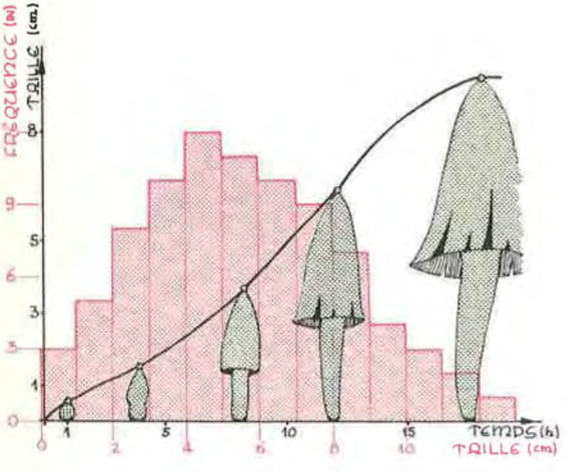
87



MATH ECOLE

MARS 1979
18e ANNEE

MATH ECOLE 87

18e ANNEE Paraît cinq fois par an MARS 1979

Editorial

Découverte de l'espace

L'expression «Découverte de l'espace» est apparue dans nos programmes romands vers 1970. Pourquoi n'en parlions-nous pas auparavant ? Est-ce parce que ce n'était pas la mode ? (Les mathématiques suivraient-elles aussi une mode ?). Est-ce que les enfants de 1960 n'an avaient pas besoin ? Est-ce parce que les enseignants et les responsables de l'école n'en avaient pas remarqué l'utilité ?
Peut-être tout cela à la fois. Mais ce qui aurait paru ridicule de pratiquer il y a 20 ans (des notions d'intérieur et d'extérieur, des déplacements dans des labyrinthes ou sur des quadrillages) apparaît nécessaire actuellement.
Auparavant, les enfants savaient beaucoup de choses sans les avoir apprises et il existe encore des endroits privilégiés où l'enfant acquiert naturellement la notion d'espace. Il m'a été permis d'assister, au cours du même mois, à l'activité de déplacement sur un quadrillage en première année primaire dans une classe de village et dans une classe de ville. Loin de moi l'idée de généraliser ! Mais les petits villageois étaient beaucoup plus à l'aise dans une telle activité que les petits citadins. Pour eux, les déplacements, les changements de direction, le codage même ne posaient aucun problème.
Une autre constatation me conforte dans cette idée de lieux privilégiés à l'enfant en ce qui concerne la notion d'espace. Dans ma ville, il y a deux catégories d'enfants:

— *ceux qui habitent le centre de la ville, enfants de commerçants, enfants dont les parents souvent travaillent tous les deux, enfants qui jouent sur les trottoirs, qui courent le long des canaux, qui doivent et peuvent faire des courses seuls, enfants qui naturellement prennent conscience de leur espace;*
— *et ceux des quartiers périphériques, des immeubles de douze étages entourés de places bien entretenues avec des jeux tout fabriqués, enfants qui se rendent au jardin public accompagnés de leur mère et qui jouent sous les yeux de celle-ci dans un espace limité et sécurisant, enfants qui viennent en ville sur le siège arrière de la voiture et qui ne voient que défiler le chemin parcouru.*

En classe, comment réagissent ces enfants en face des activités que leur propose «Découverte de l'espace» ?
Il faut reconnaître que les enfants du centre de la ville sont beaucoup plus à l'aise que les enfants des quartiers de grands immeubles. Pour eux, aucun problème dans les labyrinthes, aucune difficulté à découvrir le chemin le plus court, à le coder, et beaucoup d'imagination à trouver des solutions variées et imprévues. Les enfants des grands immeubles sont souvent désemparés en face des situations les plus simples; ils ne savent pas se situer, ils sont gauches lorsque des activités d'ordre spatial leur sont proposées.
Mes constatations ne se fondent que sur une population enfantine restreinte et dans un lieu déterminé. A vous, psychologues, pédagogues, chercheurs, de creuser le problème et de savoir si nos villes ou quartiers satellites et dortoirs ne provoquent pas une génération d'enfants qui pourraient être frustrés de concepts élémentaires puisque leur environnement n'est pas à leur mesure ?

Françoise Waridel

Autour d'un même problème
par René Dénervaud

Sous forme d'amusement, le problème NR-70, page 49 du manuel de sixième primaire a été présenté à près de quarante personnes de différentes classes d'âge et de différentes professions.
Il s'agissait de voir quelles étaient les méthodes de résolution adoptés, et les comparer avec les méthodes proposées actuellement à l'école.
Les exemples de résolution exposés ici n'épuisent pas la liste de toutes les possibilités, mais représentent les solutions reçues.

Problème: Un club de natation affiche les prix suivants:
carte de membre: 20 fr.;
entrée à la piscine: 1 fr. pour les membres.

Un autre club affiche les prix suivants:
entrée à la piscine: 2 fr.;
pas de carte de membre.

Jean désire aller nager, mais il ne sait pas ce qu'il doit choisir. Aide-le à se décider.

1. Résolution par tâtonnement

Cette méthode consiste à comparer les prix payés dans chacune des piscines pour un nombre arbitrairement choisi de baignades.

Exemple:

a) Jean va 10 fois à la piscine.
Dans la première, il devra payer 10 fr. pour les entrées et 20 fr. pour la carte de membre, soit au total 30 fr.
Dans la deuxième, il devra payer les entrées, soit un total de 20 fr.

b) Jean va 20 fois à la piscine.
Dans la première, il paiera un total de 40 fr.
Dans la deuxième, il paiera un total de 40 fr.

c) Jean va 30 fois à la piscine.
Dans la première, il paiera un total de 50 fr.
Dans la deuxième, il paiera un total de 60 fr.

d) Conclusion:
Si Jean pense aller moins de 20 fois à la piscine, il aura intérêt à choisir la deuxième possibilité.
S'il pense y aller exactement 20 fois, le choix de l'une ou l'autre solution ne présente pas d'avantages.
S'il pense y aller plus de 20 fois, ce sera plus avantageux pour lui de prendre la carte de membre.

2. Résolution par l'algèbre

On se demande pour quel nombre x de fois il est indifférent de choisir l'une ou l'autre piscine, car le prix sera le même.

Pour x fois dans la première piscine, il paie (en fr.): $(x \cdot 1) + 20$

alors que dans la deuxième, il paie (en fr.): $x \cdot 2$

On a donc à résoudre l'équation: $x + 20 = 2 \cdot x$; d'où $x = 20$.

On a donc la conclusion déjà obtenue sous 1.d.).

3. Résolution arithmétique

Par baignade, Jean paie 1 fr. de moins dans la première que dans la deuxième piscine.
Pour amortir la carte de membre, il devra donc aller 20 fois dans la première piscine; s'il y va moins de 20 fois, il est perdant, alors que s'il y va plus de 20 fois, il est gagnant.

4. Tableau des correspondances

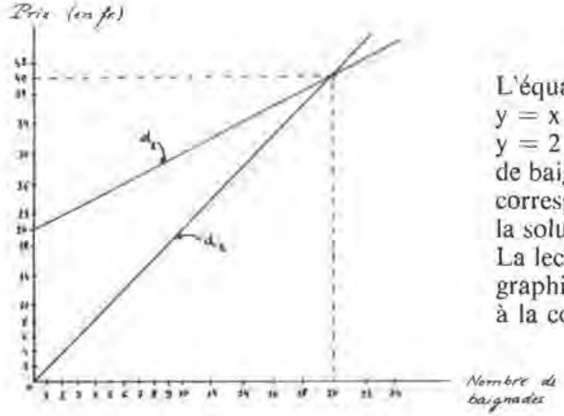
Cette manière de faire — prévue dans le programme — est à rapprocher de la résolution par tâtonnement. Elle en diffère par une présentation permettant d'analyser la situation d'un seul coup d'œil.

