuves faisant plus spécialement appel au calcul de tête ainsi qu'au maniement des nombres décimaux. A la fin de l'expérience, ces mêmes tests furent une nouvelle fois passés par les élèves des deux classes. Une série de problèmes compléta le contrôle.

REMARQUES PRATIQUES EN COURS D'EXPERIENCE

Dans le premier temps de l'expérience, au cours de la recherche libre, les élèves manifestent un grand intérêt. Ils s'étonnent, ils s'émerveillent. Ils travaillent par groupe de deux. Souvent, ils ne peuvent résister à l'envie de communiquer au groupe voisin le fruit de leurs découvertes. C'est un merveilleux moment de recherche intense. Les élèves ayant de la facilité en mathématique recherchent immédiatement des progressions compliquées et essayent d'utiliser la machine au maximum des possibilités offertes. Les moins doués se contentent d'opérations simples, vérifiables de tête. Sécurité d'abord !
Afin de permettre l'échange des découvertes, chaque élève propose une série d'opérations à ses camarades. La participation des élèves est totale. Des problèmes surgissent. Tout le monde ne comprend pas du premier coup la marche à suivre proposée par des camarades plus astucieux. Une discussion intéressante éclate à propos du petit problème suivant: que paye-t-on pour une marchandise affichée Fr. 45.— et escomptée à 6 % ?

Solution proposée par la majorité des élèves:

N° des pas :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Touches :	$\boxed{45}$	$\boxed{\%}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{6}$	$\boxed{=}$	$\boxed{45}$	$\boxed{-}$	$\boxed{2{,}70}$	$\boxed{=}$
Affichage :	45	0,45	0,45	6	2,70	45	45	2,70	42,30
	9 pas								

Solution proposée par deux élèves:

N° des pas :	1	2	3	4	5	6
Touches :	$\boxed{45}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{6}$	$\boxed{\%}$	$\boxed{-}$	$\boxed{=}$
Affichage :	45	45	6	2,70	2,70	42,30
	6 pas					

Une première conclusion s'imposait aux élèves: la machine offre quelquefois plusieurs possibilités pour parvenir à un même résultat.
Dans l'étude systématique de l'utilisation de la machine les exercices proposés aux élèves peuvent paraître rébarbatifs, pourtant chacun y travaille avec un acharnement peu commun. Ici, le travail s'effectue individuellement. Les élèves ne disposant pas de machines sont occupés à d'autres travaux. Chaque série d'exercices débute toujours par des exemples contrôlables de tête. Au bout de 15 jours, la machine remplacera la règle à calcul. Durant cette étude, l'importance de la parenthèse est particulièrement mise en évidence par l'utilisation de la machine.

Exemple: comparer

$$
\begin{array}{lcl}
3 + (5 + 4) & \text{et} & (3 + 5) + 4 \\
3 - (5 + 4) & \text{et} & (3 - 5) + 4 \\
3 - (5 - 4) & \text{et} & (3 - 5) - 4 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Certains de ces exercices occasionnent pas mal de tâtonnements; mais avec un minimum d'aide, la totalité des élèves domine la situation. Nos calculatrices possèdent une *mémoire* ce qui leur donne une dimension particulière. Les élèves ressentent très bien et très rapidement le besoin d'utiliser la touche $\boxed{M}$.
Les choses se gâtèrent quelque peu lorsque les élèves commencèrent à utiliser les calculatrices pour le calcul de leurs problèmes. On les sent pleins d'assurance. Ils ont confiance en leur machine. Trop, peut-être, ce qui les amène à commettre pas mal d'erreurs. Ils négligent, en particulier la lecture des unités de la donnée du problème. Les opérations sont effectuées sans ordre. On ne s'inquiète pas de savoir si celui-ci peut avoir une influence sur le résultat final.

Conclusion provisoire

par S. Guinchard

REMARQUES METHODOLOGIQUES

Ainsi, la minute de vérité de l'expérience semble bien être le moment où les élèves commencent à résoudre des problèmes. Nous pensons actuellement que les trois étapes qui avaient été proposées sous le point 2 (Résolution de problèmes) devraient être réalisés plus systématiquement qu'au cours de l'essai.
De cette manière, l'utilisation de la calculatrice correspond à un moment très court par rapport au temps nécessaire pour comprendre le problème, poser l'équation et établir l'approximation.
Ainsi, il n'est peut-être pas nécessaire de disposer d'une calculatrice pour un ou deux élèves. Quatre ou cinq calculatrices pourraient suffire pour une classe; elles seraient placées dans des «centres de calcul» situés autour de la classe. Les élèves s'y rendraient après avoir effectué les mises en équation et les approximations d'un ou deux problèmes.
A priori, les approximations paraissent superflues lorsqu'on utilise une calculatrice plutôt qu'une règle à calcul. Elles restent cependant très utiles pour détecter les erreurs de manipulation:

— nombre ou signe d'opération mal enregistré,
— virgule oubliée,
— ...

Ceux qui ont le «sens des nombres» découvrent la plupart des erreurs presque instantanément. Mais ce «sens des nombres» ne repose-t-il pas justement sur la capacité d'estimer un résultat, approximativement certes, mais très rapidement. Ainsi, bien que la calculatrice donne automatiquement la place de la virgule, il est toujours important de développer la capacité d'estimer approximativement un résultat.
Il faut relever que ces approximations doivent pouvoir être effectuées avec une certaine aisance, sinon les élèves sont vite découragés. Cela implique une bonne connaissance des tables d'addition et de multiplication au niveau

— des unités,
— des dizaines, des centaines, ...
— des dixièmes, des centièmes, ...

La nécessité d'écrire les équations avec une grande rigueur paraît mieux adaptée lorsque l'exigence ne provient pas uniquement du maître — ses remarques paraissent souvent arbitraires aux yeux des élèves — mais surtout de l'utilisation de la calculatrice. En effet, selon le schéma proposé, il s'écoule un certain temps entre l'écriture et la résolution de l'équation: il s'agit donc de pouvoir reconnaître sans ambiguïté les opérations en cause et l'ordre dans lequel elles doivent être effectuées. Bien entendu, les élèves ont constaté que tout l'effort de raisonnement subsiste; cependant, ils l'ont fourni plus volontiers: la perspective d'une dernière étape agréable constitue un stimulant efficace.

REMARQUES TECHNIQUES : les caractéristiques souhaitées

Nos classes de la section préprofessionnelle de l'école secondaire n'abordent aucune fonction trigonométrique ou logarithmique: il est inutile de se procurer une calculatrice suréquipée en touches de toutes sortes !
Pour permettre une utilisation rationnelle, il nous semble actuellement qu'une calculatrice devrait avoir au moins les touches suivantes:

— le signe $\boxed{=}$ séparé des signes $\boxed{+}$ et $\boxed{-}$,
— la racine carrée(la racine cubique serait utile),
— la possibilité d'élever au carré (éventuellement au cube) et de calculer l'inverse du résultat affiché, soit en utilisant les touches $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ et $\boxed{:}$ $\boxed{=}$, soit, ce qui est mieux, à l'aide des touches $\boxed{x^2}$ et $\boxed{1/x}$,
— une mémoire $\boxed{M}$ dont on peut utiliser le total pour effectuer n'importe laquelle des quatre opérations (soit x ☆ M; soit M ☆ x; x représente le nombre affiché, M le contenu de la mémoire et ☆ une des quatre opérations).

Cette mémoire paraît importante: elle permet de «dialoguer» avec la machine; c'est elle qui semble développer le plus la recherche de voies toujours plus avantageuses pour résoudre des équations.

Exemple:

A la station d'essence:
— prix pour le plein 43,70 Fr;
— prix du litre 0,94 Fr.

km au compteur	actuellement	62 634
	au moment du plein précédent	62 095

Quelle est la consommation moyenne pour 100 km ?

Solution a)

* Consommation en litres

Equation : 43,70 : 0,94 = 46,49 (par excès)

Touches : $\boxed{43,7}$ $\boxed{:}$ $\boxed{0,94}$ $\boxed{=}$ $\boxed{C}$ (touche d'effacement)

* Distance en kilomètres

Equation : 62634 – 62095 = 539

Touches : $\boxed{62634}$ $\boxed{-}$ $\boxed{62095}$ $\boxed{=}$ $\boxed{C}$

* Consommation en litres pour 100 kilomètres

Equation : (46,49 x 100) : 539 = <u>8,63</u> (par excès)

Touches : $\boxed{46,49}$ $\boxed{:}$ $\boxed{539}$ $\boxed{x}$ $\boxed{100}$ $\boxed{=}$

Manipulation : <u>16 pas</u> et <u>notation de deux résultats intermédiaires</u>.