Nombre de baignades	1	5	10	15	19	20	21	25
Prix dans première piscine (en fr.)	21	25	30	35	39	40	41	45
prix dans deuxième piscine (en fr.)	2	10	20	30	38	40	42	50

La conclusion est celle de 1.d).

5. Représentation graphique

Cette manière de faire — également prévue dans le programme — est à rapprocher de la résolution par l'algèbre. En effet, on représente graphiquement deux droites, d_1 et d_2, l'équation de chacune d'elle correspondant au prix à payer en fonction du nombre de bains.



L'équation de d_1 n'est autre que $y = x + 20$ et celle de d_2 $y = 2 \cdot x$, x représentant le nombre de baignades et y le prix total correspondant. On retrouve ainsi la solution algébrique.
La lecture de cette représentation graphique nous amène à nouveau à la conclusion 1.d).

Ce problème a soulevé quelques remarques qu'il vaut la peine de signaler.

Tout d'abord, le critère qui déterminera le choix final n'est pas mentionné. Pour toutes les solutions, on s'est basé sur l'aspect financier.

D'autre part, l'énoncé peut laisser croire que l'on a deux établissements différents, auquel cas le réalisme du problème est mis en cause: il faudrait peut-être tenir compte d'éventuels trajets dans le calcul des prix ! On pourrait éviter cette imprécision en signalant, par exemple, qu'il s'agit de la même piscine.

Je signalerai encore qu'une classe de sixième primaire s'est récemment penchée sur ce problème. La résolution par tableau de correspondance n'a pratiquement pas posé de problèmes, alors que seule la moitié de la classe a résolu de manière totalement correcte à l'aide de la représentation graphique. Les difficultés rencontrées étaient essentiellement de deux types:

— graduation correcte des axes;
— représentation de la droite d_1 (affine, non linéaire).

Pour terminer, je relèverai la surprise d'une personne qui, apprenant qu'il s'agissait d'un problème de la nouvelle méthodologie, s'est exclamée: «Mais je ne vois pas ce qu'il y a de moderne là-dedans !». Il est évident que les situations de la vie courante n'évoluent que peu et que l'on ne peut qu'être heureux que toutes les personnes qui ont accepté de se pencher sur cet exercice soient parvenues à la même conclusion.

Procédures d'évaluation – stratégies de recherche !

par Michel Dokic et Jacqueline Lurin

Dans le cadre de l'évaluation de la méthodologie romande, niveau 3P, les tests que de nombreux enseignants ont accepté de faire passer à leurs élèves sont actuellement soumis à l'analyse. L'IRDP publiera d'ici la fin de l'année une synthèse sur l'ensemble des travaux; mais il est apparu intéressant de vous offrir un premier aperçu caractéristique des démarches réalisées par les enfants.

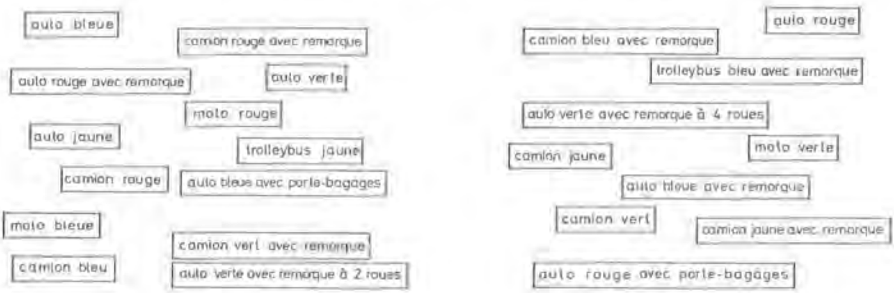
Deux domaines sont présentés ici: l'activité de classement dans une situation ouverte et la construction d'un arbre de classement à partir de cette même situation.

Première partie de l'exercice

Lors de la passation, l'enseignant présente à l'enfant toute une série de véhicules (cf. ci-dessous) et lui donne les consignes suivantes:

«Ecoute bien: on a noté sur cette feuille tous les véhicules qui ont passé sur un pont, de midi à midi et quart.

Nous allons maintenant jouer au jeu des questions. Je vais penser à un de ces véhicules, tu essayeras de trouver celui auquel je pense. Pour cela, tu vas poser toutes les questions que tu veux, je ne réponds que par oui ou par non. Il faut essayer de trouver en posant le moins de questions possibles.»



L'intérêt d'un tel test présenté aux enfants de manière individuelle réside dans l'observation qu'effectue le maître en notant toutes les réactions de l'élève confronté à une tâche mathématique précise.

Il est évident que la découverte du véhicule par l'enfant est directement dépendante de sa capacité à décrypter les critères caractéristiques des véhicules et de la mémorisation des informations qui lui donneront accès au bon choix.

● **véhicule à trouver**: auto rouge (sans remorque)

Certains enfants se centrent immédiatement sur la couleur, puis sur le type de véhicule pour finir sur les accessoires.

— *Est-ce jaune ?*	*non*	— *Est-ce une auto ?*	*oui*
— *Est-ce bleu ?*	*non*	— *Avec un porte-bagage ?*	*non*
— *Est-ce rouge ?*	*oui*	— *Alors c'est l'auto rouge.*	*oui*
— *Est-ce un camion ?*	*non*		

● **véhicule à trouver:** auto rouge (sans remorque)

On a tort parfois de s'imaginer que l'enfant se fixe à un vocabulaire strict et appris dans le cadre des exercices proposés par la méthodologie. Il n'est pour s'en convaincre qu'à relire ensemble:

— *Est-ce une moto ?*	*non*	— *Est-elle bleue ?*	*non*
— *Est-ce un trolleybus ?*	*non*	— *A-t-elle la couleur de l'herbe ?*	*non*
— *Est-ce une auto ?*	*oui*	— *A-t-elle la couleur du sang ?*	*oui*
— *A-t-elle un porte-bagage ?*	*non*	— *C'est l'auto rouge.*	*oui*
— *A-t-elle une remorque ?*	*non*		
— *A-t-elle la couleur du soleil ?*	*non*		

● **véhicule à trouver:** auto bleue avec remorque

Il arrive bien souvent qu'au lieu de suivre la même piste jusqu'à la découverte du critère significatif qui les intéressent, les enfants passent d'un critère à l'autre, donnant l'impression qu'ils se perdent en n'allant pas au bout de leur raisonnement. En fait, beaucoup gardent en mémoire les réponses reçues et parviennent à trouver le nom du véhicule choisi.

— *Est-ce un trolley ?*	*non*	— *C'est sûrement une auto car il n'y a pas de moto avec remorque.*	
— *Est-ce vert ?*	*non*	— *Est-ce une auto bleue ?*	*non*
— *Y a-t-il une remorque ?*	*oui*	— *C'est une auto bleue avec remorque.*	*oui*
— *Est-ce un camion ?*	*non*		
— *Est-ce rouge ?*	*non*		
— *Est-ce jaune ?*	*non*		

● **véhicule à trouver:** auto rouge (sans remorque)

— *Est-ce un trolley ?*	*non*	— *Oui, pour connaître la couleur de l'auto.*	
— *Est-ce une auto ?*	*oui*	— *Avec un porte-bagage ?*	*non*
— *Verte ?*	*non*	— *Avec une remorque ?*	*non*
— *Bleue ?*	*non*	— *Alors c'est une auto rouge.*	*oui*
— *Jaune ?*	*non*		
— *Rouge ?*	*oui*		
— *Es-tu obligé de poser cette dernière question ?*			

● **véhicule à trouver:** camion rouge (sans remorque)

Certaines démarches notées par les maîtres ne manquent pas de susciter la surprise par la fantaisie et l'imagination que développent les enfants pour justifier une réponse exacte ou fausse. Il y a des logiques difficiles à cerner et à expliciter, mais c'est là tout un travail de recherche qu'il sera passionnant de mener à terme.

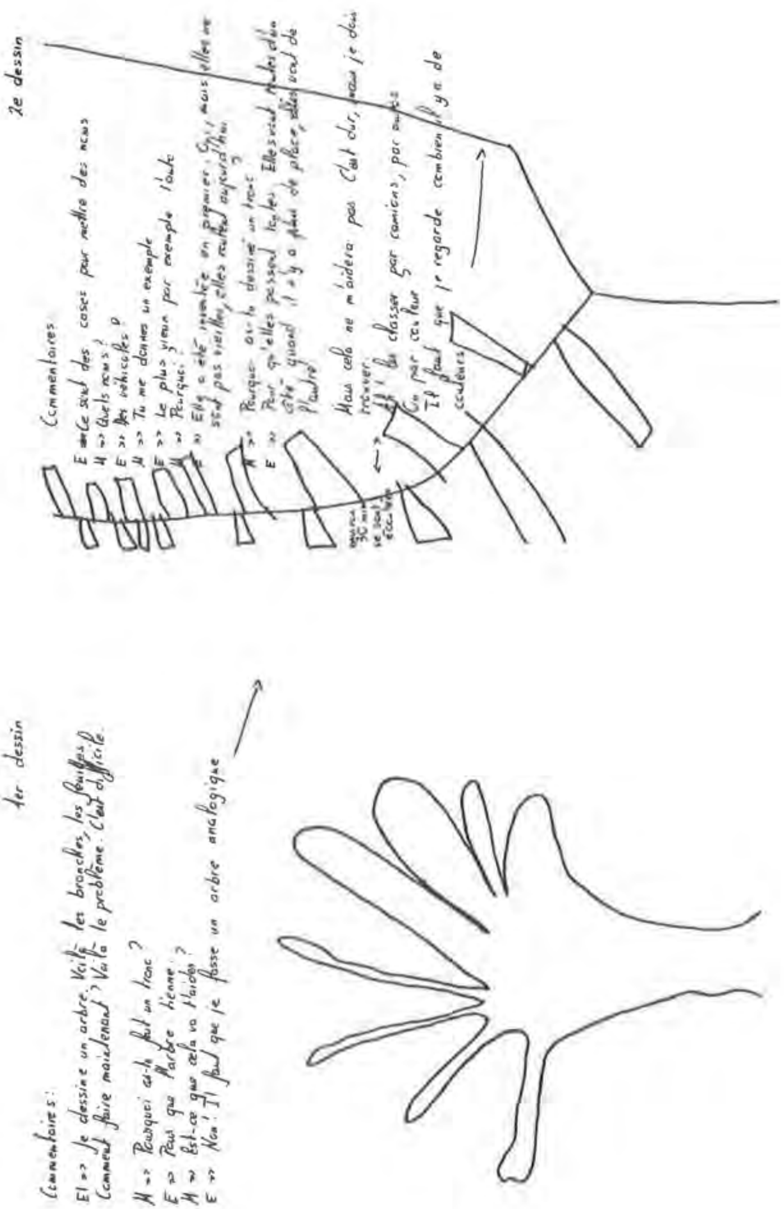
— *Il est grand ?*	*oui*	— *Il a 2 roues ?*	*non*
— *Il a une remorque ?*	*non*	— *Pas de roues ?*	*non*
— Il a 4 roues ?	non	— *3 roues ?*	*non*
— *C'est un camion vert ?*	*non*	— *C'est un camion rouge.*	*oui*
— *C'est une moto bleue ?*	*non*	— *Comment as-tu fait ?*	
— *C'est un trolleybus ?*	*non*	— *J'ai trouvé à cause du nombre de roues !*	
— *C'est une auto ?*	*non*		

Dernière partie de l'exercice

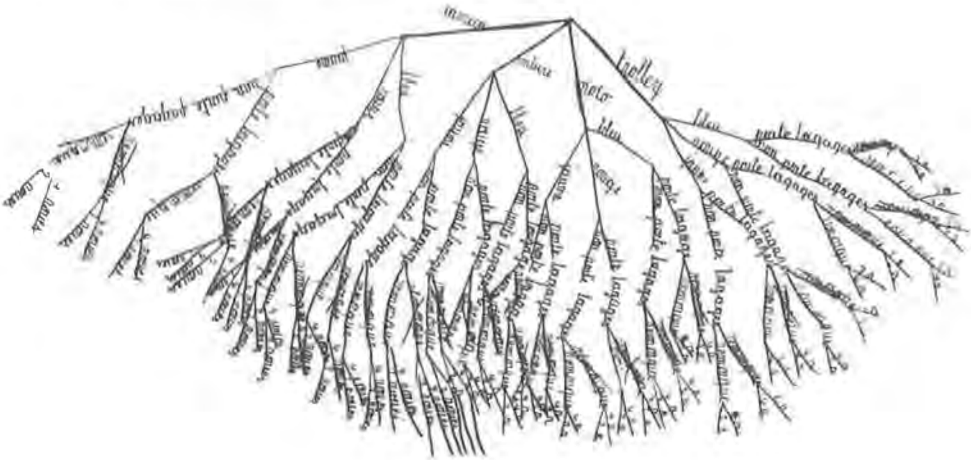
Après avoir proposé à l'enfant de dessiner un schéma qui l'aiderait à voir dans quel ordre et comment il faut poser les questions pour trouver rapidement et à coup sûr la réponse exacte, l'enseignant lui demande:

«On va essayer de dessiner un diagramme en arbre qui pourrait t'aider à poser les bonnes questions.» »

Voici deux «arbres» dessinés par le même enfant, en réponse à la consigne donnée par la maîtresse qui a relevé fidèlement les interrogations de cet élève.



Les enfants sont patients et persistants dans leur tâche. Il s'en est trouvé pour dessiner des arbres «tentaculaires» qui rendent difficile une analyse féconde. L'arbre reproduit ci-après, témoigne de l'acharnement de certains enfants à aller au bout d'un travail.



En guise de conclusion

La lecture d'une même consigne par les enfants suscite des réactions différentes dans l'accomplissement d'une tâche. Cela tient, semble-t-il autant à *l'interprétation du message* sur le plan linguistique, qu'à *la capacité d'utilisation* des «outils mathématiques» appris en classe. Il serait intéressant de dégager les facteurs de compréhension d'un problème et les facteurs d'utilisation d'un bagage mathématique lors de la résolution du même problème.
On peut se demander si ces situations, dites ouvertes, ne devraient pas offrir l'occasion de mettre en lumière les diverses procédures auxquelles les enfants font appel pour trouver les réponses attendues, tout en restant conscient des difficultés engendrées par une analyse médiatisée en particulier au moment de l'interprétation d'un vécu après-coup.

La polyominologie

par Nadia Guillet et Gérard Charrière
(photos prises dans la classe de Jean-Paul Forestier par Henri Schaerer)

Dans le cadre du IVe forum suisse sur l'enseignement de la mathématique (Crans, nov. 1978) sur le thème «La géométrie à tous les degrés de la scolarité obligatoire», un groupe de travail s'est penché sur les possibilités d'exploitation de la polyominologie à l'école obligatoire. Ce groupe, animé par Nadia Guillet et Gérard Charrière, était composé de Mesdames Chantal Fumeaux, Suzanne Jacquier, Hanni Tremp et de Messieurs Edmond Basset, Mario Ferrario et Yvan Michlig.
L'article qui suit comporte deux parties: la polyominologie est définie dans la première, un choix d'exploitations possibles en classe est présenté dans la seconde.