Solution b)

* Distance en kilomètres

Equation : 62634 – 62695 =

Touches : $\boxed{62634}$ $\boxed{-}$ $\boxed{62095}$ $\boxed{+M}$ (le résultat est mis en mémoire)

* Consommation en litres pour 100 kilomètres

Equation : (43,7 x 100) : (0,94 x M) = <u>8,63</u> (par excès)

Touches : $\boxed{43,7}$ $\boxed{x}$ $\boxed{100}$ $\boxed{:}$ $\boxed{0,94}$ $\boxed{:}$ $\boxed{M}$ $\boxed{=}$

Manipulation : <u>12 pas</u> et <u>aucune notation de résultat intermédiaire</u>.

Bien entendu, les expressions les plus condensées ne sont pas à la portée de tous les élèves; il s'agit d'une recherche individuelle, toujours ouverte, pour les plus doués.
Les élèves ont utilisé la mémoire, presque tous spontanément, mais ils se limitaient à l'addition de totaux partiels. C'est en les aidant, en les encourageant, que nous avons pu les amener à des opérations du type x ☆ M ou M ☆ x.
L'alimentation par le réseau a fonctionné sans défaillance; cela a bien posé quelques problèmes de cordons et de prises multiples, mais ils ont été assez vite résolus. L'alimentation par piles rechargeables est encore plus pratique. A l'achat, ces piles coûtent plus cher que les piles ordinaires; cependant, sur une longue durée, leur utilisation semble nettement plus économique.

DES PROJETS

Bien entendu, l'expérience n'est pas terminée:

— il faudrait déterminer à partir de quel degré de l'école l'utilisation des calculatrices est la plus rationnelle;
— il conviendrait d'établir des mesures et de faire des comparaisons avec des classes-témoins.

En fait, nous avons déjà voulu faire des comparaisons au cours de la deuxième expérience; mais le déménagement du titulaire de la classe-témoin a entraîné la perte des résultats de sa classe ! Il faut donc renoncer pour l'instant aux comparaisons prévues et les mesures faites dans une seule classe n'ont guère de signification.
Actuellement, nous ne sommes plus persuadés que ces mesures sont indispensables: les calculatrices apparaissent déjà dans quelques classes de l'école primaire !
Il nous parait plus utile de chercher à utiliser ce nouveau moyen de la manière la plus constructive possible. Pour cela, nous allons chercher à préciser et à compléter les remarques faites au moment où les élèves commencent à résoudre des équations et surtout des problèmes. Il s'agit également de déterminer si l'idée des «centres de calcul» est réalisable dans une classe.

N.d.l.r. — *Cette article était attendu depuis longtemps. Il répond à notre attente en ce sens surtout qu'il ouvre, grande, une porte qui s'entrouvrait et qui désormais ne se fermera plus. Math-Ecole souhaite que nombreux soient ceux de ses lecteurs qui, travaillant avec des calculatrices, voudront bien faire part de leurs expériences. On attend leurs «papiers».*

Lu pour vous

● **In «L'Education»,**
Paris 283, 20.5.1976, p. 31: Prééminence de l'intelligence, par Emile Guiers.

Commençant par le calcul, nous rappellerons d'abord que la réadaptation de cet enseignement s'est imposée en notre époque comme une nécessité pratique. Dès lors que la mathématique moderne se développe dans l'enseignement supérieur et y conquiert chaque jour une place plus importante, il devient logique et inévitable de lui reconnaître également un droit de cité dans le second, puis dans le premier degré. Ainsi les bouleversements pédagogiques qui sont intervenus dans ce domaine et qui, convenons-en, ont dérangé bien des habitudes, n'ont rien d'arbitraire; ils sont simplement à la mesure du renouvellement réel et profond qui s'opère actuellement dans cette discipline et qu'il s'agit, pour le succès même de l'action enseignante, de généraliser et de consolider.
Mais, au-delà des circonstances, les maîtres n'ont pu manquer de remarquer combien, dans ses principes et dans son esprit, la nouvelle initiation mathématique rejoint en profondeur ce qu'il y a de plus solidement ancré dans la longue tradition pédagogique française, au sein de laquelle ils ont été formés. En effet, plus que l'ancien calcul, la mathématique moderne consacre le rôle prééminent de l'intelligence. Elle offre matière, dans les multiples aspects que la pédagogie lui prête, à un exercice permanent et prolongé de l'esprit. En même temps, elle se présente, d'un autre point de vue, comme un élargissement décisif de la perspective traditionnelle. Elle fait entrer dans son champ de vision des êtres nouveaux, doués d'une certaine existence personnelle, avec leur règle de fonctionnement, leur aire de mouvance ou domaine d'application. Ce sont les relations, les structures, les supports graphiques correspondants... La mathématique nouvelle réalise de la sorte une prise de distance par rapport aux faits traités; elle conduit à une appréciation plus large, et néanmoins plus unitaire, des concepts et des notions.
Enfin — et j'en appelle ici à l'expérience de tous ceux qui l'ont effectivement enseignée — la mathématique moderne répond à merveille aux dispositions naturelles les plus