Première partie

Un peu d'histoire

Un puzzle, relativement ancien, utilisait douze pièces différentes formées, chacune, de cinq carrés.
En 1953, un étudiant en mathématiques à l'Université de Harvard, Solomon W. Golomb, présente une conférence au «Mathématical Club» de son université. Son exposé traite des juxtapositions rectangulaires des douze pièces du puzzle et du nombre de solutions réalisables.
A cette occasion, considérant que ces pièces sont faites de cinq carrés adjacents de la même façon qu'un domino est fait de deux carrés, il les dénomme «pentominos».
Cette conférence rencontre un très vif succès. Elle est suivie d'autres exposés et de nombreux articles, et conduit, en 1965, à la publication par S. W. Golomb, devenu professeur à l'Université de Los Angeles, d'un livre intitulé «Polyominoes» (Charles Scribner's Sons, New York).
Entre temps la polyominologie a traversé l'Atlantique !
En effet, lors d'un séjour en Californie, un jeune physicien suisse, Philippe Rosselet, a l'occasion d'assister à une conférence donnée par Golomb luimême. Enthousiasmé par cette nouvelle science, il y consacre une grande partie de ses loisirs et, en juin 1962, on peut lire le communiqué suivant dans un quotidien lausannois:

«La polyominologie est l'étude des polyominos, c'est-à-dire des figures formées de carrés. C'est une branche de la géométrie combinatoire qui fait l'objet d'études approfondies dans les revues spécialisées; c'est aussi et surtout un divertissement mathématique à la portée de chacun. Et ce sera le sujet traité par M. P. Rosselet, en séance publique et gratuite de la Société vaudoise des sciences naturelles du mardi 15 juin, à 20 h. 30, à la salle Tissot, Palais de Rumine. Projections.»

Les polyominos

Un polyomino est une figure géométrique plane faite d'un certain nombre de carrés adjacents.
Par définition, un seul carré constitue un *monomino*, deux carrés constituent un *domino*, trois carrés un *tromino*, quatre un *tétromino*, cinq un *pentomino*, etc. En généralisant, nous dirons que n carrés constituent un *n-omino* ou *polyomino d'ordre n.*
La *polyominologie* est l'étude des polyominos et de leurs propriétés. Elle pose un nombre considérable de problèmes, de difficultés variables, et dont certains n'ont jamais encore été résolus.
Par exemple, la première question qu'il est tout naturel de se poser est la suivante:

— combien y a-t-il de polyominos d'un ordre donné ?

La réponse est surprenante:

— nous ne connaissons pas le nombre de polyominos d'ordre n pour des valeurs de n supérieures à 18.

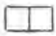
Nous avons ici un problème exemplaire. Il est en effet simple dans son énoncé — tout le monde peut le comprendre ! — et, malgré cela, non encore résolu.
La table ci-dessous contient toutes les valeurs du nombre P(n) de polyominos d'ordre n connues actuellement.

n	P(n)	appellation contrôlée
1	1	monomino
2	1	domino
3	2	trominos
4	5	tétrominos
5	12	pentominos
6	35	hexominos
7	108	heptominos
8	369	octominos
9	1 285	énéominos
10	4 655	décominos
11	17 073	hendécominos
12	63 600	dodécominos
13	238 591	
14	901 971	
15	3 427 885	
16	13 079 255	
17	50 107 911	
18	192 622 052	

A partir des polyominos d'ordre 9, toutes les valeurs ont été déterminées à l'aide de calculatrices électroniques.

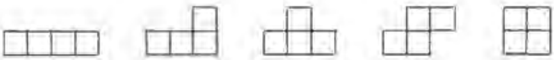
Nous allons nous intéresser aux polyominos constitués de peu de carrés car ils définissent un domaine d'investigation suffisamment vaste (voir plus loin, 2e partie). Nous considérerons comme différents, deux polyominos non superposables après rotation ou retournement.
Il est évident qu'il existe un seul monomino et un seul domino.


monomino


domino

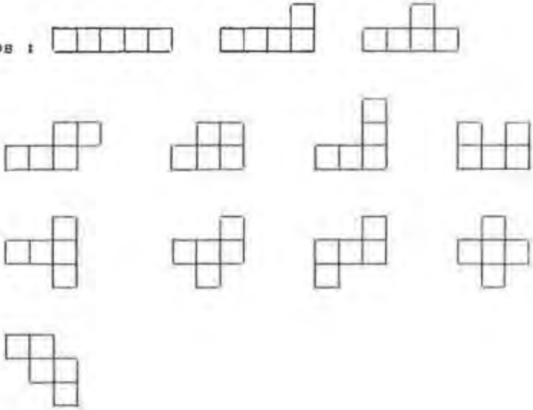
Il est facile de construire les trominos, qui sont au nombre de deux, et les tétrominos qui apparaissent sous cinq formes différentes.

trominos : 

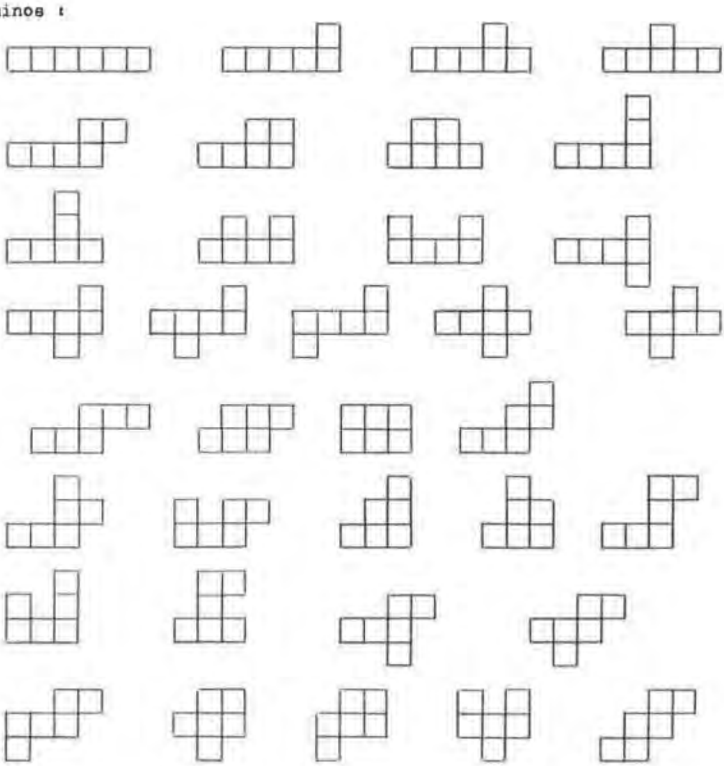
tétrominos : 

Les douze pentominos et les trente-cinq hexominos sont un peu plus difficiles à trouver.

pentominos :



Hexominos :



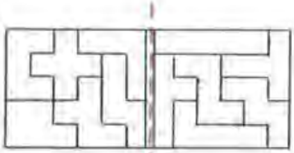
Rectangles et autres formes

Les 5 tétrominos, les 12 pentominos et les 35 hexominos représentent respectivement des aires de 20, 60 et 210 unités.
Il est intéressant de se demander quels sont les rectangles qu'il est possible de recouvrir en utilisant tous les polyominos d'un ordre donné (4, 5 ou 6).
Dans le cas des tétrominos et des hexominos, il est assez facile de montrer qu'un tel problème n'a pas de solution (voir plus loin).
En revanche, il existe de très nombreuses solutions pour les pentominos. Le tableau ci-dessous indique les nombres de solutions différentes et les figures suivantes en illustrent quelques-unes.

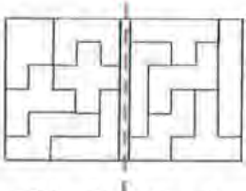
	Dimensions des rectangles	Nombre de solutions
Tétrominos (5)	1×20 2×10 4×5	0
Pentominos (12)	1×60 2×30 3×20 4×15 5×12 6×10	0 0 2 368 1110 2339
Hexominos (35)	1×210 2×105 3×70 5×42 6×35 7×30 10×21 14×15	0

Rectangle 3×20:
La seconde solution est obtenue en faisant subir un demi-tour à la partie colorée.

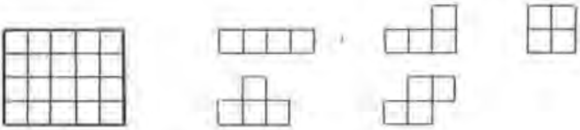
Rectangle 5 × 12:
sept autres solutions
sont obtenues en changeant
les positions relatives
des deux rectangles
5 ×6.



Rectangle 6 × 10:
obtenu à l'aide des deux
rectangles 5 × 6 précédents;
sept autres solutions sont
immédiates.



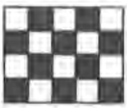
Comment démontrer, par exemple, qu'il n'est pas possible de recouvrir un rectangle de dimensions 4 × 5 à l'aide des cinq tétrominos ?



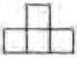
Il est facile de placer quatre de ces pièces. Par exemple:

Malheureusement la surface non recouverte (colorée) n'a pas la forme de la pièce restante. Tous les essais conduisent à la même observation. Cette impossibilité expérimentale peut être «démontrée» de la façon suivante:

— colorions le rectangle en noir et blanc à la manière d'un damier.



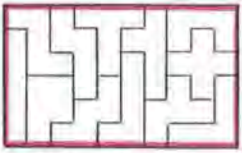
Nous obtenons 10 cases noires et 10 cases blanches. Lorsqu'elles sont placées — n'importe où — sur le rectangle, les quatre pièces suivantes recouvrent, chacune, 2 cases noires et 2 cases blanches:

Ce n'est pas le cas de la cinquième: 
qui recouvre soit 3 cases noires et 1 case blanche, soit 1 case noire et 3 cases blanches. D'où l'impossibilité présumée...

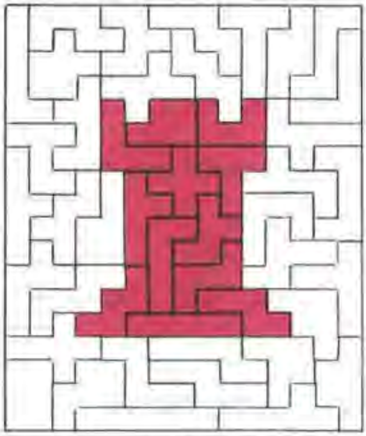
Après avoir découpé dans du carton les pentominos et les hexominos, le lecteur intéressé pourra tenter de résoudre, entre autres, les problèmes suivants:

a) Recouvrir un rectangle 6×10 avec les 12 pentominos de telle façon que chacun d'eux touche le bord.
b) Recouvrir un rectangle 15×18 avec les 12 pentominos et les 35 hexominos.
c) Choisir un hexomino; le reproduire en deux exemplaires plus grands: le premier avec neuf autres hexominos, à l'échelle 3 : 1, et le second avec les vingt-cinq hexominos restants, à l'échelle 5 : 1.

Les trois figures suivantes donnent des exemples de solutions.

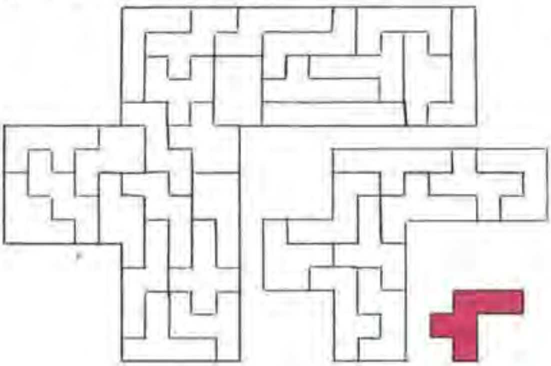


Les 12 pentominos touchent le bord



Rectangle 15 x 18 : les 12 pentominos et les 35 hexominos

Les 35 hexominos forment trois exemplaires de l'un d'entre eux (échelle 1:1, 3:1, et 5:1)

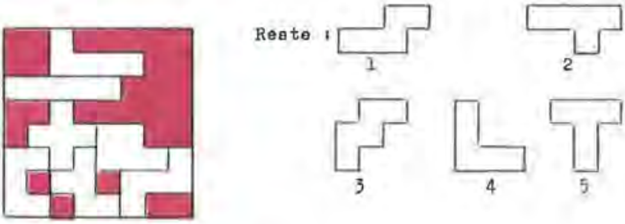


Un jeu !

Deux ou plusieurs joueurs peuvent participer au jeu passionnant suivant:

— chaque joueur, à son tour, choisit un des douze pentominos et le place sur un carré quadrillé de dimensions 8×8, en respectant le quadrillage (cette dernière condition peut éventuellement être supprimée). A perdu celui qui ne peut plus jouer.

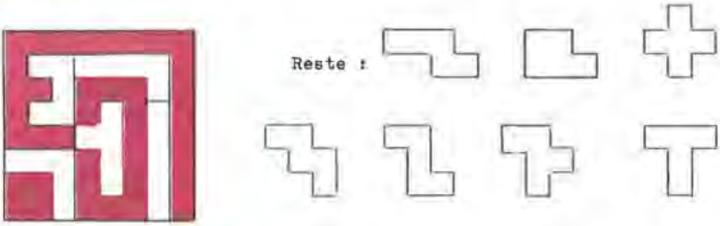
Illustrons une partie jouée par deux joueurs.



Le second joueur doit choisir une des pièces restantes et la placer sur le quadrillage. Il est facile de voir qu'en disposant judicieusement la pièce numéro 3, il gagne.
Ce jeu suggère le problème suivant que nous pourrions intituler «l'art de perdre de la place»:

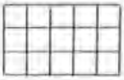
— quel est le nombre minimum de pentominos que l'on puisse placer sur une surface donnée de telle sorte qu'il soit impossible d'y ajouter l'un quelconque des pentominos restants ?

Dans le cas d'un carré 8×8 la réponse est «cinq» et il paraît difficile de faire mieux.

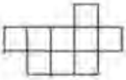


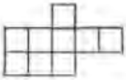
Dans le même ordre d'idées, un autre problème se pose: quel est l'ordre du plus petit polyomino pouvant contenir chacun des douze pentominos ?

Nous connaissons suffisamment bien ces derniers pour réaliser qu'un rectangle de dimensions 5 × 3 (polyomino d'ordre 15), s'il satisfait partiellement à la question posée, ne représente pas pour autant, la meilleure solution.



Il est certainement possible de faire mieux. Après quelques tâtonnements, nous arrivons aux solutions suivantes qui sont, toutes deux, des polyominos d'ordre 9.



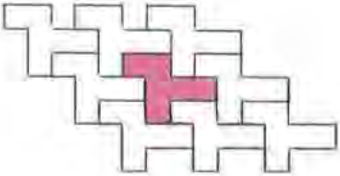


Un raisonnement par l'absurde très simple nous confirme qu'il est impossible de trouver un polyomino d'ordre 8.
Remarquons qu'une question plus difficile se pose: la plus petite surface pouvant contenir chacun des polyominos d'un ordre donné est-elle toujours, elle-même, un polyomino ?
La réponse semble être négative, mais elle demande une démonstration qui n'a pas encore été trouvée.

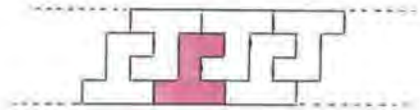
Pavages

Il est intéressant de considérer les propriétés individuelles de pavage des polyominos. Certains polyominos permettent de paver le plan infini; d'autres permettent de recouvrir une bande droite infinie; d'autres encore une bande infinie coudée à angle droit. Plus rares sont ceux qui permettent de recouvrir un rectangle ou un modèle agrandi d'eux-mêmes.
Des exemples sont donnés dans les figures suivantes.