constamment affirmées chez l'enfant, et notamment à cet instinct du rangement et du classement, qui se manifeste chaque fois que le jeune sujet est aux prises avec une réalité multiple et disparate. C'est sa façon à lui d'adapter le monde aux données insubstituables du pouvoir d'appréhension qui est en lui. C'est en ce sens que la mathématique moderne sollicite puissamment les forces de croissance et d'épanouissement qui sont à l'œuvre partout où se développe le processus constitutif de la personne adulte. D'où cet entrain chez les élèves, cette joyeuse ardeur avec laquelle ils participent aux exercices; d'où encore cette assurance superbe que l'on voit en eux et qui est bien le signe de l'authenticité et de la qualité du savoir.
Ah ! comme on comprend la passion avec laquelle tant de maîtres ont voulu pousser loin leur «recyclage» dans la matière. De tous les efforts consacrés à la formation continue il n'en est pas de plus «rentables» assurément. Les intéressés le savent bien, eux qui n'accepteraient plus de revenir aux pratiques respectables mais étroites et désormais insipides du passé.

- **L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions**
  par Michel Desjardins, Jean-Claude Hetu. Les Presses de l'Université du Québec, 1974

Quand j'ai terminé la lecture de ce livre passionnant, je me suis demandé si les auteurs «faisaient de la mathématique moderne» ou non. J'ai hésité, j'ai penché pour la négative puis pour l'affirmative; j'ai hésité encore, puis brusquement j'ai trouvé ma réponse: peu importe après tout qu'il s'agisse de mathématique moderne ou pas (et d'ailleurs qu'est-ce qui entre exactement dans cette catégorie ?), c'est de la toute bonne recherche pédagogique ! Le chapitre des fractions est essentiel dans l'enseignement et tous ceux qui s'y sont frottés savent combien il est difficile, non seulement pour les élèves mais pour le maître aussi.
En suivant les auteurs, j'ai compris la raison de cette extrême difficulté ! La notion de fraction «constitue le point d'intersection de la réalité mathématique, psychologique et pédagogique qu'elle recouvre.» Le premier chapitre explique ces différentes réalités et donne toutes les références théoriques utiles.
Le deuxième chapitre analyse la fraction dans le contexte de l'enseignement traditionnel, sans oublier la façon de l'introduire en honneur dans la théorie des ensembles, à savoir la fraction caractérisée avant tout par la relation d'équivalence entre couples de nombres. Les auteurs relatent de nombreuses expériences faites en classe qui montrent que, malgré les apparences, les enfants de quatrième et de cinquième année n'ont pas vraiment assimilé la notion de fraction.
Les deux derniers chapitres rendent compte de la méthodologie (c'est un bien grand mot) que proposent les chercheurs de l'Université du Québec. En partie, elle a déjà été expérimentée (troisième chapitre) et en partie elle est proposée sous forme de «projections didactiques». Et bien sûr, ils continuent...
En bref, un livre qui ouvre des perspectives nouvelles. Pour ma part, je le verrais volontiers étudié et discuté par les candidats à l'enseignement primaire.

I.R.D.P. Catherine Rübner

- Bulletin d'information No 8 (juin 1976) de la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique; Commission pédagogique; Groupe mathématique:

  Forum I, mathématique

  Palais Wilson, 1211 Genève 14. Rapport sur le *Premier forum suisse pour l'enseignement mathématique* qui eut lieu en novembre 1975 au Gurten sur Berne. Le thème était: *Le rôle des fonctions à tous les niveaux de la scolarité obligatoire:*
  — Exercices et jeux préparatoires, par Werner Luedi.
  — La fonction linéaire dans les problèmes d'arithmétique, par Charles Burdet.
  — Fonctions et équations, par Georges Reusser.
  — Fonctions et géométrie, par André Calame.
  — Essais de synthèse, par Dominik Jost.

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311