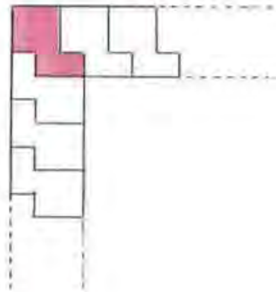
Plan :



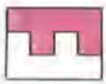
Bande droite infinie :



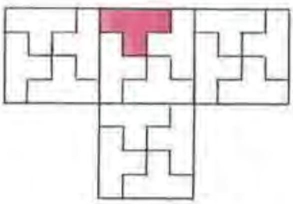
Bande coudée infinie :



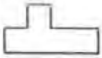
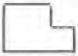
Rectangle :



Modèle agrandi :

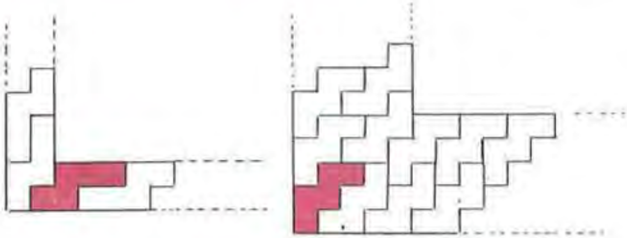


Si l'on ne considère que les pentominos, leurs propriétés peuvent être résumées dans le tableau ci-après et illustrées par les figures qui suivent.

	Rectangle	Modèle agrandi	Bande coudée infinie	Bande droite infinie	Plan
	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●
			●	●	●
			●	●	●
				●	●
				●	●
					●
					●
					●
					●

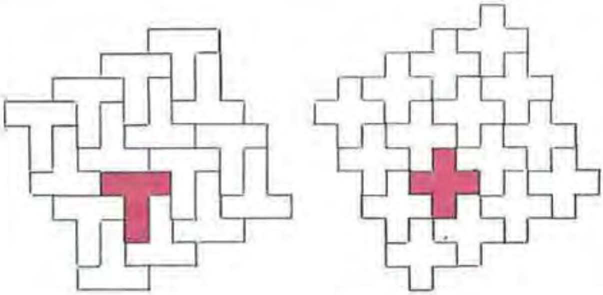
Rectangle :

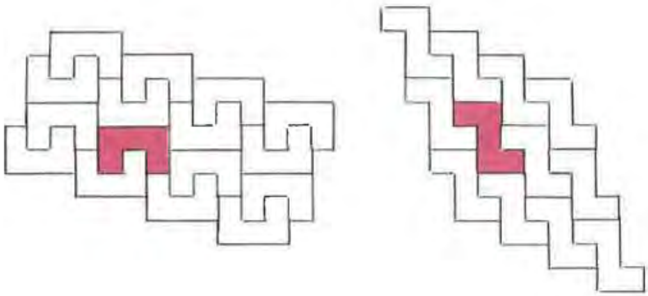
Bande coudée
infinie :



Bande droite
infinie :

Plan :





Solomon Golomb, le premier, a montré que si un polyomino d'ordre quelconque permet de recouvrir un rectangle, il est possible alors de recouvrir un modèle agrandi de ce polyomino.
En effet, supposons que le polyomino considéré (d'ordre n) recouvre un rectangle de dimension a × b. Ce rectangle peut être utilisé pour paver un carré de dimensions ab × ab; en utilisant n carrés ainsi formés, on peut naturellement reconstituer un modèle agrandi de ce polyomino.
D'autre part, il est très facile de montrer que tous les polyominos qui peuvent recouvrir soit un rectangle, soit un modèle agrandi, soit une bande infinie, coudée ou droite, permettent de recouvrir le plan entier.
Une démonstration, plus délicate, prouve que tout polyomino qui permet de paver une bande coudée infinie permet également de recouvrir une bande droite infinie.

Deuxième partie

Un enseignant: — Vous voulez introduire la polyominologie dans les classes ? Aussi intéressant cela soit-il, ne trouvez-vous pas que le programme de mathémathique est suffisamment copieux sans cela ?

Réponse: — Il n'est pas question d'étudier la polyominologie en tant que telle, et surtout pas de charger le programme. Il s'agit plutôt de présenter, aux enseignants qui le souhaitent, une mine de situations permettant de remplir, de manière intéressante, une partie du programme de géométrie et découverte de l'espace. La méthodologie romande fournit bon nombre de suggestions, mais il est souhaitable que, les ayant exploitées pendant un certain temps, l'enseignant désire renouveler ses thèmes, points de départ et situations dans le domaine en question. Ce n'est donc pas «en plus», mais «à la place de» qu'il convient d'aborder ces activités de polyominologie.

Voyons cela de plus près !

Recherche des polyominos

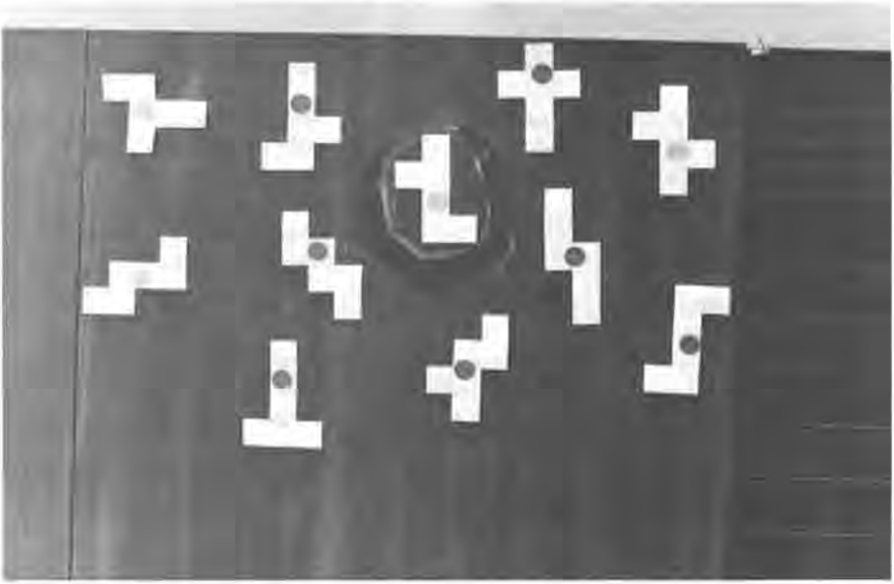
La recherche et la construction des divers polyominos permet:

— *de trouver et d'appliquer des stratégies de travail* (comment ne pas oublier de pièces, ne pas en répéter; comment passer des polyominos d'un certain ordre, les pentominos, par exemple, aux polyominos d'ordre directement supérieur, les hexominos);

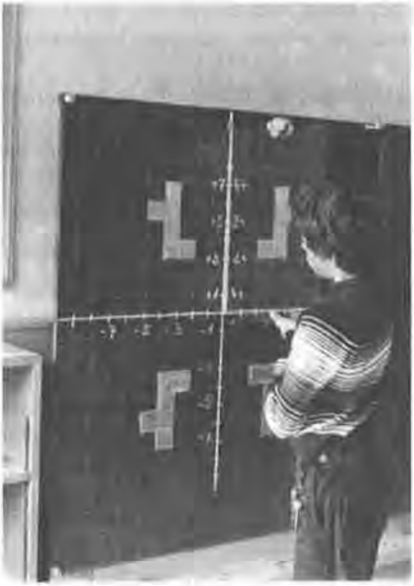
— *d'effectuer des classements* (ensemble des pentominos qui ont une bande de 4 carrés; qui ont une bande de 3 carrés au moins; qui sont le développement d'un cube sans couvercle; etc.);
— *de coder* (comment transmettre par téléphone, la forme d'un hexomino choisi, la disposition des 12 pentominos formant un rectangle de 6 sur 10, etc.);

Les possibilités d'aborder des notions précises du programme (4e, 5e et 6e primaire) son nombreuses:

— *Mesure d'aire et de périmètre* (observation du périmètre des pentominos, observation de polyominos carrés ou rectangulaires ayant même périmètre, etc.);
— *Construction de solides* (mise en évidence des hexominos qui sont des développements du cube; construction de ces développements à l'aide des instruments de géométrie: notion de parallèles et de perpendiculaires; pose des onglets; construction de dés à jouer, etc.);



— *Rotations et symétries* de polyominos *autour d'un axe ou d'un point intérieurs à la figure* (dans un ensemble d'hexominos placés dans diverses positions, repérer ceux qui sont identiques);
— *Rotations et symétries* de polyominos *autour d'un axe ou d'un point extérieurs à la figure* (observer et dessiner l'image d'un hexomino vu dans un miroir pour différentes positions de ce dernier);



— *Codage dans le plan*, utilisation d'un *système de coordonnées* et introduction des *nombres négatifs;*

— *Mesure de volume* (utilisation des cubes construits pour mesurer des pupitres, des armoires, un coffre de voiture, la classe, etc.; concrétisation de la notion de puissance trois; etc.).

Voilà pour les notions !

Ajoutons que, s'ils sont actifs, c'est-à-dire s'ils se posent des questions, découpent, assemblent, construisent, expliquent, démontrent, vérifient, etc., les enfants structurent solidement ce qu'ils apprennent ainsi et... avec quel plaisir !
C'est dans cette optique que sont proposées les situations qui suivent. Chercher en jouant et trouver des démonstrations de type géométrique, voilà, entre autre, ce que peut nous offrir la polyominologie !

DOMINOS

A. Matériel: quadrillage de 8×8 ($8 \times 8 = 64$)
32 dominos de 1×2 ($32 \times 2 = 64$)

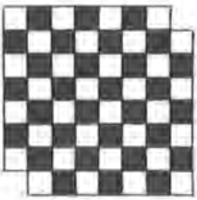
Question: En faisant coïncider très exactement les dominos sur les carrés, peut-on placer les 32 dominos sur le quadrillage de 8×8 ?

Réponse: Cela paraît évident et la démonstration est facile !

Question: Est-ce toujours aussi évident et facile si on enlève 2 coins opposés du quadrillage ?
On obtient un quadrillage de 62 carrés ($8 \times 8 = 64$; $64 - 2 = 62$); 31 dominos devraient donc convenir ($31 \times 2 = 62$).

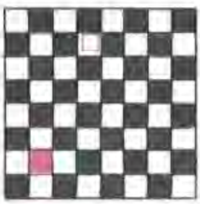
Essayez... et si vous ne trouvez pas de solution, la démonstration suivante vous convaincra, qu'en effet, il n'y en a pas !

Démonstration:

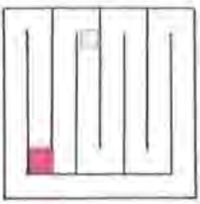


1. Colorier le quadrillage comme un damier:
   On obtient 32 carrés d'une couleur et 30 carrés de l'autre (dans un damier, les carrés des angles opposés sont de même couleur).
2. Un domino placé n'importe où et coïncidant avec le quadrillage recouvre une case de chaque couleur.
3. Conclusion: le dernier domino ne peut pas recouvrir les deux cases restantes qui sont *de même couleur !*
   La conclusion est généralisable au cas de deux cases de même couleur enlevées n'importe où dans le damier.

Question: Et que se passe-t-il si l'on retire n'importe où deux cases *de couleur différentes ?* Exemple:



L'intuition vous dit qu'il doit être possible de recouvrir ce damier troué à l'aide de 31 dominos et, en essayant, vous trouvez rapidement une façon de le faire.
Mais on peut donner la démonstration «topologique» suivante:



1. Former un labyrinthe:
   Le damier est ainsi transformé en un long couloir où se succèdent des cases noires et des cases blanches en nombre égal. Sans trou, il peut être recouvert.
2. Les deux trous de couleur différente créent deux portions de couloir comportant chacune des cases alternées en nombre égal.

B. Matériel: rectangles quadrillés et orientés de $2 \times n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots 8$)
8 dominos.

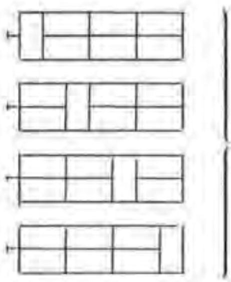
Question: De combien de façons différentes peut-on recouvrir un rectangle orienté de $2 \times n$ avec n dominos ?

Une recherche systématique en manipulant et en dessinant chaque configuration trouvée nous permet d'établir le tableau suivant:

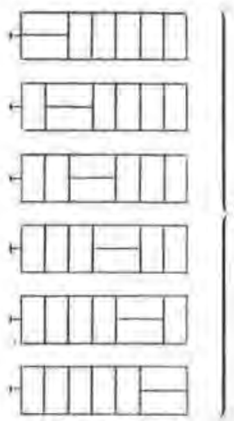
Dimensions de la boîte	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7
Nombre de possibilités	1	2	3	5	8	13	?

L'observation de la suite des six premiers nombres nous suggère 21 comme septième nombre.
A quoi la recherche systématique (et pas trop fastidieuse encore !) nous conduit-elle ?

a) 1 domino debout et 6 dominos couchés;
b) 5 dominos debout et 2 dominos couchés.

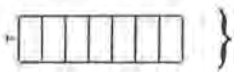


4



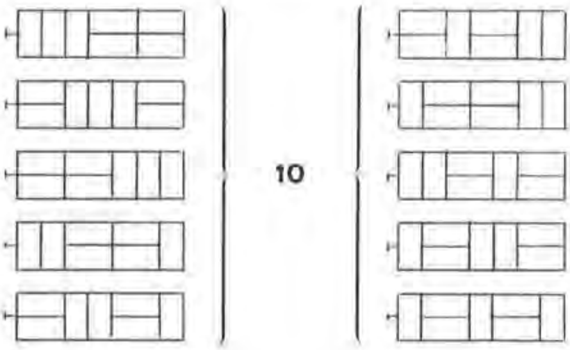
6

c) 7 dominos debout;



1

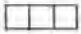
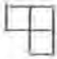
d) 3 dominos debout et 4 dominos couchés:



on obtient bien 21 possibilités.

Par conséquent, si la loi est généralisable, les trois nombres suivants seraient: 34, 55, 89.
S'il est difficile de demander aux élèves une démonstration de la généralité de la loi, on peut se contenter de leur signaler qu'elle est correcte et tenter de s'en convaincre soi-même (suite de Fibonacci) ! On peut en profiter pour faire un peu de calcul mental !

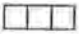
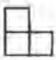
TROMINOS

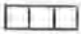
Matériel: quadrillage de 8×8
21 exemplaires de chaque tromino:  

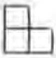
Question: Peut-on recouvrir un quadrillage de 8×8 avec des trominos ?

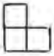
Réponse: Non, 64 n'est pas un multiple de 3 !

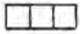
Question: Et avec l'aide d'un monomino ?

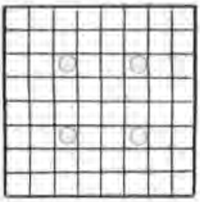
Il faut envisager 3 cas: 1. avec  et 

2. avec 

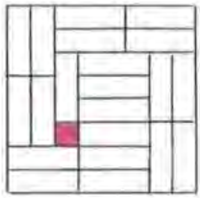
3. avec 

1. avec   : la recherche, longue et fastidieuse exige de préciser et de varier le nombre de pièces de chaque sorte.

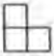
2. avec  : il est relativement aisé de trouver une solution par tâtonnement. Mais les possibilités ne sont pas nombreuses (et la démonstration délicate !). Les voici:

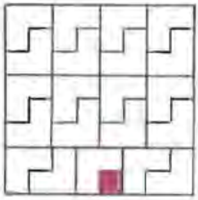


Il s'agit de placer le monomino dans l'une des 4 cases entourées !



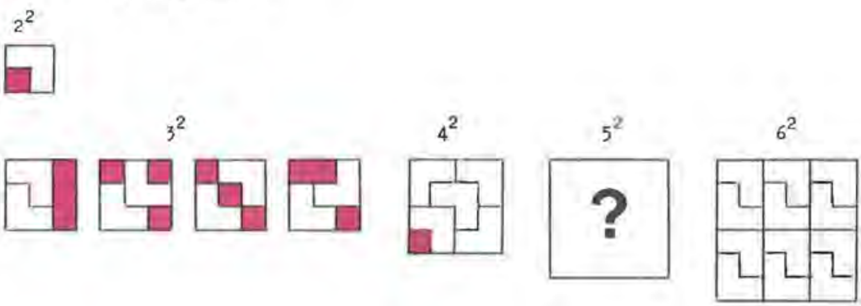
Un exemple possible.

3. avec  :
Les solutions sont aisées à trouver. En voici une:



l'intérêt peut se porter ailleurs.
— Que se passe-t-il si l'on fait varier la grandeur du quadrillage ?

Examinons quelques cas:



On peut commencer à établir un tableau et effectuer quelques généralisations:

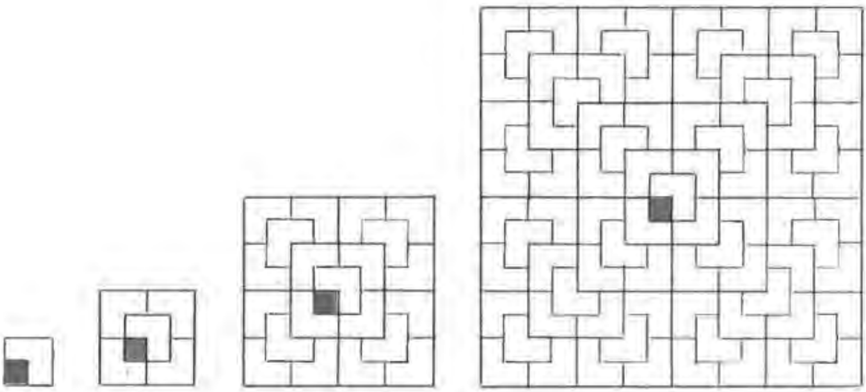
Dimensions du carré	Nombre de trominos	Nombre de monominos
1^2	0	1
2^2	1	1
3^2	2	3
4^2	5	1
5^2	?	?
6^2	12	0
7^2	?	?
8^2	21	1

— les carrés dont le côté est un multiple de six peuvent être recouverts avec des trominos uniquement: 6^2 — 12^2 — 18^2 etc.

— les carrés dont le côté est une puissance de deux nécessitent l'aide d'un monomino: 2^2 — 4^2 — 8^2 — 16^2.

Pour chacune de ces deux remarques, la démonstration est évidente et à la portée des enfants !

La deuxième observation peut même conduire à une généralisation de la construction du motif:

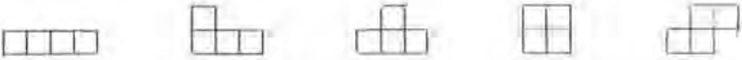


2^2 2^4 2^6 2^8

On pourrait y mettre de la couleur !

TETROMINOS

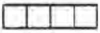
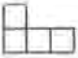
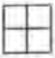
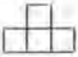
Matériel: quadrillage de 8×8
16 exemplaires de chaque tetromino:

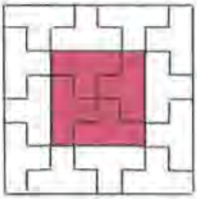


Question: Peut-on recouvrir un quadrillage de 8×8 avec des tetrominos ?

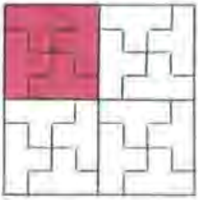
Réponse: A première vue cela semble possible puisque 64 est un multiple de 4.

Envisageons les cas de recouvrement avec un seul type de pièce à la fois:

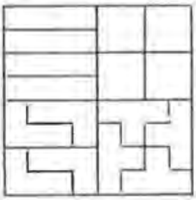
1. avec  : démonstration évidente !
2. avec  : démonstration évidente !
3. avec  : démonstration évidente !
4. avec  : démonstration facile:

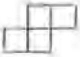


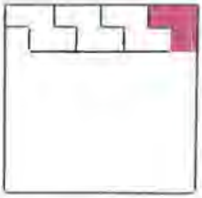
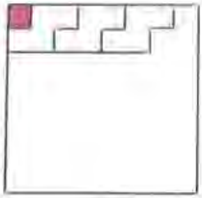
ou:



Voici une façon élégante de résumer les 4 cas ci-dessus:



5. avec  :

cas impossible:  ou: 

On constate que dans les 5 cas, la démonstration est accessible et d'ordre «manuel» !

PENTOMINOS

Voir dans la première partie de l'article, les questions relatives à ces figures, par exemple:

— Recouvrement d'un rectangle de 3 × 20 à l'aide des 12 pentominos.
— Recherche de la plus petite surface quadrillée permettant d'y placer n'importe lequel des 12 pentominos.

HEXOMINOS

Matériel: un rectangle de 15 × 18
le jeu complet des 35 hexominos
le jeu complet des 12 pentominos

Question: Peut-on recouvrir un rectangle de 15 × 18 avec tous les hexominos et tous les pentominos ?

Disons d'emblée que la réponse est affirmative. Toutefois parmi les solutions possibles, il y en a de plus élégantes que d'autres (voir première partie de l'article: «la tour»).
Dans la classe, on peut assimiler cette activité à celle d'un puzzle. Celui-ci est en permanence à disposition des élèves et ils y travaillent quand le temps et l'envie le leur permettent !

Un autre puzzle du même type peut être présenté aux enfants:

Question: Peut-on recouvrir une surface carrée à l'aide des 35 hexominos ?

Réponse: Non ! $35 \times 6 = 210$ (aire du jeu complet) et 210 n'est pas un nombre carré !

Question: Quel est le rectangle de 210 d'aire dont les dimensions se rapprochent le plus de celles d'un carré ?

Réponse: 14×15.

Question: Peut-on recouvrir ce rectangle à l'aide des hexominos ?

Contrairement au puzzle précédent (mélange de pentominos et d'hexominos) il n'y a pas de solution (voir première partie).
Toutefois, l'intérêt réside dans le fait de trouver le meilleur recouvrement possible.
La démonstration de l'impossibilité de recouvrir un rectangle de 14×15 avec les 35 hexominos peut être trouvée par le «joueur-mathématicien» en s'inspirant de celle qui est donnée pour le recouvrement du rectangle de 4×5 à l'aide des 5 tétrominos !

GENERALISATIONS

De nombreux autres problèmes peuvent être posés à propos de la polyomologie.
Nous terminerons donc en suggérant les généralisations suivantes:

— figures planes formées de triangles équilatéraux;
— figures planes formées d'hexagones;
— formes dans l'espace, constituées de cubes de la même façon qu'un polyomino est constitué de carrés.

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIERES

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud, D. Froidcoeur, G. Guélat, R. Hutin, Ch. Morandi, F. Oberson, S. Roller, J.-J. Walder.
Rédacteur-responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 12.—, Etranger F 14.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, CH-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie typo-offset Fiorina & Burgener, 1950 Sion